

Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Soustavy lineárních rovnic – od středoškolských slovních úloh k lineární
algebře

Systems of linear equations – from high school word problems to linear
algebra

Jáchym Kůváří

Vedoucí práce: JUDr. Mgr. Filip Beran

Studijní program: Matematika se zaměřením na vzdělávání se sdruženým studiem
Informační technologie se zaměřením na vzdělávání

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Soustavy lineárních rovnic – od středoškolských slovních úloh k lineární algebře potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Prohlašuji, že jsem při její tvorbě nepoužil nástrojů umělé inteligence jiným způsobem, než je uvedeno ve vyjádření, které je součástí textu práce. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 14. 4. 2025

Tímto bych chtěl poděkovat JUDr. Mgr. Filipu Beranovi za veškerý čas, který věnoval při pomoci tvorby této práce a za velice užitečné rady, které mi poskytoval. Závěrem bych chtěl taky poděkovat svojí rodině, především mamince, která byla pro mě velkou podporou nejen během tvorby této práce.

ABSTRAKT

Tato práce je věnována vysokoškolským metodám řešení soustav lineárních rovnic. Cílem práce je vysvětlit čtenáři základy lineární algebry pomocí středoškolské látky a představit rozdíly mezi středoškolskými a vysokoškolskými postupy, včetně jejich výhod a nevýhod. Cílem je také poukázat na efektivitu použití různých postupů u různých typů úloh. Na začátku každé kapitoly je uvedena potřebná teorie k dané látce, kde předpokladem je, že čtenář zná základní metody řešení lineárních rovnic. První kapitola se věnuje Gaussově eliminační metodě a maticovému zápisu soustav a je členěna do 3 podkapitol. První kapitola je zaměřena na vysvětlení Gaussovy eliminace na slovních úlohách. Druhá podkapitola je věnována příkladům z reálného života, kde pro řešení těchto úloh je potřeba znalost řešení soustav lineárních rovnic. Třetí podkapitola je věnována příkladům bez jednoznačného řešení. Druhá kapitola se věnuje nevýhodám maticového zápisu, je rozdělena do dvou podkapitol. První podkapitola se věnuje metodě postupného dosazování, kterou nelze provádět v maticovém zápisu. Druhá podkapitola ukazuje alternativní postup pro specifické příklady symetrických soustav. Třetí kapitola je věnována speciálním postupům pro řešení regulárních soustav, je rozdělena do dvou podkapitol. První podkapitola je věnována Cramerovu pravidlu a výpočtu determinantu. Druhá podkapitola je věnována řešení soustavy pomocí inverzní matice a způsobu, jak inverzní matici najít.

KLÍČOVÁ SLOVA

soustava lineárních rovnic, slovní úloha, lineární algebra, Gaussova eliminace, matice

ABSTRACT

This thesis is dedicated to university-level methods for solving systems of linear equations. The aim of the thesis is to explain the fundamentals of linear algebra to the reader using high school-level material and to present the differences between high school and university approaches, including their advantages and disadvantages. Another objective is to highlight the efficiency of various methods for different types of problems. At the beginning of each chapter, the necessary theoretical background is provided, assuming that the reader is familiar with the basic methods for solving systems of linear equations. The first chapter focuses on the Gaussian elimination method and the matrix representation of systems and is divided into three subchapters. The first subchapter explains Gaussian elimination using word problems. The second subchapter deals with real-life examples that require knowledge of systems of linear equations for their solution. The third subchapter focuses on examples without a unique solution. The second chapter addresses the disadvantages of matrix representation and is divided into two subchapters. The first subchapter discusses the method of back-substitution, which cannot be directly applied within matrix representation. The second subchapter presents an alternative approach for specific examples involving symmetric systems. The third chapter is devoted to special methods for solving regular systems and is divided into two subchapters. The first subchapter deals with Cramer's rule and the calculation of the determinant. The second subchapter focuses on solving systems using the inverse matrix and explains how to find the inverse matrix.

KEYWORDS

system of linear equations, word problem, linear algebra, Gaussian elimination, matrix

Obsah

Úvod	6
1 Univerzální postup: Gaussova eliminace	8
1.1 Soustavy s jednoznačným řešením	10
1.1.1 Úvodní úlohy	10
1.1.2 Čínské historické úlohy	15
1.2 Reálné úlohy	21
1.2.1 Směsi	21
1.2.2 Slitiny	27
1.2.3 Společná práce	31
1.3 Soustavy bez jednoznačného řešení	36
2 Speciální postupy	44
2.1 Postupné dosazování	46
2.2 Využití symetrie soustavy	58
3 Speciální postupy pro řešení regulárních soustav	67
3.1 Cramerovo pravidlo	68
3.2 Řešení soustavy pomocí inverzní matice	77
Závěr	83
Seznam použitých informačních zdrojů	84

Úvod

Soustavy lineárních rovnic doprovázejí žáky již od druhého stupně až po vysokou školu. Cílem této práce je vytvořit dokument, který lze využívat k výuce lineární algebry studentům a žákům se znalostmi na úrovni středních škol. Motivací pro vytvoření této práce bylo usnadnění přechodu mezi středoškolskou matematikou a matematikou na vysokých školách.

Tato bakalářská práce je určena především pro žáky nastupující na vysokou školu se zaměřením na matematiku, ale také může sloužit jako užitečný materiál na semináře vysokoškolské matematiky na středních školách. V této práci naleznete některé základní definice, k tomuto účelu jsem primárně využívám skripta (Barto & Tůma, 2023).

Lineární algebra je velice obsáhlé téma, proto v této práci se zaměřím pouze na řešení soustav lineárních rovnic, kde z lineární algebry se bude věnovat pouze maticovému zápisu, Gaussovo eliminační metodě, Guassovo-Jordanovo eliminační metodě a Cramerovu pravidlu. V zahraniční publikaci (Lee & Park, 2021), která je cílena obtížností na žáky středních škol, jsou rozebírána i další témata lineární algebry.

Na první pohled nemusí být zřejmé využití soustav lineárních rovnic, ale využití je opravdu pestré. Soustavy lineárních rovnic můžeme najít nejen v mnoha oblastech matematiky a chemie, ale celkově lineární algebra má pestrá využití, o kterých je možné se dočíst v bakalářské práci (Hrůzová, 2018). Příklady v mé bakalářské práci jsou proto více zaměřeny na reálné využití. Další příklady na reálné použití lineární algebry rozebírá zahraniční publikace (Henn & Filler, 2015).

První kapitola je věnována Gaussově eliminační metodě a maticovému zápisu. Záměrně u některých příkladů budou uvedeny dva postupy, aby čtenář dokázal porovnat efektivitu každého způsobu zvlášť. Dále budeme využívat i příklady historické, kde původní postup sice uveden nebude, ale můžete ho najít v publikacích (Bečvář, 2007; Fibonacci, c2002).

Druhá kapitola je věnována nevýhodám Gaussovy eliminace, kde si naopak ukážeme typy příkladů, kde Gaussova eliminace není tak efektivní jako ostatní metody řešení soustav lineárních rovni. Ukážeme si i jak tyto příklady rozpoznat, k tomuto účelu si představíme některé pojmy, ale bude se jednat o pojmy s nejasnou definicí nebo s definicí, která se napříč obory může měnit.

Třetí kapitola se věnuje speciálním postupům pro řešení regulárních soustav. Kapitola se člení do dvou podkapitol v první z nich se budeme věnovat Cramerovu pravidlu a výpočtu determinantu. Druhá podkapitola se věnuje řešení regulárních soustav přes inverzní matice. V obou těchto podkapitolách si ukážeme aplikaci těchto postupů, bez složitější teorie, která se k determinantu a inverznímu zobrazení váže.

V této práci naleznete některé základní definice, k tomuto účelu jsem primárně využívat skripta (Barto & Tůma, 2023). Příklady v této práci jsou z části historické, a to z publikací (Bečvář, 2007; Fibonacci, c2002; Hudeček, 2008). K výběru vhodných příkladů jsem také čerpal ze státní maturitní zkoušky, některé mi poskytl vedoucí mé práce, které se používají na fakultě k výuce předmětu Lineární algebra a geometrie, zbylé příklady jsem vytvářel sám.

1 Univerzální postup: Gaussova eliminace

V této kapitole si představíme Gaussovo eliminační metodu a Gaussovo-Jordanovu eliminační metodu. Úvodem kapitoly si představíme některé pojmy a definice, které budeme využívat. Ukážeme si maticový zápis, který bude náš primární způsob zápisu soustav lineárních rovnic v této práci.

Definice 1.1: Maticí (nad \mathbb{R}) typu $m \times n$ rozumíme obdélníkové schéma reálných čísel s m řádky a n sloupci. Zápis $A = (a_{ij})_{m \times n}$ znamená, že A je matice typu $m \times n$, která má na pozici (i, j) , tj. v i -tém řádku a j -tém sloupci, číslo a_{ij} . (Barto & Tůma, 2023, s. 49)

Definice 1.2: Maticí soustavy

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

rozumíme matici koeficientů u neznámých:

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Vektor pravých stran je vektor $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ a rozšířená matice soustavy je matice typu $m \times (n + 1)$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

(Barto & Tůma, 2023, s. 49)

Matice je pouze jiná reprezentace soustavy lineárních rovnic. Každý řádek reprezentuje jednu rovnici a každý sloupec na levé straně matice reprezentuje právě koeficienty jedné neznámé, zatímco pravá strana obsahuje koeficienty členů bez neznámé.

Matici o stejném počtu řádků a sloupců označujeme jako *čtvercovou matici*.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definice 1.3: Matice $C = (c_{ij})_{m \times n}$ je v řádkově odstupňovaném tvaru, pokud existuje celé číslo $r \in \{0, 1, \dots, m\}$ takové, že řádky $r + 1, \dots, m$ jsou nulové, řádky $1, \dots, r$ jsou nenulové, a platí $k_1 < k_2 < \dots < k_r$, kde k_i je index sloupce, ve kterém je první nenulové číslo v i -tém řádku (tedy platí $c_{i1} = c_{i2} = \dots = c_{i,k_i-1} = 0$ a $c_{i,k_i} \neq 0$; ještě jinak, $k_i = \min\{l : c_{il} \neq 0\}$). (Barto & Tůma, 2023, s. 53)

Zjednodušeně řečeno, matice v odstupňovaném tvaru je taková, kde každý následující nenulový řádek má na počátku více nul než řádek předchozí.

Nyní si představíme obecnou metodu pro řešení soustavy lineárních rovnic.

Elementární úpravy soustavy lineárních rovnic jsou

- i. prohození dvou rovnic,
- ii. vynásobení nějaké rovnice nenulovým číslem t ,
- iii. přičtení t -násobku jedné rovnice k jiné rovnici

(Barto & Tůma, 2023, s. 52)

Gaussova eliminace převádí každou matici $A = (a_{ij})_{m \times n}$ do odstupňovaného tvaru posloupností elementárních řádkových úprav. (Barto & Tůma, 2023, s. 54)

1.1 Soustavy s jednoznačným řešením

V této kapitole budeme pracovat s příklady, které mají jednoznačné řešení a budou nám sloužit pro pochopení maticového zápisu. Jedná se o příklady uměle vytvořené a nemají za sebou žádné reálné využití, kvůli jednoduchosti zadání jsou pro ilustraci vhodné. Příklady v této kapitole budou tvořeny i z historických.

1.1.1 Úvodní úlohy

Příklad 1.1: je bez slovního zadání. Na tomto příkladě si budeme podrobně ilustrovat přechod od standardního zápisu soustavy lineárních rovnic, běžného na základní a střední škole, k maticovému zápisu, se kterým se pak dále pracuje ve vysokoškolské lineární algebře. Tento příklad budeme řešit jak pomocí Gaussovy eliminace a zpětného dosazení, tak i pomocí Gaussovo-Jordanovy eliminace.

Příklad 1.2: je vybrán ze státní maturitní zkoušky, z tohoto má vhodnou obtížnost. Také se jedná o první příklad zadán jako slovní úloha.

Příklad 1.3: je z 13. století z Itálie. Tento příklad je do této kapitoly zařazen, abychom si ukázali, že některé soustavu musíme upravit do vhodného tvaru, pokud je chceme zapsat pomocí matice.

Příklad 1.1: Vyřešte soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rclcl} (1) & x & + & y & + & z & = & 24 \\ (2) & x & + & 2y & & & = & 25 \\ (3) & & & 2y & + & 3z & = & 12 \end{array}$$

Na tomto příkladu si budeme ilustrovat v prvním části (*Řešení 1*) si budeme ukazovat rozdíl mezi běžným zápisem soustavy lineárních rovnic a maticovým zápisem. V druhé části příkladu (*Řešení 2*) si ukážeme čistě maticové řešení pomocí Gaussovo-Jordanovy eliminace.

Řešení 1: Od druhého řádku soustavy odečteme první řádek, tímto se eliminujeme neznámou x z druhého řádku.

$$\begin{array}{rclcl} (1) & x & + & y & + & z & = & 24 \\ (2) & & & y & - & z & = & 1 \\ (3) & & & 2y & + & 3z & = & 12 \end{array}$$

Od třetího řádku odečteme dvojnásobek druhého řádku.

$$\begin{array}{rclcl} (1) & x & + & y & + & z & = & 24 \\ (2) & & & y & - & z & = & 1 \\ (3) & & & & & 5z & = & 10 \end{array}$$

Soustavu jsme upravili do odstupňovaného tvaru: to v tomto případě znamená, že třetí rovnice má pouze jednu neznámou z , když ji spočteme a dosadíme do druhé rovnice, ..., takže je připravena ke zpětnému dosazování.

$$\begin{array}{lcl} (3) \ 5z = 10 & (2) \ y - 2 = 1 & (1) \ x + 3 + 2 = 24 \\ z = 2 & y = 3 & x = 19 \end{array}$$

Ukážeme si stejný postup zapsán maticově.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 1 & 2 & 0 & 25 \\ 0 & 2 & 3 & 12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array} \right)$$

Výsledek tedy je $x = 19$, $y = 3$, $z = 2$. Pro přehlednost jej můžeme zapsat také vektorově, tj. jako uspořádanou trojici $(x, y, z) = (19, 3, 2)$.

Zkoušku správnosti provedeme dosazením výsledku do původní soustavy; přesněji dosazujeme do levé strany rovnic a kontrolujeme, zda výsledky odpovídají pravé straně:

$$\begin{array}{rclcl}
(1) & 19 & + & 3 & + & 2 & = & 24 & \checkmark \\
(2) & 19 & + & 2 \cdot 3 & & & = & 25 & \checkmark \\
(3) & & & 2 \cdot 3 & + & 3 \cdot 2 & = & 12 & \checkmark
\end{array}$$

Zkoušku můžeme provést také v maticovém zápisu. Dosazovat výsledek odpovídá přenásobováním koeficientů řádků matice a vektoru našeho výsledku. Teorie je značně složitější, ale pro naše účely nám bude stačit pouze tato pomůcka. Více se můžete dočíst v publikaci (Barto & Tůma, 2023) přesněji v kapitole 4.22 Součin matic.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 19 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 + 3 + 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 25 \\ 12 \end{pmatrix} \checkmark \checkmark \checkmark$$

Řešení 2: Pomocí Gaussovy-Jordanovy eliminace:

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 1 & 2 & 0 & 25 \\ 0 & 2 & 3 & 12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array} \right) \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x &= 19 \\
y &= 3 \\
z &= 2
\end{aligned}$$

Gaussovo-Jordanova eliminace se převážně využívá při hledání inverzních zobrazení, které nejsou obsahem této práce, a proto jí nadále nebudeme používat. Výhodou této metody je absence zpětného dosazování, z tohoto důvodu můžeme celé řešení zapisovat maticově.

Příklad 1.2: Na stole jsou dvě hromádky mincí. Obě obsahují pouze pětikorunové a dvoukorunové mince. První hromádka s 32 mincemi obsahuje pětinu všech pětikorunových mincí a polovinu všech dvoukorunových mincí. Druhá hromádka obsahuje 68 mincí. Jaká je hodnota všech mincí dohromady? (Cermat, 2017, úloha 15)

Řešení 1: Přepíšeme zadání do soustavy lineárních rovnic. Označíme neznámé: p představuje celkový počet pětikorun a d celkový počet dvoukorun.

$$(1) \frac{1}{5}p + \frac{1}{2}d = 32$$

$$(2) \frac{4}{5}p + \frac{1}{2}d = 68$$

Soustavu si přepíšeme do maticového tvaru a pomocí ekvivalentních úprav převedeme na odstupňovaný tvar.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1/5 & 1/2 & 32 \\ 4/5 & 1/2 & 68 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1/5 & 1/2 & 32 \\ 0 & -3/2 & -60 \end{array}\right)$$

$$(2) -\frac{3}{2}d = -60$$

$$d = 40$$

$$(1) \frac{1}{5}p + 20 = 32$$

$$p = 60$$

Řešení 2: Můžeme si povšimnout, že bychom taky mohli eliminovat druhou neznámou. Pak by postup probíhal takto:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1/5 & 1/2 & 32 \\ 4/5 & 1/2 & 68 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1/5 & 1/2 & 32 \\ 3/5 & 0 & 36 \end{array}\right)$$

$$(2) \frac{3}{5}p = 36$$

$$p = 60$$

$$(1) 12 + \frac{1}{2}d = 32$$

$$d = 40$$

Můžeme pozorovat, že i matice, která není v odstupňovaném tvaru, nás může dovést k výsledku.

Soustavu rovnic jsme vyřešili, ale v zadání se nás ptají na celkovou hodnotu:

$$2d + 5p = 2 \cdot 40 + 5 \cdot 60 = 380$$

Zkouška:

$$(1) \frac{1}{5} \cdot 60 + \frac{1}{2} \cdot 40 = 32 \quad \checkmark$$

$$(2) \frac{4}{5} \cdot 60 + \frac{1}{2} \cdot 40 = 68 \quad \checkmark$$

Odpověď: Hodnota všech mincí je 380 korun.

Příklad 1.3: Dá-li první druhému denár, budou mít oba stejně. Dá-li druhý prvnímu denár, bude mít první desetkrát tolik. (Fibonacci, c2002, s. 290)

Řešení: Zapišeme si zadání do soustavy lineárních rovnic a připravíme ji na maticový zápis.

$$(1) x - 1 = y + 1$$

$$(2) x + y = 10(y - 1)$$

Soustavu upravíme do tvaru vhodný pro maticový zápis.

$$(1) x - y = 2$$

$$(2) x - 10y = -11$$

Zapišeme soustavu lineárních rovnic pomocí matice. Matici převedeme na odstupňovaný tvar.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -10 & -11 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -9 & -13 \end{array} \right)$$

Zpětně z matice dosadíme.

$$y = \frac{13}{9}$$

$$x = \frac{31}{9}$$

Zkouška:

$$(1) \frac{31}{9} - \frac{13}{9} = 2 \quad \checkmark$$

$$(2) \frac{31}{9} - 10 \cdot \frac{13}{9} = -11 \quad \checkmark$$

Odpověď: Tento příklad nám vyšel v oboru reálných čísel, ale pokud se zamyslíme nad kontextem zadání, tak výsledky by měly být v oboru přirozených čísel, kde bychom řešení nenašli.

1.1.2 Čínské historické úlohy

Příklady v této kapitole jsou historická zadání ze starověké Číny. Tyto příklady se samozřejmě v tehdejší době neřešily pomocí pro nás dnes běžných algebraických úprav, natožpak v maticovém zápisu. Vedle jejich historické zajímavosti je zde uvádíme proto, že se u nich postupně navyšují počty neznámých a soustav rovnic, a to od třech rovnic o třech neznámých až po pět rovnic o pěti neznámých. S tím roste početní náročnost výpočtu (a samozřejmě také riziko chyby), nicméně použité metody se nemění, což také dokládá univerzálnost Gaussovy eliminace.

Příklad 1.4: Mějme 3 snopy lepšího obilí, 2 snopy středního obilí a 1 snop horšího obilí, obsah je [celkem] 39 dou. Mějme 2 snopy lepšího, 3 snopy středního a 1 snop horšího, obsah je 34 dou. Mějme 1 snop lepšího, 2 snopy středního a 3 snopy horšího, obsah je 26 dou. Ptáme se, kolik je obsah 1 snopu lepšího, středního a horšího obilí? (Hudeček, 2008, s. 187)

Kontext: Dou (též dōu) je čínská jednotka objemu. Její velikost se průběhem času měnila, a to v rozmezí 2 až 11 litrů. Momentálně její hodnota je stanovena na přesných 10 litrů.

Řešení: Nejprve si přepíšeme zadání do soustavy lineárních rovnic. Označme neznámé:

d ... cena jednoho snopu dobré úrody,

p ... cena jednoho snopu průměrné úrody,

s ... cena jednoho snopu špatné úrody.

$$\begin{aligned}(1) \quad & 3d + 2p + s = 39 \\(2) \quad & 2d + 3p + s = 34 \\(3) \quad & d + 2p + 3s = 26\end{aligned}$$

Tuto soustavu rovnic zapíšeme pomocí matice a upravíme matici do odstupňovaného tvaru.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 3 & 2 & 1 & 39 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & 1 & 5 & 18 \\ 0 & -4 & -8 & -39 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & 1 & 5 & 18 \\ 0 & 0 & 12 & 33 \end{array}\right)$$

Matice je v odstupňovaném tvaru, stačí už jen zpětně dosadit.

$$(3) 12s = 33$$

$$s = \frac{11}{4}$$

$$(2) p + 5s = 18$$

$$p = 18 - \frac{55}{4}$$

$$p = \frac{17}{4}$$

$$(1) d + 2p + 3s = 26$$

$$d = 26 - \frac{34}{4} - \frac{33}{4}$$

$$d = \frac{37}{4}$$

Zkouška:

$$(1) 3 \cdot \frac{37}{4} + 2 \cdot \frac{17}{4} + \frac{11}{4} = 39 \quad \checkmark$$

$$(2) 2 \cdot \frac{37}{4} + 3 \cdot \frac{17}{4} + \frac{11}{4} = 34 \quad \checkmark$$

$$(3) \frac{37}{4} + 2 \cdot \frac{17}{4} + 3 \cdot \frac{11}{4} = 26 \quad \checkmark$$

Odpověď: Za snop dobré úrody dostaneme $\frac{37}{4}$ dou zrna, za snop průměrné úrody dostaneme

$\frac{17}{4}$ dou zrna a za snop špatné úrody dostaneme $\frac{11}{4}$ dou zrna.

Příklad 1.5: Mějme 5 ovcí, 4 psy, 3 kuřata a 2 králíky, kteří mají hodnotu 1496 měďáků.

4 ovce, 2 psi, 6 kuřat a 3 králíci mají hodnotu 1175 měďáků. 3 ovce, 1 pes, 7 kuřat a 5

králíků má hodnotu 958 měďáků. 2 ovce, 3 psi, 5 kuřat a 1 králík mají hodnotu 861.

Ptáme se, kolik je cena ovce, psa, kuřete a králíka? (Hudeček, 2008, s. 202)

Řešení: Zadání přepíšeme do soustavy lineárních rovnic. Dostaneme soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých, které vyjadřují hodnotu zvířat v měďácích. Neznámé pojmenujeme

x ... cena jedné ovce,

y ... cena jednoho psa,

z ... cena jednoho kuřete,

v ... cena jednoho králíka.

Označení podle počátečních písmen zvířat zde není praktické z důvodu přítomnosti kuřete i králíka.

$$(1) \quad 5x + 4y + 3z + 2v = 1496$$

$$(2) \quad 4x + 2y + 6z + 3v = 1175$$

$$(3) \quad 3x + y + 7z + 5v = 958$$

$$(4) \quad 2x + 3y + 5z + v = 861$$

Soustavu převedeme do maticového zápisu a převedeme na odstupňovaný tvar.

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & | & 1496 \\ 4 & 2 & 6 & 3 & | & 1175 \\ 3 & 1 & 7 & 5 & | & 958 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & | & 861 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & | & 861 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & | & 1496 \\ 4 & 2 & 6 & 3 & | & 1175 \\ 3 & 1 & 7 & 5 & | & 958 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & | & 861 \\ 0 & 7 & 19 & 1 & | & 1313 \\ 0 & -4 & -4 & 1 & | & -547 \\ 0 & -7 & -1 & 7 & | & -667 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & | & 861 \\ 0 & 7 & 19 & 1 & | & 1313 \\ 0 & 0 & 48 & 11 & | & 1423 \\ 0 & 0 & 18 & 8 & | & 646 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & | & 861 \\ 0 & 7 & 19 & 1 & | & 1313 \\ 0 & 0 & 48 & 11 & | & 1423 \\ 0 & 0 & 0 & 31 & | & 899 \end{pmatrix}$$

Matice je již v odstupňovaném tvaru, stačí již jen zpětně dosadit.

$$(4) \quad 31v = 899$$

$$v = 29$$

$$(3) \quad 48z + 11 \cdot 29 = 1423$$

$$z = 23$$

$$(2) \quad 7y + 19 \cdot 23 + 29 = 1313$$

$$y = 121$$

$$(1) \quad 2x + 3 \cdot 121 + 5 \cdot 23 + 29 = 861$$

$$x = 177$$

Výsledek lze také zapsat vektorově: $(x, y, z, v) = (29, 23, 121, 177)$.

Zkouška:

$$(1) \quad 5 \cdot 177 + 4 \cdot 121 + 3 \cdot 23 + 2 \cdot 29 = 1496 \quad \checkmark$$

$$(2) \quad 4 \cdot 177 + 2 \cdot 121 + 6 \cdot 23 + 3 \cdot 29 = 1175 \quad \checkmark$$

$$(3) \quad 3 \cdot 177 + 121 + 7 \cdot 23 + 5 \cdot 29 = 958 \quad \checkmark$$

$$(4) \quad 2 \cdot 177 + 3 \cdot 121 + 5 \cdot 23 + 29 = 861 \quad \checkmark$$

Odpověď: Cena ovce je 177 měďáků, cena psa 121 měďáků, kuře stojí 23 měďáků a králík 29 měďáků.

Příklad 1.6: Mějme 9 dou konopí, 7 dou pšenice, 3 dou sóji, 2 dou bobů a 5 dou prosa, to má hodnotu 140 měďáků. 7 dou konopí, 6 dou pšenice, 4 dou sóji, 5 dou bobů a 3 dou prosa má hodnotu 128 měďáků. 3 dou konopí, 5 dou pšenice, 7 dou sóji, 6 dou bobů a 4 dou prosa má hodnotu 116 měďáků. 2 dou konopí, 5 dou pšenice, 3 dou sóji, 9 dou bobů a 4 dou prosa má hodnotu 112 měďáků. 1 dou konopí, 3 dou pšenice, 2 dou sóji, 8 dou bobů a 5 dou prosa má hodnotu 95 měďáků. Ptáme se, kolik má hodnotu 1 dou každého? (Hudeček, 2008, s. 202)

Řešení: Přepíšeme si zadání do soustavy lineárních rovnic. Dostaneme pět rovnic o pěti neznámých, které vyjadřují hodnotu v měďácích za jeden dou dané plodiny. Neznámé pojmenujeme

x ... cena za dou konopí,

y ... cena za dou pšenice,

z ... cena za dou sóji,

v ... cena za dou bobu,

w ... cena za dou prosa.

Označení podle počátečních písmen zde není praktické z důvodu přítomnosti pšenice i prosa.

$$(1) 9x + 7y + 3z + 2v + 5w = 140$$

$$(2) 7x + 6y + 4z + 5v + 3w = 128$$

$$(3) 3x + 5y + 7z + 6v + 4w = 116$$

$$(4) 2x + 5y + 6z + 9v + 4w = 112$$

$$(5) 1x + 3y + 2z + 8v + 5w = 95$$

Soustavu si zapíšeme pomocí matice. Můžeme si povšimnout, že u větších soustav maticový zápis nám usnadní dost práce.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 9 & 7 & 3 & 2 & 5 & 140 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 3 & 128 \\ 3 & 5 & 7 & 6 & 4 & 116 \\ 2 & 5 & 3 & 9 & 4 & 112 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & 5 & 95 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & 8 & 5 & 95 \\ 2 & 5 & 3 & 9 & 4 & 112 \\ 3 & 5 & 7 & 6 & 4 & 116 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 3 & 128 \\ 9 & 7 & 3 & 2 & 5 & 140 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & 8 & 5 & 95 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 6 & 78 \\ 0 & -4 & 1 & -18 & -11 & -169 \\ 0 & -15 & -10 & -51 & -32 & -537 \\ 0 & -20 & -15 & -70 & -40 & -715 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & 8 & 5 & 95 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 6 & 78 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 13 & 143 \\ 0 & 0 & 5 & 54 & 58 & 633 \\ 0 & 0 & 1 & 14 & 16 & 169 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & 8 & 5 & 95 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 6 & 78 \\ 0 & 0 & 1 & 14 & 16 & 169 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & -22 & -212 \\ 0 & 0 & 0 & -60 & -67 & -702 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & 8 & 5 & 95 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 6 & 78 \\ 0 & 0 & 1 & 14 & 16 & 169 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 11 & 106 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 31 & 186 \end{array} \right)$$

Na tomto příkladu lze hezky v prvním kroku vidět důležitost prohazování řádku. Matice je v odstupňovaném tvaru, zpětně dosadíme a dopočítáme:

$$w = 6 \qquad v = 5 \qquad z = 3 \qquad y = 4 \qquad x = 7$$

Výsledek taky lze zapsat: $(x, y, z, v, w) = (7, 4, 3, 5, 6)$.

Zkouška:

$$(1) 9 \cdot 7 + 7 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 6 = 140 \quad \checkmark$$

$$(2) 7 \cdot 7 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 128 \quad \checkmark$$

$$(3) 3 \cdot 7 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 116 \quad \checkmark$$

$$(4) 2 \cdot 7 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 9 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 112 \quad \checkmark$$

$$(5) 1 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 8 \cdot 5 + 5 \cdot 6 = 95 \quad \checkmark$$

Odpověď: Jeden dou konopí stojí 7 měďáků, pšenice 4 měďáky, sóji 3 měďáky, pšenice 5 měďáků a prosa 6 měďáků.

1.2 Reálné úlohy

V této kapitole nalezneme slovní úlohy, které mají jednoznačné řešení a vycházejí z reálných situací. Ukážeme si, že umět efektivně řešit soustavy lineárních rovnic není důležité pouze pro studium matematiky, ale existují situace nebo dokonce i odvětví průmyslu, kde se bez znalosti řešit lineární rovnice neobejdeme. Kapitola je rozdělena do tří podkapitol, kterými jsou směsi, slitiny a společná práce. Slitiny se sice dají považovat za směsi kovů, ale v této práci jsou rozděleny do dvou kapitol, neboť zadání slitin je odlišné a často se zde uvádí hustota.

1.2.1 Směsi

V této podkapitole se budeme věnovat příkladům na téma směsi. Tato kapitola se zaměřuje na slovní úlohy, kde mícháme více různých směsí do jedné.

Příklad 1.7: je zadán jak v poměru, tak i v procentech, na tomto příkladě si ukážeme jak procenta i poměr zapisovat pomocí soustav lineárních rovnic.

Oje zajímaví svojí složitostí zadání, kde na první pohled není zřejmé přepis zadání do soustavy dvou rovnic.

0 je složitý v části přepisu zadání na soustavu dvou rovnic o třech neznámých a v tomto příkladu je zadání v procentech.

Příklad 1.10: je již na soustavu tří rovnic o třech neznámých, kde po nás chtějí zjistit poměr tří různých směsí. S tímto příkladem se setkáme i v kapitole 1.3 Soustavy bez jednoznačného řešení, kde si ukážeme parametrické řešení. Způsob, kterým budeme v této kapitole příklad řešit není úplně správný, ale tento způsob je více přímočarý a jednodušší.

Příklad 1.7: V obchodě prodávali dva druhy mletých směsí. První druh obsahoval 70 % hovězího a 30 % vepřového masa a stál 160 Kč/kg, druhý byl namíchan v poměru 2 : 3 a stál 130 Kč/kg. Kolik korun by měl stát kilogram čistého hovězího a kolik korun kilogram čistého vepřového?

Řešení: Zadání si přepíšeme do soustavy lineárních rovnic. Důležité je si uvědomit, že 2 : 3 je jinými slovy 40 % a 60 %.

$$(1) 0,7h + 0,3v = 160$$

$$(2) 0,4h + 0,6v = 130$$

Soustavu lineárních rovnic si zapíšeme pomocí matice.

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & | & 160 \\ 0,4 & 0,6 & | & 130 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 3 & | & 1600 \\ 2 & 3 & | & 650 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & | & 950 \\ 2 & 3 & | & 650 \end{pmatrix}$$

Zpětně dosadíme.

$$5h = 950$$

$$380 + 3v = 650$$

$$h = 190$$

$$v = 90$$

Zkouška:

$$(1) 0,7 \cdot 190 + 0,3 \cdot 90 = 160 \quad \checkmark$$

$$(2) 0,4 \cdot 190 + 0,6 \cdot 90 = 130 \quad \checkmark$$

Odpověď: Kilogram vepřového masa stojí 90 Kč a kilogram hovězího masa stojí 190 Kč.

Příklad 1.8: Ze dvou druhů čaje v ceně 1500 Kč a 2100 Kč za 1 kg se má připravit 20 kg směsi v ceně 1650 Kč za 1 kg. Kolik kilogramů každého druhu čaje bude třeba smíchat? (Příklady z matematiky, 2025)

Řešení: Zadání si přepíšeme do soustavy lineárních rovnic, kde neznámé reprezentují počet kilogramů ve směsi.

$$\begin{array}{rclcl} (1) & x & + & y & = & 20 \\ (2) & 1\,500x & + & 2\,100y & = & 33\,000 \end{array}$$

První rovnici jsme vytvořili pomocí znalosti, že finální směsi bude 20 kg. Druhou rovnici jsme vytvořili pomocí znalosti o celkové ceně za předpokladu, že máme 20 kg finální směsi, kde každý kg této směsi stojí 1650 Kč.

Převédeme na maticový zápis.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 20 \\ 1\,500 & 2\,100 & 33\,000 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 20 \\ 15 & 21 & 330 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 20 \\ 0 & 6 & 30 \end{array} \right)$$

Zpětně dosadíme.

$$y = 5 \qquad x = 15$$

Zkouška:

$$\begin{array}{rclcl} (1) & 15 & + & 5 & = & 20 & \checkmark \\ (2) & 1\,500 \cdot 15 & + & 2\,100 \cdot 5 & = & 33\,000 & \checkmark \end{array}$$

Odpověď: Na namíchání dvaceti kilové směsi budeme potřebovat 15 kilo prvního druhu čaje a 5 kilo druhého druhu čaje.

Příklad 1.9: Kolik gramů 80 % roztoku a kolik gramů 48 % roztoku je třeba k vytvoření 100 gramů 60 % roztoku?

Řešení: Zadání si přepíšeme do soustavy lineárních rovnic.

$$\begin{aligned}(1) \quad x + y &= 100 \\(2) \quad 0,8x + 0,48y &= 60\end{aligned}$$

Soustavu upravíme do vhodného tvaru.

$$\begin{aligned}(1) \quad x + y &= 100 \\(2) \quad 80x + 48y &= 6000\end{aligned}$$

Tuto soustavu si zapíšeme do matice a pomocí Gaussovy eliminační metody jí upravíme do odstupňovaného tvaru.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 100 \\ 80 & 48 & 6000 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 100 \\ 0 & -32 & -2000 \end{array}\right)$$

Matice je v odstupňovaném tvaru, zpětně dosadíme.

$$y = \frac{2000}{32} = 62,5$$

$$x = 37,5$$

Odpověď: Bude potřeba 37,5 gramů 80 % roztoku a 62,5 gramů 48 % roztoku.

Příklad 1.10: Máme tři směsi ořechů pod názvy:

1. Student, která obsahuje 50 % kešu ořechů a 50 % lískových ořechů,
2. Turista, která obsahuje 20 % kešu ořechů, 40 % lískových ořechů a 40 % mandlí,
3. Orient, která obsahuje 50 % kešu ořechu a 50 % mandlí.

V jakém poměru tyto 3 směsi musíme namíchat, abychom získali směs mix, kde je $\frac{1}{3}$ kešu ořechů, $\frac{1}{3}$ lískových ořechů a $\frac{1}{3}$ mandlí?

Řešení: Zadání si přepíšeme do soustavy lineárních rovnic.

Rovnice pro obsah kešu oříšky, pro lískové oříšky, pro mandle:

Poznámka: Příklad nebudeme řešit úplně korektně neboť si příklad zjednodušíme, tím že se budeme ptát kolik kg různých směsí ořechů je potřeba k vytvoření jednoho kilogramu směsi mix, poté si výsledek převedeme na poměr. Tento příklad budeme řešit znovu v kapitole Soustavy bez jednoznačného řešení, kde hmotnost směsi mix nebudeme brát jako konstantu.

$$\begin{aligned}(1) \quad \frac{1}{2}s + \frac{1}{5}t + \frac{1}{2}o &= \frac{1}{3} \\(2) \quad \frac{1}{2}s + \frac{2}{5}t &= \frac{1}{3} \\(3) \quad \frac{2}{5}t + \frac{1}{2}o &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Maticově zapíšeme a převedeme do odstupňovaného tvaru.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Matice je v odstupňovaném tvaru, zpětně dosadíme.

$$o = \frac{2}{9}$$

$$t = \frac{5}{9}$$

$$s = \frac{2}{9}$$

Zkouška:

$$\begin{array}{l} (1) \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{3} \quad \checkmark \\ (2) \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3} \quad \checkmark \\ (3) \quad \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{3} \quad \checkmark \end{array}$$

Odpověď: Směsi je potřeba namíchat v poměru Student : Turista : Orient, $\frac{2}{9} : \frac{5}{9} : \frac{2}{9}$, neboli 2 : 5 : 2.

1.2.2 Slitiny

V této podkapitole se budeme věnovat příkladům na téma slitiny. Tato kapitola se zaměřuje na slovní úlohy. Oproti kapitole 1.2.1 v této kapitole budeme pracovat se skutečnými hustotami kovů a z tohoto důvodu nám většinou nebudou vycházet celočíselné výsledky.

Příklad 1.11: je zaměřen na počítání ryzosti zlata. Tento příklad je početně jednoduchý a tím je vhodný na úvod této kapitoly.

Příklad 1.12: budeme vypočítávat potřebnou hmotnost mědi a zinku na výrobu jednoho metru čtverečního mosazi. Budeme počítat s reálnými hustotami kovů a z tohoto důvodu bude příklad početně složitý.

Příklad 1.13: budeme vypočítávat potřebný poměr tří druhů slitin mosaze na výrobu čtvrtého druhu. Použijeme zde opět trik, kde místo poměru si zvolíme hmotnost výsledné slitiny jako konstantu a zpětně výsledky dáme do poměru. Tento příklad by šel řešit bez použití tohoto triku i v kapitole Soustavy bez jednoznačného řešení, z důvodu náročnosti tohoto ho ale v této kapitole znovu nebudeme řešit.

Příklad 1.11: Ve zlatnictví jsme si koupili prsten, který by údajně měl mít 18 karátů. Doma jsme naměřili, že váží 10 gramů a má objem 0,7 cm³. Kolik karátů má prsten podle našeho měření? Počítejme, že hustoty kovů jsou Au 19,3 g/cm³ a Cu 8,9 g/cm³.

Kontext: Karát je historická jednotka hmotnosti, která odpovídala hmotnosti jednoho plodu Rohovníku obecného pod názvem karob, později tato hmotnost byla definována na 0,2 gramů. Pomocí této jednotky se počítala ryzost zlata, která má maximální hodnotu 24 karátů, jedná se o systém poměru hmotnosti čistého zlata a celkové hmotnosti slitiny.

Řešení: Zadání si zapíšeme pomocí soustavy lineárních rovnic, první rovnice bude reprezentovat informaci o celkové hmotnosti slitiny, která se skládá z hmotnosti zlata a a hmotnosti mědi c . Druhá rovnice bude o objemu této slitiny. Objem vypočítáme jako podíl hmotnosti a hustoty.

$$\begin{aligned} (1) \quad a + c &= 10 \\ (2) \quad a/19,3 + c/8,9 &= 0,7 \end{aligned}$$

Soustavu zapíšeme pomocí maticového zápisu.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 10 \\ \frac{a}{19,3} & \frac{c}{8,9} & 0,7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 10 \\ 8,9 & 19,3 & 120,239 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 10 \\ 0 & 10,4 & 31,239 \end{array} \right)$$

Dosadíme a vypočítáme přibližnou hodnotu.

$$c = 3,003\ 75 \qquad a = 6,996\ 25$$

Zkouška:

$$\begin{aligned} (1) \quad 6,996\ 25 + 3,003\ 75 &= 10 \quad \checkmark \\ (2) \quad 6,996\ 25/19,3 + 3,003\ 75/8,9 &= 0,7 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Odpověď: Hmotnost zlata je přibližně 7/10 celkové hmotnosti, což odpovídá 16,8/24 celkové hmotnosti neboli 16,8 karátů.

Příklad 1.12: Máme slitinu mosaze o hustotě $8\,600\text{ kg/m}^3$, víme že se skládá z mědi $8\,930\text{ kg/m}^3$ a zinku $7\,130\text{ kg/m}^3$. Kolik kilo mědi a zinku je potřeba na výrobu jednoho m^3 této směsi? V jakém poměru smísit?

Řešení: Zadání si zapíšeme pomocí soustavy lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} (1) \quad m + z &= 8\,600 \\ (2) \quad m/8\,930 + z/7\,130 &= 1 \end{aligned}$$

Upravíme rovnice na tvar bez zlomků.

$$\begin{aligned} (1) \quad m + z &= 8\,600 \\ (2) \quad 713m + 893z &= 6\,367\,090 \end{aligned}$$

Zapíšeme maticově.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8\,600 \\ 713 & 893 & 6\,367\,090 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8\,600 \\ 0 & 180 & 235\,290 \end{array} \right)$$

Dopočítáme neznámé.

$$z = \frac{23\,529}{18} \doteq 1\,307,2$$

$$m = \frac{131\,271}{18} \doteq 7\,292,8$$

Zkouška:

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{131\,271}{18} + \frac{23\,529}{18} &= 8\,600 \quad \checkmark \\ (2) \quad \frac{131\,271}{8\,930} + \frac{23\,529}{7\,130} &= 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Odpověď: Mědi je potřeba přibližně $7\,292,8\text{ kg}$ a zinku je potřeba přibližně $1\,307,2\text{ kg}$.

Příklad 1.13: Vytvořte druh mosaze pakfong neboli také nazývané nové stříbro. Pakfong obsahuje 60 % mědi, 26 % zinku a 14 % niklu. K vytvoření této slitiny můžeme využít pouze tyto tři slitiny mosaze:

1. konstantan, který obsahuje 55 % mědi a 45 % zinku,
2. alpaka, která obsahuje 65 % mědi, 17 % zinku a 18 % niklu,
3. nikelin, který obsahuje 56 % mědi, 14 % zinku a 30 % niklu.

V jakém poměru potřebujeme namíchat tyto tři slitiny?

Řešení: Zadání zapíšeme do soustavy rovnic, kde každá rovnice nám znázorňuje potřebnou koncentraci daného kovu ve slitině.

$$\begin{array}{rclcl} (1) & 0,55k & + & 0,65a & + & 0,56n & = & 0,6 \\ (2) & 0,45k & + & 0,17a & & 0,14n & = & 0,26 \\ (3) & & & 0,18a & + & 0,3n & = & 0,14 \end{array}$$

Tyto tři rovnice zapíšeme pomocí matice, kterou dostaneme do odstupňovaného tvaru.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 0,55 & 0,65 & 0,56 & 0,6 \\ 0,45 & 0,17 & 0,14 & 0,26 \\ 0 & 0,18 & 0,3 & 0,14 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 55 & 65 & 56 & 60 \\ 45 & 17 & 14 & 26 \\ 0 & 18 & 30 & 14 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 55 & 65 & 56 & 60 \\ -495 & -187 & -154 & -286 \\ 0 & 18 & 30 & 14 \end{array} \right) &\sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 55 & 65 & 56 & 60 \\ 0 & 398 & 350 & 254 \\ 0 & 18 & 30 & 14 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 55 & 65 & 56 & 60 \\ 0 & 18 & 30 & 14 \\ 0 & 398 & 350 & 254 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 55 & 65 & 56 & 60 \\ 0 & 18 & 30 & 14 \\ 0 & 0 & -2820 & -500 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Dopočítáme všechny neznámé.

$$n = \frac{25}{141} \qquad a = \frac{68}{141} \qquad k = \frac{16}{47}$$

Zkouška:

$$\begin{array}{rclcl} (1) & 0,55 \cdot \frac{16}{47} & + & 0,65 \cdot \frac{68}{141} & + & 0,56 \cdot \frac{25}{141} & = & 0,6 & \checkmark \\ (2) & 0,45 \cdot \frac{16}{47} & + & 0,17 \cdot \frac{68}{141} & & 0,14 \cdot \frac{25}{141} & = & 0,26 & \checkmark \\ (3) & & & 0,18 \cdot \frac{68}{141} & + & 0,3 \cdot \frac{25}{141} & = & 0,14 & \checkmark \end{array}$$

Odpověď: Slitiny konstantanu, alpaky a nikelinu je třeba namíchat v poměru, $\frac{16}{47} : \frac{68}{141} : \frac{25}{141}$, neboli 48 : 68 : 25.

1.2.3 Společná práce

Poslední části zaměřené na reálné úlohy se zaměříme na společnou práci, která výše uvedených témat na vytvoření správné soustavy ta nejsložitější. V této kapitole jsou sice uvedeny pouze dva příklady, ale v kapitola 1.3 Soustavy bez jednoznačného řešení můžete najít třetí příklad na toto téma, tentokrát s parametrickým řešením.

Příklad 1.14: ukážeme si nejprve nesprávné řešení, které je ale velice časté, poté si ukážeme správné řešení, ve kterém si pomocí substituce veškeré informace ze zadání převedeme na odvedenou práci za jednu hodinu.

Příklad 1.15: na tomto příkladě si ukážeme pouze správné řešení. Tento příklad je zde zařazen kvůli svému neobvyklému výsledku a jedná se o vhodný příklad na který se dá navázat kapitola 1.3 Soustavy bez jednoznačného řešení.

Příklad 1.14: Do bazénu se napouští voda 3 přítoky. Pokud se napouští 1. a 2. přítokem, trvá celý bazén napustit 10 hodin. Pokud se napouští 2. a 3. přítokem, trvá celý bazén napustit 12 hodin. Pokud se napouští 1. a 3. přítokem, trvá celý bazén napustit 15 hodin. Za jak dlouho se bazén napustí

- (a) jednotlivými přítoky,
- (b) všemi naráz?

Na úvod si ukážeme řešení, které není správné, ale je to velice častá chyba při řešení těchto příkladů.

Nesprávné řešení: Zadání zapíšeme do soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcl} (1) & x & + y & = 10 \\ (2) & & y & + z = 12 \\ (3) & x & & + z = 15 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 12 \\ 1 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 17 \end{array}\right)$$

$$(3) z = 8,5$$

$$(2) y = 3,5$$

$$(1) x = 6,5$$

Zkouška:

$$\begin{array}{rcl} (1) & 6,5 & + 3,5 & = 10 & \checkmark \\ (2) & & 3,5 & + 8,5 & = 12 & \checkmark \\ (3) & 6,5 & & + 8,5 & = 15 & \checkmark \end{array}$$

Nesprávná odpověď a: První přítokem napustíme bazén za 6,5 hodiny, druhým za 3,5 hodiny a třetím za 8,5 hodiny.

Pokud se zamyslíme nad zadáním a nad tím, že všechny přítoky si navzájem pomáhají napustit bazén, není možné, abychom dostali delší čas napouštění bazénu dvěma přítoky než každým z těchto dvou přítoků zvlášť.

Řešení: Tato slovní úloha je na nepřímou úměrnost, takže nejprve si zadání převedeme na odvedenou celkovou práci za jednu hodinu.

$$(1) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10}$$

$$(2) \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{12}$$

$$(3) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{15}$$

Tento tvar nelze převést na maticový zápis, neboť neznámá je ve jmenovateli. Jedna z metod převádění rovnice na tvar bez zlomků je pomocí vynásobení jmenovatelů. Z této metody získáme tvar, kde máme součin dvou neznámých, takže by soustava rovnic nebyla lineární. Další metodou, jak převést soustavu na tvar bez zlomků je pomocí substituce, kde každému zlomku přiřadíme jednu neznámou.

$$\frac{1}{x} = a$$

$$\frac{1}{y} = b$$

$$\frac{1}{z} = c$$

Po této substituci získáme soustavu:

$$(1) \quad a + b = \frac{1}{10}$$

$$(2) \quad b + c = \frac{1}{12}$$

$$(3) \quad a + c = \frac{1}{15}$$

Po této substituci soustavu zapíšeme pomocí matice.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1/10 \\ 0 & 1 & 1 & 1/12 \\ 1 & 0 & 1 & 1/15 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & 12 & 1 \\ 15 & 0 & 15 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & 12 & 1 \\ 0 & -30 & 30 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 120 & 3 \end{array} \right)$$

Matice je v odstupňovaném tvaru. Zpětně dosadíme.

$$c = \frac{1}{40}$$

$$b = \frac{7}{120}$$

$$a = \frac{1}{24}$$

Zkouška:

$$(1) \quad \frac{1}{24} + \frac{7}{120} = \frac{1}{10} \quad \checkmark$$

$$(2) \quad \frac{7}{120} + \frac{1}{40} = \frac{1}{12} \quad \checkmark$$

$$(3) \quad \frac{1}{24} + \frac{1}{40} = \frac{1}{15} \quad \checkmark$$

Víme, jakou část bazénu nám každý přítok za hodinu naplní. Neznámé x, y, z opět získáme pomocí stejné substituce.

$$\frac{1}{x} = a$$

$$\frac{1}{y} = b$$

$$\frac{1}{z} = c$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{24}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{7}{120}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{40}$$

$$x = 24$$

$$y = 120/7$$

$$z = 40$$

Odpověď a: Prvním přítokem se bazén napustí za 24 hodin, druhým za 120/7 hodiny a třetím za 40 hodin.

V zadání se nás ještě ptají, kolik hodin bude trvat všemi zároveň.

$$a + b + c = \frac{1}{40} + \frac{7}{120} + \frac{1}{24}$$

$$a + b + c = \frac{1}{8}$$

Za hodinu se nám napustí osmina bazénu, takže za 8 hodin se bazén napustí celý.

Odpověď b: Bazén se všemi přítoky zároveň napustí za 8 hodin.

Příklad 1.15: Nádrž plná vody má tři odtoky. Za jak dlouho se vypustí každým odtokem zvlášť? Známe následující informace: odtokem 1 a 2 současně za 10 hodin, odtokem 2 a 3 současně se nádrž vypustí za 5 hodin, odtokem 1 a 3 současně se nádrž vypustí za 2 hodiny.

Řešení: Zadání zapíšeme do soustavy rovnic.

$$\begin{array}{rcl} (1) & v_1 + v_2 & = 10 \\ (2) & & v_2 + v_3 = 5 \\ (3) & v_1 & + v_3 = 2 \end{array}$$

Rovnice jsou zapotřebí převést na vykonanou práci za jednu hodinu. Vykonanou práci odtoku v_1 pojmenujeme x , v_2 pojmenujeme y a v_3 pojmenujeme z .

$$\begin{array}{rcl} (1) & x + y & = 1/10 \\ (2) & & y + z = 1/5 \\ (3) & x & + z = 1/2 \end{array}$$

Soustavu zapíšeme pomocí matice.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0,1 \\ 0 & 1 & 1 & 0,2 \\ 1 & 0 & 1 & 0,5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 1 \\ 10 & 10 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 1 \\ 0 & 10 & -10 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 20 & 6 \end{array}\right)$$

$$z = \frac{3}{10} \qquad y = -\frac{1}{10} \qquad x = \frac{1}{5}$$

Zkouška:

$$\begin{array}{rcl} (1) & \frac{1}{5} + -\frac{1}{10} & = 1/10 \quad \checkmark \\ (2) & & -\frac{1}{10} + \frac{3}{10} = 1/5 \quad \checkmark \\ (3) & \frac{1}{5} & + \frac{3}{10} = 1/2 \quad \checkmark \end{array}$$

Provedeme zpětnou substituci.

$$v_1 = 5 \qquad v_2 = -10 \qquad v_3 = \frac{10}{3}$$

Odtok 2 nám říká, že se nádrž vypustí za -10 hodin, jedná se tím pádem o přítok.

Odpověď: Prvním přítokem se napustí za 3 hodiny a 20 minut, druhý se nenapustí nikdy a třetím za 5 hodin.

1.3 Soustavy bez jednoznačného řešení

V této kapitole se zaměříme na soustavy lineárních rovnic, které nemají jednoznačné řešení. Tato kapitola se skládá ze slovních úloh, se kterými se můžeme potkat v běžném životě i když pomocí soustavy rovnic bychom je asi neřešili.

0 jsme si již ukázali v kapitole 1.2.1 Směsi a v této kapitole si ukážeme druhý postup, jak řešit úlohy na poměr. Tento příklad je vhodný na úvod této kapitoly, neboť zadání již známé a můžeme se plně zaměřit na to co se stane, když nám soustava nevyjde jednoznačně. Také tento příklad má na pravé straně všech rovnic nulu, takže řešení vyjde čistě parametrické.

Příklad 1.17: nám ukáže, že i když na první pohled vypadá, že bude mít jednoznačné řešení, protože má 4 rovnice o 4 neznámých, tak i tento typ příkladů nám může vyjít parametricky. Tento příklad budeme řešit alternativním postupem i v kapitole 2.2 Využití symetrie soustavy.

Příklad 1.18: je podobný jako předchozí příklad, a i tento příklad budeme řešit alternativním postupem i v kapitole 2.2 Využití symetrie soustavy.

Příklad 1.19: nám ukáže poslední možné řešení se kterým se u lineárních soustav můžeme setkat, příklad nebude mít žádné řešení.

Příklad 1.20: je zaměřen na výpočet chemické rovnice, kde nám vyjde parametrické řešení. Tento příklad je vhodný ukázat jako poslední, neboť postup bude podobný u jakékoli chemické rovnice a tím nám otevírá další využití soustav a možnost, jak jednoduše hledat další zadání na procvičení.

Příklad 1.16: Máme tři směsi ořechů pod názvy:

1. *Student*, která obsahuje 50 % kešu ořechů a 50 % lískových ořechů,
2. *Turista*, která obsahuje 20 % kešu ořechů, 40 % lískových ořechů a 40 % mandlí,
3. *Orient*, která obsahuje 50 % kešu ořechu a 50 % mandlí.

V jakém poměru tyto 3 směsi musíme namíchat, abychom získali směs *Mix*, kde je $\frac{1}{3}$ kešu ořechů, $\frac{1}{3}$ lískových ořechů a $\frac{1}{3}$ mandlí?

Řešení: Zadání si přepíšeme do soustavy lineárních rovnic. Rovnice nám budou znázorňovat celkovou hmotnost daného oříšku, kde víme, že pokud od hmotností směsí student, turista a orient odečteme hmotnost směsi mix, tak nám vyjde 0.

Rovnice pro hmotnosti kešu oříšků, pro hmotnost lískových oříšků, pro hmotnost mandlí:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{1}{2}s + \frac{1}{5}t + \frac{1}{2}o - \frac{1}{3}m = 0 \\ (2) \quad & \frac{1}{2}s + \frac{2}{5}t - \frac{1}{3}m = 0 \\ (3) \quad & \frac{2}{5}t + \frac{1}{2}o - \frac{1}{3}m = 0 \end{aligned}$$

Soustavu tří rovnic o čtyřech neznámých zapíšeme pomocí matice.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array} \right)$$

Matice máme v odstupňovaném tvaru, ale řešení nám vyjde parametrické, neboť máme tři nenulové rovnice o čtyřech neznámých.

$$\begin{aligned} (4) \quad m &= d & (2) \quad t &= \frac{5}{9}d \\ (3) \quad o &= \frac{2}{9}d & (1) \quad s &= \frac{2}{9}d \end{aligned}$$

Zkouška:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} d + \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{9} d + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} d - \frac{1}{3} \cdot d = 0 \quad \checkmark \\
 (2) \quad & \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} d + \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{9} d - \frac{1}{3} \cdot d = 0 \quad \checkmark \\
 (3) \quad & \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{9} d + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} d - \frac{1}{3} \cdot d = 0 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Odpověď: Směsi je potřeba namíchat v poměru student : turista : orient, $\frac{2}{9}d : \frac{5}{9}d : \frac{2}{9}d$, neboli 2 : 5 : 2.

Příklad 1.17: Chcete vyrazit na přibližně týdenní dovolenou a hledáte nejlevnější zpáteční letenky. Do srovnávače cen jste zadali jeden víkend jako termín odletu a následující víkend jako termín návratu. Výsledky vyhledávání cen zpátečních letenek shrnuje tabulka. Zkuste určit ceny jednosměrných letenek v jednotlivých dnech. Předpokládejme, že cena zpáteční letenky je součtem cen příslušných dvou jednosměrných letenek. Ceny zpátečních letenek naleznete v tabulce 1.

Tabulka 1

Ceny zpátečních letenek

zpět / tam	so 29. 6.	ne 30. 6.
so 6.7.	3 600 Kč	3 100 Kč
ne 7. 7.	4 400 Kč	3 900 Kč

Řešení: Nejprve si informace ze zadání přepíšeme do soustavy lineárních rovnic, kde každá rovnice představuje jednu celkovou cestu.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & x_1 + x_3 = 3600 \\
 (2) \quad & x_1 + x_4 = 4400 \\
 (3) \quad & x_2 + x_3 = 3100 \\
 (4) \quad & x_2 + x_4 = 3900
 \end{aligned}$$

Soustavu si zapíšeme pomocí matice.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3600 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4400 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3100 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3900 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3600 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 800 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3100 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3900 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3600 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 800 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3100 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 800 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3600 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 800 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3600 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3100 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 800 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Zpětně dosadíme.

$$x_4 = t \qquad x_3 = -800 + t \qquad x_2 = 3900 - t \qquad x_1 = 4400 - t$$

Odpověď: Přesné ceny letenek nelze zjistit. Za předpokladu, že letenka stála nejméně 0, tak získáme, že parametr je v intervalu od 800 až 3900.

Zkouška:

$$\begin{array}{rclcl} (1) & 4400 - t & & + & -800 + t & = & 3600 & \checkmark \\ (2) & 4400 - t & & & & + & t & = & 4400 & \checkmark \\ (3) & & 3900 - t & + & -800 + t & & & = & 3100 & \checkmark \\ (4) & & 3900 - t & & & + & t & = & 3900 & \checkmark \end{array}$$

Příklad 1.18: V hotelu nabízí 4 stravovací možnosti.

1. Snídaně, oběd a večeři za 500 Kč.
2. Oběd, svačinu a večeři za 450 Kč.
3. Snídani a svačinu za 250 Kč.
4. Snídani, oběd, svačinu a večeři za 600 Kč.

Kolik stojí každé jídlo?

Řešení: Informace ze zadání přepíšeme do soustavy lineárních rovnic, kde každá neznámá nám určuje cenu daného jídla.

x_1 ... cena snídaně

x_2 ... cena oběda

x_3 ... cena svačiny

x_4 ... cena večeře

$$\begin{array}{rclcl} (1) & x_1 & + & x_2 & & + & x_4 & = & 500 \\ (2) & & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 450 \\ (3) & x_1 & & & + & x_3 & & & = & 250 \\ (4) & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 600 \end{array}$$

Soustavu lineárních rovnic zapíšeme pomocí matice.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 500 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 450 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & | & 250 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & | & 600 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 500 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 450 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & | & -250 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 100 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 500 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 450 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & | & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 100 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 500 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 450 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & | & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Matice je v odstupňovaném tvaru, takže můžeme dosazovat, protože máme pouze 3 nenulové rovnice na 4 neznámé, tak za jednu neznámou budeme muset dosadit parametr t .

$$x_4 = t \qquad x_3 = 100 \qquad x_2 = 350 - t \qquad x_1 = 200$$

Řešení zapsat i vektorově $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (200, 350 - t, 100, t)$

Odpověď: Snídaně stojí 200 Kč, svačina 100 Kč. U oběda a večere nelze ceny jednoznačně určit; závisejí na sobě tak, že jejich součet je 350 Kč. Za předpokladu, že jedno jídlo stojí nejméně 0 Kč, tak získáme, že parametr je v intervalu $\langle 0, 350 \rangle$.

Zkouška:

$$\begin{array}{rclclcl} (1) & 200 & + & 350 - t & & + & t & = & 500 & \checkmark \\ (2) & & & 350 - t & + & 100 & + & t & = & 450 & \checkmark \\ (3) & 200 & & & + & 100 & & & = & 250 & \checkmark \\ (4) & 200 & + & 350 - t & + & 100 & + & t & = & 600 & \checkmark \end{array}$$

Příklad 1.19: Nádrž plná vody má čtyři odtoky. Za jak dlouho se vypustí každým odtokem, pokud víme následující informace?

1. odtokem 1 a 2 současně, se nádrž vypustí za 5 hodin,
2. odtokem 2 a 3 současně, se nádrž vypustí za 6 hodin,
3. odtokem 3 a 4 současně, se nádrž vypustí za 8 hodin,
4. odtokem 1 a 4 současně, se nádrž vypustí za 4 hodin.

Řešení: Informace ze zadání přepíšeme do soustavy lineárních rovnic.

$$(1) V_1 + V_2 = 5 \qquad (2) V_2 + V_3 = 6$$

$$(3) V_3 + V_4 = 8 \qquad (4) V_1 + V_4 = 4$$

Rovnice je zapotřebí převést na vykonanou práci za jednu hodinu.

$$(1) x + y = \frac{1}{5} \qquad (1) 5x + 5y = 1$$

$$(2) y + z = \frac{1}{6} \qquad (2) 6y + 6z = 1$$

$$(3) z + w = \frac{1}{8} \qquad (3) 8z + 8w = 1$$

$$(4) x + w = \frac{1}{4} \qquad (4) 4x + 4w = 1$$

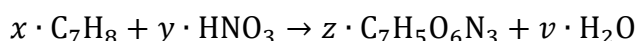
Upravenou soustavu lineárních rovnic zapíšeme pomocí matice.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & 1 \\ 0 & -20 & 0 & 20 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 60 & 60 & 14 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \end{array} \right)$$

$$0w \neq 13$$

Odpověď: Tato soustava lineárních rovnic nemá řešení. Z hlediska slovní úlohy to znamená, že taková situace reálně nemůže nastat.

Příklad 1.20: Vyřešte chemickou rovnici výroby trinitrotoluenu:



Řešení: Nejprve si přepíšeme chemickou rovnici do rovnic daných prvků. Víme, že kvůli zákonu zachování hmotnosti, obě strany rovnice musí mít stejný počet prvků.

$$(C) 7x = 7z$$

$$(H) 8x + y = 5z + 2v$$

$$(N) y = 3z$$

$$(O) 3y = 6z + v$$

Soustavu rovnic upravíme do tvaru vhodný na maticový zápis.

$$\begin{array}{rcll} (C) & x & & - z & = & 0 \\ (H) & 8x & + & y & - & 5z & - & 2v & = & 0 \\ (N) & & & y & - & 3z & & & = & 0 \\ (O) & & & 3y & - & 6z & - & v & = & 0 \end{array}$$

Soustavu převedeme do maticového zápisu.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -1 & 0 \end{array} \right) & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -1 & 0 \end{array} \right) & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 5 & 0 \end{array} \right) & \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right) & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Matici máme v odstupňovaném tvaru, takže stačí jen už dosadit.

$$v = t$$

$$z = \frac{1}{3}t$$

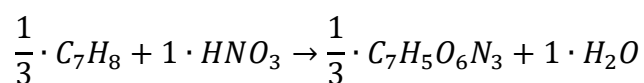
$$y = t$$

$$x = \frac{1}{3}t$$

Zkouška:

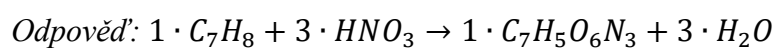
$$\begin{array}{rcll} (C) & \frac{1}{3}t & & - \frac{1}{3}t & = & 0 & \checkmark \\ (H) & \frac{8}{3}t & + & t & - & \frac{5}{3}t & - & 2t & = & 0 & \checkmark \\ (N) & & & t & - & t & & & = & 0 & \checkmark \\ (O) & & & 3t & - & 2t & - & t & = & 0 & \checkmark \end{array}$$

Neznámé máme vyřešeny. Dosadíme do původní chemické rovnice.



Získali jsme matematické řešení této rovnice, ale v chemické rovnici nelze tímto způsobem rozebírat molekuly. Všechny molekuly do chemické rovnice přidáváme pouze v oboru přirozených čísel, takže za parametr dosadíme nejmenší číslo takové, aby nám vycházela pouze přirozená čísla bez nuly.

$$t = 3$$



2 Speciální postupy

V této kapitole si ukážeme, že ačkoliv Gaussova eliminace je univerzální postup, který nás dovede k výsledku u jakékoliv soustavy lineárních rovnic, můžeme narazit na případy, kdy se vyplatí využít jiné, speciální postupy.

Tyto případy nastávají často u speciálních typů soustav: řídkých, binárních a symetrických. Tím rozumíme následující:

soustavu nazveme *řídkou*, pokud velká část koeficientů je nula,

soustavu nazveme *binární*, pokud koeficienty nabývají pouze hodnot 1 nebo 0,

soustavu nazveme *soustava symetrických rovnic*, pokud pro každou rovnici platí, že permutace neznámých rovnice nezmění předpis rovnice.

Například rovnice $ax + by + cz = d$ bude symetrická, pokud $a = b = c$.

Pro lepší pochopení si ukážeme příklady těchto matic.

Řídká vs. neřídká.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \text{ vs. } \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 8 & 2 \\ 1 & 12 & 7 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Binární vs. nebinární.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \text{ vs. } \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 0 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 8 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Symetrická vs. nesymetrická.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 18 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 23 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 47 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 52 \end{array}\right) \text{ vs. } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 18 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 23 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 47 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 52 \end{array}\right)$$

Lze i kombinovat: např. symetrická a binární, ale ne řídká:

$$\begin{array}{l} (1) \quad x + y = 1/10 \\ (2) \quad \quad y + z = 1/12 \\ (3) \quad x \quad + z = 1/15 \end{array}$$

Nebo binární a řídká, ale ne symetrická – Vennovy diagramy.

Záměrně toto neuvádíme jako definici, protože: zčásti vágní (řídká, symetrická), zároveň i v literatuře nejednoznačné definice například definice binární matice se liší.

V prvním podkapitole 2.1 Postupné dosazování budeme pracovat se soustavou řídkou a převážně binární, z tohoto důvodu je velice efektivní čistě dosazovací postup. V druhé podkapitole 2.2 Využití symetrie soustavy budeme pracovat se soustavou symetrických rovnic.

2.1 Postupné dosazování

V této kapitole si na specifických příkladech porovnáme metodu postupného dosazování s Gaussovou eliminační metodou. Příklady v této kapitole jsou vybrány tak aby metoda postupného dosazování byla více efektivní než Gaussova eliminace. Do této kategorie spadají příklady, kde po zapsání zadání do matice nám vznikne soustava řídká nebo soustava řídká binární.

Veškeré příklady v této kapitole jsou zaměřeny na látku Vennovy diagramy tří množin, protože typicky se jedná o matice řídké a na středních školách se většinou berou společně s výrokovou logikou, která nám dá binární matici. Do této kapitoly by se ale dali například zařadit i příklady na chemické rovnice.

Příklad 2.1: je Vennův diagram vedoucí na soustavu osmi rovnic o osmi neznámých. Jedná se o příklad soustavy řídké binární. Tento příklad budeme řešit dvěma způsoby: první způsob pomocí Gaussovy eliminace a zpětného dosazení, druhý způsob pomocí dosazovací metody.

Příklad 2.2: podobně jako předchozí příklad, tak se jedná Vennův diagram vedoucí na soustavu osmi rovnic o osmi neznámých. Také se jedná se o příklad soustavy řídké binární. Tento příklad budeme opět řešit dvěma způsoby: první způsob pomocí Gaussovy eliminace a zpětného dosazení, druhý způsob pomocí dosazovací metody. Oproti předchozímu příkladu je tento příklad zajímavý tím, že za podmínky výsledků v oboru celých nezáporných čísel lze příklad řešit bez použití jedné rovnice a tím se dostaneme na soustavu sedmi rovnic o 8 neznámých s jednoznačným řešením v daném číselném oboru.

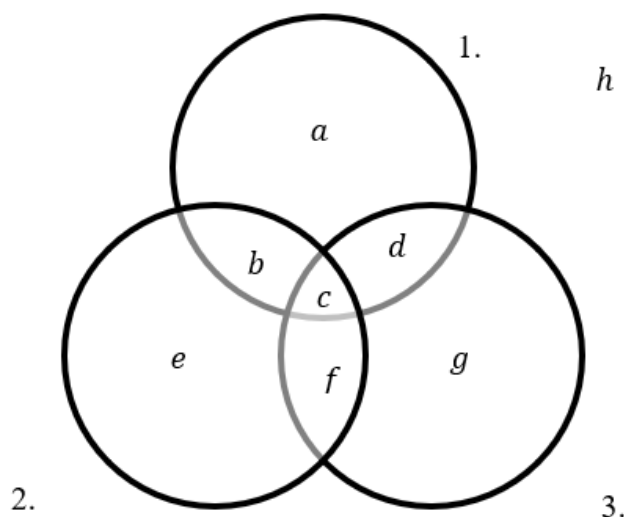
Příklad 2.3: je Vennův diagram vedoucí na soustavu osmi rovnic o 8 neznámých. V tomto příkladu se jedná o soustavu řídkou nebinární, z tohoto důvodu dosazovací metoda tak efektivní. V řešení budeme používat metodu dosazovací, tím si zmenšíme soustavu a poté využijeme Gaussovu eliminaci.

Příklad 2.1: Ve třídě při čtvrtletní písemné práci z matematiky byly zadány tři příklady.

Třetí příklad vyřešilo 17 žáků a každý ze zbývajících příkladů vyřešilo 19 žáků. Dva žáci ze třídy nevyřešili žádný příklad, všechny tři příklady vyřešilo 8 žáků. První i druhý příklad vyřešilo 13 žáků, první i třetí příklad 10 žáků. Druhý nebo třetí příklad vyřešilo 22 žáků. Vypočtete:

- Kolik žáků vyřešilo druhý i třetí příklad?
- Kolik žáků psalo čtvrtletní práci?
- Kolik žáků mělo vyřešený pouze jeden příklad?

Na tomto příkladu si porovnáme dvě z možných řešení této soustavy. V první řešení budeme používat Gaussovu eliminační metodu a zpětné dosazování. V druhém řešení budeme používat pouze dosazovací metodu. Nejprve si pomocí Vennova diagramu určíme, co daná neznámá reprezentuje. (viz obr. 1)



Obrázek 1: Vennův diagram pro ujasnění reprezentace neznámých

Řešení 1: Zadání si zapíšeme pomocí soustavy lineárních rovnic.

$$\begin{array}{rcl}
 (1) & a + b + c + d & = 19 \\
 (2) & b + c + e + f & = 19 \\
 (3) & c + d + f + g & = 17 \\
 (4) & & h = 2 \\
 (5) & c & = 8 \\
 (6) & b + c & = 13 \\
 (7) & c + d & = 10 \\
 (8) & b + c + d + e + f + g & = 22
 \end{array}$$

Soustavu lineárních rovnic si zapíšeme maticově a upravíme na odstupňovaný tvar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matice je v odstupňovaném tvaru. Zpětné dosadíme.

(8) $h = 2$

(5) $e + 6 = 6$

(2) $b + 8 + 6 = 19$

(7) $g = 1$

(5) $e = 0$

(2) $b = 5$

(6) $f + 1 = 7$

(4) $d = 2$

(1) $a + 5 + 8 + 2 = 19$

(6) $f = 6$

(3) $c = 8$

(1) $a = 4$

Řešení 2:

$$\begin{array}{rcl} (1) & a + b + c + d & = 19 \\ (2) & b + c + e + f & = 19 \\ (3) & c + d + f + g & = 17 \\ (4) & & h = 2 \\ (5) & c & = 8 \\ (6) & b + c & = 13 \\ (7) & c + d & = 10 \\ (8) & b + c + d + e + f + g & = 22 \end{array}$$

Ze zadání máme vyřešenou 4. a 5. rovnici, můžeme si taky všimnout, že 6. a 7. dvě neznáme, kde jedna z nich je neznámou c , která je již vyřešena v 5. rovnici. Po dosazení hodnoty neznámé c , získáme i hodnoty neznámé b a d .

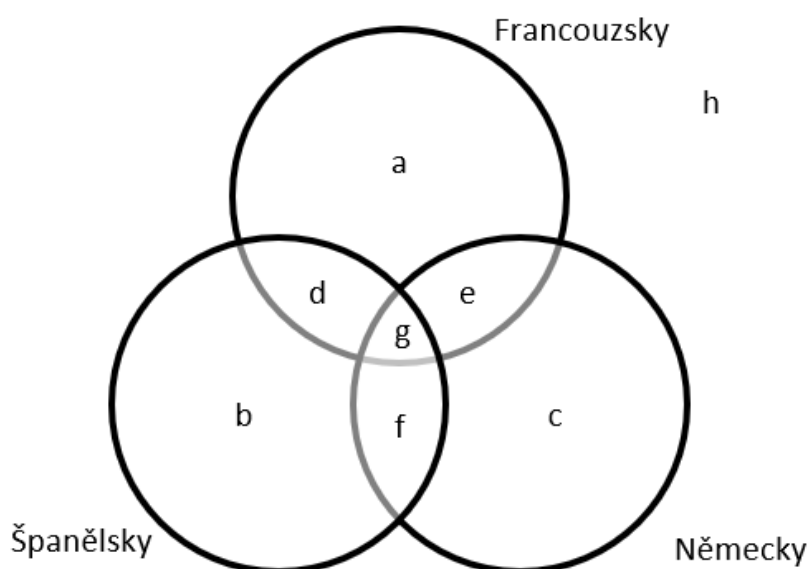
$$\begin{array}{lll} (4) h = 2 & (5) c = 8 & \\ (6) b + c = 13 & (6) b + 8 = 13 & (6) b = 5 \\ (7) c + d = 10 & (7) d + 8 = 10 & (7) d = 2 \end{array}$$

Postupným dosazováním získáme i zbylé neznámé.

$$\begin{array}{lll} (1) a + b + c + d = 19 & (1) a + 5 + 8 + 2 = 19 & (1) a = 4 \\ (3) c + d + f + g = 17 & (3) f + g + 8 + 2 = 17 & (3) f + g = 7 \\ (8) b + c + d + e + f + g = 22 & (8) 5 + 8 + 2 + e + 7 = 22 & (8) e = 0 \\ (2) b + c + e + f = 19 & (2) f + 5 + 8 + 0 = 19 & (2) f = 6 \\ (3) c + d + f + g = 17 & (3) 6 + g + 8 + 2 = 17 & (3) g = 1 \end{array}$$

Příklad 2.2: Třicet šest studentů bylo dotazováno ohledně znalosti francouzštiny, španělštiny a němčiny. Zjistili jste, že: Jedenadvacet studentů ovládá pouze jeden jazyk, právě dva jazyky pak 11 studentů. Čtrnáct umí německy, ale žádný z nich neumí současně i španělsky. Pouze španělsky mluví čtyři studenti. Ani německy ani francouzsky neumí 8 lidí. Alespoň jedním románským jazykem se domluví 23 osob. Určete počty studentů v každé kombinaci těchto 3 jazyků. Vyřešte soustavu, která reprezentuje zadání.

Na tomto příkladu si porovnáme dvě z možných řešení této soustavy. V první řešení budeme používat Gaussovu eliminační metodu a zpětné dosazování. V druhém řešení budeme používat pouze dosazovací metodu. Nejprve si pomocí Vennova diagramu určíme, co daná neznámá reprezentuje. (viz obr. 3)



Obrázek 3: Vennův diagram pro ujasnění reprezentace neznámých

Řešení 1: Zadání si zapíšeme pomocí soustavy lineárních rovnic.

$$\begin{array}{rcl}
 (1) & a + b + c + d + e + f + g + h & = 36 \\
 (2) & a + b + c & = 21 \\
 (3) & & d + e + f & = 11 \\
 (4) & & c & + e & = 14 \\
 (5) & & & & f + g & = 0 \\
 (6) & & b & & & = 4 \\
 (7) & & b & & & + h & = 8 \\
 (8) & a + b & & + d + e + f + g & & = 23
 \end{array}$$

Soustavu lineárních rovnic si zapíšeme maticově a upravíme na odstupňovaný tvar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 36 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 23 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -13 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Během postupu bylo provedeno více kroků během jedné úpravy. Zde je jejich výpis.
V první úpravě od 2. řádku a 8. řádku odečteme 1. řádek.

V druhé úpravě 2. řádek vynásobíme -1 a od 7. řádku odečteme 6. řádek.

V třetí úpravě od 3. řádku odečteme druhý řádek, pak třetí řádek vynásobíme -1 , k 8. řádku přičteme řádek 4. a nakonec prohodíme 7. a 8. řádek.

V čtvrté úpravě jsme pomocí prohazování řádků matici upravili do odstupňovaného tvaru.

Matice je v odstupňovaném tvaru. Zpětné dosadíme.

$$(8) h = 4$$

$$(7) g = 0$$

$$(6) f = 0$$

$$(5) e = 1 + 4$$

$$e = 5$$

$$(4) d = 15 - 5 - 4$$

$$d = 6$$

$$(3) c = 14 - 5$$

$$c = 9$$

$$(2) b = 4$$

$$(1) a = 36 - 4 - 9 - 6 - 5 - 4$$

$$a = 8$$

Poznámka: Z důvodu prohazování řádků, se pořadí rovnic v soustavě oproti pořadí řádků matice liší. Číslování odpovídá řádkům matice.

Řešení 2:

$$(1) a + b + c + d + e + f + g + h = 36$$

$$(2) a + b + c = 21$$

$$(3) d + e + f = 11$$

$$(4) c + e = 14$$

$$(5) f + g = 0$$

$$(6) b = 4$$

$$(7) b + h = 8$$

$$(8) a + b + d + e + f + g = 23$$

Pokud bereme v potaz, že se jedná o slovní úlohu, kde neznámé jsou v oboru nezáporných celých čísel, tak z páté rovnice můžeme vypočítat rovnou dvě hodnoty neznámých. Z šesté rovnice již známe hodnotu neznámé b . Po dosazení hodnoty neznámé b lehce lze dopočítat i sedmou rovnicí.

$$(5) f = 0$$

$$(5) g = 0$$

$$(6) b = 4$$

$$(7) h = 4$$

Do zbylých rovnic tyto hodnoty neznámých dosadíme.

$$\begin{array}{rcl}
(1) & a + b + c + d + e & = 32 \\
(2) & a + c & = 17 \\
(3) & & d + e = 11 \\
(4) & & c + e = 14 \\
(8) & a + d + e & = 19
\end{array}$$

Můžeme si všimnout, že pokud odečteme třetí řádek od osmého, tak dostaneme rovnou neznámou a .

$$\begin{array}{rcl}
(8) & a + d + e = 19 & (4) & c + e = 14 \\
& a = 7 & & e = 4 \\
(2) & a + c = 17 & (3) & d + e = 11 \\
& c = 10 & & d = 7
\end{array}$$

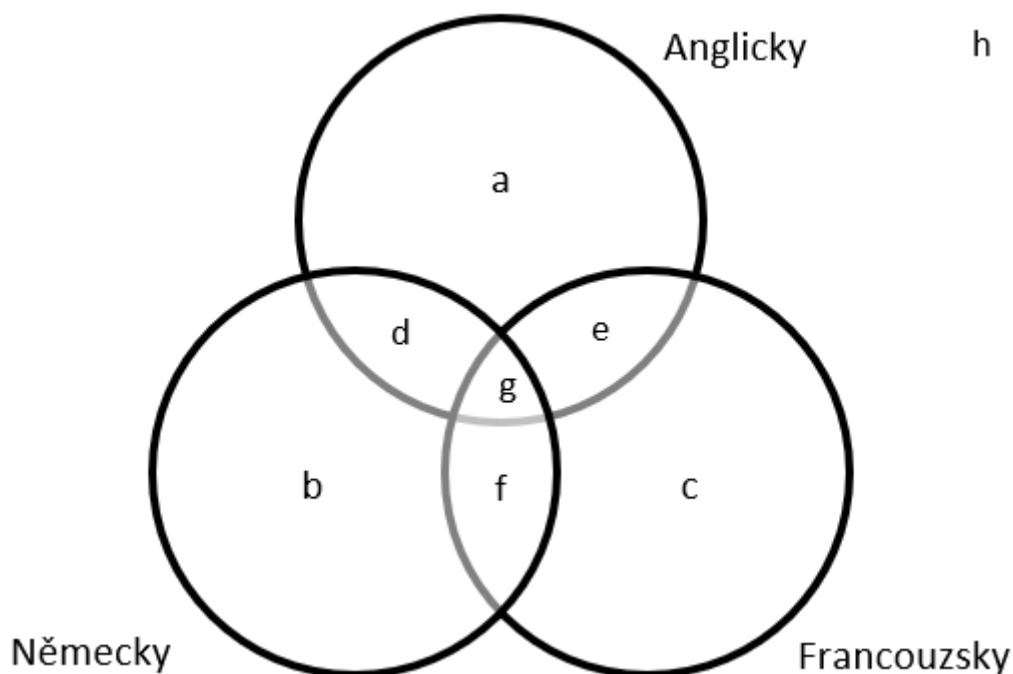
V celém postupu jsme nepoužili první rovnice, u které si můžeme povšimnout, že po dosazení výsledků nám v ní vyjde $32 = 32$, čímž potvrzuje správnost výsledku. Můžeme si klást otázku co by se stalo, kdyby tato rovnice nebyla v zadání. V tomto případě by se jednalo o soustavu sedmi rovnic o 8 neznámých, kde by nám vyšlo parametrické řešení, ale v oboru celých nezáporných čísel by bylo možné pouze jedno řešení.

Zkouška:

$$\begin{array}{rcl}
(1) & 7 + 4 + 10 + 7 + 4 + 0 + 0 + 4 & = 36 & \checkmark \\
(2) & 7 + 4 + 10 & = 21 & \checkmark \\
(3) & & 7 + 4 + 0 & = 11 & \checkmark \\
(4) & & 10 + 4 & = 14 & \checkmark \\
(5) & & & 0 + 0 & = 0 & \checkmark \\
(6) & & 4 & = 4 & \checkmark \\
(7) & & 4 & + 4 & = 8 & \checkmark \\
(8) & 7 + 4 & + 7 + 4 + 0 + 0 & = 23 & \checkmark
\end{array}$$

Příklad 2.3: Třicet studentů bylo dotazováno ohledně znalosti francouzštiny, angličtiny a němčiny. Zjistili jste, že: Právě jeden jazyk ovládá 16 studentů. Právě dva jazyky ovládá 9 studentů. Více než jeden jazyk ovládá 11 studentů. 12 studentů neumí anglicky ani francouzsky. Pouze francouzsky umí stejně lidí jako třemi jazyky. Německy umí dvakrát tolik co anglicky. Francouzsky neumí dvakrát tolik studentů, než francouzsky umí. Určete počty studentů v každé kombinaci těchto 3 jazyků. Vyřešte soustavu, která reprezentuje zadání.

Řešení: Nejprve si pomocí Vennova diagramu určíme, co daná neznámá reprezentuje. (viz obr. 4)



Obrázek 4: Vennův diagram pro ujasnění reprezentace neznámých

Zadání si zapíšeme pomocí soustavy lineárních rovnic.

$$(1) a + b + c + d + e + f + g + h = 30$$

$$(2) a + b + c = 16$$

$$(3) d + e + f = 9$$

$$(4) d + e + f + g = 11$$

$$(5) b + h = 12$$

$$(6) g = c$$

$$(7) 2a + 2d + 2g + e = b + d + f + g$$

$$(8) 2c + 2e + 2f + 2g = a + b + d + h$$

Soustavu upravíme na tvar vhodný pro maticový zápis.

$$\begin{array}{rcl}
 (1) & a + b + c + d + e + f + g + h & = 30 \\
 (2) & a + b + c & = 16 \\
 (3) & & d + e + f = 9 \\
 (4) & & d + e + f + g = 11 \\
 (5) & & b + h = 12 \\
 (6) & & c - g = 0 \\
 (7) & 2a - b + d + e - f + g & = 0 \\
 (8) & -a - b + 2c - d + 2e + 2f + 2g - h & = 0
 \end{array}$$

Přestože tento příklad je na Vennovy diagramy, tak v této úloze se nejedná o soustavu binární, ani to není soustava nějak významně řidká. Přesto u těchto velkých soustav je vhodné se kouknout na řádky, které obsahují podobnou sadu neznámých například ze třetího a čtvrtého řádku, lze jednoduše zjistit neznámou g , pomocí které pak jednoduše zjistíme i neznámou c .

$$(4) \quad g = 2$$

$$(6) \quad c = 2$$

Hodnoty dosadíme do zbylých rovnic,

$$\begin{array}{rcl}
 (1) & a + b + d + e + f + h & = 26 \\
 (2) & a + b & = 14 \\
 (3) & & d + e + f = 9 \\
 (5) & & b + h = 12 \\
 (7) & 2a - b + d + e - f & = -2 \\
 (8) & -a - b - d + 2e + 2f - h & = -8
 \end{array}$$

Zapišeme pomocí matice.

$$\begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 26 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 26 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -8 \end{array} \right) \sim \\
 \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 1 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & -1 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & -1 & 6 \end{array} \right) \sim
 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & -1 & 15 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & -1 & 15 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 21 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Matice je v odstupňovaném tvaru, budeme pokračovat dosazovací metodou. Číslování rovnic opět nebude odpovídat očíslování ze zadání, protože jsem prohazovali řádky.

- (6) $h = 3$
- (5) $f = 0$
- (4) $e = 6$
- (3) $d = 3$
- (2) $b = 9$
- (1) $a = 5$

Zkouška:

(1)	5	+	9	+	2	+	3	+	6	+	0	+	2	+	3	=	30	✓		
(2)	5	+	9	+	2												=	16	✓	
(3)									3	+	6	+	0					=	9	✓
(4)									3	+	6	+	0	+	2			=	11	✓
(5)			9												+	3	=	12	✓	
(6)					2									-	2		=	0	✓	
(7)	2 · 5	-	9						+	3	+	6	-	0	+	2		=	0	✓
(8)	-5	-	9	+	2 · 2	-	3	+	2 · 6	+	2 · 0	+	2 · 2	-	3		=	0	✓	

2.2 Využití symetrie soustavy

V této kapitole budeme pracovat se symetrickými rovnicemi. U těchto soustav si můžeme výpočet často zjednodušit pomocí sečtení všech koeficientů. Pokud se jedná o soustavu binární a součty všech koeficientů jsou si rovny, tak můžeme jednoduše zjistit zbylé neznámé.

V lineární algebře se můžete potkat s pojmem symetrická matice tento pojem je ale odlišný od pojmu soustava symetrických rovnic v této práci se s pojmem symetrický matice neseznamujeme.

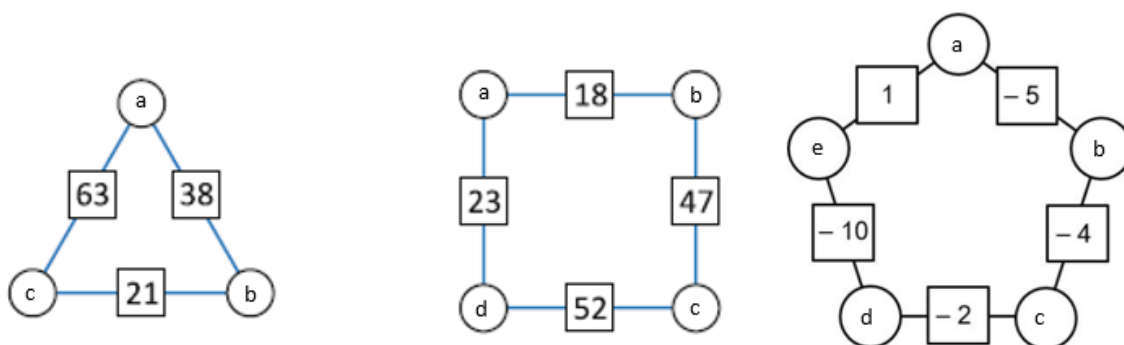
Příklad 2.4: je zaměřen na sčítací arithmogony a je vhodný uvést jako první příklad, neboť postup lze aplikovat na libovolně velký arithmogon a tím se stává univerzálním rychlým postupem pro řešení těchto příkladů. Uvedeme si zde dva postupy, abychom mohli porovnat Gaussovu eliminaci s postupem využití symetrie. Zkoušku nebudeme provádět běžným způsobem, ale po doplnění hodnot arithmogonu zkouška správnosti je poměrně jasná.

Příklad 2.5: je z kapitoly 1.2.3 Společná práce. Jedná se o příklad na vypouštění bazénu. V tomto příkladě si uvedeme pouze postup využívající symetrie a zkoušky správnosti výsledků zde již nebudeme provádět, neboť jsme jí již udělali v přechodím postupu tohoto příkladu.

Příklad 2.6: je z kapitoly 1.3 Soustavy bez jednoznačného řešení. Jedná se o příklad zaměřující na výpočet cen letenek, kde výsledkem je parametrické řešení. V tomto příkladě si uvedeme pouze postup využívající symetrie a zkoušky správnosti výsledků zde již nebudeme provádět, neboť jsme jí již udělali v přechodím postupu tohoto příkladu.

Příklad 2.7: je z kapitoly 1.3 Soustavy bez jednoznačného řešení. Jedná se o příklad zaměřující na výpočet cen jídel v hotelu, kde výsledek je parametrický, ale pouze dvě neznámé máme závislé na parametru. V tomto příkladě si uvedeme pouze postup využívající symetrie a zkoušky správnosti výsledků zde již nebudeme provádět, neboť jsme jí již udělali v přechodím postupu tohoto příkladu.

Příklad 2.4: Vyřešte následující arithmogony. (viz obr. 5)



Obrázek 5: Zadání arithmogonů

a) Arithmogon lze reprezentovat pomocí soustavy:

$$\begin{aligned} (1) \quad a + b &= 38 \\ (2) \quad b + c &= 21 \\ (3) \quad a + c &= 63 \end{aligned}$$

Řešení 1: Převédeme na maticový zápis.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 38 \\ 1 & 0 & 1 & 63 \\ 0 & 1 & 1 & 21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 38 \\ 0 & -1 & 1 & 25 \\ 0 & 1 & 1 & 21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 38 \\ 0 & -1 & 1 & 25 \\ 0 & 0 & 2 & 46 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 38 \\ 0 & -1 & 1 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 23 \end{array}\right)$$

Dořešíme soustavu pomocí zpětného dosazení.

$$\begin{aligned} (3) \quad c &= 23 \\ (2) \quad b &= -2 \\ (1) \quad a &= 40 \end{aligned}$$

Řešení 2: Nyní se zaměříme na koeficienty daných neznámých a můžeme si povšimnout, že v soustavě je každá neznámá právě dvakrát, takže po sečtení všech rovnic získáme rovnici:

$$2a + 2b + 2c = 122$$

Rovnice lze upravit do tvaru:

$$a + b + c = 61$$

Sice neznáme hodnoty žádné z neznámých, ale známe hodnotu všech součtů dvou neznámých. Když tyto součty odečteme od rovnice $a + b + c = 61$, tak zjistíme hodnotu zbylé neznámé.

$$(3) \quad c = 23 \qquad (2) \quad b = -2 \qquad (1) \quad a = 40$$

b) Arithmogon lze reprezentovat pomocí soustavy:

$$\begin{array}{rclcl} (1) & a & + & b & = & 18 \\ (2) & & & b & + & c & = & 23 \\ (3) & & & & & c & + & d & = & 52 \\ (4) & a & & & & & & + & d & = & 47 \end{array}$$

Řešení 1: Převédeme na maticový zápis.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 18 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 23 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 47 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 52 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 47 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 52 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 52 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 52 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 18 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 52 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$(4) \quad d = t$$

$$(3) \quad c = 52 - t$$

$$(2) \quad b = t - 5$$

$$(1) \quad a = 23 - t$$

Řešení 2: Nyní se zaměříme na koeficienty daných neznámých a můžeme si povšimnout, že v soustavě je každá neznámá právě dvakrát, takže po sečtení všech rovnic a získáme rovnici:

$$2a + 2b + 2c + 2d = 140$$

Rovnice lze upravit do tvaru:

$$a + b + c + d = 70$$

Tento příklad ale bude vycházet parametricky, protože opět známe součet dvojic po sobě jdoucích neznámých, ale neznáme součet žádné trojice. Pokud, ale za jednu z neznámých dosadíme parametr, tak získáme tvar:

$$d = t$$

$$a + b + c = 70 - t$$

Nyní se jedná o podobný příklad jako u přechozího arithmogonu. Stejným postupem dokážeme dopočítat zbylé neznámé:

$$c = 52 - t$$

$$b = t - 5$$

$$a = 23 - t$$

c) Arithmogon lze reprezentovat pomocí soustavy:

$$\begin{array}{rclcl} (1) & a & + & b & & = & -5 \\ (2) & & & b & + & c & = & -4 \\ (3) & & & & & c & + & d & = & -2 \\ (4) & & & & & & & d & + & e & = & -10 \\ (5) & a & & & & & & & & + & e & = & 1 \end{array}$$

Řešení 1: Převědeme na maticový zápis.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -10 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Dořešíme soustavu pomocí zpětného dosazení.

$$(5) e = -3$$

$$(2) b = -9$$

$$(4) d = -7$$

$$(1) a = 4$$

$$(3) c = 5$$

Řešení 2: Nyní se zaměříme na koeficienty daných neznámých a můžeme si povšimnout, že v soustavě je každá neznámá právě dvakrát, takže po sečtení všech rovnic a získáme rovnici:

$$2a + 2b + 2c + 2d + 2e = -20$$

Rovnice lze upravit do tvaru:

$$a + b + c + d + e = -10$$

Sice v tomto příkladě opět známe pouze součty dvou neznámých, ale pokud tuto hodnotu dosadíme do naší rovnice, tak získáme rovnici o třech neznámých, kde stejně jako v prvním arithmogonu můžeme dalším dosazením získat hodnotu právě jedné neznámé, pokud toto provedeme u všech neznámých, tak dostaneme výsledky.

$$e = -3$$

$$d = -7$$

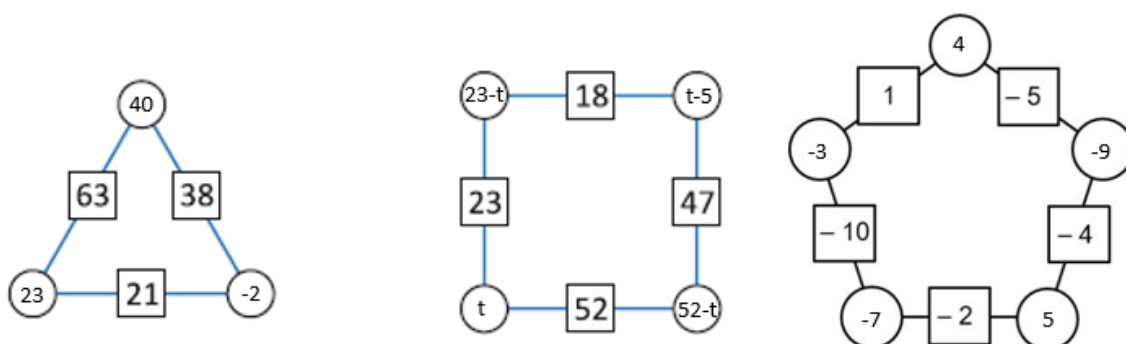
$$c = 5$$

$$b = -9$$

$$a = 4$$

Poznámka: Můžeme si povšimnout, že toto platí u všech arithmogonů, které mají lichý počet neznámých.

Odpověď: Výsledky zapíšeme do arithmogonu. (viz obr. 6)



Obrázek 6: Výsledky arithmogonů

Příklad 2.5: Nádrž plná vody má tři odtoky. Za jak dlouho se vypustí každým odtokem zvlášť? Známe následující informace: odtokem 1 a 2 současně za 10 hodin, odtokem 2 a 3 současně se nádrž vypustí za 5 hodin, odtokem 1 a 3 současně se nádrž vypustí za 2 hodiny.

Řešení: Zadání si převedeme na vykonanou práci za jednu hodinu a zapíšeme ji do soustavy rovnic.

$$\begin{array}{rcl} (1) & x + y & = 0,1 \\ (2) & & y + z = 0,2 \\ (3) & x & + z = 0,5 \end{array}$$

Po sečtení a úpravě všech rovnic lze získat tvar:

$$x + y + z = 0,4$$

Podobně jako u arithmogonů známe součty hodnot každé možné dvojice neznámých. Z tohoto získáme:

$$\begin{array}{l} \text{při odečtení první rovnice} \quad z = 0,3, \\ \text{při odečtení druhé rovnice} \quad x = 0,2, \\ \text{při odečtení třetí rovnice} \quad y = -0,1. \end{array}$$

Výsledky převedeme z vykonané práce za jednu hodinu zpět na dobu napuštění celého bazénu.

$$v_1 = 5$$

$$v_2 = -10$$

$$v_3 = \frac{10}{3}$$

Odpověď: Prvním přítokem se napustí za 3 hodiny a 20 minut, druhý se nenapustí nikdy a třetím za 5 hodin.

Příklad 2.6: Chcete vyrazit na přibližně týdenní dovolenou a hledáte nejlevnější zpáteční letenky. Do srovnávače cen jste zadali jeden víkend jako termín odletu a následující víkend jako termín návratu. Výsledky vyhledávání cen zpátečních letenek shrnuje tabulka. Zkuste určit ceny jednosměrných letenek v jednotlivých dnech. Předpokládejme, že cena zpáteční letenky je součtem cen příslušných dvou jednosměrných letenek. Ceny zpátečních letenek naleznete v tabulce 2.

Tabulka 2

Ceny zpátečních letenek

Zpět / tam	so 29. 6.	ne 30. 6.
so 6.7.	3 600 Kč	3 100 Kč
ne 7. 7.	4 400 Kč	3 900 Kč

Řešení: Nejprve si informace ze zadání přepíšeme do soustavy lineárních rovnic, kde každá rovnice představuje jednu celkovou cestu.

$$\begin{array}{rclcl}
 (1) & x_1 & & + & x_3 & & = & 3600 \\
 (2) & x_1 & & & & + & x_4 & = & 4400 \\
 (3) & & x_2 & + & x_3 & & = & 3100 \\
 (4) & & x_2 & & & + & x_4 & = & 3900
 \end{array}$$

Po sečtení a úpravě všech rovnic lze získat tvar:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7500$$

Známe hodnoty součtu čtyř dvojit neznámých, ale vždycky nám dvě neznámé zbydou.

Dosadíme za jednu neznámou parametr t .

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7500 - t$$

Známe součty $x_1 + x_3 = 3600$, $x_2 + x_3 = 3100$

$$x_1 = 4400 - t$$

$$x_2 = 3900 - t$$

Hodnoty dosadíme do rovnice a dopočítáme poslední neznámou.

$$x_3 = 800 - t$$

Odpořd: Přesné ceny letenek nelze zjistit. Za předpokladu, že letenka stála nejměně 0, tak získáme, že parametr je v intervalu od 800 až 3900.

Přříklad 2.7: V hotelu nabízí 4 stravovací možnosti.

1. Snídaně, oběd a večeři za 500 korun.
2. Oběd, svačinu a večeři za 450 korun.
3. Snídani a svačinu za 250 korun.
4. Snídani, oběd, svačinu a večeři za 600 korun.

Kolik stojí každé jídlo?

Řešení: Zadání si zapišeme pomocí soustavy rovnic

$$\begin{array}{rclcl} (1) & x & + & y & & + & u & = & 500 \\ (2) & & & y & + & z & + & u & = & 450 \\ (3) & x & & & + & z & & & = & 250 \\ (4) & x & + & y & + & z & + & u & = & 600 \end{array}$$

Při seřtení všech rovnic získáme tvar:

$$3x + 3y + 3z + 3u = 1800$$

Tento tvar lze upravit na tvar:

$$x + y + z + u = 600$$

Po odeřtení 1. a 2. rovnice získáme neznámé

$$z = 100$$

$$x = 150$$

Po dosazení hodnot těchto dvou neznámých do rovnic získáváme soustavu:

$$(1) \quad y + u = 350$$

$$(2) \quad y + u = 350$$

$$(3) \quad 0 = 0$$

$$(4) \quad y + u = 350$$

Soustava se skládá ze 3 stejných rovnic a jedné nulové rovnice. Tato soustava má pouze jednu rovnici s informační hodnotou, z tohoto důvodu budeme muset dosadit parametr.

$$u = t$$

$$y = 350 - t$$

Odpověď: Přesné ceny oběda a večeře nelze zjistit. Za předpokladu, že jedno jídlo stálo nejméně 0, tak získáme, že parametr je v intervalu $\langle 0, 350 \rangle$, snídaně stála 200 Kč a svačina stála 100 Kč.

3 Speciální postupy pro řešení regulárních soustav

V této kapitole si představíme dva speciální vysokoškolské postupy pro řešení regulárních soustav neboli soustav o stejném počtu rovnic a neznámých s právě jedním řešením. Tyto postupy nám představí důležité pojmy jako je determinant a inverzní matice. Teorie, které se váže k těmto pojmům je složitější, a proto v těchto kapitolách se budeme více věnovat jejich aplikaci.

Tato kapitola je rozdělená do dvou podkapitol. V první podkapitole se budeme věnovat Cramerovu pravidlu a výpočtu determinantu pro čtvercové matice o 2 a 3 rovnicích, pro větší soustavy je výpočet determinantu až moc složitý k efektivnímu řešení soustav lineárních rovnic. V druhé podkapitole se budeme věnovat postupu řešení soustav pomocí inverzní matice. Ukážeme si, jak najít inverzní matici a jak pomocí inverzní matice zjistit výsledek soustavy.

3.1 Cramerovo pravidlo

V této kapitole si nejprve pokusíme najít obecné řešení čtvercové matice o dvou neznámých, bez použití determinantu a poté ho porovnáme se vzorcem Cramerovo pravidlo pro čtvercovou matici o dvou neznámých. Ukážeme si metodu pro výpočet determinantu pro matici o dvou neznámých a matici o třech neznámých, pro matice o čtyřech neznámých a více si determinant nebudeme dále ukazovat, neboť se jedná o složitější postup.

V této kapitole si taky ukážeme, jak aplikovat Cramerovo pravidlo na příkladech. S příklady v této kapitole jsem se již setkali v přechozích kapitolách z tohoto důvodu zde již nebudeme provádět zkoušku správnosti.

Příklad 3.1: naleznete i v kapitole 1.1.1 Úvodní úlohy. Tento příklad ze státní maturitní zkoušky budeme řešit vysokoškolským způsobem. Na úvod této kapitoly je vhodný svojí jednoduchostí, neboť se jedná o soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

Příklad 3.2: naleznete i v kapitole 1.2.1 Směsi. Příklad zaměřen na zjištění ceny masa. Příklad je na soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

Příklad 3.3: naleznete i v kapitole 1.2.1 Směsi. Příklad zaměřen na míchání různých směsí oříšků k vytvoření nové směsi. Na tomto příkladě aplikujeme Sarrusovo pravidlo, neboť se jedná o soustavu tří rovnic o třech neznámých.

Nejprve se zamyslíme nad obecným řešením čtvercové matice o dvou neznámých. Abychom v matici nemuseli poté zpětně dosazovat, použijeme Gaussovo-Jordanovu metodu.

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{k_1}{a_{11}} \\ 1 & \frac{a_{22}}{a_{21}} & \frac{k_2}{a_{21}} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{k_1}{a_{11}} \\ 0 & \frac{a_{22}}{a_{21}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{k_2}{a_{21}} - \frac{k_1}{a_{11}} \end{array} \right) \sim \\
 &\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{k_1}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \frac{k_2 a_{11} - k_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{k_1}{a_{11}} \\ 0 & a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} & k_2 a_{11} - k_1 a_{21} \end{array} \right) \sim \\
 &\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{k_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot \frac{k_2 a_{11} - k_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \\ 0 & 1 & \frac{k_2 a_{11} - k_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{k_1 a_{22} - k_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \\ 0 & 1 & \frac{k_2 a_{11} - k_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \end{array} \right) \\
 x_1 &= \frac{k_1 a_{22} - k_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \\
 x_2 &= \frac{k_2 a_{11} - k_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}
 \end{aligned}$$

Nyní si ukážeme definici Cramerova pravidla a výpočet determinantu pro matici o dvou neznámých.

Definice 3.1. Necht' $A = (a_1 | \dots | a_n)$ je regulární matice řádu n a $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Pak j -tá složka vektoru řešení $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ soustavy $Ax = b$ je

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)},$$

kde A_j je matice, která vznikne z A nahrazením j -tého sloupce vektorem b , tj. $A_j = (a_1 | a_2 | \dots | a_{j-1} | b | a_{j+1} | \dots | a_n)$. (Barto & Tůma, 2023, s. 232)

Pokud máme obecnou soustavu $(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right)$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & a_{2j} & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Pro výpočet $\det(A_j)$, tak nahradíme j -tý řádek pravou stranou této soustavy.

$$\det(A_j) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Pokud má neznámá x_j právě jedno řešení, tak výpočtem determinantu dostaneme její přesnou hodnotu.

Ze vzorečku, přesněji z části $x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$, můžeme vidět, že ve jmenovateli máme determinant matice, který se nesmí rovnat nule. Z tohoto vyplývá, že Cramerovo pravidlo můžeme použít pouze u matic, kde $\det(A) \neq 0$.

Čtvercová matice je regulární právě tehdy, když $\det(A) \neq 0$. (Barto & Tůma, 2023, s. 236)

Matice A je regulární právě když soustava $Ax = b$ má právě jedno řešení pro každou pravou stranu b . (Barto & Tůma, 2023, s. 124)

Z odvození obecné soustavy pro matici o dvou neznámých již víme, že řešení vypadá následovně.

$$x_1 = \frac{k_1 a_{22} - k_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

Z Cramerova pravidla taky víme, že $x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$, takže $\det(A) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$, neboli vynásobená hlavní diagonála, od které odečteme vynásobenou vedlejší diagonálu.

Ještě si ukážeme Sarrusovo pravidlo, které lze využít k jednoduchému výpočtu determinantu pro čtvercovou matici o třech neznámých bez znalosti definice determinantu.

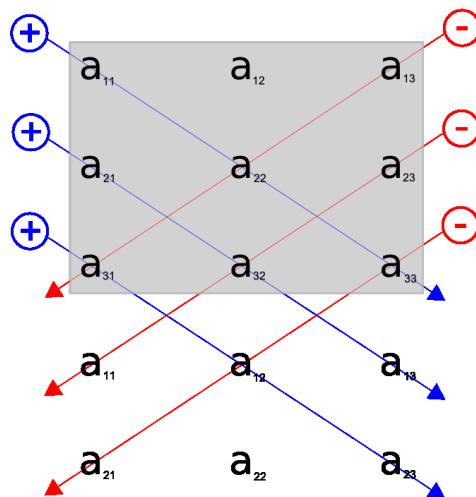
Pro čtvercovou matici o třech neznámých determinant lze vypočítáme následovně:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{23} a_{32} a_{11} - a_{33} a_{12} a_{21}$$

Pro lepší představu tvorby těchto součtů si ukážeme obrázek, který Sarrusovo pravidlo znázorňuje.



Příklad 3.1: Na stole jsou dvě hromádky mincí. Obě obsahují pouze pětikorunové a dvoukorunové mince. První hromádka s 32 mincemi obsahuje pětinu všech pětikorunových mincí a polovinu všech dvoukorunových mincí. Druhá hromádka obsahuje 68 mincí. Jaká je hodnota všech mincí dohromady?

Řešení: Přepíšeme zadání do soustavy lineárních rovnic. Označíme neznámé: x_1 představuje celkový počet pětikorun a x_2 celkový počet dvoukorun.

$$(1) \frac{1}{5}p + \frac{1}{2}d = 32$$

$$(2) \frac{4}{5}p + \frac{1}{2}d = 68$$

Zapišeme pomocí matice.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 32 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{2} & 68 \end{array} \right)$$

Nyní budeme vypočítávat hodnoty neznámých pomocí Cramerova pravidla.

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}$$

Jak jsme si již v kapitole **Chyba! Nenalezen zdroj odkazů. Chyba! Nenalezen zdroj odkazů.** nastínili, tak budeme potřebovat vytvořit matice A_1 a A_2 . Tyto matice vytvoříme pomocí záměny sloupce pravé strany se sloupcem neznámé, které chceme zjistit hodnotu.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 32 & \frac{1}{2} \\ 68 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 32 \\ \frac{4}{5} & 68 \end{pmatrix}$$

Vypočteme determinanty těchto tří matic.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ 4 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{10}$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 32 & 1 \\ 68 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 32 \cdot \frac{1}{2} - 68 \cdot \frac{1}{2} = -18$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 32 \\ \frac{1}{5} & 68 \\ 4 & 68 \\ \frac{1}{5} & 68 \end{vmatrix} = \frac{1}{5} \cdot 68 - \frac{4}{5} \cdot 32 = -12$$

Nyní dopočítáme hodnoty neznámých x_1 a x_2 .

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-18}{-\frac{3}{10}} = 60$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-12}{-\frac{3}{10}} = 40$$

Máme 60 pětikorun a 40 dvoukorun.

$$60 \cdot 5 + 40 \cdot 2 = 380$$

Odpověď: Celková hodnota mincí je 380 korun.

Příklad 3.2: V obchodě prodávali dva druhy mletých směsí. První druh obsahoval 70 % hovězího a 30 % vepřového masa a stál 160 Kč/kg, druhý byl namíchan v poměru 2 ku 3 a stál 130 Kč/kg. Kolik korun by měl stát kilogram čistého hovězího a kolik korun kilogram čistého vepřového?

Řešení: Zadání si přepíšeme do soustavy lineárních rovnic. Důležité je si uvědomit, že 2 : 3 je jinými slovy 40 % a 60 %.

$$(1) 0,7x_1 + 0,3x_2 = 160$$

$$(2) 0,4x_1 + 0,6x_2 = 130$$

Tuto soustavu převedeme na maticový zápis.

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & | & 160 \\ 0,4 & 0,6 & | & 130 \end{pmatrix}$$

Nyní budeme vypočítávat hodnoty neznámých pomocí Cramerova pravidla.

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}$$

Vypočítáme si hodnoty všech tří determinantů.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{vmatrix} = 0,7 \cdot 0,6 - 0,4 \cdot 0,3 = 0,3$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 160 & 0,3 \\ 130 & 0,6 \end{vmatrix} = 160 \cdot 0,6 - 130 \cdot 0,3 = 57$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 0,7 & 160 \\ 0,4 & 130 \end{vmatrix} = 0,7 \cdot 130 - 0,4 \cdot 160 = 27$$

Dosadíme do vzorce.

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{57}{0,3} = 190$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{27}{0,3} = 90$$

Odpověď: Kilogram vepřového masa stojí 90 Kč a kilogram hovězího masa stojí 190 Kč.

Příklad 3.3: Máme tři směsi ořechů po názvy:

1. Student, která obsahuje 50 % kešu ořechů a 50 % lískových ořechů,
2. Turista, která obsahuje 20 % kešu ořechů, 40 % lískových ořechů a 40 % mandlí,
3. Orient, která obsahuje 50 % kešu ořechu a 50 % mandlí.

V jakém poměru tyto 3 směsi musíme namíchat, abychom získali směs mix, kde je $\frac{1}{3}$ kešu ořechů, $\frac{1}{3}$ lískových ořechů a $\frac{1}{3}$ mandlí?

Řešení: Zadání si přepíšeme do soustavy lineárních rovnic.

Rovnice pro obsah kešu oříšky, pro lískové oříšky, pro mandle:

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{1}{2}s + \frac{1}{5}t + \frac{1}{2}o &= \frac{1}{3} \\ (2) \quad \frac{1}{2}s + \frac{2}{5}t &= \frac{1}{3} \\ (3) \quad \frac{2}{5}t + \frac{1}{2}o &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Soustavu zapíšeme pomocí matice.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{array} \right)$$

Vypíšeme si vzorečky pro všechny tři neznámé.

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \qquad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \qquad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$

Vypočteme hodnoty determinantů pomocí Sarrusova pravidla.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot 0 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \frac{2}{5} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\det(A) = \frac{3}{20}$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot \frac{2}{5}$$

$$\det(A_1) = \frac{1}{30}$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \frac{1}{3}$$

$$\det(A_2) = \frac{1}{12}$$

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot 0 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}$$

$$\det(A_3) = \frac{1}{30}$$

Tyto hodnoty dosadíme do vzorečku pro Cramerovo pravidlo a dopočítáme hodnotu neznámých.

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{3}{20}} = \frac{2}{9} \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{3}{20}} = \frac{5}{9} \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{3}{20}} = \frac{2}{9}$$

3.2 Řešení soustavy pomocí inverzní matice

V této podkapitole si ukážeme další možný postup při řešení lineárních soustav. Následující postup je velice užitečný, pokud koeficienty soustavy zůstávají stejné a mění se pouze pravá strana, nevýhoda tohoto postupu je omezení pouze na regulární matice. Teorie, která se váže k této metodě je poměrně složitá a můžete se jí dočíst v publikaci (Barto & Tůma, 2023), z tohoto důvodu se v této kapitole budeme věnovat pouze její aplikaci na příkladech. Cílem této kapitoly tedy bude si ukázat na příkladech, jak hledat inverzní matici a jak pomocí ní vyřešit regulární soustavu.

Příklad 3.4: je z kapitoly 1.2.1 Směsi. Na tomto příkladě si nejprve ukážeme závislost neznámých na výsledcích rovnic, tím zjistíme, jak vypadá inverzní matice. Poté si postup ukážeme zapsaný maticově.

Příklad 3.5: je z kapitoly 1.2.1 Směsi. Tento příklad zde byl vybrán svojí jednoduchostí pro provedení Gaussovo-Jordanovy eliminace.

Příklad 3.6: je z kapitoly 1.2.1 Směsi. Tento příklad vede na soustavu třech rovnic o třech neznámých. Do této kapitoly byl vybrán, z toho důvodu, že příklad jsme řešili již několika různými metodami a tím pádem můžeme tyto postupy jednoduše porovnat.

Příklad 3.4: V obchodě prodávali dva druhy mletých směsí. První druh obsahoval 70 % hovězího a 30 % vepřového masa a stál 160 Kč/kg, druhý byl namíchán v poměru 2 : 3 a stál 130 Kč/kg. Kolik korun by měl stát kilogram čistého hovězího a kolik korun kilogram čistého vepřového?

Řešení: Zadání si přepíšeme do soustavy.

$$(1) 0,7h + 0,3v = 160$$

$$(2) 0,4h + 0,6v = 130$$

Jak jsme na začátku této kapitoly zmiňovali, tak postup, kterým budeme tento příklad počítat je užitečný, pokud se nám pravá soustava rovnic bude často měnit. Z tohoto důvodu si nejprve zjistíme závislost neznámých na libovolných cenách směsí, tyto ceny nazveme x a y .

$$(1) 0,7h + 0,3v = x$$

$$(2) 0,4h + 0,6v = y$$

Vyjádříme si nejprve neznámou h v závislosti na x a y .

$$(1) 7h + 3v = 10x$$

$$(2) 4h + 6v = 10y$$

$$(1) 7h + 3v = 10x$$

$$(2) 30v = -40x + 70y$$

Z druhé rovnice nám vyplývá.

$$v = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}y$$

Dosadíme do první rovnice.

$$7h + 3\left(-\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}y\right) = 10x$$

$$7h = 14x - 7y$$

$$h = 2x - y$$

Výsledkům tedy odpovídá následující soustava.

$$\begin{aligned} (1) \quad & 2x - y = h \\ (2) \quad & -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}y = v \end{aligned}$$

Zapsáno maticově.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & h \\ -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} & v \end{array} \right)$$

Při jedné ze zkoušek správnosti výsledků Příklad 1.1: jsme se setkali, že výsledek lze také zjistit, když vynásobíme levou stranu matice s hodnotami neznámých dostaneme pravou stranu matice.

$$\left(\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix}$$

I pokud se ceny směsí mas (x a y) budou měnit dokážeme vynásobením matice a vektoru získat vždy správný výsledek. Tato matice se nazývá inverzní a nyní si náš postup ukážeme znovu ale zapsán maticově.

Soustavu rovnic lze zapsat následovně.

$$\begin{aligned} (1) \quad & 0,7h + 0,3v = 1x + 0y \\ (2) \quad & 0,4h + 0,6v = 0x + 1y \end{aligned}$$

Soustavu zapíšeme pomocí matice lze zapsat následovně.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0,7 & 0,3 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,6 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Provedeme stejné úpravy jako v předchozím postupu

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cc|cc} 0,7 & 0,3 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,6 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 3 & 10 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 3 & 10 & 0 \\ 0 & 30 & -40 & 70 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 3 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 3 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 0 & 14 & -7 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} \end{array} \right) \\ & \left(\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} \end{array} \right) \begin{pmatrix} 160 \\ 130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 160 - 130 \\ -\frac{4}{3} \cdot 160 + \frac{7}{3} \cdot 130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 190 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Odpověď: Kilogram vepřového masa stojí 90 Kč a kilogram hovězího masa stojí 190 Kč.

Shrnutí: Při hledání inverzní matice použijeme Gaussovo-Jordanovu eliminaci na matici, kde levá strana matice odpovídá koeficientům soustavy a na pravá strana je jednotková matice.

Příklad 3.5: Ze dvou druhů čaje v ceně 1500 Kč a 2100 Kč za 1 kg se má připravit 20 kg směsi v ceně 1650 Kč za 1 kg. Kolik kilogramů každého druhu čaje bude třeba smíchat?

(Příklady z matematiky, 2025)

Řešení: Zadání si přepíšeme do soustavy lineárních rovnic, kde neznámé reprezentují počet kilogramů ve směsi.

$$\begin{array}{r} (1) \quad x + y = 20 \\ (2) \quad 1500x + 2100y = 33000 \end{array}$$

Soustavu zapíšeme maticově.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 20 \\ 1500 & 2100 & 33000 \end{array} \right)$$

K této matici budeme pomocí Gaussovo-Jordanovy eliminace hledat inverzní matici.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1500 & 2100 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 600 & -1500 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2,5 & \frac{1}{600} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3,5 & -\frac{1}{600} \\ 0 & 1 & -2,5 & \frac{1}{600} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Inverzní matici vynásobíme s vektorem pravé strany soustavy.

$$\begin{pmatrix} 3,5 & -\frac{1}{600} \\ -2,5 & \frac{1}{600} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 33000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \cdot 3,5 - 33000 \cdot -\frac{1}{600} \\ 20 \cdot (-2,5) + 33000 \cdot \frac{1}{600} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Odpověď: Na namíchání dvaceti kilové směsi budeme potřebovat 15 kilo prvního druhu čaje a 5 kilo druhého druhu čaje.

Příklad 3.6: Máme tři směsi ořechů po názvy:

4. Student, která obsahuje 50 % kešu ořechů a 50 % lískových ořechů,
5. Turista, která obsahuje 20 % kešu ořechů, 40 % lískových ořechů a 40 % mandlí,
6. Orient, která obsahuje 50 % kešu ořechu a 50 % mandlí.

V jakém poměru tyto 3 směsi musíme namíchat, abychom získali směs mix, kde je $\frac{1}{3}$ kešu ořechů, $\frac{1}{3}$ lískových ořechů a $\frac{1}{3}$ mandlí?

Řešení: Zadání si přepíšeme do soustavy lineárních rovnic.

Rovnice pro obsah kešu oříšky, pro lískové oříšky, pro mandle:

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{1}{2}s + \frac{1}{5}t + \frac{1}{2}o &= \frac{1}{3} \\ (2) \quad \frac{1}{2}s + \frac{2}{5}t &= \frac{1}{3} \\ (3) \quad \frac{2}{5}t + \frac{1}{2}o &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Soustavu zapíšeme pomocí matice.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

K této matici budeme pomocí Gaussovo-Jordanovy eliminace hledat inverzní matici.

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{5} & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{5} & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{5} & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 2 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{5} & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right) \sim \end{aligned}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right)$$

Inverzní matici vynásobíme s vektorem pravé strany soustavy.

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ \frac{5}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

Odpověď: Směsi je potřeba namíchat v poměru Student : Turista : Orient, $\frac{2}{9} : \frac{5}{9} : \frac{2}{9}$, neboli $2 : 5 : 2$.

Závěr

Cílem této práce bylo představit základní metody v lineární algebře pro řešení soustav lineárních rovnic a ukázat jejich výhody i nevýhody na příkladech převážně z reálného života. Také bylo cílem ukázat si i rozdíl mezi středoškolskými způsoby řešení lineárních rovnic a vysokoškolskými způsoby a tím vytvořit vhodný dokument pro žáky a studenty, kteří se s předmětem lineární algebra ještě nesetkali.

V průběhu mé práce jsem se pokusil prostudovat a zorientovat v dostupných zdrojích věnující se této problematice. Původně jsem plánoval širší tematický záběr, nicméně z důvodu obsáhlosti lineární algebry jsem se rozhodl okruh zredukovat na výše uvedená témata. Zjistil jsem, že zdrojů věnující se lineární algebře je dostatek, nicméně v těchto zdrojích je lineární algebra vysvětlována převážně akademickým způsobem. Myslím že přechod mezi středoškolskou látkou a těmito zdroji může být proto velice komplikovaný. V této práci jsem se snažil pomyslnou propast zmírnit. Domnívám se, že cíl mé práce se mi podařilo splnit.

V budoucnu by pak bylo vhodné práci rozšířit například o geometrickou reprezentaci lineární algebry, zobrazení, vlastní čísla, vlastní vektory a jejich využití.

Seznam použitých informačních zdrojů

Barto, L., & Tůma, J. (2023). Lineární algebra.

<https://www.karlin.mff.cuni.cz/~stovicek/dl/23-24-zs/skripta22.pdf>

Cermat. (2023). Testy a zadání z předchozích období – matematika: Jarní termín 2017.

Dostupné z: <https://maturita.cermat.cz/menu/testy-a-zadani-z-predchozich-obdobi/matematika/testy-azadani-matematika>

Fibonacci, L. (c2002). *Fibonacci's Liber abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of calculation*. (přel. L. E. Sigler) Springer.

<http://catdir.loc.gov/catdir/toc/fy035/2001057722.html>

Lee, S., & Park, J. (2021). *Introduction to linear algebra for high school students*. MathTutor.

Henn, H.-W., & Filler, A. (2015). *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra*. Springer.

Hudeček, J. (2008). *Matematika v devíti kapitolách: sbírka početních metod z doby Han s komentářem Liu Huie z doby Wei a Li Chunfega a dalších z doby Tang*. Matfyzpress.

<https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/400831>

Bečvář, J. (2007). *Z historie lineární algebry*. Matfyzpress.

http://toc.nkp.cz/NKC/200905/contents/nkc20091864372_1.pdf

Příklady z matematiky. (2025). *Slovní úlohy – O směsích*.

<https://www.prikladyzmatematiky.cz/slovni-ulohy/o-smesich/>

Hrůzová, E. (2018). *Některé aplikace lineární algebry* [Bakalářská práce, Západočeská univerzita v Plzni]. <https://naos-be.zcu.cz/server/api/core/bitstreams/47c65576-6583-4173-b549-b62a55811e6a/content>

Vyjádření k využití nástrojů umělé inteligence

Při tvorbě bakalářské práce jsem využil nástrojů umělé inteligence pouze k předkládání z německého jazyka do českého, a to přesněji při rešerši zahraničního zdroje (Henn & Filler, 2015). Z tohoto zdroje jsem ve své bakalářské práci konkrétní úlohy již nečerpал.