Posudek oponenta bakalářské práce

Název:	Nulový prostor matice a jeho použití v aplikacích
Autor:	**Benjamin de Silva**

Shrnutí obsahu práce

Práce se zaměřuje na metody pro výpočet báze nulového prostoru matice $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ hodnosti $m > n$, které jsou založené na základních maticových rozkladech typu SVD, QR, LU a jejich modifikacích. V teoretické části práce je poměrně podrobně odvozen singulární rozklad matice, vysvětlena základní myšlenka konstrukce LU rozkladu a konstrukce QR rozkladu pomocí Gram-Schmidtova procesu. Je naznačeno, jak z daných rozkladů matice A spočíst bázi nulového prostoru. V numerických experimentech provedených v prostředí MATLAB poté autor srovnává jednotlivé metody z pohledu přesnosti a výpočetního času pro husté a řídké matice různých velikostí.

Hodnocení práce

Výsledky. Práce je rešerší známých výsledků. Vlastním výsledkem jsou rozsáhlé numerické experimenty s uvažovanými metodami.

Výhrady k teoretické části práce. Velká část teoretické části obsahuje standardní známé výsledky popsané v téměř každé učebnici zabývajícími se maticovými výpočty. Je zde například popsáno odvození SVD rozkladu přes spektrální rozklady matic, vznik LU rozkladu pomocí eliminačních matic či konstrukce QR rozkladu matice pomocí klasického Gram-Schmidtova procesu. Samotným metodám pro výpočet báze nulového prostoru je pak věnován velmi malý prostor, metody jsou popsány jen zběžně bez podrobnějšího vysvětlení důležitých detailů (například jak od rozkladu přejdeme k odvození tvaru matice B obsahující ve svých sloupcích bázi nulového prostoru). Osobně považuji přínos práce v teoretické částí za velmi malý.

Výhrady k numerickým experimentům. Numerické experimenty mají dobrý základ v sadě a rozdělení testovacích úloh, které autor uvažuje. Experimenty autor provádí v MATLABu, avšak nezmiňuje způsob implementace jednotlivých metod. Není zřejmé, co autor skutečně programoval a na co použil vestavěné funkce. Potom je samozřejmě problematické srovnávat metody z pohledu časové náročnosti. Ručně naprogramované funkce mohou být mnohonásobně pomalejší než vestavěné. Také není zřejmé, jak autor pracoval v MATLABu s řídkými maticemi. I to je důležité z hlediska časové a výpočetní náročnosti. Grafy časových srovnání tak mají pro čtenáře bez znalosti implementačních detailů velmi malou vypovídající hodnotu. Druhá výhrada se týká způsobu, kterým se měří přesnost výpočtu metod. Podle

mého názoru může být uvažované kritérium zavádějící a může zkreslovat informaci o kvalitě spočteného výsledku (pokud tímto výsledkem má být báze nulového prostoru matice), viz podrobnější komentář v otázkách k diskusi.

Odborná úroveň. Odborná úroveň práce není příliš vysoká. Text obsahuje řadu nepřesností. Zdroje jsou správně citovány.

Formální úprava. Práce obsahuje velké množství typografických chyb. Na mnoha místech chybí interpunkce, matematické symboly v textu nejsou často vysázeny matematickém prostředí (mezi $).

Závěr

I přes výhrady uvedené výše a v dalším detailním popisu doporučuji práci uznat jako bakalářskou práci.

V Praze, 23. července 2024

doc. RNDr. Petr Tichý, Ph.D.
KNM, MFF UK

Otázky k diskusi

- Autor by měl především vysvětlit, jak byly jednotlivé metody v MATLABu implemenovány, zda pomocí vestavěných funkcí či zda byly naprogramovány. Jak byly generovány v Matlabu řídké matice? Byl ke spočtení Gauss-Jordanova rozkladu použit vestavěný příkaz `rref` nebo byl tento rozklad naprogramován autorem?

- Byl bych rád, aby autor vyjádřil svůj názor k následující úvaze týkající se měření přesnosti výpočtu. Autor měří přesnost výpočtu pomocí veličiny

$$\|AB\|_F .$$

  Pokud B obsahuje bázi nulového prostoru, pak by mělo platit $\|AB\|_F = 0$. Pro srovnání přesnosti jednotlivých metod by ale mohlo být zohledněno následující:

  1. Jednotlivé metody vracejí různé matice B. Jelikož veličina uvedená výše v podstatě měří to, zda jsou sloupce matice B ortogonální na řádky matice A, měly by asi být sloupce B normovány kvůli férovému srovnání přesnosti jednotlivých metod.
  2. Cílem je spočíst bázi nulového prostoru. Uvedená veličina však měří pouze to, zda sloupce matice B leží v nulovém prostoru matice A, ale nezohledňuje jak „kvalitní“ bázi nulového prostoru jsme získali. Měření přesnosti pomocí výše uvedené veličiny by tedy mohlo být doplněno grafem, který například vykresluje číslo podmíněnosti matice B.

Poznámky

Na tyto poznámky není nutné reagovat (pokud autor s uvedeným souhlasí).

- Titulní strana: Správný název je „Katedra numerické matematiky“.
- Graf na straně 2 neznázorňuje „pojem nulového prostoru“, pouze demonstruje souvislost mezi dimenzí nulového prostoru a počtem komponent grafu.
- Strana 4, řádek 2 textu. „Řád matice“ se definuje pro čtvercové matice. Zde je ale tento pojem použit pro obdélníkovou matici.
- Strana 4, Definice 4. Pro komplexní matice je potřeba v definici použít $|a_{i,j}|^2$. Navíc v druhé sumě má být index j.
- Sekce 1.1.2. Tok myšlenek v této sekci mi nepřijde srozumitelný.
  - V prvním bodě hovoříte o transformaci A na bidiagonální matici C,
  $$C = PAQ.$$
  - V druhém bodě hovoříte o výpočtu singulárního rozkladu matice C, tedy zřejmě například
  $$C = \widetilde{U}\Sigma\widetilde{V}^*.$$
  - Nyní by se měl z uvedené transformace a ze singulárního rozkladu C poskládat SVD matice A,
  $$A = \underbrace{\left(P^*\widetilde{U}\right)}_{U}\Sigma\underbrace{\left(\widetilde{V}^*Q^*\right)}_{V^*}.$$
- Strana 8. „a potom platí, že hledaná matice nulového prostoru je $B = P_2V_2$.“ Tento vztah je uveden aniž by bylo čtenáři zřejmé, co je V_2. To se dozví až později.
- Strana 9, 1. řádek. Autor automaticky předpokládá, že je během eliminace prováděna permutace, abychom zamezili dělení nulou. Uvedený matematický popis ale provádění permutací neodpovídá. Eliminační matice by se měly prokládat s permutačními. Uvedený popis odpovídá provádění eliminace bez permutací.
- Odstavec 1.2.1. Tento odstavec (a jemu podobné pro ostatní rozklady) by měl odpovídat na základní otázku, která je cílem práce: Je-li dán nějaký rozklad matice, jak spočíst bázi nulového prostoru. Místo toho, aby autor podrobně popsal postup, jak získat matici B, odbývá popis větou typu „položíme-li ..., pak hledané řešení úlohy je ...“. Podle mého názoru by autor měl vyjít z podmínky $AB = 0$ a dosazením rozkladu za matici A dojít postupnými úvahami a úpravami k tvaru matice B.
- Odstavec 1.5. Věta 6. V uvedené citaci (strana 246 knihy Golub a Van Loan 1996) jsem větu o existenci QR nenašel.

- Odstavec 1.5. Autor odvozuje QR rozkladu pomocí Gram-Schmidtova procesu. Pokud však autor v numerických experimentech používá matlabovský příkaz `qr`, pak používá QR rozklad spočtený pomocí Householderových reflexí. Prezentovaná teorie tak neodpovídá algoritmům použitým v numerických experimentech.

- Strana 13. „Ve výpočtu výše jsme předpokládali, že prvních m sloupcových vektorů matice A jsou lineárně nezávislé, což lze, neboť matice A je hodnosti m.“ Předpokladem je, že matice A má hodnost m, tedy má lineárně nezávislé řádky. To samozřejmě neznamená, že i prvním m sloupců je lineárně nezávislých.

- Strana 15. „tak by podle Věty 5 mohl být výpočet singulárních čísel nepřesný.“ Nerozumím tomu, jak souvisí Věta 5 o existenci singulárního rozkladu s možným nepřesným spočtením singulárních čísel.

- Strana 16. „SVD je numericky stabilní metoda“. SVD je rozklad, není to metoda. Metoda výpočtu SVD je naznačena v odstavci 1.1.2 a je obvykle realizována například Golub-Reinschovým algoritmem.

- Strana 16. „u ICGS obecně nelze počet operací odhadnout“. Zkratka ICGS nebyla zavedena. U iterovaného CGS je počet operací zhruba počtem operací CGS ($2n^3$) násobeno počtem iterací. Jelikož bylo dokázáno, že ortogonalizovat stačí dvakrát (pak už je ztráta ortogonality na úrovni strojové přesnosti), lze počet operací pro ICGS odhadnout pomocí $4n^3$.