

Posudek oponenta na disertační práci Pavla Nejedlého „Structural and algorithmic properties of graph coloring“

Předložená práce sestává ze čtyř hlavních oddílů věnovaných vesměs otázkám barvení grafů, jejich mocnin, případně barvení s dodatečnými požadavky. Jedná se o téma moderní a aktivně zkoumané současnou komunitou grafových teoretiků, o čemž svědčí i pečlivě sestavený přehled literatury. Práce obsahuje řadu vynikajících výsledků publikovatelných (v jednom případě již publikovaných a ve dvou případech přijatých k publikaci) v předních mezinárodních časopisech.

V prvním oddílu se studují barvení druhých mocnin rovinných grafů velkého obvodu. Pro grafy dostatečně velkého stupně je dořešena hypotéza Wang-Lih, a to ve Větech 2.5 (barevnost druhé mocniny rovinného grafu obvodu 6 je nejvyšší maximální stupeň plus 2) a 3.17 ($L(2,1)$ -span rovinného grafu obvodu 7 je nejvyšší maximální stupeň plus 2, dokázáno obecněji pro $L(p,1)$ -span). Tyto výsledky jsou dokázány metodou vybíjení nábojů typickou pro tuto oblast barvení grafů, ovšem konkrétní přístupy použité v důkazu jsou velmi netriviální.

Druhý oddíl je věnován grafům neobsahujícím K_4 jako minor. Lih, Wang a Zhu dokázali nedávno Wegnerovu hypotézu pro tyto grafy. V předložené práci je tato skutečnost zobecněna na $L(p,q)$ -barvení ve Větě 5.1 a na vybíravost ve Větě 5.2. Oba výsledky jsou hluboce netriviální a jsou dosaženy na základě podrobného studia struktury grafů bez K_4 minorů.

Třetí oddíl podává důkaz Thomassenovy hypotézy o dobarvování cylindrických grafů (Věta 8.13). Tuto část práce považuji za nejhodnotnější i z toho důvodu, že je založena na výsledcích Mgr. Nejedlého jako jediného autora. Důkazové techniky kombinují netriviální přístupy barvení s počítačovým rozbořením možností. V této partii se autor projevil i jako zkušený informatik a programátor. Ukazuje se, že kritické cylindrické grafy mají nejvýše 14 vrcholů, odkud již Thomassenova hypotéza přímočaře vyplývá. Za zvláště elegantní pokládám Lemmata 8.8 a 8.9, která převádějí barvení cylindrických grafů na doplňování malých matic.

V posledním oddílu s zkoumají otázky související se známou Double Cover Conjecture. Jsou zde dokázány dva výsledky o pokrývání hranově dvousouvislých grafů krátkými cykly, oba ve svém směru (kubické grafy a grafy minimálního stupně 3) představují v tuto chvíli nejlepší známé výsledky. Souvislost s barvením grafů je ovšem v tomto oddílu nepřímá. Jelikož oba výsledky jsou dokázány ve formě pokrytí třemi cykly (eulerovskými podgrafy), jedná se o jistý druh hranového obarvení. V tomto duchu jsou také vedeny důkazy jednotlivých lemmat.

Výsledky uvedené v předložené práci navazují na výsledky významných světových kombinatoriků, o čemž je možno se kromě pěkně zpracovaných úvodů k jednotlivým oddílům a kapitolám přesvědčit opět v seznamu literatury. Všechny výsledky jsou důležité, nové a publikovatelné v předních mezinárodních časopisech. Autor se aktivně zapojil do spolupráce s významnými domácími a zahraničními kombinatoriky, ale uvádí též výsledky dosažené pouze se svým školitelem nebo zcela samostatně. Sama práce je sepsána velmi pečlivě a srozumitelně s přijatelným počtem překlepů či jazykových nepřesností (viz několik příkladů níže). Kromě těchto formálních drobností mám sedm podstatnějších připomínek či otázek, které bych rád, aby doktorand při obhajobě zodpověděl. Práci ovšem hodnotím vysoce pozitivně, jedná se o jednu z nejlepších prací, která byla v poslední době před naší komisí

obhajována. Rozhodně ji doporučuji přijmout jako doktorskou disertační práci a na jejím základě udělit titul PhD.

V Eugene dne 8. listopadu 2008

Prof. RNDr. Jan Kratochvíl, CSc.

Konkrétní připomínky a otázky:

1. Na straně 4 uvádíte, že hypotéza Wang-Lih říká, že rovinný graf obvodu alespoň 6 má $L(2,1)$ -span nejvýše $\Delta+1$, a slibujete, že tento odhad dokážete pro grafy obvodu 7. Na straně 19 tento slib explicitně opakujete. Nicméně Věta 3.17 na straně 35 udává odhad $L(2,1)(G) \leq \Delta+2p-2$, což po dosazení $p=2$ dává $L(2,1)(G) \leq \Delta+2$. Ovšem příklad konstruovaný v Proposition 3.19 na straně 36 ukazuje, že existují grafy obvodu většího než 6, jejichž $L(2,1)$ -span je větší než $\Delta+1$. Domnívám se tedy, citace hypotézy Wang-Lih je nepřesná, jakož i úvodní slib na začátku kapitoly 3.

2. Důkazy na straně 9 jsou správně, ale odhady na stupně se neuvádějí nejlepší možné. Například hned na prvním řádku lze argumentovat, že stupeň vrcholu x ve druhé mocnině grafu G je dokonce nejvýše $1762+3$ (a nikoliv $1763+3$) – protože vrchol u je malý v G , má kromě vrcholu x již jen nejvýše 1762 sousedů, a další 3 vrcholy ve vzdálenosti nejvýše 2 od x jsou u , y a v . Podobně je tomu v rozboru případů 3. a 4. Celkově se naskýtá otázka, zda by tato drobná změna nevedla k (mírnému) snížení hranice na Δ , od kteréhož výše tvrzení platí.

3. Podobně na straně 12 v důkazu Lemmatu 2.3 v části 1. je ve skutečnosti $42\varepsilon = 1/14 < 1/8$, a v části 2. je $21\varepsilon d = d/28 < d/16$. Zde se však jedná o nepodstatnou připomínku, uvedení přesných výrazů nebo aspoň ostrých nerovností by bylo spíše pro pohodlí čtenáře.

4. Vysvětlíte Lemma 4.3 na straně 42 (například dva trojúhelníky spojené za vrchol tvoří seriově-paralelní graf, ale prostřední vrchol nemůže být pólem kořene SP-dekompozice).

5. Nemá být ve znění Problému 8.1 na straně 85 požadováno, že „... coloring of $C_1 \cup C_2$ can be extended to a proper 5-coloring of every cylinder subgraph ...“?

6. Vysvětlíte tvrzení o ekvivalenci Problému 8.1 a Věty 8.13 na straně 86. Implikace $8.13 \rightarrow 8.1$ je vidět, ale opačnou implikaci jako snadnou nevidím (samozřejmě, tato tvrzení jsou ekvivalentní, protože jsou obě pravdivá, ale umíte dokázat implikaci $8.1 \rightarrow 8.13$, aniž byste měl dokázanou Větu 8.13?).

7. V Lemmatu 8.5 na straně 88 je potřeba vyžadovat silnější předpoklad, totiž že „interior of C contains no edges of the inner cycle“ (předpokládat, že neobsahuje celý „inner cycle“ nestačí).

8. Drobné nepřesnosti (příklady):

- str. iii ř. –9: „and of“ je nadbytečné
- str. 17 ř. –6: má být „The chromatic number of the square of G_Δ ...“
- str. 42 ř. –8: „a minimal counter-examples“ má být „minimal counter-examples“
- str. 43 popisek obrázku: má být „An $S(P, I)$ -subgraph ...“

- str. 47 ř. –13: má být „... there exists a constant K ...“
- str. 63 ř. 7: má být „number“ místo „umber“
- str. 81 ř. –10: má být „6-color-critical graphs“ místo „6-color-critical subgraphs“
- str. 87 ř. –15: má být „Let G be a ...“ a „... u one of its internal vertices ...“
- str. 92 ř. –5: formulace „In this the section ...“
- str. 95 ř. –1: má být „... that its length ...“