

# Posudek bakalářské práce

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy

**Autor práce** Jan Pijálek  
**Název práce** Iterative Methods for First-Order Nash Equilibria in Zero-Sum Games  
**Rok odevzdání** 2024  
**Studijní program** Informatika  
**Specializace** General Computer Science

**Autor posudku** David Hartman Oponent  
**Pracoviště** Informatický ústav Univerzity Karlovy

## K celé práci

lepší OK horší nevyhovuje

	lepší	OK	horší	nevyhovuje
Obtížnost zadání	X			
Splnění zadání	X			
Rozsah práce <i>... textová i implementační část, zohlednění náročnosti</i>	X			

Práce se zabývá stanovením Nashova ekvilibria prvního řádu u her dvou hráčů s nulovým součtem, u kterých jsou množiny strategií kompaktní konvexní podmnožiny  $\mathbb{R}^n$ .

Student zavádí potřebné definice k pochopení hlavního pojmu včetně vztahu ke klasickému Nashovu ekvilibriu, přičemž ukazuje i jejich odlišnost. Dále popisuje hlavní algoritmus, nazvaný Regularized Nikaidô-Isoda Stochastic Gradient Descent (RNI-SGD), známý z literatury pro aproximaci Nashových ekvilibrií prvního řádu. Postupně představí jednotlivé komponenty včetně regularizovaných Nikaidô-Isoda funkcí či metodu spádových směrů využívající projekce a samotný algoritmus. U popisu algoritmu, veden původním popisem stochastické verze, ukazuje deterministickou variantu. Tato analýza vyústí ve Větě 2, která analyzuje konvergenci této verze algoritmu. Ačkoliv je důkaz věty 2 variantou stochastického důkazu u původní verze algoritmu, je tato analýza přínosná, pěkná a také velmi čtivá.

Dále autor popisuje a poskytuje (v rámci repository) implementaci algoritmu řešící samotný deterministický algoritmus. Ten následně na příkladech z literatury hodnotí ohledem na jeho schopnost dosažení Nashova ekvilibria prvního řádu. V následné kapitole také porovnává algoritmus s existující alternativou Stay-on-the-Ridge (STON'R) algoritmu na srovatelných instancích a ukazuje také příklady, kdy navržený algoritmus lze použít a STON'R nikoliv.

Práci lze označit za velmi kvalitní, obsahující všechny potřebné komponenty pro zevrubnou analýzu algoritmů včetně důkazu konvergence, kvalitní implementace i testování. Zvláště oceňuji, že autor nespadá do simplifikace popisu a důkazů a snaží se důkazy dovádět do detailního popisu a porozumnění.

Práci velmi rád doporučuji k obhajobě a hodnotím známkou výborně. K samotné práci mám několik otázek či poznámek.

1. Při čtení důkazu věty 2 je na straně 18 na řádku 11 od spoda, tedy při definici Eukleidovské projekce při využití rovnice 2.13 použit gradient  $\nabla_{x^t} P(\mathbf{z}^t)$ . Spíše bych čekal  $\nabla_{x^t} P(\mathbf{x}^t)$ . Možná se jedná o jednoduchou úvahu, prosím zdůvodněte.
2. Jak vypadá prostor hyperparametrů. Nebyl problém protestovat všechny možnosti? Jak by se postupovalo, pokud by instance byla příliš složitá?
3. Ke zmiňované překvapivé relaci mezi úspěšností RNI-GD a dimenzí matice by bylo zajímavé více otestovat jestli nezávisí na řídkosti či jiné struktuře matice. Máte k tomuto nějakou intuici kromě extrémních případů?
4. V závěru zmiňujete "Empirically, for large matrices, the loss values of the pairs returned by RNI-GD closely approximated the game's value". To je trochu nadnesené, když si uvědomíme kolik (ve smyslu strukturálního) bylo otestováno případů. Je jasné, že v oblasti her toto není jednoduché. Měl byste nějaký nápad jak toto zevrubněji otestovat?

## Textová část práce

		lepší	OK	horší	nevyhovuje
Formální úprava	<i>... jazyková úroveň, typografická úroveň, citace</i>	X			
Struktura textu	<i>... kontext, cíle, analýza, návrh, vyhodnocení, úroveň detailu</i>	X			
Analýza		X			

Práce je kvalitně strukturovaná s dobrým popisem, funkční návazností a velmi dobrým jazykovým vyvedením s minimem chyb. Mám jen několik malinko poznámek k formální stránce:

1. V definicích 2.4 a 2.5 se mi zdá, že by směrová varze gradientu měla být dle  $\mathbf{x}$ .
2. Na straně 17 v důkazu věty 2 v definici  $\nabla P(\mathbf{z}^t)$  je závorka navíc.
3. Zdá se mi, že v důkazu Věty 2 na straně při hledání hodní meze  $P(\mathbf{z}^{t+1})$  chceme omezit  $\langle \nabla P(\mathbf{z}^t), \mathbf{G}_\alpha^t \rangle$  spíše zdola než shora.
4. Z kontextu je to sice pochopitelné, ale počínajíc stranou 29 je několikrát použito  $\varphi(x^*, y^*)$  bez definice.
5. Možná by bylo lepší v tabulkách příkladů v kapitole 4.2 rovnou ukazovat, který algoritmus dosáhl FONE, byť je to vždy dále popsáno v textu.

### Implementační část práce

lepší    OK    horší    nevyhovuje

Kvalita návrhu    ... architektura, struktury a algoritmy, použité technologie	X			
Kvalita zpracování    ... jmenné konvence, formátování, komentáře, testování	X	X		
Stabilita implementace	X			

Implementace je dobrá a srozumitelná také díky relativně jasnému popisu v práci. Samozřejmě by bylo vhodné trochu více okomentovat některé části a popsat samotné využití, ale lze říci, že pro potřebu testování byla zvolena vhodná míra složitosti i popisu, která nezanášá potřebu přílišné modifikace a umožňuje dobrou znovupoužitelnost.

**Celkové hodnocení**    Výborně  
**Práci navrhuji na zvláštní ocenění**    Ne

Datum 26.8.2024