Posudek školitele na diplomovou práci

Quadraticity of the operadic categories of graphs

Tomáše Vítka

Operadické kategorie jsou koncept, vytvořený v roce 2014 M. Bataninem a M. Marklem jako jednotící paradigma pro rozmanité struktury, abstrahující operace s mnoha vstupy a mnoha výstupy. Inovativní na tomto přístupu je, že studované objekty, většinou tedy různé typy operád a PROPů, do teorie vstupují jako algebry nad zobecněnými operádami; ty budu pro zjednodušení nazývat hyperoperádami. Díky tomuto novému ukotvení jsou k dispozici standardní metody homologické teorie algeber.

Ukazuje se, že nejdůležitější typy operád jsou algebrami nad konstantními (někdy nepřesně nazývanými terminálními) hyperoperádami nad operadickými kategoriemi, jejichž objekty jsou různé typy grafů. Tyto konstantní operády byly ve všech studovaných případech kvadratické, tedy izomorfní s volnou hyperoperádou modulo kvadratické relace. Všechny byly navíc Koszulovi, což zaručovalo existenci explicitní, minimální rezolventy. Algebry nad těmito rezolventami jsou silně homotopické verze příslušných objektů. V tom spočívá jejich důležitost.

Vzniká otázka, zda všechny kategorie grafů se strukturou operadické kategorie mají tu vlastnost, že příslušná konstantní operáda je kvadratická, případně i Koszulova. Původním zadáním bylo studium kategorie jednoduchých grafů, konkrétně konstrukce struktury operadické kategorie a popis příslušných hyperoperád. V průběhu práce se objevily náznaky, že by kategorie jednoduchých grafů mohla být negativní odpovědí na otázku v první větě tohoto odstavce. A opravdu, T. Vítek nalezl jednoduchý graf Γ mající věže elementárních morfizmů různých délek. Tomáš dále ukázal, že existence tohoto grafu, spolu se znalostí struktury volných hyperoperád, je v rozporu s kvadraticitou konstantní hyperoperády.

Nyní k k práci samotné. V její první kapitole T. Vítek připomíná definici operadické kategorie a v kapitole druhé vypisuje dodatečné axiomy, zaručující rozumný, explicitní tvar volných hyperoperád založený na věžích elementárních morfizmů. V dalších dvou kapitolách definuje zmíněná elementární zobrazení a související Marklovu variantu hyperoperád. Kapitola 5 se zabývá kategoriemi grafů se zvláštním zřetelem na kategorii SGrc souvislých jednoduchých grafů. V další kapitole Vítek dokazuje, s odkazem na teorii operadických Grothendieckových fibrací, že SGrc je operadická kategorie, mající všechny dodatečné vlastnosti vyžadované ve druhé kapitole. V kapitole poslední Vítek popisuje volné hyperoperády nad operadickou kategorií SGrc a ve Větě 73 dokazuje, že konstantni SGrc-operáda není kvadratická. Důkaz je založen na pečlivé analýze hodnoty volné hyperoperády na grafu Γ zmíněném v předchozím odstavci.

Závěr. T. Vítek prokázal schopnost vstřebat složitý technický materiál založený na pojmech, se kterými se student MFF UK v rámci výuky nesetká. Nalezení grafu Γ je příkladem samostatného tvůrčího myšlení. Na základě uvedeného ji doporučuji přijmout jako práci diplomovou a udělit ji nelepší možnou známku, tedy 1. Posuzovaná práce práce může být základem publikace v dobrém mezinárodním časopise.

Nantes, 4. září 2024

M. Markl, školitel