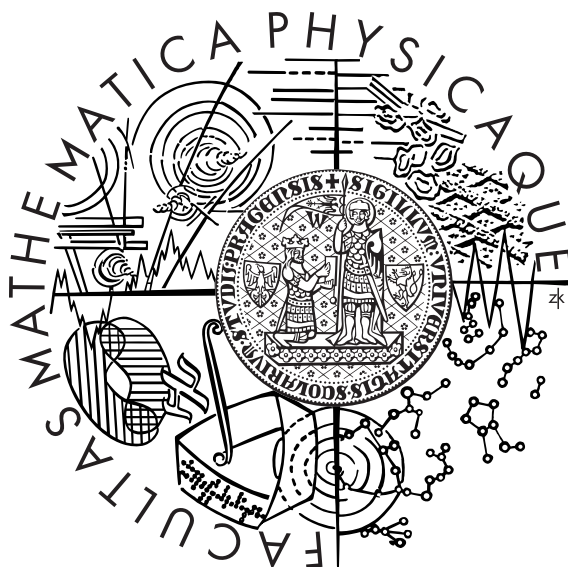


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Karel Findejs

Kombinovaná metoda konečných objemů a konečných prvků pro řešení 3D proudění

Katedra numerické matematiky

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Jiří Felcman, CSc.

Studijní program: Matematika, Výpočtová matematika, Software

Na tomto místě bych chtěl poděkovat především Doc. RNDr. Jiřímu Felcmanovi, CSc. za cenné rady, připomínky, trpělivost a čas, který mi věnoval při psaní této práce. Děkuji také Doc. RNDr. Vítu Dolejšimu, PhD. za pomoc se softwarem a konzultace některých problémů.

Práce je částí výzkumného projektu MSM 0021620839 financovaného MŠMT a částečně podporovaného Grantovou agenturou Univerzity Karlovy, projekt číslo 343/2005/B-MAT/MF.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 19. dubna 2005

Karel Findejs

Obsah

1	Rovnice popisující proudění	8
1.1	Navierovy–Stokesovy rovnice	8
1.2	Eulerovy rovnice	10
1.3	Vlastnosti Eulerových rovnic	11
2	Metoda konečných objemů	13
2.1	Síť konečných objemů	13
2.2	Odvození obecného schématu metody konečných objemů	14
2.3	Okrajové podmínky	17
2.4	CFL podmínka stability	17
2.5	Kombinovaná metoda konečných objemů a konečných prvků	18
3	Numerické toky HLL a HLLC	19
3.1	Riemannův problém	19
3.2	Godunovova metoda	21
3.3	Riemannův problém a integrální vztahy	22
3.4	Přibližný Riemannův řešič HLL	24
3.5	Přibližný Riemannův řešič HLLC	25
3.6	Odhady rychlostí vln	27
4	Schéma typu ADER	29
4.1	Odvození schématu typu ADER	29
4.2	Zobecněná Godunovova metoda	30
4.3	Řešení zobecněného Riemannova problému	31
4.4	Konstrukce zobecněného Godunovova toku	33
4.5	CFL podmínka stability	34
4.6	Algoritmus ADER	35
5	Numerické experimenty	36
5.1	Lineární rekonstrukce na kartézské síti	37
5.2	Lineární rekonstrukce na trojúhelníkové síti	38
5.3	Odhad chyby a řádu přesnosti	40
5.4	Sodova trubice	41
5.5	Vortex evolution problém	43

6	Numerické výsledky	44
6.1	Srovnání Riemannových řešičů HLL a HLLC	44
6.2	Srovnání schémat typu ADER2	44
6.3	Tabulky	45
A	Obrázky	54

Abstracts

Název práce: Kombinovaná metoda konečných objemů a konečných prvků pro řešení 3D proudění

Autor: Karel Findejs

Katedra (ústav): Katedra numerické matematiky

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Jiří Felcman, CSc.

E-mail vedoucího: felcman@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Kombinovaná metoda konečných objemů a konečných prvků je velice efektivní a robustní schéma používané pro řešení Navierových–Stokesových rovnic popisujících vazké stlačitelné proudění. Využívá výhod metody konečných objemů (FVM), která dává dobré výsledky při řešení Eulerových rovnic popisujících nevazké proudění a metody konečných prvků (FEM), která se používá pro diskretizaci vazkých členů systému. V práci se zabýváme metodou konečných objemů, která pro řešení využívá tzv. *numerický tok*. V první části odvodíme numerické toky HLL a HLLC, které navrhli Harten, Lax a Van Leer a provedeme jejich srovnání s dalšími toky. Hlavní náplní práce je zvýšení řádu přesnosti FVM. Jednou z možností je tzv. schéma typu ADER, které odvodili Toro a Titarev v [7, 10, 8] pro kartézské sítě. Toto schéma je v práci rozšířeno na obecnou síť konečných objemů. V závěru práce jsou porovnány výsledky při použití schématu typu ADER druhého řádu z hlediska použitých sítí a z hlediska použité polynomiální rekonstrukce.

Klíčová slova: metoda konečných objemů, přibližný Riemannův řešič, schéma typu ADER, vyšší řád

Title: Combined finite volume–finite element method for solving of 3D flux

Author: Karel Findejs

Department: Department of Numerical Mathematics

Supervisor: Doc. RNDr. Jiří Felcman, CSc.

Supervisor’s e-mail address: felcman@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: Combined finite volume–finite element method is very efficient and robust scheme used for the solution of Navier–Stokes equations describing viscous compressible flow. It makes use of advantages of finite volume method (FVM), which gives good results for the Euler equations describing inviscid flow and finite element method (FEM) used for discretization of viscous terms of the complete system. In this work we are engaged in the finite volume method. The special attention is paid to the so-called *numerical flux*. In the first part we derive numerical fluxes HLL and HLLC proposed by Harten, Lax and Van Leer and present a comparison with other fluxes. The main task of this work is to increase the order of accuracy of FVM. One possibility is the so-called ADER scheme, which was proposed by Toro and Titarev in [7, 10, 8] for Cartesian meshes. In this work this scheme is extended to general finite volume mesh. In the end of the work we compare results of ADER scheme of second order from the point of used meshes and from the point of used polynomial reconstruction.

Keywords: finite volume method, approximate Riemann solver, ADER scheme, higher order

Úvod

V současné době je na KNM MFF UK vyvíjen numerický software pro výpočet vazkého stlačitelného proudění, který je založen na kombinované metodě konečných objemů a konečných prvků. Cílem této práce je tento software rozšířit o další moduly, naprogramovat a odladit numerické toky HLL a HLLC a dále se zaměřit na schémata vyššího řádu přesnosti.

Fyzikální model vazkého stlačitelného proudění je popsán systémem tzv. *Navierových–Stokesových rovnic*. Některé problémy však dostatečně přesně popisuje zjednodušený systém popisující nevazké stlačitelné proudění, tzv. *Eulerovy rovnice*. Moderní schémata pro řešení Eulerových rovnic jsou založena na metodě konečných objemů (FVM) jejíž podstatnou součástí je definice tzv. *numerického toku*. Existuje řada možností, jak tento tok definovat, jedna z nich vede na tzv. *Godunovovu metodu*. Ta je založena na řešení tzv. *Riemannova problému* a konstrukci tzv. *přibližného Riemannova řešiče*. V práci formulujeme Riemannův problém a definujeme pojem Riemannův řešič. Dále popíšeme odvození dvou přibližných Riemannových řešičů HLL a HLLC s cílem algoritmizovat je tak, aby podle něj bylo možné napsat počítačový program. Konstrukce a příklady numerických výpočtů jsou uvedeny v kapitole 5, zároveň je provedeno numerické srovnání s dalšími metodami Godunovova typu, které byly implementovány v softwarovém systému KNM v předchozích letech.

V praxi se však vyskytují problémy, pro které popis pomocí Eulerových rovnic nestačí a je potřeba řešit celý systém Navierových–Stokesových rovnic. Jedná se o problémy, ve kterých se při proudění tekutiny vyskytují mezní vrstvy, úplavy, nespojitosti (rázové vlny). Z tohoto důvodu byla v práci [1] navržena kombinovaná metoda konečných objemů a konečných prvků, kde se řeší zvlášť nevazký systém Eulerových rovnic pomocí metody konečných objemů a zvlášť čistě vazký systém, který se diskretizuje pomocí metody konečných prvků (FEM). V této práci se detailněji zaměříme na metodu konečných objemů.

Metoda konečných objemů reprezentuje efektivní a robustní schéma pro řešení Eulerových rovnic popisujících nevazké stlačitelné proudění, dosahuje však pouze prvního řádu přesnosti. Proto byla v posledním desetiletí snaha tento nedostatek řešit. Vynaložené úsilí přineslo metody typu TVD (Total Variation Diminishing), ENO (Essentially Non-Oscillatory), WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) apod., které dosahovaly vyššího řádu přesnosti. V posledních letech získala na popularitě tzv. *nespojité Galerkinova metoda*, která v jistém smyslu zobecňuje FVM. V této práci se budeme zabývat jinou možností, jak zvýšit řád přesnosti FVM. Jedná se o zobecnění „klasické“ Godunovovy metody na libovolný řád, které popisují Toro a Titarev v [7, 10, 9] a nazývají je *schématem typu ADER* (zkratku ADER vysvětluje Käser slovy „Arbitrary high order, with using high order DERivatives of polynomials“). Toto schéma je založeno na diskretizaci pomocí FVM kombinované s polynomiální rekonstrukcí vyššího řádu. V článcích [7, 10, 9] odvozuje Toro

zobecněný Godunovův tok pro metodu konečných diferencí, která je speciálním případem FVM na kartézské síti. Na tuto práci navázal Käser v [4, 5], který aplikoval schéma typu ADER na skalární hyperbolické rovnice na nestrukturovaných triangulárních sítích. Jeho výsledky ukazují, že schéma typu ADER dosahuje požadovaného řádu přesnosti i v tomto případě. V této práci navážeme na Käsera a zformulujeme schéma typu ADER pro Eulerovy rovnice na obecné síti konečných objemů. Na závěr se aplikujeme schéma typu ADER druhého řádu na dvourozměrné problémy a porovnáme výsledky na kartézských sítích a nestrukturovaných trojúhelníkových sítích.

Kapitola 1

Rovnice popisující proudění

1.1 Navierovy–Stokesovy rovnice

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 1, 2, 3$ je oblast s lipschitzovskou hranicí vyplněná tekutinou, $(0, T)$, $T > 0$ je časový interval, ve kterém hledáme řešení. Pak v tzv. *časoprostorovém válci* $Q_T = \Omega \times (0, T)$ je vazké stlačitelné proudění popsáno následujícími rovnicemi, které představují fyzikální zákony zachování:

- rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.1)$$

- pohybové (Navierovy–Stokesovy rovnice)

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v_i \mathbf{v}) = \rho f_i + \operatorname{div}(\mathcal{T})_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.2)$$

- rovnice pro energii

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(E \mathbf{v}) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \operatorname{div}(\mathcal{T} \mathbf{v}) + \rho q - \operatorname{div} \mathbf{q}, \quad (1.3)$$

kde používáme následující značení:

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$	=	prostorové souřadnice,
t	=	čas,
ρ	=	hustota,
$\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N)$	=	rychlost,
$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N)$	=	hustota vnějších objemových sil,
E	=	celková energie,
q	=	hustota tepelných zdrojů,
\mathbf{q}	=	tepelný tok,
$\mathcal{T} = (\tau_{ij})_{i,j=1}^N$	=	tenzor napětí:

Vztah mezi tepelným tokem \mathbf{q} a absolutní teplotou θ je vyjádřen pomocí Fourierova zákona:

$$\mathbf{q} = -k \nabla \theta, \quad (1.4)$$

kde k je konstanta tepelné vodivosti.

Dále uvažujeme, že se jedná o proudění tzv. newtonovské tekutiny. Tedy můžeme vyjádřit závislost tenzoru napětí na tzv. *tenzoru rychlosti deformace* \mathbb{D} následujícím způsobem:

$$\mathcal{T} = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v})\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D},$$

kde $\mathbb{D} = (d_{ij})_{i,j=1}^N$, $d_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$, p značí tlak a μ , λ jsou konstanty nebo skalární funkce termodynamických veličin ρ , θ , p . Dále tenzor napětí rozdělíme na vazkou část \mathcal{T}' a nevazkou část $-p\mathbb{I}$ máme tedy:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}' - p\mathbb{I}, \quad \text{kde } \mathcal{T}' = \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D}. \quad (1.5)$$

Pro řešení proudění tedy dostáváme pro $N = 3$ systém pěti rovnic (1.1) – (1.3) pro sedm neznámých $\rho, v_1, v_2, v_3, p, E, \theta$. Úplný systém popisující proudění tepelně vodivého plynu proto obsahuje ještě rovnice

$$p = p(e, \rho), \quad (1.6)$$

$$\theta = \theta(e, \rho), \quad (1.7)$$

kde e je specifická vnitřní energie plynu. Velmi často uvažujeme tzv. *dokonalý plyn*, jehož stavová rovnice má tvar

$$p = R\theta\rho, \quad (1.8)$$

kde $R > 0$ je *plynová konstanta*, kterou lze vyjádřit následovně

$$R = c_p - c_v, \quad (1.9)$$

kde c_p a c_v značí *měrné teplo při konstantním tlaku* resp. *měrné teplo při konstantním objemu*. Z experimentů víme, že $c_p > c_v$, proto $R > 0$. Navíc pro ideální plyn můžeme předpokládat, že c_p a c_v jsou konstanty. Veličina

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} > 1 \quad (1.10)$$

se nazývá *Poissonova adiabatická konstanta*. Například pro vzduch, $\gamma = 1.4$. Vnitřní energie dokonalého plynu je dána vztahem

$$e = c_v\theta. \quad (1.11)$$

Uvedené vztahy vedou na následující vyjádření tlaku a teploty pro dokonalý plyn

$$p = (\gamma - 1)(E - \rho|\mathbf{v}|^2/2), \quad (1.12)$$

$$\theta = (E/\rho - |\mathbf{v}|^2/2)/c_v, \quad (1.13)$$

Rovnice (1.12)–(1.13) nahradíme vztahy (1.6)–(1.7). Nyní za pomoci vztahů (1.4) a (1.5) přepíšeme rovnice (1.1)–(1.3) pro $N = 3$ do následujícího tvaru:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^N \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} = \mathbf{F}(\mathbf{w}) + \sum_{s=1}^N \frac{\partial \mathbf{R}_s(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w})}{\partial x_s}, \quad (1.14)$$

kde pro $N = 3$ je

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho f_1 \\ \rho f_2 \\ \rho f_3 \\ \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + pq \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_s(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \rho v_s \\ \rho v_1 v_s + \delta_{1s} p \\ \rho v_2 v_s + \delta_{2s} p \\ \rho v_3 v_s + \delta_{3s} p \\ (E + p)v_s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_s(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau'_{s1} \\ \tau'_{s2} \\ \tau'_{s3} \\ (\mathbf{T}'\mathbf{v})_s + k \frac{\partial \theta}{\partial x_s} \end{pmatrix}$$

Zde \mathbf{w} se nazývá *stavový vektor*, \mathbf{f}_s jsou *nevazké (Eulerovy) toky* a \mathbf{R}_s *vazké toky*. Systém (1.14) nazýváme *stlačitelné Navierovy–Stokesovy rovnice pro dokonalý plyn*.

1.2 Eulerovy rovnice

Předpokládejme, že proudění je adiabatické, tj. zanedbáváme tepelnou vodivost. Navíc, protože je plyn lehký, můžeme zanedbat i vnější objemovou sílu. Budeme se zabývat prouděním dokonalého plynu, pro který platí stavová rovnice (1.8). Systém rovnic (1.1)–(1.3) popisujících proudění za těchto předpokladů v časoprostorovém válci $Q_T = \Omega \times (0, T)$ může být zjednodušen do následujícího tvaru

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v_i \mathbf{v}) = \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, 3, \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(E \mathbf{v}) = \operatorname{div}(-p \mathbf{v}), \quad (1.17)$$

$$p = (\gamma - 1)(E - \rho |\mathbf{v}|^2 / 2). \quad (1.18)$$

Systém rovnic (1.15)–(1.18) můžeme podobně jako (1.14) přepsat takto:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^N \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} = 0, \quad N = 3, \quad (1.19)$$

kde stejně jako v (1.14)

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \rho v_s \\ \rho v_1 v_s + \delta_{1s} p \\ \rho v_2 v_s + \delta_{2s} p \\ \rho v_3 v_s + \delta_{3s} p \\ (E + p)v_s \end{pmatrix}.$$

\mathbf{w} je stavový vektor a $\mathbf{f}_s(\mathbf{w})$ je *tok* veličiny \mathbf{w} ve směru x_s . Obvykle je soustava (1.19) nazývána *systém Eulerových rovnic*, nebo jednoduše *Eulerovy rovnice*. Funkce $\rho, v_1, \dots, v_N,$

p se nazývají *primitivní proměnné*, kdežto funkce $w_1 = \rho$, $w_2 = \rho v_1$, \dots , $w_{m-1} = \rho v_N$, $w_m = E$, $m = N + 2$ jsou *konzervativní proměnné*. Definiční obor vektorových funkcí \mathbf{f}_s je otevřená množina $D \subset \mathbb{R}^m$ vektorů $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)^T$ takových, že odpovídající hustota a tlak jsou kladné:

$$D = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^m; w_1 = \rho > 0, w_s = \rho v_s \in \mathbb{R} \text{ pro } s = 2, \dots, m-1, \right. \\ \left. w_m - \sum_{i=2}^{m-1} w_i^2 / (2w_1) = p / (\gamma - 1) > 0 \right\}. \quad (1.20)$$

Zřejmě platí, že $\mathbf{f}_s \in C^1(D)^m$.

1.3 Vlastnosti Eulerových rovnic

V této sekci připomeneme několik důležitých vlastností Eulerových rovnic. Derivováním rovnice (1.19) a pomocí věty o derivaci složené funkce obdržíme *kvazilineární systém parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu*

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^N \mathbb{A}_s(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_s} = 0, \quad (1.21)$$

kde \mathbb{A}_s jsou matice typu $m \times m$ definované pro $\mathbf{w} \in D$ jako

$$\mathbb{A}_s(\mathbf{w}) = \frac{D\mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{D\mathbf{w}} = \left(\frac{\partial f_{si}}{\partial w_j} \right)_{i,j=1}^m, \quad (1.22) \\ = \text{Jacobiho matice zobrazení } \mathbf{f}_s.$$

Vektorové funkce \mathbf{f}_s definované v (1.19) je homogenní zobrazení řádu 1 tj.

$$\mathbf{f}_s(\alpha \mathbf{w}) = \alpha \mathbf{f}_s(\mathbf{w}), \quad \alpha > 0. \quad (1.23)$$

Navíc platí

$$\mathbf{f}_s(\mathbf{w}) = \mathbb{A}_s(\mathbf{w})\mathbf{w}. \quad (1.24)$$

Matice $\mathbb{A}_s(\mathbf{w})$ mají reálná vlastní čísla

$$\tilde{\lambda}_1 = v_s - a, \quad \tilde{\lambda}_2 = \dots = \tilde{\lambda}_{m-1} = v_s, \quad \tilde{\lambda}_m = v_s + a, \quad (1.25)$$

kde

$$a = \sqrt{\gamma p / \rho} \quad (1.26)$$

je rychlost zvuku odpovídající stavu \mathbf{w} . Odpovídající vlastní vektory $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m$ jsou lineárně nezávislé. Navíc, označíme-li $\tilde{\mathbb{T}}$ regulární matici s vlastními vektory ve sloupcích, potom platí

$$\mathbb{A}_s(\mathbf{w}) = \tilde{\mathbb{T}}(\mathbf{w})\tilde{\mathbb{\Lambda}}(\mathbf{w})\tilde{\mathbb{T}}^{-1}(\mathbf{w}), \quad (1.27)$$

kde

$$\tilde{\mathbb{\Lambda}}(\mathbf{w}) = \text{diag} \left(\tilde{\lambda}_1(\mathbf{w}), \dots, \tilde{\lambda}_m(\mathbf{w}) \right). \quad (1.28)$$

To znamená, že matice \mathbb{A}_s je diagonalizovatelná.

Uvažujme soustavu algebraických rovnic

$$\det \left(\lambda \mathbb{I} - \sum_{j=1}^N n_j \mathbb{A}_j(\mathbf{w}) \right) = 0, \quad (1.29)$$

kde $\mathbb{A}_j(\mathbf{w})$ jsou matice koeficientů kvazilineárního systému (1.21). Řešení $\lambda_j = \lambda_j(\mathbf{w}, \mathbf{n})$, $j = 1, \dots, m$ soustavy (1.29) nazveme *zobecněná vlastní čísla* systému (1.21). Lze ukázat viz. [2] str. 108, že všechna vlastní čísla tohoto systému jsou reálná a navíc že matice $\mathbb{P} := \sum_{j=1}^N n_j \mathbb{A}_j(\mathbf{w})$ je diagonalizovatelná. Tedy Eulerovy rovnice (1.19) tvoří *diagonálně hyperbolický systém*.

Každé $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^T \in \mathbb{R}^3$ lze vyjádřit ve sférických souřadnicích tvaru

$$\mathbf{n} = r(\cos \alpha \cos \beta, \sin \alpha \cos \beta, \sin \beta)^T, \quad (1.30)$$

kde $r = |\mathbf{n}|$, $\alpha \in [0, 2\pi)$ a $\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Potom můžeme definovat regulární matici

$$\mathbb{Q}(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

Pokud definujeme nový kartézský systém souřadnic $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ jako

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \mathbb{Q}_0(\mathbf{n}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (1.32)$$

kde $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathbb{R}^3$ a

$$\mathbb{Q}_0(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad (1.33)$$

potom transformace stavového vektoru \mathbf{w} dává stavový vektor

$$\mathbf{q} = \mathbb{Q}(\mathbf{n})\mathbf{w}. \quad (1.34)$$

Uvažujme transformovaný stavový vektor \mathbf{q} jako funkci $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ a času t :

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}, t) = \mathbb{Q}(\mathbf{n})\mathbf{w}(\mathbb{Q}_0^{-1}(\mathbf{n})(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}), t). \quad (1.35)$$

Potom vektorová funkce $\mathbf{w} \in C^1(Q_T)^m$ splňuje Eulerovy rovnice právě tehdy, když funkce $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}, t)$ daná vztahem (1.35) splňuje transformovaný systém Eulerových rovnic

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \sum_{s=1}^N \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{q})}{\partial \tilde{x}_s} = 0. \quad (1.36)$$

Tedy po transformaci kartézských souřadnic zůstává systém Eulerových rovnic formálně nezměněn. Tato vlastnost se nazývá *rotační invariantnost Eulerových rovnic* a zcela analogicky platí i pro $N = 2$.

Kapitola 2

Metoda konečných objemů

Předpokládejme proudění nevazkého dokonalého plynu v ohraničené oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ a časový interval $(0, T)$ s $T > 0$, $N = 2$, nebo 3 pro 2D resp. 3D proudění. Naším cílem je numericky řešit Eulerovy rovnice (1.19) tj.

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^N \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} \quad \text{v } Q_T = \Omega \times (0, T) \quad (2.1)$$

s počáteční podmínkou

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{w}^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.2)$$

s danou vektorovou funkcí \mathbf{w}^0 a okrajovými podmínkami

$$B(\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)) = 0 \quad \text{pro } (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (2.3)$$

kde B je vhodný hraniční operátor.

2.1 Síť konečných objemů

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast vyplněná tekutinou. Jestliže $N = 2$, pak Ω_h značí polygonální aproximaci Ω . To znamená, že hranice $\partial\Omega_h$ sestává z konečně mnoha uzavřených po částech lineárních křivek. Pro $N = 3$, Ω_h bude značit polyhedrální aproximaci Ω . Systém $\mathcal{D}_h = \{D_i\}_{i \in J}$, kde $J \subset \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, \dots\}$ je indexová množina a $h > 0$, budeme nazývat *sítí konečných objemů* v Ω_h , jestliže D_i , $i \in J$, jsou uzavřené *mnohoúhelníky* resp. *mnohostěny*, se vzájemně disjunktními vnitřky takové, že

$$\bar{\Omega}_h = \bigcup_{i \in J} D_i. \quad (2.4)$$

Prvky $D_i \in \mathcal{D}_h$ jsou nazývány *konečné objemy*. Dva konečné objemy $D_i, D_j \in \mathcal{D}_h$ jsou buď disjunktní, nebo jejich průnik je tvořen částí jejich hranic ∂D_i a ∂D_j . Jestliže $\partial D_i \cap \partial D_j$ obsahuje aspoň jednu úsečku (pro $N = 2$), nebo část roviny (pro $N = 3$), pak nazýváme D_i a D_j *sousedními konečnými objemy* (nebo jednoduše sousedy). Pro dva sousedy $D_i, D_j \in \mathcal{D}_h$ položíme

$$\Gamma_{ij} = \partial D_i \cap \partial D_j = \Gamma_{ji}. \quad (2.5)$$

Zřejmě Γ_{ij} je tvořen konečně mnoha úsečkami resp. částmi rovin $\Gamma_{ij}^\alpha = \Gamma_{ji}^\alpha$:

$$\Gamma_{ij} = \bigcup_{\alpha=1}^{\beta_{ij}} \Gamma_{ij}^\alpha. \quad (2.6)$$

Γ_{ij}^α budeme nazývat stěny D_i .

V dalším budeme používat následující značení:

$$\begin{aligned} |D_i| &= N\text{-rozměrná míra } D_i \\ &= \text{plocha } D_i \text{ jestliže } N = 2, \text{ nebo objem } D_i \text{ je-li } N = 3, \\ |\Gamma_{ij}^\alpha| &= (N-1)\text{-rozměrná míra } \Gamma_{ij}^\alpha \\ &= \text{délka } \Gamma_{ij}^\alpha \text{ jestliže } N = 2, \text{ nebo plocha } \Gamma_{ij}^\alpha \text{ je-li } N = 3, \\ \mathbf{n}_{ij}^\alpha &= ((n_{ij}^\alpha)_1, \dots, (n_{ij}^\alpha)_N)^T = \text{jednotková vnější normála k } \partial D_i \text{ na } \Gamma_{ij}^\alpha, \\ h_i &= \text{diam}(D_i), \\ h &= \sup_{i \in J} h_i, \\ |\partial D_i| &= (N-1)\text{-rozměrná míra } \partial D_i, \\ s(i) &= \{j \in J; j \neq i, D_j \text{ je soused } D_i\}. \end{aligned}$$

Zřejmě platí, že $\mathbf{n}_{ij}^\alpha = -\mathbf{n}_{ji}^\alpha$.

Úsečky resp. části roviny, které tvoří průniky $\partial\Omega_h$ s konečnými objemy D_i přilehlými k $\partial\Omega_h$ budou značeny S_j a číslovány zápornými indexy j tvořícími množinu $J_B \subset Z^- = \{-1, -2, \dots\}$. Proto $J \cap J_B = \emptyset$ a $\partial\Omega_h = \bigcup_{j \in J_B} S_j$. Pro konečný objem D_i přilehlý k hranici $\partial\Omega_h$ tj. je-li $S_j \subset \partial\Omega_h \cap \partial D_i$ pro některá $j \in J_B$ klademe

$$\begin{aligned} \gamma(i) &= \{j \in J_B; S_j \subset \partial D_i \cap \partial\Omega_h\}, \\ \Gamma_{ij} &= \Gamma_{ij}^1 = S_j, \quad \beta_{ij} = 1 \quad \text{pro } j \in \gamma(i). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Jestliže D_i není přilehlý k $\partial\Omega_h$ pak pokládáme $\gamma(i) = \emptyset$. Pomocí \mathbf{n}_{ij}^α opět značíme jednotkovou vnější normálu k ∂D_i na Γ_{ij}^α . Potom položíme

$$S(i) = s(i) \cup \gamma(i), \quad (2.8)$$

máme

$$\begin{aligned} \partial D_i &= \bigcup_{j \in S(i)} \bigcup_{\alpha=1}^{\beta_{ij}} \Gamma_{ij}^\alpha, \\ \partial D_i \cap \partial\Omega_h &= \bigcup_{j \in \gamma(i)} \bigcup_{\alpha=1}^{\beta_{ij}} \Gamma_{ij}^\alpha, \\ |\partial D_i| &= \sum_{j \in S(i)} \sum_{\alpha=1}^{\beta_{ij}} |\Gamma_{ij}^\alpha|. \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.2 Odvození obecného schématu metody konečných objemů

Předpokládejme, že $\mathbf{w} : \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ je klasické (tj. C^1 -) řešení systému (1.19), $\mathcal{D}_h = \{D_i\}_{i \in J}$ je síť konečných objemů v polyhedrální aproximaci Ω_h . Sestrojme dělení

$0 = t_0 < t_1 < \dots$ časového intervalu $[0, T]$ a označme $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ časový krok mezi t_k a t_{k+1} . Integrováním rovnice (1.19) přes množinu $D_i \times (t_k, t_{k+1})$ a použitím Greenovy věty na D_i dostaneme identitu

$$\int_{D_i} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \Big|_{t=t_k}^{t_{k+1}} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\int_{\partial D_i} \sum_{s=1}^N \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) n_s dS \right) dt = 0. \quad (2.10)$$

Navíc, vzhledem k (2.9) můžeme psát

$$\int_{D_i} (\mathbf{w}(\mathbf{x}, t_{k+1}) - \mathbf{w}(\mathbf{x}, t_k)) d\mathbf{x} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\sum_{j \in S(i)} \sum_{\alpha=1}^{\beta_{ij}} \int_{\Gamma_{ij}^\alpha} \sum_{s=1}^N \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) n_s dS \right) dt = 0. \quad (2.11)$$

Nyní aproximujeme integrální průměry $\int_{D_i} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t_k) d\mathbf{x} / |D_i|$ veličiny \mathbf{w} přes konečný objem D_i v časovém okamžiku t_k pomocí \mathbf{w}_i^k :

$$\mathbf{w}_i^k \approx \frac{1}{|D_i|} \int_{D_i} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t_k) d\mathbf{x}, \quad (2.12)$$

nazývaného hodnota *přibližného řešení* na objemu D_i v čase t_k . Dále aproximujeme tok $\sum_{s=1}^N \mathbf{f}_s(\mathbf{w})(n_{ij}^\alpha)_s$ veličiny \mathbf{w} přes stěnu Γ_{ij}^α ve směru \mathbf{n}_{ij}^α pomocí tzv. *numerického toku* $\mathbf{H}(\mathbf{w}_i^\ell, \mathbf{w}_j^\ell, \mathbf{n}_{ij}^\alpha)$, závislejícím na hodnotě přibližného řešení \mathbf{w}_i^ℓ na konečném objemu D_i , hodnotě \mathbf{w}_j^ℓ na D_j a normále \mathbf{n}_{ij}^α ve vhodných časových okamžicích t_ℓ :

$$\sum_{s=1}^N \mathbf{f}_s(\mathbf{w})(n_{ij}^\alpha)_s \approx \mathbf{H}(\mathbf{w}_i^\ell, \mathbf{w}_j^\ell, \mathbf{n}_{ij}^\alpha), \quad (2.13)$$

volíme například $\ell = k$, nebo $\ell = k + 1$. O numerickém toku \mathbf{H} předpokládáme, že má následující vlastnosti:

1. $\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n})$ je definovaný a spojitý na $D \times D \times \mathcal{S}_1$, kde D je definiční obor toků \mathbf{f}_s a \mathcal{S}_1 je jednotková sféra v \mathbb{R}^N : $\mathcal{S}_1 = \{\mathbf{n} \in \mathbb{R}^N; |\mathbf{n}| = 1\}$.

2. \mathbf{H} je *konzistentní*:

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{n}) = \sum_{s=1}^N \mathbf{f}_s(\mathbf{u}) n_s, \quad \mathbf{u} \in D, \quad \mathbf{n} \in \mathcal{S}_1. \quad (2.14)$$

3. \mathbf{H} je *konzervativní*:

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) = -\mathbf{H}(\mathbf{v}, \mathbf{u}, -\mathbf{n}), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in D, \quad \mathbf{n} \in \mathcal{S}_1. \quad (2.15)$$

Pokud \mathbf{H} splňuje podmínky (2.14) a (2.15), pak se metoda nazývá *konzistentní* resp. *konzervativní*.

Je-li $\Gamma_{ij}^\alpha \subset \partial\Omega_h$ (tj. konečný objem je přilehlý k $\partial\Omega_h$, $j \in \gamma(i)$, $\alpha = 1$ a $\Gamma_{ij}^1 = \Gamma_{ij}$), pak nemáme souseda D_j objemu D_i přilehlého ke stěně Γ_{ij} z vnějšku Ω_h a je nezbytné určit \mathbf{w}_j^ℓ na základě okrajových podmínek viz. sekce 2.3. Dostáváme aproximaci

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\int_{\Gamma_{ij}^\alpha} \sum_{s=1}^N \mathbf{f}_s(\mathbf{w})(n_{ij}^\alpha)_s dS \right) dt \approx \tau_k [\vartheta \mathbf{H}(\mathbf{w}_i^{k+1}, \mathbf{w}_j^{k+1}, \mathbf{n}_{ij}^\alpha) + (1 - \vartheta) \mathbf{H}(\mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k, \mathbf{n}_{ij}^\alpha)] |\Gamma_{ij}^\alpha|, \quad \vartheta \in [0, 1]. \quad (2.16)$$

Použitím (2.11), (2.12) a (2.16) dostáváme následující schéma metody konečných objemů

$$\mathbf{w}_i^{k+1} = \mathbf{w}_i^k - \frac{\tau_k}{|D_i|} \sum_{j \in S(i)} \sum_{\alpha=1}^{\beta_{ij}} [\vartheta \mathbf{H}(\mathbf{w}_i^{k+1}, \mathbf{w}_j^{k+1}, \mathbf{n}_{ij}^\alpha) + (1 - \vartheta) \mathbf{H}(\mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k, \mathbf{n}_{ij}^\alpha)] |\Gamma_{ij}^\alpha|, \quad D_i \in \mathcal{D}_h, \quad t_k \in [0, T), \quad \vartheta \in [0, 1]. \quad (2.17)$$

Jestliže $\vartheta \in (0, 1]$, pak schéma (2.17) je *implicitní* a vyžaduje řešení komplikovaného systému vzhledem k neznámým hodnotám \mathbf{w}_i^{k+1} , $i \in J$. To je důvod proč se obvykle dává přednost použití *explicitního schématu* s $\vartheta = 0$:

$$\mathbf{w}_i^{k+1} = \mathbf{w}_i^k - \frac{\tau_k}{|D_i|} \sum_{j \in S(i)} \sum_{\alpha=1}^{\beta_{ij}} \mathbf{H}(\mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k, \mathbf{n}_{ij}^\alpha) |\Gamma_{ij}^\alpha|, \quad D_i \in \mathcal{D}_h, \quad t_k \in [0, T). \quad (2.18)$$

Metoda (2.17) je doplněna počátečními podmínkami \mathbf{w}_i^0 , $i \in J$, definovanými jako

$$\mathbf{w}_i^0 = \frac{1}{|D_i|} \int_{D_i} \mathbf{w}^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (2.19)$$

za předpokladu, že funkce \mathbf{w}^0 z (2.2) je lokálně integrovatelná: $\mathbf{w}^0 \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)^m$.

Nyní definujeme přibližné řešení (2.1) jako po částech konstantní vektorovou funkci \mathbf{w}_h^k , $k = 0, 1, \dots$ definovanou s. v. v Ω_h takovou, že $\mathbf{w}_h^k|_{\overset{\circ}{D}_i} = \mathbf{w}_i^k$, kde $\overset{\circ}{D}_i$ je vnitřek objemu D_i tj. $\overset{\circ}{D}_i = D_i \setminus \partial D_i$ a \mathbf{w}_i^k získáme formulí (2.18). Funkce \mathbf{w}_h^k je *přibližné řešení* v čase t_k a vektor \mathbf{w}_i^k je *hodnota přibližného řešení* na konečném objemu D_i v čase t_k .

Nechť \mathbf{w}^k je přibližné řešení na k -té časové vrstvě získané schématem metody konečných objemů (2.18). Označme $\|\mathbf{w}^k\|$ normu aproximace \mathbf{w}^k . Řekneme, že schéma (2.18) je *stabilní*, jestliže existuje konstanta $c > 0$ nezávislá na τ, h, k taková, že

$$\|\mathbf{w}^k\| \leq c \|\mathbf{w}^0\|, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.20)$$

Obvykle je analogicky k L^p -normám ($p \in [1, \infty]$) používáno:

$$\|\mathbf{w}^k\|_\infty = \sup_{i \in J} |\mathbf{w}_i^k|, \quad \|\mathbf{w}^k\|_p = \left[\sum_{i \in J} |D_i| |\mathbf{w}_i^k|^p \right]^{1/p}, \quad p \in [1, \infty) \quad (2.21)$$

V sekci 2.4 se budeme zabývat stabilitou explicitního schématu (2.18).

typ hranice	proudění	předepsané veličiny	extrapolované veličiny
vstup ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0$)	nadzvukové ($-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} > a$)	—	ρ, v_1, v_2, v_3, p
	podzvukové ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \leq a$)	p	ρ, v_1, v_2, v_3
výstup ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} > 0$)	nadzvukové ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \geq a$)	ρ, v_1, v_2, v_3, p	—
	podzvukové ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < a$)	ρ, v_1, v_2, v_3	p

Tabulka 2.1: Okrajové podmínky pro 3D proudění

2.3 Okrajové podmínky

Aby bylo odvození metody konečných objemů úplné, je třeba dodefinovat podmínky na hranici oblasti Ω_h . Nechť $D_i \in \mathcal{D}_h$ je konečný objem přilehlý k hranici $\partial\Omega_h$, tj. ∂D_i je tvořen stěnami $\Gamma_{ij}^\alpha \subset \partial\Omega_h$, ($j \in \gamma(i)$) a necht' \mathbf{n}_{ij}^α je vnější jednotková normála ∂D_i na Γ_{ij}^α . Budeme uvažovat dva typy okrajových podmínek:

1. Pevná nepropustná stěna

V tomto speciálním případě musí řešení na hranici splňovat tzv. *podmínku nepropustnosti (slip condition)* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$. Definujeme tedy numerický tok na hranici takto

$$\mathbf{H}(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j, \mathbf{n}_{ij}^\alpha) = p_i^k(0, (n_{ij}^\alpha)_1, \dots, (n_{ij}^\alpha)_N, 0)^\top. \quad (2.22)$$

2. Vstup/výstup

Zde je třeba pro výpočet numerického toku $\mathbf{H}(\mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k, \mathbf{n}_{ij}^\alpha)$ určit stavový vektor \mathbf{w}_j^k z vnější strany hranice. Ukážeme jednu z několika možností jak jej určit. Podle toho zda se jedná o podzvukové nebo nadzvukové proudění a vstup nebo výstup některé primitivní proměnné buď extrapolujeme anebo předepíšeme pomocí okrajových podmínek. Pro 3D proudění jsou všechny možnosti rozebrány v tabulce 2.3.

2.4 CFL podmínka stability

Nechť $\mathcal{D}_h = \{D_i\}_{i \in J}$ je síť konečných objemů, \mathbf{w}_i^k , $i \in J$ jsou hodnoty přibližného řešení problému (2.1) na časové hladině t_k . Protože schéma (2.18) je explicitní, musí být pro zachování stability (2.20) omezen časový krok τ_k . Vyšetřování stability schématu (2.18) (viz. [2] str. 211) vede na následující nerovnost, která heuristicky plyne z přesné podmínky stability odvozené pro lineární systémy hyperbolických rovnic. Tuto nerovnost nazveme *CFL podmínkou stability* (Courant Friedrichs Levy)

$$\tau_k \leq \frac{CFL |D_i|}{\lambda_{i, \max} |\partial D_i|}, \quad (2.23)$$

kde $CFL \leq 1$ (v praxi většinou klademe $CFL = 0.85$) a

$$\lambda_{i,\max} = \max_{\substack{r=1,\dots,m, j \in S(i) \\ \alpha=1,\dots,\beta_{ij}}} |\lambda_r(\mathbf{w}_{ij}^k, \mathbf{n}_{ij}^\alpha)|, \quad m = N + 2, \quad (2.24)$$

kde konstanty $\lambda_r(\mathbf{w}_{ij}^k, \mathbf{n}_{ij}^\alpha)$ jsou vlastní čísla matice $\mathbb{P}(\mathbf{w}_{ij}^k, \mathbf{n}_{ij}^\alpha) = \sum_{s=1}^N (n_{ij}^\alpha)_s \mathbb{A}_s(\mathbf{w}_{ij}^k)$, kde $\mathbb{A}_s(\mathbf{w}) = D\mathbf{f}_s(\mathbf{w})/D\mathbf{w}$ a vektor \mathbf{w}_{ij}^k závisí na \mathbf{w}_i^k , \mathbf{w}_j^k a definici konkrétního numerického toku \mathbf{H} . Například pro numerické toky HLL a HLLC v praxi dosazujeme do (2.24) přímo za $\lambda_r(\mathbf{w}_{ij}^k, \mathbf{n}_{ij}^\alpha)$ vlastní čísla matice $\mathbb{A}_1(\mathbf{q}_{ij}^k)$ dané (1.25), kde \mathbf{q}_{ij}^k je přibližné řešení (3.28) resp. (3.36) tzv. *Riemannova problému* (3.1) pro $x_1/t = 0$ s počátečními podmínkami danými vektory $\mathbb{Q}(\mathbf{n}_{ij}^\alpha)\mathbf{w}_i^k$, $\mathbb{Q}(\mathbf{n}_{ij}^\alpha)\mathbf{w}_j^k$, kde $\mathbb{Q}(\mathbf{n}_{ij}^\alpha)$ je definovaná pro $N = 3$ v (1.31) viz. kapitola 3. Tedy odpovídající vektor \mathbf{w}_{ij}^k pro definici $\lambda_r(\mathbf{w}_{ij}^k, \mathbf{n}_{ij}^\alpha)$ je v tomto případě $\mathbf{w}_{ij}^k = \mathbb{Q}^{-1}(\mathbf{n}_{ij}^\alpha)\mathbf{q}_{ij}^k$. Vlastní čísla matice $\mathbb{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n})$ jsou dány následovně

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathbf{w}, \mathbf{n}) &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - a|\mathbf{n}|, \\ \lambda_2(\mathbf{w}, \mathbf{n}) &= \dots = \lambda_{m-1}(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \\ \lambda_m(\mathbf{w}, \mathbf{n}) &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + a|\mathbf{n}|, \end{aligned} \quad (2.25)$$

kde \mathbf{v} je vektor rychlosti odpovídající stavu \mathbf{w} a $a = \sqrt{\gamma p/\rho}$ je odpovídající rychlost zvuku. Podmínka stability (2.23) byla odvozena pouze heuristicky, přesto však vede k uspokojivým výsledkům.

2.5 Kombinovaná metoda konečných objemů a konečných prvků

Jak již bylo zmíněno v úvodu, řeší se celý systém Navierových–Stokesových rovnic kombinovanou metodou konečných objemů a konečných prvků. Proto v této sekci popíšeme základní myšlenku tzv. *metody operátorového rozštěpení*, což je jeden ze způsobů jak tuto metodu pro systém (1.14) diskretizovat. Celý systém Navierových–Stokesových rovnic (1.14) se rozdělí na nevazké Eulerovy rovnice a čistě vazký systém,

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^N \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} = 0, \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \sum_{s=1}^N \frac{\partial \mathbf{R}_s(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w})}{\partial x_s} + \mathbf{F}(\mathbf{w}), \quad (2.27)$$

a diskretizuje se odděleně. Eulerovy rovnice (2.26) jsou diskretizovány metodou konečných objemů, kdežto vazký systém (2.27) je diskretizován metodou konečných prvků odvozenou např. v [2] str. 316. Cílem je vyvinout robustní numerickou metodu pro řešení stlačitelného proudění. Protože vazkost a tepelná vodivost plynů je malá, lze vazké členy považovat za perturbaci nevazkých Eulerových rovnic. To nás vede k závěru, že efektivní metoda pro řešení vazkého proudění by měla být založena na numerické metodě, která je efektivní pro nevazké proudění. V další části se tedy budeme zabývat dvěma aspekty pro řešení úlohy (2.26) - konstrukce vhodného numerického toku (viz. kapitola 3) a zvýšení řádu přesnosti (viz. kapitola 4).

Kapitola 3

Numerické toky HLL a HLLC

Jednou z možností jak definovat numerický tok pro schéma konečných objemů je tzv. *Godunovův tok* vycházející z řešení tzv. *Riemannova problému*. Aproximace Godunovova toku zvané *přibližné Riemannovy řešiče* vedou na metody Godunovova typu. V této kapitole se budeme zabývat odvozením přibližných Riemannových řešičů HLL a HLLC, které navrhli Harten Lax a Van Leer.

3.1 Riemannův problém

Přibližné Riemannovy řešiče HLL a HLLC stejně jako ostatní metody Godunovova typu jsou založeny na řešení následujícího Riemannova problému pro jednorozměrné Eulerovy rovnice:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_1(\mathbf{w})}{\partial x_1} = 0, \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (3.1)$$

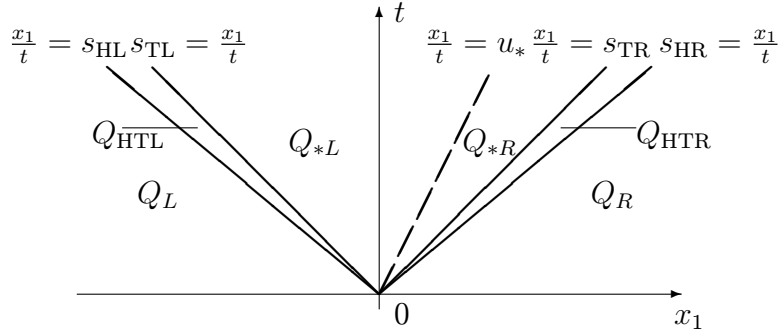
který spočívá v nalezení slabého řešení na množině $Q_\infty = (-\infty, +\infty) \times (0, +\infty)$ s počáteční podmínkou danou dvěma konstantními stavy $\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R$:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \begin{cases} \mathbf{w}_L, & x_1 < 0, \\ \mathbf{w}_R, & x_1 > 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$. Tento problém má za jistých podmínek kladených na $\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R$ (viz. [2] str. 88) jednoznačné slabé řešení závisující na x_1/t a vektorech $\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R$:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{w}_{\text{RS}}(x_1/t; \mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R). \quad (3.3)$$

(zkratka RS znamená Riemann solver). Bez zacházení do detailů může obsahovat po částech hladké řešení Riemannova problému *kontaktní nespojitost*, *vlnu zředění* nebo *rázovou vlnu*. Pomocí těchto vln rozdělíme oblast Q_∞ na oblasti zvané *klíny*, ve kterých je řešení $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ Riemannova problému konstantní nebo hladké (viz. obr. 3.1):



Obrázek 3.1: Struktura přesného řešení $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{w}_{RS}(x_1/t; \mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R)$ Riemannova problému

$$\begin{aligned}
Q_L &= \{(\mathbf{x}, t); \quad \frac{x_1}{t} < s_{HL}, \quad t > 0\}, \\
Q_{HTL} &= \{(\mathbf{x}, t); \quad s_{HL} < \frac{x_1}{t} < s_{TL}, \quad t > 0\}, \\
Q_{*L} &= \{(\mathbf{x}, t); \quad s_{TL} < \frac{x_1}{t} < u_*, \quad t > 0\}, \\
Q_{*R} &= \{(\mathbf{x}, t); \quad u_* < \frac{x_1}{t} < s_{TR}, \quad t > 0\}, \\
Q_{HTR} &= \{(\mathbf{x}, t); \quad s_{TR} < \frac{x_1}{t} < s_{HR}, \quad t > 0\}, \\
Q_R &= \{(\mathbf{x}, t); \quad \frac{x_1}{t} > s_{HR}, \quad t > 0\}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

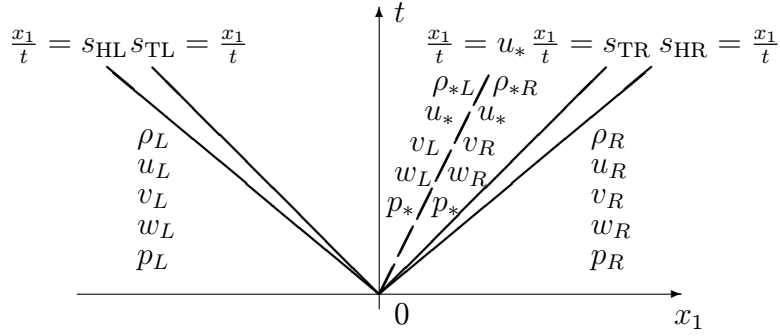
Množiny \overline{Q}_{HTL} , \overline{Q}_{HTR} nazýváme *vlny zředění*. Pro některá \mathbf{w}_L , \mathbf{w}_R může však množina \overline{Q}_{HTL} degenerovat na množinu $\{(\mathbf{x}, t); \frac{x_1}{t} = s_1, t > 0\}$ a \overline{Q}_{HTR} může degenerovat na množinu $\{(\mathbf{x}, t); \frac{x_1}{t} = s_3, t > 0\}$ v takovém případě tyto množiny nazveme *rázovými vlnami*. Množinu $\{(\mathbf{x}, t); \frac{x_1}{t} = u_*, t > 0\}$ budeme nazývat *kontaktní nespojitostí* a konstanty s_{HL} , s_{TL} , s_1 , u_* , s_3 , s_{TR} , s_{HR} *rychlostmi vln*. Řešení $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ Riemannova problému potom vypadá takto:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}|_{Q_L} &= \mathbf{w}_L, & \mathbf{w}|_{Q_{*R}} &= \mathbf{w}_{*R}, \\
\mathbf{w}|_{Q_{HTL}}, &= \text{hladká funkce} & \mathbf{w}|_{Q_{HTR}}, &= \text{hladká funkce} \\
\mathbf{w}|_{Q_{*L}} &= \mathbf{w}_{*L}, & \mathbf{w}|_{Q_R} &= \mathbf{w}_R,
\end{aligned}$$

Příklad řešení Riemannova problému, obsahující na levé straně vlnu zředění a napravo rázovou vlnu je znázorněn na obr. 5.1 a 5.2. Navíc pro primitivní proměnné $\rho_K, u_K, v_K, w_K, p_K$ v klínech Q_K , $K = L, *L, *R, R$ platí pro $N = 3$:

$$\begin{aligned}
u_{*L} &= u_{*R} = u_* \\
p_{*L} &= p_{*R} = p_* \\
v_{*L} &= v_L, \quad v_{*R} = v_R, \\
w_{*L} &= w_L, \quad w_{*R} = w_R.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

kde používáme označení $v_1 = u$, $v_2 = v$, $v_3 = w$ pro složky rychlosti a p je tlak. Tedy složka rychlosti u ani tlak p se přechodem přes kontaktní nespojitost nemění a ostatní složky rychlosti se nemění přechodem přes vlnu zředění resp. rázovou vlnu viz. obr. 3.2. Řešení Riemannova problému i postup jeho konstrukce jsou podrobně popsány v [2] str. 112.



Obrázek 3.2: Struktura přesného řešení $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{w}_{\text{RS}}(x_1/t; \mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R)$ Riemannova problému pro $N = 3$

3.2 Godunovova metoda

Nechť Γ_{ij}^α je stěna mezi konečnými objemy D_i a D_j s normálou \mathbf{n}_{ij}^α směřující z D_i do D_j . V \mathbb{R}^N zavedeme nový kartézský systém souřadnic $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N$ s počátkem ve středu stěny Γ_{ij}^α , osou \tilde{x}_1 orientovanou ve směru normály \mathbf{n}_{ij}^α a $\tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N$ tečnami k Γ_{ij}^α . Z rotační invariance Eulerových rovnic plyne, že tyto rovnice transformované do nového systému souřadnic budou mít tvar

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \sum_{s=1}^N \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{q})}{\partial \tilde{x}_s} = 0, \quad (3.6)$$

viz. sekce 1.3, kde

$$\mathbf{q} = \mathbb{Q} \mathbf{w} \quad (3.7)$$

s maticí rotace $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\mathbf{n}_{ij}^\alpha)$ definovanou pro $N = 3$ v (1.31). Na Γ_{ij}^α navíc platí

$$\sum_{s=1}^N (n_{ij}^\alpha)_s \mathbf{f}_s(\mathbf{w}(\cdot, t_k))|_{\Gamma_{ij}^\alpha} = \mathbb{Q}^{-1}(\mathbf{n}_{ij}^\alpha) \mathbf{f}_1(\mathbf{q}(\cdot, t_k))|_{\Gamma_{ij}^\alpha} \quad (3.8)$$

Klíčovým bodem pro konstrukci aproximace pravé strany (3.8) je aproximace

$$\mathbf{q}(\cdot, t_k)|_{\Gamma_{ij}^\alpha} \approx \mathbf{q}(0, t_k), \quad (3.9)$$

kde $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}, t_k)$ je řešení Riemannova problému

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{\partial \tilde{x}_1} = 0, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}, 0) = \begin{cases} \mathbf{q}_L := \mathbb{Q} \mathbf{w}_i^k, & \tilde{x}_1 < 0, \\ \mathbf{q}_R := \mathbb{Q} \mathbf{w}_j^k, & \tilde{x}_1 > 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

které označíme

$$\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{q}_{\text{RS}}(\tilde{x}_1/t; \mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) \quad (3.12)$$

Nyní můžeme psát

$$\sum_{s=1}^N (n_{ij}^\alpha)_s \mathbf{f}_s(\mathbf{w}(\cdot, t_k))|_{\Gamma_{ij}^\alpha} \approx \mathbb{Q}^{-1} \mathbf{f}_1(\mathbf{q}(0, t_k))|_{\Gamma_{ij}^\alpha} = \mathbb{Q}^{-1} \mathbf{f}_1(\mathbf{q}_{\text{RS}}(0, \mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R)). \quad (3.13)$$

Odtud definujeme *Godunovův numerický tok* neboli *přesný Riemannův řešič* rovnice (3.10) jako

$$\mathbf{g}_G := \mathbf{f}_1(\mathbf{q}_{\text{RS}}(0; \mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R)) \quad (3.14)$$

a položíme

$$\mathbf{H}(\mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k, \mathbf{n}_{ij}^\alpha) := \mathbb{Q}^{-1} \mathbf{g}_G(\mathbb{Q}\mathbf{w}_i^k, \mathbb{Q}\mathbf{w}_j^k), \quad (3.15)$$

kde \mathbf{g}_G je definované pomocí (3.14). Takto definovaný Godunovův tok vyžaduje konstrukci přesného řešení Riemannova problému což je obecně poměrně náročné. Tato nevýhoda může být odstraněna použitím *přibližného Riemannova řešiče* neboli *Riemannova numerického toku*, který označíme \mathbf{g}_R :

$$\mathbf{g}_G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \approx \mathbf{g}_R(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (3.16)$$

Výsledné metody se potom nazývají *metody Godunovova typu*.

3.3 Riemannův problém a integrální vztahy

Protože řešení $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ Riemannova problému (3.1) nezávisí na složkách x_2, \dots, x_N vektoru $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, budeme v dalším psát $\mathbf{w}(x, t)$ namísto $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$, kde pro jednoduchost označíme $x = x_1$. Uvažujme nyní přesné řešení Riemannova problému (3.1) v kontrolním objemu $[x_L, x_R] \times [0, T]$ zobrazeném na obr. 3.3, kde

$$x_L \leq T s_L, \quad x_R \geq T s_R, \quad (3.17)$$

kde s_L a s_R jsou největší rychlosti vln definovaných v sekci 3.1, tedy $s_L = s_1$, $s_R = s_3$ jestliže se jedná o rázové vlny a $s_L = s_{\text{HL}}$, $s_R = s_{\text{HR}}$ pro vlny zředění viz. obr. 3.1. Přibližné Riemannovy řešiče HLL a HLLC nerozlišují mezi vlnou zředění a rázovou vlnou, proto množinu $\{(\mathbf{x}, t); \frac{x_1}{t} = s_L, t > 0\}$ jednoduše nazveme *levou vlnou* a $\{(\mathbf{x}, t); \frac{x_1}{t} = s_R, t > 0\}$ *pravou vlnou* a konstanty s_L , s_R nazveme rychlostmi levé resp. pravé vlny.

Integrální tvar zákonů zachování v (3.1) v kontrolním objemu $[x_L, x_R] \times [0, T]$ vypadá takto:

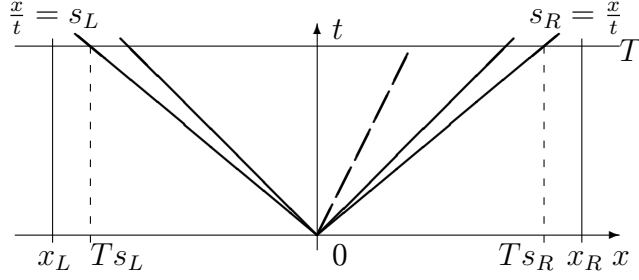
$$\int_{x_L}^{x_R} \mathbf{w}(x, T) dx = \int_{x_L}^{x_R} \mathbf{w}(x, 0) dx + \int_0^T \mathbf{f}_1(\mathbf{w}(x_L, t)) dt - \int_0^T \mathbf{f}_1(\mathbf{w}(x_R, t)) dt. \quad (3.18)$$

Vyčíslení pravé strany tohoto výrazu dává

$$\int_{x_L}^{x_R} \mathbf{w}(x, T) dx = x_R \mathbf{w}_R - x_L \mathbf{w}_L + T(\mathbf{f}_L - \mathbf{f}_R), \quad (3.19)$$

kde $\mathbf{f}_L = \mathbf{f}_1(\mathbf{w}_L)$ a $\mathbf{f}_R = \mathbf{f}_1(\mathbf{w}_R)$. Integrální vztah (3.19) nazýváme *podmínkou konzistence*. Nyní rozdělíme integrál na levé straně (3.18) na tři integrály následovně

$$\int_{x_L}^{x_R} \mathbf{w}(x, T) dx = \int_{x_L}^{T s_L} \mathbf{w}(x, T) dx + \int_{T s_L}^{T s_R} \mathbf{w}(x, T) dx + \int_{T s_R}^{x_R} \mathbf{w}(x, T) dx \quad (3.20)$$



Obrázek 3.3: Kontrolní objem $[x_L, x_R] \times [0, T]$, s_L a s_R jsou největší rychlosti vln vycházejících z řešení Riemannova problému

a vyčíslíme první a třetí člen na pravé straně. Dostaneme

$$\int_{x_L}^{x_R} \mathbf{w}(x, T) dx = \int_{Ts_L}^{Ts_R} \mathbf{w}(x, T) dx + (Ts_L - x_L)\mathbf{w}_L + (x_R - Ts_R)\mathbf{w}_R. \quad (3.21)$$

Z výrazů (3.19) a (3.21) plyne rovnost

$$\int_{Ts_L}^{Ts_R} \mathbf{w}(x, T) dx = T(s_R\mathbf{w}_R - s_L\mathbf{w}_L + \mathbf{f}_L - \mathbf{f}_R) \quad (3.22)$$

Vydělením $T(s_R - s_L)$, získáme integrální průměr přesného řešení Riemannova problému mezi levou vlnou o rychlosti s_L a pravou vlnou o rychlosti s_R :

$$\frac{1}{T(s_R - s_L)} \int_{Ts_L}^{Ts_R} \mathbf{w}(x, T) dx = \frac{s_R\mathbf{w}_R - s_L\mathbf{w}_L + \mathbf{f}_L - \mathbf{f}_R}{s_R - s_L} \quad (3.23)$$

Předpokládejme, že rychlosti vln s_L a s_R jsou známy, potom je tento integrální průměr známá konstanta a označíme jej

$$\mathbf{w}_{\text{HLL}} = \frac{s_R\mathbf{w}_R - s_L\mathbf{w}_L + \mathbf{f}_L - \mathbf{f}_R}{s_R - s_L} \quad (3.24)$$

Nyní zcela analogicky jako u (3.19) vyčíslíme integrální tvar zákonů zachování v levé části kontrolního objemu $[x_L, 0] \times [0, T]$ a obdržíme

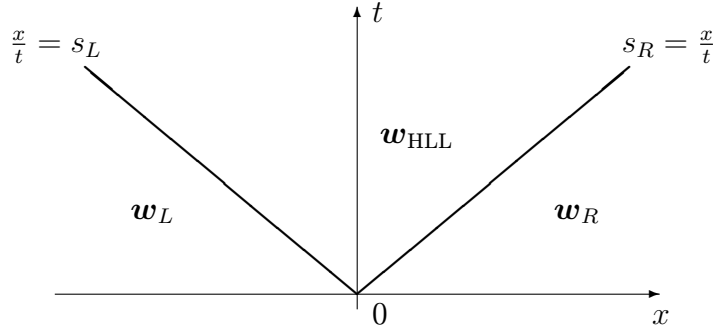
$$\int_{Ts_L}^0 \mathbf{w}(x, T) dx = -Ts_L\mathbf{w}_L + T(\mathbf{f}_L - \mathbf{f}_{0L}), \quad (3.25)$$

kde \mathbf{f}_{0L} je tok $\mathbf{f}_1(\mathbf{w})$ podél osy t daný vztahem

$$\mathbf{f}_{0L} = \mathbf{f}_L - s_L\mathbf{w}_L - \frac{1}{T} \int_{Ts_L}^0 \mathbf{w}(x, T) dx. \quad (3.26)$$

Podobně vyčíslení integrálního tvaru zákonů zachování v kontrolním objemu $[0, x_R] \times [0, T]$ vede na jiné vyjádření toku $\mathbf{f}_1(\mathbf{w})$ podél osy t :

$$\mathbf{f}_{0R} = \mathbf{f}_R - s_R\mathbf{w}_R + \frac{1}{T} \int_0^{Ts_R} \mathbf{w}(x, T) dx \quad (3.27)$$



Obrázek 3.4: Přibližné řešení Riemannova problému pro HLL řešič obsahuje v oblasti Q_* jeden stav \mathbf{w}_{HLL} oddělený od datových stavů \mathbf{w}_L a \mathbf{w}_R dvěma vlnami o rychlostech s_L a s_R

a lze snadno ověřit, že rovnost

$$\mathbf{f}_{0L} = \mathbf{f}_{0R}$$

vede na podmínku konzistence (3.19). Tímto jsme získali přesná vyjádření (3.26), (3.27) pro tok podél osy t a tím pádem i pro Godunovův numerický tok viz. (3.14). Přibližné Riemannovy řešiče HLL a HLLC jsou potom založeny na aproximaci integrálu ve vztahu (3.26) nebo (3.27).

3.4 Přibližný Riemannův řešič HLL

Harten, Lax a van Leer navrhli následující aproximaci řešení Riemannova problému

$$\tilde{\mathbf{w}}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{w}_L & \text{pro } \frac{x}{t} < s_L, \\ \mathbf{w}_{\text{HLL}} & \text{pro } s_L < \frac{x}{t} < s_R, \\ \mathbf{w}_R & \text{pro } \frac{x}{t} > s_R, \end{cases} \quad (3.28)$$

kde \mathbf{w}_{HLL} je konstantní stavový vektor daný vztahem (3.28) a o rychlostech s_L a s_R předpokládáme, že je známe. Struktura tohoto přibližného řešení je znázorněna na obr. 3.4. Poznamenejme, že tato aproximace sestává z pouze třech konstantních stavů oddělených levou a pravou vlnou. Oblast $Q_* = \{(x, t); s_{\text{TL}} < \frac{x}{t} < s_{\text{TR}}, t > 0\}$, obsahuje pouze jeden konstantní stav. Odpovídající tok \mathbf{f}_{HLL} podél osy t je dán vztahem (3.26) nebo (3.27), kde integrand nahradíme přibližným řešením (3.24), tedy

$$\mathbf{f}_{\text{HLL}} = \mathbf{f}_L + s_L(\mathbf{w}_{\text{HLL}} - \mathbf{w}_L), \quad (3.29)$$

nebo

$$\mathbf{f}_{\text{HLL}} = \mathbf{f}_R + s_R(\mathbf{w}_{\text{HLL}} - \mathbf{w}_R). \quad (3.30)$$

Poznamenejme, že nepokládáme $\mathbf{f}_{\text{HLL}} = \mathbf{f}_1(\mathbf{w}_{\text{HLL}})$. Dosazením vyjádření \mathbf{w}_{HLL} v (3.24) do (3.26) nebo (3.27) získáme HLL tok ve tvaru

$$\mathbf{f}_{\text{HLL}} = \frac{s_R \mathbf{f}_L - s_L \mathbf{f}_R + s_L s_R (\mathbf{w}_R - \mathbf{w}_L)}{s_R - s_L}. \quad (3.31)$$

Odpovídající přibližný Riemannův řešič je potom dán

$$\mathbf{g}_{\text{HLL}} = \begin{cases} \mathbf{f}_L & \text{je-li} & 0 < s_L, \\ \mathbf{f}_{\text{HLL}} & \text{je-li} & s_L < 0 < s_R, \\ \mathbf{f}_R & \text{je-li} & 0 > s_R, \end{cases} \quad (3.32)$$

kde \mathbf{f}_{HLL} je dán vztahem (3.31). Přidáme-li algoritmus pro výpočet rychlostí s_L a s_R , pak máme přibližný Riemannův řešič (3.32), který můžeme použít místo Godunovova toku \mathbf{g}_G v definici numerického toku (3.15) pro schéma konečných objemů. Rychlosti s_L a s_R budou odhadnuty v sekci 3.6.

Nedostatek HLL schématu je v tom, že zanedbává kontaktní nespojitosti. To jsou vlny o rychlosti u_* , což je složka rychlosti ve směru osy x přesného řešení Riemannova problému v oblasti Q_* viz. vztahy (3.5) a obr. 3.2. Poznamenejme, že v integrálu (3.23) vše závisí pouze na průměru přes vlnovou strukturu bez ohledu na prostorové změny v řešení Riemannova problému v oblasti Q_* . Tento nedostatek může být odstraněn obnovením chybějící vlny. Proto Toro, Spruce a Speares navrhli tzv. *HLLC schéma*, kde C znamená kontakt. V tomto schématu je chybějící střední vlna navracena do struktury přibližného řešení Riemannova problému.

3.5 Přibližný Riemannův řešič HLLC

HLLC schéma je modifikací HLL schématu popsaného v předchozí sekci, kde je obnovena chybějící vlna kontaktní nespojitosti. Budeme opět vycházet ze struktury přesného řešení Riemannova problému v dostatečně velkém kontrolním objemu $[x_L, x_R] \times [0, T]$ viz. obr. 3.3. Nyní k vlnám o rychlostech s_L a s_R přidáme střední vlnu o rychlosti s_* odpovídající rychlosti kontaktní nespojitosti u_* viz. sekce 3.1. Vyčíslením integrálního tvaru zákonů zachování v kontrolním objemu dostaneme výsledek rovnice (3.23) a to i přesto, že se může integrand přes vlnu rychlosti s_* změnit. Poznamenejme, že podmínka konzistence (3.19) vede na vztah (3.23). Rozdělením levé strany integrálu (3.23) na dva členy dostaneme

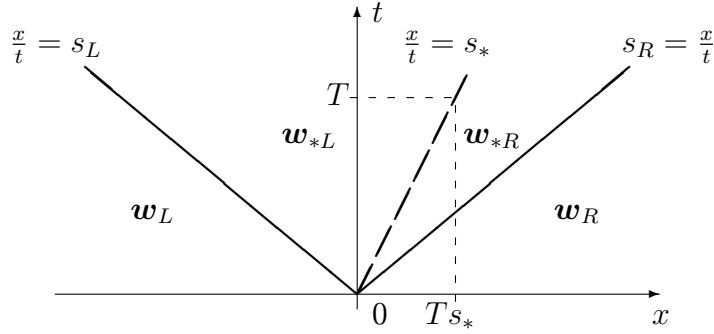
$$\begin{aligned} \frac{1}{T(s_R - s_L)} \int_{T^{s_L}}^{T^{s_R}} \mathbf{w}(x, t) dx &= \frac{1}{T(s_R - s_L)} \int_{T^{s_L}}^{T^{s_*}} \mathbf{w}(x, t) dx \\ &+ \frac{1}{T(s_R - s_L)} \int_{T^{s_*}}^{T^{s_R}} \mathbf{w}(x, t) dx. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Definujeme integrální průměry

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{*L} &= \frac{1}{T(s_R - s_L)} \int_{T^{s_L}}^{T^{s_*}} \mathbf{w}(x, T) dx, \\ \mathbf{w}_{*R} &= \frac{1}{T(s_R - s_L)} \int_{T^{s_*}}^{T^{s_R}} \mathbf{w}(x, T) dx. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Po dosazení (3.34) do (3.33) s využitím vztahu (3.23) plyne z podmínky konzistence (3.19) podmínka

$$\left(\frac{s_* - s_L}{s_R - s_L} \right) \mathbf{w}_{*L} + \left(\frac{s_R - s_*}{s_R - s_L} \right) \mathbf{w}_{*R} = \mathbf{w}_{\text{HLL}}, \quad (3.35)$$



Obrázek 3.5: Přibližné řešení Riemannova problému pro HLLC řešič. Řešení v oblasti Q_* sestává ze dvou konstantních stavů oddělených střední vlnou o rychlosti s_*

kde \mathbf{w}_{HLL} je dán vztahem (3.28). Odpovídající aproximace řešení Riemannova problému je dána následovně

$$\tilde{\mathbf{w}}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{w}_L & \text{pro } \frac{x}{t} < s_L, \\ \mathbf{w}_{*L} & \text{pro } s_L < \frac{x}{t} < s_*, \\ \mathbf{w}_{*R} & \text{pro } s_* < \frac{x}{t} < s_R, \\ \mathbf{w}_R & \text{pro } \frac{x}{t} > s_R, \end{cases} \quad (3.36)$$

viz. obr. 3.5. Integrací přes příslušné objemy dostaneme následující vztahy:

$$\mathbf{f}_{*L} = \mathbf{f}_L + s_L(\mathbf{w}_{*L} - \mathbf{w}_L), \quad (3.37)$$

$$\mathbf{f}_{*R} = \mathbf{f}_{*L} + s_*(\mathbf{w}_{*R} - \mathbf{w}_{*L}), \quad (3.38)$$

$$\mathbf{f}_{*R} = \mathbf{f}_R + s_R(\mathbf{w}_{*R} - \mathbf{w}_R). \quad (3.39)$$

Porovnejme nyní vztahy (3.37) a (3.39) pro HLLC schéma s (3.29) a (3.30) pro HLL schéma. Dosazení \mathbf{f}_{*L} ze vztahu (3.37) a \mathbf{f}_{*R} z (3.39) do rovnice (3.38) nám dává podmínku konzistence (3.35). Z toho vyplývá, že podmínky (3.37)–(3.39) jsou dostatečné pro to, aby podmínka konzistence byla splněna. Máme tři rovnice pro čtyři neznámé vektory \mathbf{w}_{*L} , \mathbf{f}_{*L} , \mathbf{w}_{*R} a \mathbf{f}_{*R} . Cílem je nalézt vektory \mathbf{w}_{*L} a \mathbf{w}_{*R} tak, aby toky \mathbf{f}_{*L} a \mathbf{f}_{*R} byly určeny z (3.37) resp. z (3.39). K přibližnému Riemannovu řešiči přidáme podmínky (3.5), které jsou splněny v přesném řešení Riemannova problému viz. obr. 3.2:

$$\begin{aligned} u_{*L} &= u_{*R} = u_*, \\ p_{*L} &= p_{*R} = p_*, \\ v_{*L} &= v_L, \quad v_{*R} = v_R, \\ w_{*L} &= w_L, \quad w_{*R} = w_R. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Navíc je přirozené položit

$$s_* = u_*, \quad (3.41)$$

neboť střední vlna rychlosti s_* odpovídá kontaktní nespojitosti. Nyní mohou být rovnice (3.37) a (3.39) přepsány jako

$$s_L \mathbf{w}_{*L} - \mathbf{f}_{*L} = \mathbf{q}_L, \quad (3.42)$$

$$s_R \mathbf{w}_{*R} - \mathbf{f}_{*R} = \mathbf{q}_R, \quad (3.43)$$

kde \mathbf{q}_L a \mathbf{q}_R jsou známé konstantní vektory. Použitím podmínek (3.40), (3.41) v (3.42) a (3.43) dává vektory řešení

$$\mathbf{w}_{*K} = \rho_K \left(\frac{s_K - u_K}{s_K - s_*} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ s_* \\ v_K \\ w_K \\ \frac{E_K}{\rho_K} + (s_* - u_K) \left[s_* + \frac{p_K}{\rho_K(s_K - u_K)} \right] \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

pro $K = L$ a $K = R$. Tímto jsou toky \mathbf{f}_{*L} a \mathbf{f}_{*R} určeny. Podobně jako v (3.36) může být HLLC Riemannův řešič psán jako

$$\mathbf{g}_{\text{HLLC}} = \begin{cases} \mathbf{f}_L & \text{je-li } 0 < s_L, \\ \mathbf{f}_{*L} = \mathbf{f}_L + s_L(\mathbf{w}_{*L} - \mathbf{w}_L) & \text{je-li } s_L < 0 < s_*, \\ \mathbf{f}_{*R} = \mathbf{f}_R + s_R(\mathbf{w}_{*R} - \mathbf{w}_R) & \text{je-li } s_* < 0 < s_R, \\ \mathbf{f}_R & \text{je-li } 0 > s_R, \end{cases} \quad (3.45)$$

kde \mathbf{w}_{*L} a \mathbf{w}_{*R} jsou určeny vztahem (3.44). Pro oba odvozené Riemannovy řešiče zbývá vypočítat rychlosti vln s_L, s_*, s_R . Tímto úkolem se zabývá následující sekce.

3.6 Odhady rychlostí vln

Aby bylo odvození přibližných Riemannových řešičů HLL a HLLC úplné, potřebujeme algoritmus pro výpočet rychlostí vln. Pro HLL řešič nás zajímají rychlosti s_L a s_R a pro HLLC požadujeme ještě odhad rychlosti střední vlny s_* . Existuje celá řada způsobů jak tyto rychlosti odhadnout, my však v této podkapitole ukážeme pouze některé.

Většina odhadů je založena na tom, že požadované rychlosti vln odpovídají vlastním číslům matice $\mathbb{A}_1(\mathbf{w}(0)) = D\mathbf{f}_1(\mathbf{w}(0))/D\mathbf{w}$, kde $\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_{\text{RS}}(0; \mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R)$ je řešení Riemannova problému (3.1) pro $x/t = 0$. Připomeňme, že vlastní čísla této matice jsou dány dle (1.25):

$$\tilde{\lambda}_1 = u - a, \quad \tilde{\lambda}_2 = \tilde{\lambda}_3 = \tilde{\lambda}_4 = u, \quad \tilde{\lambda}_5 = u + a, \quad (3.46)$$

kde u je složka rychlosti ve směru x odpovídající stavu $\mathbf{w}(0)$ a $a = \sqrt{\gamma p/\rho}$ je odpovídající rychlost zvuku. Pro rychlosti vln tedy máme

$$s_L = u - a, \quad s_* = u, \quad s_R = u + a. \quad (3.47)$$

Řešení $\mathbf{w}(0)$ Riemannova problému ovšem předem neznáme, proto Davis navrhl jednoduché odhady pro s_L, s_R :

$$s_L = u_L - a_L, \quad s_R = u_R + a_R, \quad (3.48)$$

tedy s_L je nejmenší vlastní číslo matice $\mathbb{A}_1(\mathbf{w}_L)$ a s_R největší vlastní číslo $\mathbb{A}_1(\mathbf{w}_R)$. Další možnost je položit

$$s_L = \min\{u_L - a_L, u_R - a_R\}, \quad s_R = \min\{u_L + a_L, u_R + a_R\}. \quad (3.49)$$

O něco lepší odhady navrhl Davis společně s Einfeldtem. Vycházejí z tzv. *Roeho řešiče*, ve kterém se Riemannův problém (3.1) nejdříve převede na kvazilineární systém jako v (1.21) a

poté se vhodně linearizuje pomocí tzv. *Roeho matice* $\tilde{\mathbb{A}}(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R)$. Odhady rychlostí potom tvoří vlastní čísla této matice

$$s_L = \hat{u} - \hat{a}, \quad s_R = \hat{u} + \hat{a}, \quad (3.50)$$

kde \hat{u} a \hat{a} jsou tzv. *Roeho průměry* složky rychlosti u resp. rychlosti zvuku a dané následovně

$$\hat{u} = \frac{\sqrt{\rho_L}u_L + \sqrt{\rho_R}u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad \hat{a} = \left[(\gamma - 1) \left(\hat{H} - \frac{1}{2}\hat{u}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.51)$$

s entalpií $H = (E + p)/\rho$ aproximovanou jako

$$\hat{H} = \frac{\sqrt{\rho_L}H_L + \sqrt{\rho_R}H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (3.52)$$

Podrobný popis odvození Roeho průměrů lze nalézt např. v [2] str. 164.

Pro HLLC schéma nám ještě zbývá odhadnout rychlost s_* . Ukážeme jeden způsob. Mějme dány rychlosti s_L a s_R na základě předchozích odhadů. Použitím předpokladu (3.41) v rovnicích (3.42) a (3.43) obdržíme následující vztahy pro tlak v oblastech Q_{*R} , Q_{*L} :

$$p_{*L} = p_L + \rho_L(s_L - u_L)(s_* - u_L), \quad p_{*R} = p_R + \rho_R(s_R - u_R)(s_* - u_R). \quad (3.53)$$

Z podmínek (3.40) víme, že $p_{*L} = p_{*R}$, což vede na vyjádření rychlosti s_* , která bude v tomto případě záviset na s_L a s_R :

$$s_* = \frac{p_R - p_L + \rho_L u_L (s_L - u_L) - \rho_R u_R (s_R - u_R)}{\rho_L (s_L - u_L) - \rho_R (s_R - u_R)}. \quad (3.54)$$

Další odhady rychlostí lze nalézt např. v [11]. Tímto máme rychlosti vln odhadnuty a můžeme je použít pro výpočet Riemannových toků HLL a HLLC.

Kapitola 4

Schéma typu ADER

V podkapitole 3.2 jsme popsali Godunovovu metodu, která dává poměrně dobré výsledky, ovšem dosahuje pouze prvního řádu. Proto v této kapitole navážeme na Tora, Käsera a další (viz. [4, 5, 7, 10, 8]) a popíšeme tzv. schéma typu ADER zobecňující tuto metodu na libovolný řád přesnosti.

4.1 Odvození schématu typu ADER

Uvažujme následující systém třírozměrných Eulerových rovnic

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^N \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} = 0, \quad \text{v } Q_T = \Omega \times (0, T). \quad (4.1)$$

Budeme hledat metodu, která bude řešit rovnici (4.1) a dosahovat řádu p . Nechť Oblast Ω_h je polyhedrální aproximací Ω diskretizovaná sítí konečných objemů $\mathcal{D}_h = \{D_i\}_{i \in J}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots$ je dělení časového intervalu $[0, T]$ a $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ je časový krok mezi t_k a t_{k+1} . Obdobně jako u metody konečných objemů vyjdeme ze vztahu (2.11):

$$\int_{D_i} (\mathbf{w}(\mathbf{x}, t_{k+1}) - \mathbf{w}(\mathbf{x}, t_k)) d\mathbf{x} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\sum_{j \in S(i)} \sum_{\alpha=1}^{\beta_{ij}} \int_{\Gamma_{ij}^\alpha} \sum_{s=1}^N \mathbf{f}_s(\mathbf{w})(n_{ij}^\alpha)_s dS \right) dt = 0 \quad (4.2)$$

a označíme \mathbf{w}_i^k integrální průměry \mathbf{w} přes konečný objem D_i v časovém okamžiku t_k :

$$\mathbf{w}_i^k \approx \frac{1}{|D_i|} \int_{D_i} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t_k) d\mathbf{x}. \quad (4.3)$$

Nyní definujeme *zobecněný numerický tok* $\hat{\mathbf{H}}$, který aproximuje integrální průměry toku $\sum_{s=1}^N \mathbf{f}_s(\mathbf{w})(n_{ij}^\alpha)_s$ přes množinu $\Gamma_{ij}^\alpha \times (t_k, t_{k+1})$:

$$\frac{1}{\tau_k} \frac{1}{|\Gamma_{ij}^\alpha|} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{\Gamma_{ij}^\alpha} \sum_{s=1}^N \mathbf{f}_s(\mathbf{w})(n_{ij}^\alpha)_s dS dt \approx \hat{\mathbf{H}}(\hat{\mathbf{w}}_i^k, \hat{\mathbf{w}}_j^k, \mathbf{n}_{ij}^\alpha) \quad (4.4)$$

kde $\hat{\mathbf{w}}_i^k, \hat{\mathbf{w}}_j^k$ jsou vektory polynomů proměnných x_1, \dots, x_N stupně nejvýše $p-1$ získané vhodnou polynomiální rekonstrukcí z integrálních průměrů $\mathbf{w}_i^k, i \in J$. Po vektorech polynomů $\hat{\mathbf{w}}_i^k, \hat{\mathbf{w}}_j^k$ požadujeme splnění následujících podmínek

1.

$$\frac{1}{|D_i|} \int_{D_i} \hat{\mathbf{w}}_i^k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \mathbf{w}_i^k, \quad (4.5)$$

2.

$$\hat{\mathbf{w}}_i^k(\mathbf{x}) = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t_k)|_{D_i} + O(h^p), \quad \text{jestliže } \mathbf{w} \in C^p(\Omega), \quad (4.6)$$

kde $h = \max_{i \in J} \text{diam} D_i$ je krok sítě. Samotnou polynomiální rekonstrukci nelze obecně popsat, neboť závisí na geometrii sítě a existuje celá řada různých způsobů konstrukce. Z tohoto důvodu pouze odkážeme na články [3, 4, 5, 6, 9], kde jsou popsány tzv. *WENO rekonstrukce*, které doporučuje používat pro schémata typu ADER Toro. V numerických experimentech používáme pro $p = 2$ rekonstrukce popsané v kapitole 5. Definice numerického toku (4.4) vede na explicitní schéma ve tvaru

$$\mathbf{w}_i^{k+1} = \mathbf{w}_i^k - \frac{\tau_k}{|D_i|} \sum_{j \in S(i)} \sum_{\alpha=1}^{\beta_{ij}} \hat{\mathbf{H}}(\hat{\mathbf{w}}_i^k, \hat{\mathbf{w}}_j^k, \mathbf{n}_{ij}^\alpha) | \Gamma_{ij}^\alpha |, \quad D_i \in \mathcal{D}_h, \quad t_k \in [0, T]. \quad (4.7)$$

Schéma typu ADER se tedy od metody konečných objemů liší pouze definicí numerického toku, který nyní nezávisí na konstantních vektorech, ale obecně na vektorech $\hat{\mathbf{w}}_i^k, \hat{\mathbf{w}}_j^k$ složených z polynomů stupně nejvýše $p - 1$. Pro pevné p budeme hovořit o schématu typu *ADER p* .

4.2 Zobecněná Godunovova metoda

Jako u „klasické“ Godunovovy metody odvozené v sekci 3.2 zavedeme nový kartézský systém souřadnic $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N$ s počátkem ve středu \mathbf{x}_{ij}^α stěny Γ_{ij}^α , osou \tilde{x}_1 orientovanou ve směru normály \mathbf{n}_{ij}^α a $\tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N$ tečnami k Γ_{ij}^α , tedy pro $N = 3$ máme

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbb{Q}_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ij}^\alpha), \quad \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x}_{ij}^\alpha \in \Gamma_{ij}^\alpha \quad (4.8)$$

a $\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q}_0(\mathbf{n}_{ij}^\alpha)$ je matice rotace definovaná v (1.33). Podobně jako v (3.13) aproximujeme na základě rotační invariantnosti Eulerových rovnic

$$\sum_{s=1}^N (n_{ij}^\alpha)_s \mathbf{f}_s(\mathbf{w}(\cdot, t))|_{\Gamma_{ij}^\alpha} \approx \mathbb{Q}^{-1} \mathbf{f}_1(\mathbf{q}(\cdot, t))|_{\tilde{\Gamma}_{ij}^\alpha} = \mathbb{Q}^{-1} \mathbf{f}_1(\hat{\mathbf{q}}_{RS}(\cdot, t; \hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R))|_{\tilde{\Gamma}_{ij}^\alpha}, \quad (4.9)$$

kde $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\mathbf{n}_{ij}^\alpha)$ je matice definovaná pro $N = 3$ v (1.31), $\tilde{\Gamma}_{ij}^\alpha$ vznikne transformací stěny Γ_{ij}^α do systému souřadnic $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N$ $\hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R$ jsou vektory polynomů proměnných $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N$ stupně nejvýše $p - 1$ definovaných následovně

$$\hat{\mathbf{q}}_L(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbb{Q} \hat{\mathbf{w}}_i^k(\mathbf{x}) = \mathbb{Q} \hat{\mathbf{w}}_i^k(\mathbb{Q}_0^{-1} \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_{ij}^\alpha) \quad (4.10)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_R(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbb{Q} \hat{\mathbf{w}}_j^k(\mathbf{x}) = \mathbb{Q} \hat{\mathbf{w}}_j^k(\mathbb{Q}_0^{-1} \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_{ij}^\alpha) \quad (4.11)$$

a $\hat{\mathbf{q}}_{\text{RS}}(\tilde{\mathbf{x}}, t, \hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R)$ je řešení *zobecněného Riemannova problému*, jehož počáteční data nejsou dána konstantními stavovými vektory, ale vektory polynomů $\hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{\partial \tilde{x}_1} &= 0, \\ \mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}, 0) &= \begin{cases} \hat{\mathbf{q}}_L(\tilde{\mathbf{x}}), & \tilde{x}_1 < 0, \\ \hat{\mathbf{q}}_R(\tilde{\mathbf{x}}), & \tilde{x}_1 > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Řešení problému (4.12) je věnována sekce 4.3, jeho existencí se v této práci nezabýváme. Poznamenejme pouze, že řešení $\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}, t)$ tohoto problému nyní nezávisí pouze na \tilde{x}_1 a t jako tomu bylo u „klasického“ Riemannova problému, ale i na ostatních složkách $\tilde{\mathbf{x}}$. Pro problém (4.12) definujeme tzv. *zobecněný Godunovův tok*

$$\hat{\mathbf{g}}_G(\hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R) := \frac{1}{\tau_k} \frac{1}{|\Gamma_{ij}^\alpha|} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{\tilde{\Gamma}_{ij}^\alpha} \mathbf{f}_1(\hat{\mathbf{q}}_{\text{RS}}(\tilde{\mathbf{x}}, t; \hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R)) dS dt \quad (4.13)$$

což vede vzhledem k (4.4) a (4.9) na následující definici zobecněného numerického toku

$$\hat{\mathbf{H}}(\hat{\mathbf{w}}_i^k, \hat{\mathbf{w}}_j^k, \mathbf{n}_{ij}^\alpha) = \mathbb{Q}^{-1} \hat{\mathbf{g}}_G(\hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R). \quad (4.14)$$

Všimněme si, že definice „klasického“ Godunovova toku (3.14) nijak nekoliduje s definicí zobecněného Godunovova toku (4.13). Klasická Godunovova metoda je tedy v podstatě schéma typu ADER1. V tomto smyslu je schéma typu ADER zobecněním Godunovovy metody.

4.3 Řešení zobecněného Riemannova problému

Pro vyčíslení zobecněného Godunovova toku (4.13) nás bude zajímat řešení zobecněného Riemannova problému (4.12) pro libovolný fixovaný bod $\tilde{\mathbf{x}}_0$ na transformované hranici $\tilde{\Gamma}_{ij}^\alpha$ ($((\tilde{x}_0)_1 = 0)$). Hlavní myšlenkou konstrukce řešení tohoto problému je převedení na posloupnost „klasických“ Riemannových problémů, které řešit umíme. Začneme tím, že napíšeme prvních p členů Taylorova rozvoje $\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}_0, \tau)$ v čase

$$\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}_0, \tau) \approx \mathbf{q}^+(\tilde{\mathbf{x}}_0, 0) + \sum_{k=1}^{p-1} \left[\frac{\partial^k}{\partial t^k} \mathbf{q}^+(\tilde{\mathbf{x}}_0, 0) \right] \frac{\tau^k}{k!}, \quad (4.15)$$

kde $\mathbf{q}^+(\tilde{\mathbf{x}}_0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}_0, t)$. Vedoucí člen (4.15) odpovídá řešení „klasického“ Riemannova problému s po částech konstantními daty pro $\tilde{x}_1/t = 0$, které zkonstruovat umíme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{\partial \tilde{x}_1} &= 0, \\ \mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}, 0) &= \begin{cases} \hat{\mathbf{q}}_L(\tilde{\mathbf{x}}_0), & \tilde{x}_1 < 0, \\ \hat{\mathbf{q}}_R(\tilde{\mathbf{x}}_0), & \tilde{x}_1 > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Členy vyššího řádu jsou potom určeny ve dvou krocích:

1. *Procedura Cauchyho–Kowalewské*

Pomocí této pro procedury vyjádříme časové derivace v Taylorově rozvoji (4.15) prostorovými. Spočívá v postupném derivování rovnice (4.1) transformované do kartézského systému souřadnic $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N$:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \sum_{s=1}^N \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{q})}{\partial \tilde{x}_s} = 0, \quad \mathbf{q} = \mathbb{Q}\mathbf{w} \quad (4.17)$$

podle $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N$ až do řádu $p-1$. Z těchto derivací následně vyjádříme časové derivace \mathbf{q} . Například pro $p = 3$ dostaneme následující výrazy

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} &= - \sum_{s=1}^N \left(\frac{D\mathbf{f}_s}{D\mathbf{q}} \right) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{x}_s}, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial t \partial \tilde{x}_i} &= - \sum_{s=1}^N \left[\left(\frac{D^2 \mathbf{f}_s}{D\mathbf{q}^2} \right) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{x}_i} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{x}_s} + \left(\frac{D\mathbf{f}_s}{D\mathbf{q}} \right) \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial \tilde{x}_i \partial \tilde{x}_s} \right], \quad i = 1 \dots N, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial t^2} &= - \sum_{s=1}^N \left[\left(\frac{D^2 \mathbf{f}_s}{D\mathbf{q}^2} \right) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{x}_s} + \left(\frac{D\mathbf{f}_s}{D\mathbf{q}} \right) \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial t \partial \tilde{x}_s} \right], \end{aligned} \quad (4.18)$$

Poznamenejme, že v praxi je kvůli výpočetní složitosti lepší používat vyjádření po složkách než maticový tvar.

2. *Výpočet prostorových derivací*

Nyní odvodíme evoluční rovnice pro prostorové derivace postupným derivováním rovnice (4.12) a vektorů $\hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R$ podle $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N$ až do řádu p . Například pro $p = 3$, $N = 2$ dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}^{(1,0)}}{\partial t} + \left(\frac{D\mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}} \right) \frac{\partial \mathbf{q}^{(1,0)}}{\partial \tilde{x}_1} &= - \left(\frac{D^2 \mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}^2} \right) (\mathbf{q}^{(1,0)})^2, \\ \frac{\partial \mathbf{q}^{(0,1)}}{\partial t} + \left(\frac{D\mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}} \right) \frac{\partial \mathbf{q}^{(0,1)}}{\partial \tilde{x}_1} &= - \left(\frac{D^2 \mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}^2} \right) \mathbf{q}^{(1,0)} \mathbf{q}^{(0,1)}, \\ \frac{\partial \mathbf{q}^{(2,0)}}{\partial t} + \left(\frac{D\mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}} \right) \frac{\partial \mathbf{q}^{(2,0)}}{\partial \tilde{x}_1} &= - \left(\frac{D^2 \mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}^2} \right) \mathbf{q}^{(1,0)} \mathbf{q}^{(2,0)} - \left(\frac{D^3 \mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}^3} \right) (\mathbf{q}^{(1,0)})^3 \\ &\quad - 2 \left(\frac{D^2 \mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}^2} \right) \mathbf{q}^{(1,0)} \mathbf{q}^{(2,0)}, \\ \frac{\partial \mathbf{q}^{(1,1)}}{\partial t} + \left(\frac{D\mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}} \right) \frac{\partial \mathbf{q}^{(1,1)}}{\partial \tilde{x}_1} &= - \left(\frac{D^2 \mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}^2} \right) \mathbf{q}^{(0,1)} \mathbf{q}^{(2,0)} - \left(\frac{D^3 \mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}^3} \right) \mathbf{q}^{(0,1)} (\mathbf{q}^{(1,0)})^2 \\ &\quad - 2 \left(\frac{D^2 \mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}^2} \right) \mathbf{q}^{(1,0)} \mathbf{q}^{(1,1)}, \\ \frac{\partial \mathbf{q}^{(0,2)}}{\partial t} + \left(\frac{D\mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}} \right) \frac{\partial \mathbf{q}^{(0,2)}}{\partial \tilde{x}_1} &= - \left(\frac{D^2 \mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}^2} \right) \mathbf{q}^{(0,1)} \mathbf{q}^{(1,1)} - \left(\frac{D^3 \mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}^3} \right) (\mathbf{q}^{(0,1)})^2 \mathbf{q}^{(1,0)} \\ &\quad - \left(\frac{D^2 \mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}^2} \right) (\mathbf{q}^{(0,2)} \mathbf{q}^{(1,0)} + \mathbf{q}^{(0,1)} \mathbf{q}^{(1,1)}), \end{aligned} \quad (4.19)$$

kde

$$\mathbf{q}^{(k_1, \dots, k_N)} = \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_N} \mathbf{q}}{\partial \tilde{x}_1^{k_1} \dots \partial \tilde{x}_N^{k_N}}, \quad 1 \leq k_1 + \dots + k_N \leq p - 1$$

Označíme-li $\mathbb{A}_1(\mathbf{q}) = D\mathbf{f}_1(\mathbf{q})/D\mathbf{q}$, potom lze všechny rovnice pro prostorové derivace $\mathbf{q}^{(k_1, \dots, k_N)}$ obecně psát ve tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{q}^{(k_1, \dots, k_N)}}{\partial t} + \mathbb{A}_1(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathbf{q}^{(k_1, \dots, k_N)}}{\partial \tilde{x}_1} = \mathbb{H}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{(1,0, \dots, 0)}, \dots, \mathbf{q}^{(k_1, \dots, k_N)}), \quad (4.20)$$

kde \mathbb{H} je nelineární člen závisující na derivacích řádu $\ell = 1, \dots, k_1 + \dots + k_N$ i na $\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}, t)$. Pro Taylorův rozvoj (4.15) nás ovšem zajímá pouze hodnota řešení pro fixovaný bod $\tilde{\mathbf{x}}_0 \in \tilde{\Gamma}_{ij}^\alpha$ a $t \rightarrow 0$. Proto Toro v [7, 8, 10] nelineární člen \mathbb{H} zanedbává s odůvodněním, že ovlivňuje řešení pouze pro $t > 0$. Navíc rovnici (4.20) linearizujeme okolo vedoucího členu $\mathbf{q}^+(\tilde{\mathbf{x}}_0, 0)$ časového rozvoje (4.15) a nahradíme data daná vektory polynomů $\hat{\mathbf{q}}_L^{(k_1, \dots, k_N)}$, $\hat{\mathbf{q}}_R^{(k_1, \dots, k_N)}$ jejich hodnotami v bodě $\tilde{\mathbf{x}}_0$. Popsaná zjednodušení vedou na následující lineární Riemannův problém pro prostorové derivace \mathbf{q} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}^{(k_1, \dots, k_N)}}{\partial t} + \mathbb{A}_0 \frac{\partial \mathbf{q}^{(k_1, \dots, k_N)}}{\partial \tilde{x}_1} &= 0, \quad \mathbb{A}_0 = \mathbb{A}_1(\mathbf{q}^+(\tilde{\mathbf{x}}_0, 0)), \\ \mathbf{q}^{(k_1, \dots, k_N)}(\tilde{\mathbf{x}}, 0) &= \begin{cases} \hat{\mathbf{q}}_L^{(k_1, \dots, k_N)}(\tilde{\mathbf{x}}_0), & \tilde{x}_1 < 0, \\ \hat{\mathbf{q}}_R^{(k_1, \dots, k_N)}(\tilde{\mathbf{x}}_0), & \tilde{x}_1 > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Poznamenejme, že matice koeficientů \mathbb{A}_0 je stejná pro všechny derivace a stačí ji vyčíslit pouze jednou. Prostorové derivace v bodě $\tilde{\mathbf{x}}_0 = 0$ pro $\tau \rightarrow 0$ potom odpovídají řešení problému (4.21) pro $\tilde{x}_1/t = 0$.

Máme-li všechny prostorové derivace, potom můžeme pomocí Cauchyho–Kowalewské procedury vyčíslit časové derivace pro Taylorův rozvoj (4.15). Řešení zobecněného Riemannova problému v bodě $\tilde{\mathbf{x}}_0$ tedy aproximujeme jako

$$\hat{\mathbf{q}}_{\text{RS}}(\tilde{\mathbf{x}}_0, t, \hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R) \approx \mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}_0, t), \quad (4.22)$$

kde $\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}_0, t)$ je dán rozvojem (4.15).

4.4 Konstrukce zobecněného Godunovova toku

Budeme vycházet z definice zobecněného Godunovova toku (4.13), kde pro vyčíslení integrálu přes $\tilde{\Gamma}_{ij}^\alpha$ použijeme vhodnou kvadraturní formuli (např. Toro používá pro $N = 2$, $p = 3, 4$ dvoubodovou Gaussovou kvadraturu). Dostaneme

$$\hat{\mathbf{g}}_G(\hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R) = \frac{1}{\tau_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\sum_{\nu=1}^{K_\nu} \mathbf{f}_1(\hat{\mathbf{q}}_{\text{RS}}(\tilde{\mathbf{x}}_\nu, t, \hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R)) \omega_\nu \right) dt, \quad (4.23)$$

kde $\tilde{\mathbf{x}}_\nu$, ω_ν jsou uzly resp. váhy kvadraturní formule přes transformovanou stěnu $\tilde{\Gamma}_{ij}^\alpha$ a K_ν je jejich počet. Uvedeme dva způsoby vyčíslení zobecněného Godunovova toku (4.23):

1. *metoda založená na numerické integraci*

Jedna možnost je použít pro vyčíslení integrálu přes $[t_k, t_{k+1}]$ Gaussovo kvadraturní pravidlo řádu nejméně p , zobecněný Godunovův tok potom vypadá takto:

$$\hat{\mathbf{g}}_G(\hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R) = \sum_{\mu=1}^{K_\mu} \sum_{\nu=1}^{K_\nu} \mathbf{f}_1(\hat{\mathbf{q}}_{RS}(\tilde{\mathbf{x}}_\nu, t_\mu, \hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R)) \omega_\nu \omega_\mu, \quad (4.24)$$

kde t_μ, ω_μ jsou uzly resp. váhy Gaussovy kvadratury přes $[t_k, t_{k+1}]$, K_μ jejich počet a $\hat{\mathbf{q}}_{RS}(\tilde{\mathbf{x}}_\nu, t_\mu, \hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R)$ je řešení zobecněného Riemannova problému (4.12) dané aproximací (4.22) v uzlu kvadratury $(\tilde{\mathbf{x}}_\nu, t_\mu)$. Podobně jako u „klasické“ Godunovovy metody nahrazujeme v praxi přesné řešení Riemannova problému řešením přibližným, můžeme použít např. (3.28) nebo (3.36).

2. *metoda založená na Taylorově rozvoji*

Druhý způsob vychází z prvních p členů Taylorova rozvoje funkce toku \mathbf{f}_1 :

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}, \tau)) = \mathbf{f}_1(\mathbf{q}^+(\tilde{\mathbf{x}}, 0)) + \sum_{k=1}^{p-1} \left[\frac{\partial^k}{\partial t^k} \mathbf{f}_1(\mathbf{q}^+(\tilde{\mathbf{x}}, 0)) \right] \frac{\tau^k}{k!}, \quad (4.25)$$

kde $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Gamma}_{ij}^\alpha$, $\mathbf{q}^+(\tilde{\mathbf{x}}, 0)$ je vedoucí člen Taylorova rozvoje (4.15) a členy vyššího řádu získáme Cauchyho–Kowalewské procedurou (4.18). Vzhledem k (4.22) můžeme aproximovat

$$\mathbf{f}_1(\hat{\mathbf{q}}_{RS}(\tilde{\mathbf{x}}, t, \hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R)) \approx \mathbf{f}_1(\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}, t)). \quad (4.26)$$

Dosazením (4.26) do (4.23) a následnou integrací podle času dostaneme jiné vyjádření zobecněného Godunovova toku

$$\hat{\mathbf{g}}_G(\hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R) = \sum_{\nu=1}^{K_\nu} \left(\mathbf{f}_1(\mathbf{q}^+(\tilde{\mathbf{x}}_\nu, 0)) + \sum_{l=1}^{p-1} \left[\frac{\partial^l}{\partial t^l} \mathbf{f}_1(\mathbf{q}^+(\tilde{\mathbf{x}}_\nu, 0)) \right] \frac{\tau_k^l}{(l+1)!} \right) \omega_\nu, \quad (4.27)$$

kde $\tau_k = t_{k+1} - t_k$. Tedy pro integraci přes $[t_k, t_{k+1}]$ není potřeba numerická kvadratura. Navíc v tomto případě můžeme použít místo vedoucího členu $\mathbf{f}_1(\mathbf{q}^+(\tilde{\mathbf{x}}, 0))$ rozvoje v (4.27) některý z přibližných Riemannových řešičů, např. HLL řešič (3.32) nebo HLLC řešič (3.45). Zbývající členy Taylorova rozvoje potom lze vyčíslit pomocí Cauchyho–Kowalewské procedury (4.18) s využitím odpovídajícího přibližného řešení Riemannova problému.

4.5 CFL podmínka stability

Nechť $\mathcal{D}_h = \{D_i\}_{i \in J}$ je síť konečných objemů, $\hat{\mathbf{w}}_i^k$, $i \in J$ jsou vektory polynomů získaných rekonstrukcí z hodnot přibližného řešení problému (4.1) na časové hladině t_k . Pro schéma typu ADER (4.7) platí podobná CFL podmínka stability, jako pro schéma metody konečných objemů (2.18):

$$\tau_k \leq \frac{CFL |D_i|}{\lambda_{i, \max} |\partial D_i|}, \quad (4.28)$$

kde $CFL \leq 1$ a

$$\lambda_{i,\max} = \max_{\substack{r=1,\dots,m, j \in S(i) \\ \alpha=1,\dots,\beta_{ij}, \nu=1,\dots,K_\nu}} |\lambda_r(\mathbf{w}_{ij,\nu}^k, \mathbf{n}_{ij}^\alpha)|, \quad m = N + 2, \quad (4.29)$$

kde K_ν je počet uzlů kvadratury v (4.23) a konstanty $\lambda_r(\mathbf{w}_{ij,\nu}^k, \mathbf{n}_{ij}^\alpha)$ jsou vlastní čísla matice $\mathbb{A}_1(\mathbb{Q}^{-1}(\mathbf{n}_{ij}^\alpha)\mathbf{w}_{ij,\nu}^k)$, kde $\mathbb{A}_1(\mathbf{w}) = D\mathbf{f}_1/D\mathbf{w}$, matice $\mathbb{Q}(\mathbf{n}_{ij}^\alpha)$ je definovaná v (1.31) a $\mathbb{Q}^{-1}(\mathbf{n}_{ij}^\alpha)\mathbf{w}_{ij,\nu}^k$ je řešení zobecněného Riemannova problému (4.12) s počátečními daty definovanými v (4.10), (4.11) v uzlech $\tilde{\mathbf{x}}_\nu$ kvadratury (4.23) a čase $t = 0$.

4.6 Algoritmus ADER

Protože z odvození schématu typu ADER není příliš jasné pořadí kroků výpočtu, zformulujeme jej pro přehlednost pomocí následujícího algoritmu:

Na každé časové hladině t_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ provedeme následující kroky:

VSTUP: Síť konečných objemů $\mathcal{D}_h = \{D_i\}_{i \in J}$, integrální průměry \mathbf{w}_i^k řešení přes objemy D_i v časovém okamžiku t_k a požadovaný řád přesnosti p .

1. Pro každé $D_i \in \mathcal{D}_h$ spočti z daných integrálních průměrů \mathbf{w}_j^k , $j \in J$ vektor polynomů $\hat{\mathbf{w}}_i^k$ stupně nejvýše $p - 1$ splňující (4.5) a (4.6) použitím vhodné polynomiální rekonstrukce.
2. Pro každé $D_i \in \mathcal{D}_h$ proved:
 - (a) Vyřeš zobecněný Riemannův problém (4.12) s počátečními daty $\hat{\mathbf{q}}_i^k$ a $\hat{\mathbf{q}}_j^k$, $j \in S(i)$ převedením na Riemannův problém (4.16) a posloupnost lineárních Riemannových problémů (4.21) v každém uzlu \mathbf{x}_ν kvadraturní formule ve vzorci (4.23).
 - (b) Pomocí Cauchyho–Kowalewské procedury (4.18) vyčíslí všechny časové derivace $\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}_\nu, t)$ do řádu $p - 1$ v každém uzlu kvadraturní formule (4.23).
 - (c) Spočti zobecněné Godunovovy toky $\hat{\mathbf{g}}_G$ buď pomocí metody založené na numerické integraci tj. dosazením (4.15) do (4.24), nebo metodou založenou na Taylorově rozvoji (4.25).
 - (d) Spočti numerické toky $\hat{\mathbf{H}}(\hat{\mathbf{w}}_i^k, \hat{\mathbf{w}}_j^k, \mathbf{n}_{ij})$ ze vztahu (4.14).
 - (e) Aktualizuj integrální průměr \mathbf{w}_i^{k+1} použitím schématu (4.7).

VÝSTUP: Aktualizované integrální průměry \mathbf{w}_i^{k+1} , $i \in J$ přibližného řešení na časové hladině t_{k+1} .

Kapitola 5

Numerické experimenty

V této části práce popíšeme numerické experimenty, v nichž porovnáme metody HLL a HLLC s několika dalšími metodami Godunovova typu. A dále v nich budeme porovnávat různé implementace schémat typu ADER2. Pro srovnání použijeme dva problémy, u nichž známe řešení. Je to tzv. *Sodova trubice*, která bude popsána v sekci 5.4 a *vortex evolution* problém popsáný v sekci 5.5. Oba problémy jsou dvourozměrné a řeší se na oblastech Ω tvaru obdélníku, které můžeme diskretizovat jak pomocí kartézské sítě s obdélníkovými objemy, tak pomocí nestrukturované trojúhelníkové sítě. Nabízí se nám tedy srovnání numerických řešení těchto problémů na dvou různých sítích. Metody budeme porovnávat z hlediska doby trvání výpočtu od první do poslední iterace a z hlediska přesnosti tj. chyby a experimentálního řádu. Časový krok v experimentech adaptivně omezuje pomocí CFL podmínky stability (2.23) resp. (4.28). Protože v praxi některé použité implementace vyžadují pro zachování stability přísnější omezení časového kroku, klademe ve všech příkladech $CFL = 0.6$, aby srovnání bylo objektivní.

Pro metody HLL a HLLC používáme v experimentech odhady (3.50) rychlostí s_L, s_R pomocí Roeho průměrů a pro rychlost střední vlny s_* vztah (3.54). Tyto metody porovnááme s přesným Riemannovým řešičem (3.14) závislejícím na přesném řešení Riemannova problému vypočítaném postupem z [2] str. 112–140. Dále pro srovnání použijeme výsledky spočtené pomocí Roeho řešiče a Osherova–Solomonova řešiče, které jsou rovněž odvozeny v [2].

Pro implementaci schémat typu ADER2 použijeme vyjádření (4.27) tedy metodu založenou na Taylorově rozvoji, kde vedoucí člen rozvoje nahradíme přibližným Riemannovým řešičem HLL nebo HLLC a pro integraci přes hranici použijeme jednobodovou kvadraturu. Takto vzniklá schémata budeme značit ADER2–HLL resp. ADER2–HLLC. Zbývající členy rozvoje (4.27) získáme Cauchyho–Kowalewslé procedurou s využitím přibližného řešení Riemannova problému (3.28) resp. (3.36) pro ADER2–HLL resp. ADER2–HLLC. U schémat typu ADER2 se nabízí srovnání nejen s metodami prvního řádu, ale také implementací ADER2 pomocí různých rekonstrukcí. Použité rekonstrukce aplikované na jednotlivé složky vektorů $w_i^k, i \in J$ jsou pro ADER2 popsány v sekcích 5.1 a 5.2.

5.1 Lineární rekonstrukce na kartézské síti

Nechť \mathcal{D}_h je kartézská síť v \mathbb{R}^2 tvořená intervaly $\mathcal{I}_{ij} = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]$ tedy obdélníkovými objemy. Máme dány integrální průměry u_{ij} funkce $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ přes intervaly \mathcal{I}_{ij} :

$$u_{ij} = \frac{1}{\Delta x_i} \frac{1}{\Delta y_j} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, y) dx dy, \quad (5.1)$$

kde $\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$, $\Delta y_j = y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}$ jsou kroky sítě. Úkolem je nalézt pro každý interval \mathcal{I}_{ij} lineární funkce \hat{u}_{ij} takové, že pro funkce $u \in C^2(\Omega)$ jsou aproximací druhého řádu uvnitř \mathcal{I}_{ij} :

$$\hat{u}_{ij}(x, y) = u(x, y) + O(h^2), \quad \text{pro } (x, y) \in \mathcal{I}_{ij}, \quad (5.2)$$

kde $h = \max\{\Delta x_i, \Delta y_j\}$. Navíc požadujeme, aby funkce \hat{u}_{ij} splňovaly

$$\frac{1}{\Delta x_i} \frac{1}{\Delta y_j} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \hat{u}_{ij}(x, y) dx dy = u_{ij} \quad (5.3)$$

Je přirozené hledat funkce \hat{u}_{ij} ve tvaru

$$\hat{u}_{ij}(x, y) = a(x - x_i) + b(y - y_j) + c, \quad (5.4)$$

kde $(x_i, y_j) = P_{ij}$ je střed intervalu \mathcal{I}_{ij} . Podmínka (5.3) bude splněna položíme-li

$$c = u_{ij}, \quad (5.5)$$

koeficienty a, b jsou potom dány aproximacemi derivací v bodě P_{ij} tedy

$$\begin{aligned} a &\approx \frac{\partial}{\partial x} u(x_i, y_j), \\ b &\approx \frac{\partial}{\partial y} u(x_i, y_j). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Celá úloha se tímto zredukuje na nalezení aproximace gradientu (a, b) . Na kartézské síti se nabízí použít tzv. *rekonstrukci dimenzi-po-dimenzi*, tedy aproximujeme zvlášť derivaci podle x a zvlášť podle y . Ve svých výpočtech jsem použil následující aproximace gradientu

1. pomocí centrálních diferencí (CD)

Pokud funkce $u \in C^2(\Omega)$ potom je nejjednodušší použít pro aproximaci gradientu (a, b) na \mathcal{I}_{ij} centrální diference tedy

$$\begin{aligned} a &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}, \\ b &= \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Tato rekonstrukce je jednoduchá a pro funkce $u \in C^2(\Omega)$ dosahuje požadovaného řádu přesnosti 2. V praxi je však často třeba rekonstruovat i funkce nespojitě a u nich při této rekonstrukci dochází k tzv. *Gibbsovu jevu*, který se projevuje nežádoucími oscilacemi poblíž nespojitostí.

2. *pomocí centrálních diferencí s limiterem (CD+lim)*

Aby se zabránilo nežádoucím oscilacím při rekonstrukci nespojitých funkcí používá se tzv. *limiting* tj. automatické snižování řádu přesnosti poblíž nespojitostí. Při výpočtech byla pro limiting použita tzv. minmod funkce:

$$\text{minmod}(a, b, c) = \begin{cases} \min\{a, b, c\}; & \text{sign}(a) = \text{sign}(b) = \text{sign}(c), \\ 0; & \text{jinak,} \end{cases} \quad (5.8)$$

Odpovídající aproximace gradientu (a, b) je potom následující:

$$\begin{aligned} a &= \text{minmod}\left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}, c \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{x_{i+1,j} - x_{ij}}, c \frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{x_{ij} - x_{i-1,j}}\right), \\ b &= \text{minmod}\left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}, c \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{y_{i,j+1} - y_{ij}}, c \frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{y_{ij} - y_{i,j-1}}\right), \end{aligned} \quad (5.9)$$

konstanta $c \in [1, 2]$ je volena na základě vlastností funkce u - pro hladké funkce volíme $c = 2$ a pro funkce s nespojitostmi je výhodnější $c = 1$.

3. *pomocí rekonstrukce typu WENO2 (WENO2)*

Toro a Titarev používají pro schéma typu ADER tzv. *WENO rekonstrukci* (weighted essentially non-oscillatory), kterou popisuje Shu v [3, 6]. V lineárním případě je aproximace gradientu dána lineární kombinací dopředných, a zpětných diferencí. Ukážeme pouze postup rekonstrukce ve směru x , ve směru y se provede zcela analogicky

$$a = \omega_1 \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{x_{i+1,j} - x_{ij}} + \omega_2 \frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{x_{ij} - x_{i-1,j}}, \quad (5.10)$$

kde váhy ω_1, ω_2 jsou dány

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad \alpha_k = \frac{1}{(\epsilon + \beta_k)^r}, \quad k = 1, 2, \quad (5.11)$$

kde β_k je tzv. *oscilační identifikátor* definovaný pro lineární rekonstrukci takto

$$\beta_k = \left(\frac{u_{i+2-k,j} - u_{i+1-k,j}}{x_{i+2-k,j} - x_{i+1-k,j}} \right)^2, \quad k = 1, 2. \quad (5.12)$$

Poměrně důležitá je volba parametru r , pokud $r = 0$, potom váhy $\omega_k = 1/2$ což vede k nestabilitě. Volbou příliš vysokého r se naopak dostáváme k ENO rekonstrukci, která dosahuje menší přesnosti viz. [6]. V našich experimentech volíme podobně jako Toro $r = 2$.

5.2 Lineární rekonstrukce na trojúhelníkové síti

Nechť $\mathcal{D}_h = \{D_i\}_{i \in J}$ je síť trojúhelníkových konečných objemů diskretizující oblast $\Omega_h \subset \mathbb{R}^2$ a u_i jsou integrální průměry funkce u přes D_i

$$u_i = \int_{D_i} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (5.13)$$

Pro každé $i \in J$ hledáme lineární funkci \hat{u}_i takovou, že

$$\begin{aligned}\hat{u}_i(\mathbf{x}) &= u(\mathbf{x}) + O(h^2), & \mathbf{x} \in D_i, \text{ pro } u \in C^2(\Omega) \\ \int_{D_i} \hat{u}_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= u_i,\end{aligned}\tag{5.14}$$

kde $h = \text{diam}D_i$. Pro jednoduchost nyní zavedeme označení $x = x_1, y = x_2$. Podobně jako na kartézské síti budeme hledat \hat{u}_i ve tvaru

$$\hat{u}_i((x, y)) = a(x - x_i) + b(y - y_i) + c, \quad (x, y) \in D_i,\tag{5.15}$$

kde koeficienty a, b, c jsou dány

$$\begin{aligned}c &= u_i \\ a &\approx \frac{\partial}{\partial x} u(P_i) \\ b &\approx \frac{\partial}{\partial y} u(P_i)\end{aligned}\tag{5.16}$$

Pro aproximaci gradientu (a, b) na objemu D_i je třeba použít integrální průměry funkce u přes sousední objemy, které označíme $D_{j_1}, D_{j_2}, D_{j_3}$. Při výpočtech jsou použity následující aproximace gradientu:

1. *pomocí zobecněných centrálních diferencí (CD)*

Jedná se o pokus rozšířit myšlenku centrálních diferencí na trojúhelníkovou síť. Aproximaci gradientu (a, b) potom spočteme jako řešení následující soustavy lineárních algebraických rovnic

$$\begin{aligned}a(x_{j_2} - x_{j_1}) + b(y_{j_2} - y_{j_1}) &= u_{j_2} - u_{j_1}, \\ a(x_{j_3} - x_{j_1}) + b(y_{j_3} - y_{j_1}) &= u_{j_3} - u_{j_1},\end{aligned}\tag{5.17}$$

kde $(x_{j_k}, y_{j_k}) = P_{j_k}, k = 1, 2, 3$ jsou těžiště sousedních objemů D_{j_k} a u_{j_k} jsou integrální průměry funkce u přes sousední objemy D_{j_k} .

2. *pomocí zobecněných centrálních diferencí s limiterem (CD+lim)*

Podobně jako na kartézské síti způsobuje rekonstrukce pomocí zobecněných centrálních diferencí nežádoucí oscilace poblíž nespojitostí. V tomto případě použijeme jiný způsob limitingu. Myšlenka spočívá v tom, že objemy obsahující nespojitosti detekujeme a položíme na nich gradient nulový. K detekci nespojitostí použijeme tzv. *indikátor skoku* (viz. [2], str. 483)

$$g(i) = \sum_{j \in S(i)} \int_{\Gamma^{ij}} (\hat{u}_i - \hat{u}_j)^2 dS / (h_i |D_i|^{3/4}),\tag{5.18}$$

kde $h_i = \text{diam}D_i$ a funkce \hat{u}_i, \hat{u}_j jsou získané rekonstrukcí pomocí zobecněných centrálních diferencí. Pro přesnou integraci použijeme dvoubodové Gaussovo kvadraturní pravidlo. Postup limitingu je potom následující

- (a) Pro všechna $i \in J$ spočteme rekonstrukci \hat{u}_i
(b) pokud $g(i) > 1$, potom pro \hat{u}_i položíme $a = 0, b = 0$

3. *pomocí rekonstrukce typu WENO2 (WENO2)*

Budeme postupovat obdobně jako Käser v [4, 5]. Nejdříve spočteme gradienty (a_k, b_k) , $k = 1, 2, 3$ tří lineárních funkcí vzniklých interpolací v těžištích $P_i, P_{j_k}, P_{j_l}, l = k \bmod 3 + 1$, objemů D_i, D_{j_k}, D_{j_l} . Pro každý gradient (a_k, b_k) máme tedy soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_k(x_{j_k} - x_i) + b_k(y_{j_k} - y_i) &= u_{j_k} - u_i, \\ a_k(x_{j_l} - x_i) + b_k(y_{j_l} - y_i) &= u_{j_l} - u_i, \end{aligned} \quad (5.19)$$

Aproximace gradientu funkce u na D_i je potom dána lineární kombinací gradientů (a_k, b_k) :

$$\begin{aligned} a &= \sum_{k=1}^3 \omega_k a_k, \\ b &= \sum_{k=1}^3 \omega_k b_k, \end{aligned} \quad (5.20)$$

, kde váhy ω_k jsou dány následovně

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\sum_{l=1}^3 \alpha_l}, \quad \alpha_k = \frac{1}{(\epsilon + \beta_k)^r}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (5.21)$$

kde ϵ je malé kladné číslo abychom zamezili dělení nulou a β_k je oscilační indikátor

$$\beta_k = a_k^2 + b_k^2 \quad (5.22)$$

Parametr r má stejný význam jako na kartézské síti a položíme jej roven 2.

5.3 Odhad chyby a řádu přesnosti

Abychom mohli porovnat přesnost jednotlivých metod, je třeba určit chybu přibližného řešení. Budeme měřit chybu v hustotě ρ . Protože v našich numerických příkladech přesná řešení známe, můžeme vypočítat chybu e_h v čase t v L^1 normě následovně

$$\|e_h\|_1 = \|\rho(\cdot, t) - \rho_h(\cdot, t)\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |\rho(\mathbf{x}, t) - \rho_h(\mathbf{x}, t)| d\mathbf{x} \approx \sum_{i \in J} |D_i| |\rho(\mathbf{x}_i, t) - \rho_h(\mathbf{x}_i, t)|, \quad (5.23)$$

kde J je indexová množina konečných objemů, \mathbf{x}_i je těžiště elementu D_i , $\rho(\mathbf{x}, t)$ je hustota v přesném řešení $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ v bodě \mathbf{x} a čase t , $\rho_h(\mathbf{x}, t)$ je hustota v přibližném řešení $\mathbf{w}_h(\mathbf{x}, t)$ a h je krok sítě, který na rovnoměrných kartézských sítích bereme jako

$$h = \sup_{i \in J} \text{diam} D_i \quad (5.24)$$

a na nestrukturovaných trojúhelníkových sítích klademe

$$h = \sqrt{\frac{|D_i|}{\#J}}, \quad (5.25)$$

kde $\#J$ je mohutnost indexové množiny, neboli počet objemů sítě. Podobně vyjádříme chybu v L^∞ normě:

$$\|e_h\|_\infty = \|\rho(\cdot, t) - \rho_h(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |\rho(\mathbf{x}, t) - \rho_h(\mathbf{x}, t)| \approx \max_{i \in J} |\rho(\mathbf{x}_i, t) - \rho_h(\mathbf{x}_i, t)|. \quad (5.26)$$

Dle definice je metoda řádu p jestliže existují konstanty C a p nezávislé na kroku h takové, že

$$\|e_h\| \approx Ch^p. \quad (5.27)$$

Řád přesnosti odhadneme následujícím způsobem. Máme-li spočteny dvě chyby $\|e_{h_1}\|$, $\|e_{h_2}\|$ na dvou sítích s různými kroky h_1 , h_2 , potom máme pro konstanty C , p soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} \|e_{h_1}\| &= Ch_1^p, \\ \|e_{h_2}\| &= Ch_2^p. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Logaritmováním těchto dvou rovnic dostaneme

$$\begin{aligned} \log \|e_{h_1}\| &= \log C + \log h_1^p, \\ \log \|e_{h_2}\| &= \log C + \log h_2^p \end{aligned} \quad (5.29)$$

a odtud můžeme p vyjádřit ve tvaru

$$p = \frac{\log(\|e_{h_2}\|/\|e_{h_1}\|)}{\log(h_2/h_1)}. \quad (5.30)$$

Takto získané číslo p nazveme *experimentálním řádem přesnosti mezi sítěmi* \mathcal{D}_{h_1} , \mathcal{D}_{h_2} .

5.4 Sodova trubice

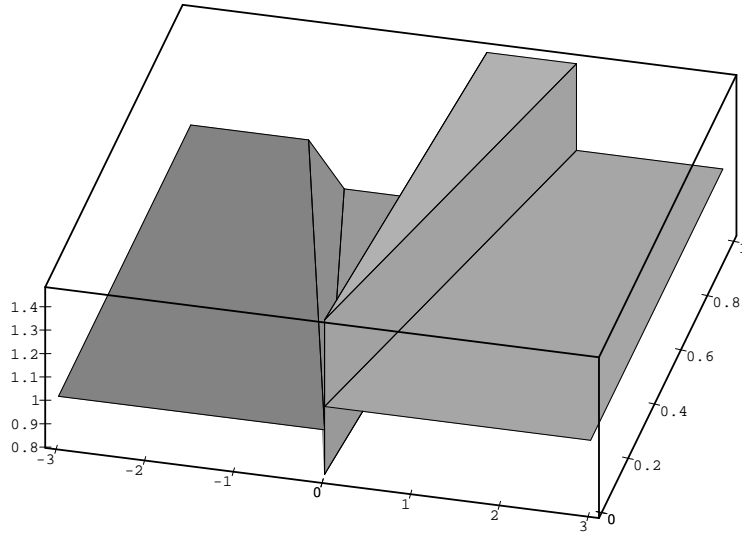
Nejjednodušším příkladem u kterého známe přesné řešení je tzv. *Sodova trubice*. Fyzikální interpretace je následující. Máme trubici s plynem rozdělenou membránou na dvě části. O obou částech má plyn rozdílný tlak i hustotu. V čase $t = 0$ je membrána náhle odstraněna a plyn může proudit z jedné části do druhé. Očekáváme tok plynu ve směru menšího tlaku. Tento problém je rozumně aproximován řešením jednorozměrného Riemannova problému s počátečními podmínkami

$$\mathbf{w}_L = (\rho_L, 0, E_L)^T, \quad \mathbf{w}_R = (\rho_R, 0, E_R)^T, \quad (5.31)$$

kde index L odpovídá levé a R pravé části trubice. Pro náš experiment zvolíme následující počáteční data:

$$\rho_L = 1, \quad \rho_R = 1.101463, \quad (5.32)$$

$$p_L = 2, \quad p_R = 1. \quad (5.33)$$



Obrázek 5.1: Rozložení hustoty v přesném řešení Riemannova problému s počátečními daty (5.32) v $Q_T = [-3, 3] \times [0, 1]$

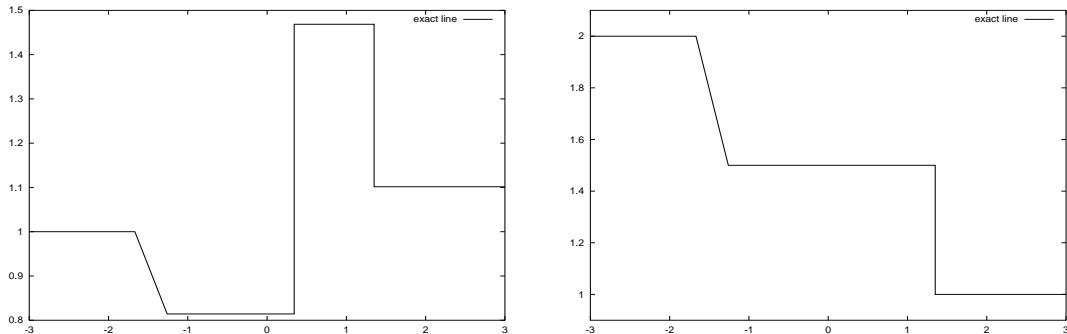
Odpovídající hodnoty celkové energie plynu jsou

$$E_L = 5, \quad E_R = 2.5 \quad (5.34)$$

Tento problém budeme modelovat pomocí dvourozměrných Eulerových rovnic ve výpočetní oblasti $\Omega = [-3, 3] \times [0, 0.1]$, kde na horní a dolní hranici uvažujeme podmínku nepropustnosti a levá a pravá hranice budou vstup/výstup. Oblast diskretizujeme sítí konečných objemů. Počáteční podmínku volíme

$$\mathbf{w}^0(\mathbf{x}) = \begin{cases} (1, 0, 0, 5)^T, & x_1 < 0, \\ (1.101463, 0, 0, 2.5)^T, & x_1 > 0. \end{cases} \quad (5.35)$$

Rozložení některých veličin v přesném řešení Riemannova problému s počátečními daty (5.32) v je znázorněno na obr. 5.1, 5.2.



Obrázek 5.2: Rozložení hustoty (vlevo) a tlaku(vpravo) v přesném Řešení Riemannova problému s počátečními daty (5.32) v čase $t = 1$ na řezu $x_2 = 0.05$

5.5 Vortex evolution problém

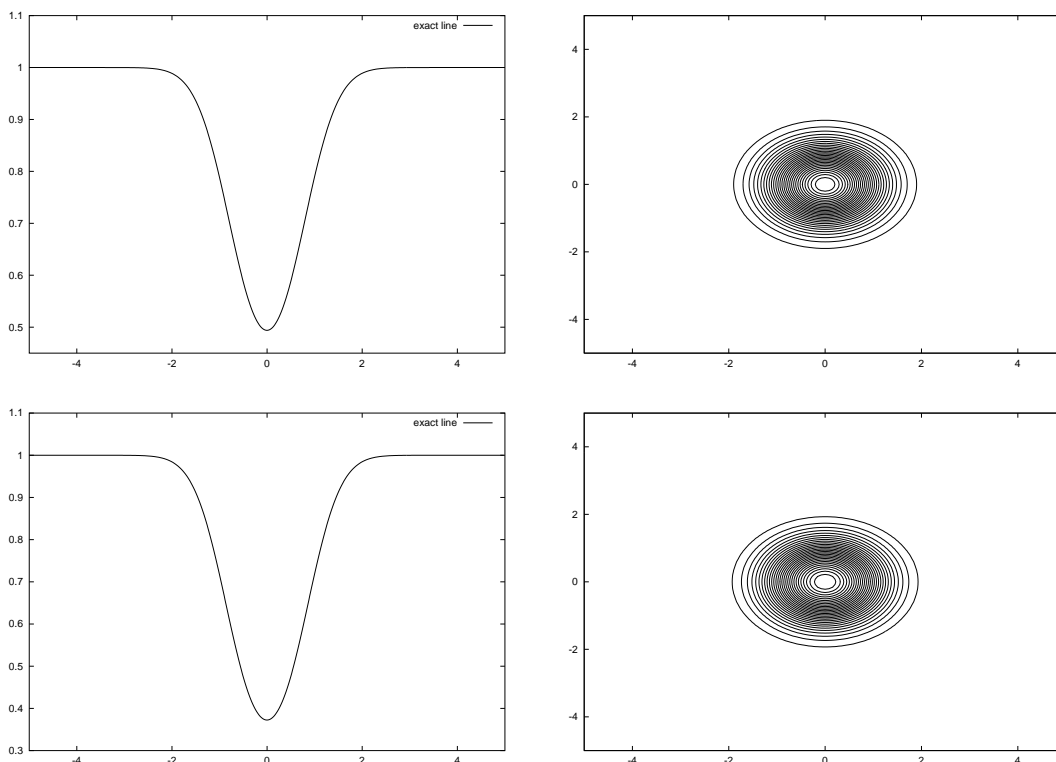
V další úloze budeme řešit chování víru v čase, kde oblast $\Omega = \mathbb{R}^2$. Oblast Ω a aproximujeme výpočetní oblastí $\Omega_h = [-5, 5] \times [-5, 5]$ s periodickými okrajovými podmínkami na hranici a diskretizujeme sítí konečných objemů. Počáteční data odpovídají hladkému víru umístěnému v počátku a charakterizovanému následujícím rozložením fyzikálních veličin v oblasti Ω_h :

$$\begin{aligned} v_1 &= 1 - \frac{\epsilon}{2\pi} e^{\frac{1}{2}(1-r^2)} x_2, & \theta &= 1 - \frac{(\gamma - 1)\epsilon^2}{8\gamma\pi^2} e^{(1-r^2)}, \\ v_2 &= 1 + \frac{\epsilon}{2\pi} e^{\frac{1}{2}(1-r^2)} x_1, & \frac{p}{\rho^\gamma} &= 1, \end{aligned} \quad (5.36)$$

kde $r^2 = x_1^2 + x_2^2$, θ je absolutní teplota a $\epsilon = 5$ je „mohutnost“ víru. Odpovídající hustota a tlak jsou potom dány vztahy

$$\rho = \theta^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad p = \theta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (5.37)$$

Rozložení hustoty a tlaku v počátečním stavu jsou ukázány na obr. 5.3. Přesným řešením je potom pohyb víru s konstantní rychlostí o směru $\alpha = 45^\circ$. Úloha je zadána tak, aby se vír v čase $t = 10$ vrátil do počáteční pozice na Ω_h .



Obrázek 5.3: Rozložení hustoty (nahore) a tlaku (dole) v počátečním stavu vortex-evolution problému. Na levé straně je řez podél osy x_1 a vpravo izokřivky v oblasti Ω_h

Kapitola 6

Numerické výsledky

6.1 Srovnání Riemannových řešičů HLL a HLLC

Z tabulek 6.1, 6.3, 6.5 a 6.7 je patrné, že nejvýhodnější z testovaných řešičů co se týče výpočetní složitosti je HLL řešič. Na druhé straně absence kontaktní nespojitosti v HLL řešiči způsobuje znatelnou ztrátu přesnosti oproti ostatním testovaným řešičům což je vidět hlavně z tabulek 6.1, 6.3. Abychom dosáhli stejné chyby HLL jako u ostatních metod, museli bychom zjemnit síť, čímž by se výhoda HLL úplně ztratila nehledě na potřebu větší paměti. Naproti tomu HLLC schéma dosahuje srovnatelné přesnosti jako ostatní a jeho časové nároky jsou jen nepatrně vyšší než u HLL schématu. Výběr sítě výsledky u „klasické“ Godunovovy metody nijak neovlivnil.

6.2 Srovnání schémat typu ADER2

Sodova trubice je příkladem nespojitého problému. Na tomto příkladě jsou patrné oscilace vznikající poblíž nespojitostí viz. obr. A.3. Na kartézské síti se tyto oscilace vcelku podařilo eliminovat použitím rekonstrukcí označených v sekci 5.1 jako WENO2 a CD+lim. Na nestrukturovaných sítích ovšem při použití rekonstrukcí označených WENO2 a CD (viz. sekce 5.2) způsobilo selhání celého výpočtu, proto v tabulce 6.4 výsledky pro tyto implementace nejsou uvedeny. Navíc na obrázku A.4 je vidět, že ani použitý limiter v rekonstrukci označené CD+lim oscilacím úplně nezabránil.

Výsledky z tabulek 6.2, 6.4 ukazují, že naše implementace schémat typu ADER2 dosahují na Sodově trubici řádu jen něco málo vyššího, než „klasická“ Godunovova metoda. Podíváme-li se však na chybu zjistíme, že ADER2 dosahuje na zvolené síti více než dvakrát menší chyby než „klasická“ Godunovova metoda. Pokud porovnáme poměr „chyba/doba výpočtu“, vyjde nám metoda typu ADER2 více než dvakrát výhodnější.

Vortex evolution problém je příkladem na kterém metoda prvního řádu naprosto selhává (viz. obr. A.7, A.11) a dokonce ani zjemnění sítě na více než 16000 objemů nepřináší uspokojivé výsledky. V tabulkách 6.6, 6.8 se občas vyskytuje u experimentálního řádu přesnosti záporné znaménko, což je způsobeno selháním výpočtu chyby na příliš hrubých sítích. Schéma typu ADER2 dává na tomto problému nesrovnatelně lepší výsledky a na dostatečně jemných sítích (kde se neprojevuje selhání výpočtu chyby), si můžeme všimnout,

že skutečně dosahuje experimentálního řádu přesnosti 2 (viz. tabulky 6.6, 6.6). Na tomto problému si můžeme všimnout jak snaha zabránit oscilacím poblíž nespojitostí v rekonstrukcích označených CD+lim a WENO2 negativně ovlivňuje výsledek výpočtu i na tomto příkladu, jehož řešení je nekonečně hladké viz. obr. A.10, A.9, A.14, A.13, což nasvědčuje tomu, že výběr limiterů nebyl příliš vhodný.

6.3 Tabulky

řešič	počet objemů	L^1 norma		doba výpočtu
		chyba	řád	
Exact RS	60	0.021404	—	0.04
	240	0.014414	0.57	0.44
	960	0.009608	0.59	3.56
	3840	0.006260	0.62	28.06
	15360	0.004037	0.63	231.93
HLL	60	0.031630	—	0.01
	240	0.021392	0.56	0.12
	960	0.014593	0.55	1.07
	3840	0.009755	0.58	8.52
	15360	0.006502	0.59	79.18
HLLC	60	0.021394	—	0.02
	240	0.014413	0.57	0.13
	960	0.009608	0.59	1.21
	3840	0.006261	0.62	9.51
	15360	0.004038	0.63	87.74
Roe	60	0.021248	—	0.02
	240	0.014370	0.56	0.25
	960	0.009594	0.58	2.17
	3840	0.006257	0.62	19.67
	15360	0.004037	0.63	163.43
Osher– Solomon	60	0.021388	—	0.02
	240	0.014407	0.57	0.21
	960	0.009605	0.58	1.79
	3840	0.006259	0.62	14.80
	15360	0.004036	0.63	131.71

Tabulka 6.1: Porovnání některých Riemannových řešičů na Sodově trubici s oblastí Ω diskretizovanou kartézskou sítí. Ve sloupci „řád“ je uveden experimentální řád přesnosti (5.30) mezi odpovídající sítí a sítí použitou na předchozím řádku. „Doba výpočtu“ je čas v sekundách uplynulý od první iterace do poslední

metoda (rekonstrukce)	počet objemů	L^1 norma		doba výpočtu
		chyba	řád	
ADER2–HLL (WENO2)	60	0.016335	—	0.06
	240	0.008773	0.90	0.72
	960	0.005423	0.69	5.77
	3840	0.003102	0.81	46.14
	15360	0.001794	0.79	379.97
ADER2–HLL (CD)	60	0.016270	—	0.06
	240	0.008729	0.90	0.56
	960	0.005216	0.74	4.49
	3840	0.003032	0.78	36.47
	15360	0.001688	0.84	297.98
ADER2–HLL (CD+lim)	60	0.017112	—	0.06
	240	0.009503	0.85	0.54
	960	0.005939	0.68	4.54
	3840	0.003498	0.76	36.55
	15360	0.002106	0.73	300.85
ADER2–HLLC (WENO2)	60	0.012716	—	0.07
	240	0.006603	0.95	0.70
	960	0.004216	0.65	5.78
	3840	0.002356	0.84	47.51
	15360	0.001351	0.80	393.40
ADER2–HLLC (CD)	60	0.013550	—	0.06
	240	0.007040	0.94	0.54
	960	0.004349	0.69	4.38
	3840	0.002589	0.75	35.91
	15360	0.001447	0.84	298.61
ADER2–HLLC (CD+lim)	60	0.012908	—	0.05
	240	0.006902	0.90	0.52
	960	0.004378	0.66	4.40
	3840	0.002491	0.81	37.28
	15360	0.001469	0.76	311.87

Tabulka 6.2: Porovnání metod ADER2–HLL a ADER2–HLLC s různými rekonstrukcemi na Sodově trubici s oblastí Ω diskretizovanou kartézskou sítí. Ve sloupci „řád“ je uveden experimentální řád přesnosti (5.30) mezi odpovídající sítí a sítí použitou na předchozím řádku. „Doba výpočtu“ je čas v sekundách uplynulý od první iterace do poslední

řešič	počet objemů	L^1 norma		doba výpočtu
		chyba	řád	
Exact RS	60	0.022191	—	0.13
	240	0.011427	0.96	0.57
	960	0.007811	0.55	5.09
	3840	0.005129	0.61	41.89
	15360	0.003333	0.62	363.13
HLL	60	0.041577	—	0.04
	240	0.020963	0.99	0.18
	960	0.014195	0.56	1.59
	3840	0.009417	0.59	13.29
	15360	0.006281	0.58	129.37
HLLC	60	0.022163	—	0.05
	240	0.011417	0.96	0.21
	960	0.007807	0.55	1.78
	3840	0.005127	0.61	14.74
	15360	0.003333	0.62	141.32
Roe	60	0.021776	—	0.08
	240	0.011292	0.95	0.33
	960	0.007770	0.54	2.84
	3840	0.005117	0.60	23.68
	15360	0.003330	0.62	215.97
Osher– Solomon	60	0.022191	—	0.05
	240	0.011406	0.96	0.27
	960	0.007805	0.55	2.42
	3840	0.005130	0.61	20.46
	15360	0.003336	0.62	189.76

Tabulka 6.3: Porovnání některých Riemannových řešičů na Sodově trubici s oblastí Ω diskretizovanou nestrukturovanou trojúhelníkovou sítí. Ve sloupci „řád“ je uveden experimentální řád přesnosti (5.30) mezi odpovídající sítí a sítí použitou na předchozím řádku. „Doba výpočtu“ je čas v sekundách uplynulý od první iterace do poslední

metoda (rekonstrukce)	počet objemů	L^1 norma		doba výpočtu
		chyba	řád	
ADER2–HLL (CD+lim)	60	0.031741	—	0.27
	240	0.012137	1.39	0.96
	960	0.006452	0.91	8.81
	3840	0.003646	0.82	75.00
	15360	0.002226	0.71	723.31
ADER2–HLLC (CD+lim)	60	0.018188	—	0.29
	240	0.007957	1.19	1.02
	960	0.004864	0.71	9.26
	3840	0.003071	0.66	78.40
	15360	0.002026	0.60	738.50

Tabulka 6.4: Porovnání metod ADER2–HLL a ADER2–HLLC s rekonstrukcí označenou CD+lim na Sodově trubici s oblastí Ω diskretizovanou kartézskou sítí. Ve sloupci „řád“ je uveden experimentální řád přesnosti (5.30) mezi odpovídající sítí a sítí použitou na předchozím řádku. „Doba výpočtu“ je čas v sekundách uplynulý od první iterace do poslední

řešič	počet objemů	L^1 norma		L^∞ norma		doba výpočtu
		chyba	řád	chyba	řád	
Exact RS	64	2.830042	—	0.230313	—	0.14
	256	2.627563	0.11	0.394293	-0.78	1.10
	1024	2.466949	0.09	0.431343	-0.13	8.58
	4096	2.104788	0.23	0.404622	0.09	66.72
	16384	1.609174	0.39	0.324608	0.32	600.14
HLL	64	2.857664	—	0.232483	—	0.03
	256	2.675245	0.10	0.397777	-0.77	0.24
	1024	2.546511	0.07	0.437858	-0.14	1.87
	4096	2.218247	0.20	0.417564	0.07	14.47
	16384	1.726222	0.36	0.346176	0.27	197.12
HLLC	64	2.842777	—	0.231275	—	0.03
	256	2.632857	0.11	0.394519	-0.77	0.26
	1024	2.467821	0.09	0.431478	-0.13	2.10
	4096	2.105708	0.23	0.404730	0.09	16.20
	16384	1.609760	0.39	0.324692	0.32	213.23
Roe	64	2.827139	—	0.230219	—	0.05
	256	2.626901	0.11	0.394272	-0.78	0.44
	1024	2.467424	0.09	0.431354	-0.13	3.44
	4096	2.104923	0.23	0.404640	0.09	26.72
	16384	1.609219	0.39	0.324624	0.32	295.11
Osher– Solomon	64	2.830168	—	0.230312	—	0.04
	256	2.627612	0.11	0.394295	-0.78	0.37
	1024	2.466958	0.09	0.431342	-0.13	3.02
	4096	2.104799	0.23	0.404622	0.09	23.23
	16384	1.609179	0.39	0.324609	0.32	265.29

Tabulka 6.5: Porovnání některých Riemannových řešičů na vortex evolution problému s oblastí Ω diskretizovanou kartézskou sítí. Ve sloupci „řád“ je uveden experimentální řád přesnosti (5.30) mezi odpovídající sítí a sítí použitou na předchozím řádku. „Doba výpočtu“ je čas v sekundách uplynulý od první iterace do poslední

metoda (rekostrukce)	počet objemů	L^1 norma		L^∞ norma		doba výpočtu
		chyba	řád	chyba	řád	
ADER2–HLL (WENO2)	64	2.758578	—	0.225062	—	0.12
	256	2.650260	0.06	0.382205	-0.76	1.01
	1024	1.735468	0.61	0.319668	0.26	8.08
	4096	0.636521	1.45	0.116962	1.45	77.03
	16384	0.231361	1.46	0.057626	1.02	696.67
ADER2–HLL (CD)	64	2.589122	—	0.206963	—	0.11
	256	1.759704	0.56	0.317234	-0.62	0.81
	1024	0.686016	1.36	0.161555	0.97	6.29
	4096	0.218542	1.65	0.050299	1.68	61.12
	16384	0.057255	1.93	0.012239	2.04	591.68
ADER2–HLL (CD+lim)	64	2.732533	—	0.217285	—	0.11
	256	2.289818	0.26	0.350023	-0.69	0.89
	1024	0.922835	1.31	0.179700	0.96	7.03
	4096	0.260240	1.83	0.054787	1.71	68.62
	16384	0.078969	1.72	0.032022	0.77	627.72
ADER2–HLLC (WENO2)	64	2.737988	—	0.222742	—	0.12
	256	2.562456	0.10	0.377549	-0.76	1.06
	1024	1.605498	0.67	0.299351	0.33	8.24
	4096	0.599840	1.42	0.105415	1.51	78.71
	16384	0.235051	1.35	0.057661	0.87	720.85
ADER2–HLLC (CD)	64	2.545055	—	0.204006	—	0.11
	256	1.655195	0.62	0.310540	-0.61	0.82
	1024	0.659234	1.33	0.154333	1.01	6.35
	4096	0.213671	1.63	0.047966	1.69	63.46
	16384	0.056373	1.92	0.011771	2.03	612.68
ADER2–HLLC (CD+lim)	64	2.725795	—	0.214375	—	0.12
	256	2.186251	0.32	0.340631	-0.67	0.92
	1024	0.866872	1.33	0.174195	0.97	7.15
	4096	0.245068	1.82	0.059677	1.55	69.63
	16384	0.083638	1.55	0.032639	0.87	644.59

Tabulka 6.6: Porovnání metod ADER2–HLL a ADER2–HLLC s různými rekonstrukcemi na vortex evolution problému s oblastí Ω diskretizovanou kartézskou sítí. Ve sloupci „řád“ je uveden experimentální řád přesnosti (5.30) mezi odpovídající sítí a sítí použitou na předchozím řádku. „Doba výpočtu“ je čas v sekundách uplynulý od první iterace do poslední

řešič	počet objemů	L^1 norma		L^∞ norma		doba výpočtu
		chyba	řád	chyba	řád	
Exact RS	64	2.841262	—	0.401279	—	0.17
	256	2.620795	0.12	0.435868	-0.12	1.28
	1024	2.327117	0.17	0.425850	0.03	9.90
	4096	1.898287	0.29	0.375193	0.18	78.22
	16384	1.368206	0.47	0.279727	0.42	745.04
HLL	64	2.889661	—	0.405349	—	0.03
	256	2.738411	0.08	0.442055	-0.13	0.29
	1024	2.549254	0.10	0.449049	-0.02	2.34
	4096	2.149231	0.25	0.411135	0.13	19.18
	16384	1.620157	0.41	0.324375	0.34	198.79
HLLC	64	2.846390	—	0.401568	—	0.04
	256	2.622672	0.12	0.436016	-0.12	0.32
	1024	2.329454	0.17	0.426086	0.03	2.57
	4096	1.900279	0.29	0.375396	0.18	21.18
	16384	1.369687	0.47	0.280011	0.42	217.67
Roe	64	2.842840	—	0.401482	—	0.06
	256	2.619163	0.12	0.435767	-0.12	0.55
	1024	2.326424	0.17	0.425881	0.03	4.33
	4096	1.898224	0.29	0.375181	0.18	34.99
	16384	1.368302	0.47	0.279625	0.42	351.90
Osher– Solomon	64	2.841403	—	0.401293	—	0.05
	256	2.620749	0.12	0.435866	-0.12	0.45
	1024	2.327155	0.17	0.425853	0.03	3.44
	4096	1.898281	0.29	0.375193	0.18	28.20
	16384	1.368285	0.47	0.279744	0.42	286.03

Tabulka 6.7: Porovnání některých Riemannových řešičů na vortex evolution problému s oblastí Ω diskretizovanou nestrukturovanou trojúhelníkovou sítí. Ve sloupci „řád“ je uveden experimentální řád přesnosti (5.30) mezi odpovídající sítí a sítí použitou na předchozím řádku. „Doba výpočtu“ je čas v sekundách uplynulý od první iterace do poslední

metoda (rekonstrukce)	počet objemů	L^1 norma		L^∞ norma		doba výpočtu
		chyba	řád	chyba	řád	
ADER2–HLL (WENO2)	64	2.834889	—	0.398428	—	0.16
	256	2.597664	0.13	0.415405	-0.06	1.51
	1024	1.752016	0.57	0.326684	0.35	12.25
	4096	0.786093	1.16	0.173801	0.91	101.90
	16384	0.369531	1.09	0.094190	0.88	989.17
ADER2–HLL (CD)	64	2.794761	—	0.361325	—	0.14
	256	1.608944	0.80	0.298035	0.28	1.24
	1024	0.482789	1.74	0.075324	1.98	9.86
	4096	0.125911	1.94	0.019438	1.95	80.63
	16384	0.028754	2.13	0.005507	1.82	781.76
ADER2–HLL (CD+lim)	64	2.817461	—	0.356092	—	0.19
	256	1.887689	0.58	0.334175	0.09	1.59
	1024	0.958945	0.98	0.172079	0.96	13.03
	4096	0.351567	1.45	0.053053	1.70	108.07
	16384	0.107920	1.70	0.013544	1.97	1062.69
ADER2–HLLC (WENO2)	64	2.787251	—	0.388003	—	0.18
	256	2.438989	0.19	0.406904	-0.07	1.58
	1024	1.585890	0.62	0.287999	0.50	12.67
	4096	0.655204	1.28	0.166275	0.79	104.68
	16384	0.314964	1.06	0.103232	0.69	1011.56
ADER2–HLLC (CD)	64	2.776423	—	0.355068	—	0.16
	256	1.512675	0.88	0.278667	0.35	1.31
	1024	0.490204	1.63	0.072254	1.95	10.13
	4096	0.134260	1.87	0.019921	1.86	83.40
	16384	0.032827	2.03	0.005755	1.79	801.52
ADER2–HLLC (CD+lim)	64	2.775103	—	0.336583	—	0.20
	256	1.759501	0.66	0.325141	0.05	1.67
	1024	0.877311	1.00	0.153011	1.09	13.28
	4096	0.324470	1.44	0.046045	1.73	111.16
	16384	0.103868	1.64	0.013093	1.81	1083.92

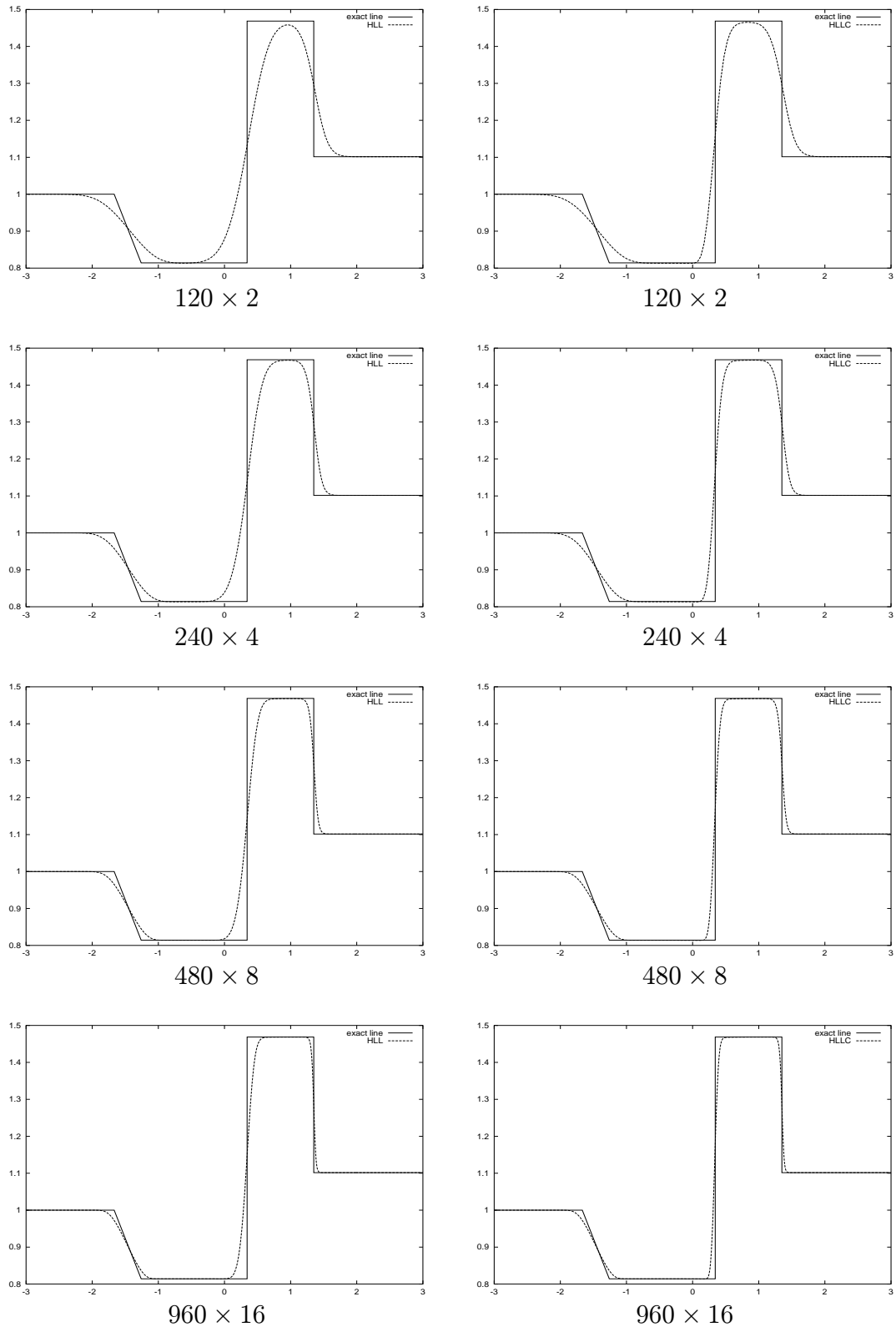
Tabulka 6.8: Porovnání metod ADER2–HLL a ADER2-HLLC s různými rekonstrukcemi na vortex evolution problému s oblastí Ω diskretizovanou nestrukturovanou trojúhelníkovou sítí. Ve sloupci „řád“ je uveden experimentální řád přesnosti (5.30) mezi odpovídající sítí a sítí použitou na předchozím řádku. „Doba výpočtu“ je čas v sekundách uplynulý od první iterace do poslední

Závěr

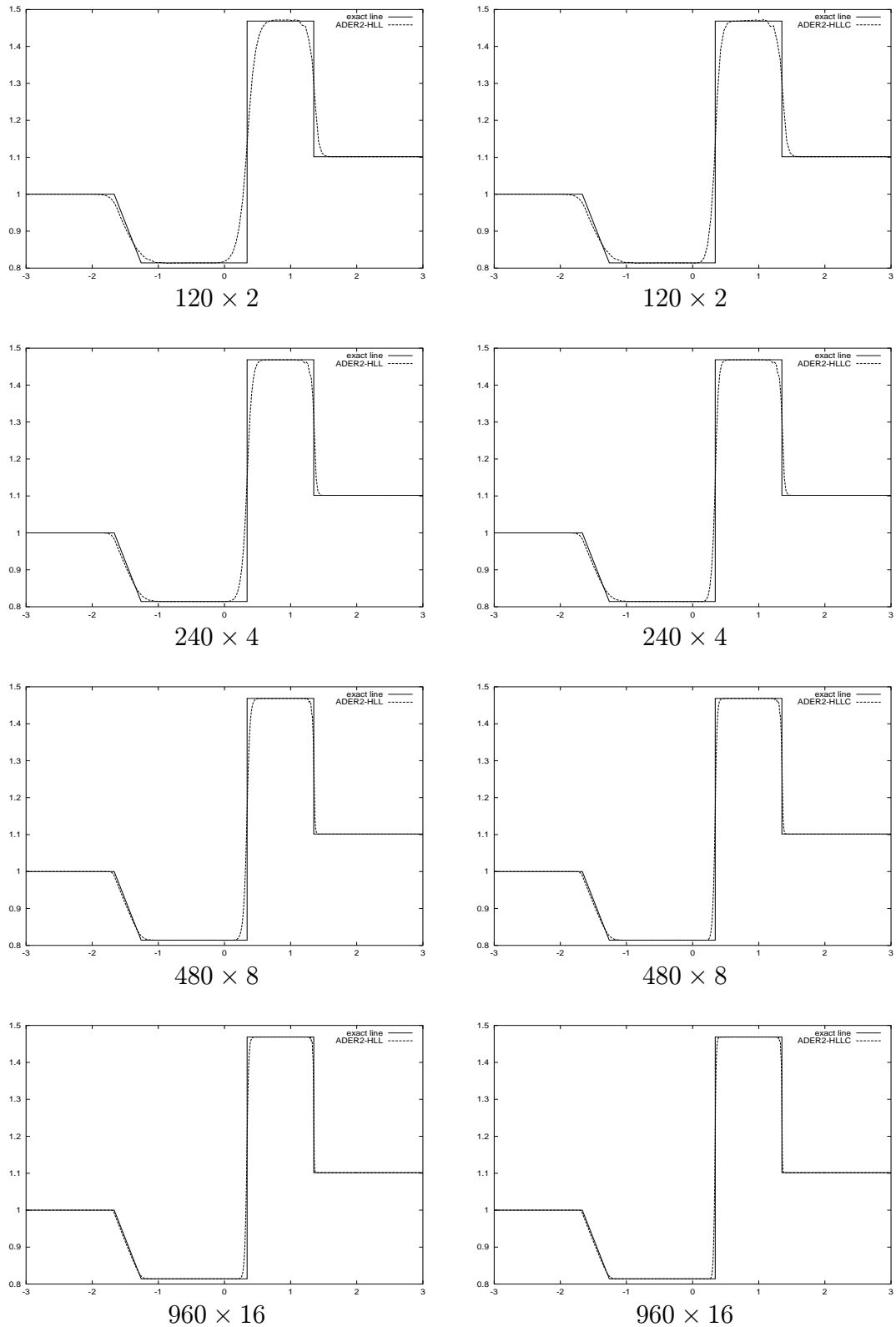
Práce obsahuje programové moduly pro implementaci numerických toků HLL a HLLC jako rozšíření v současné době vyvíjeného software na KNM. V teoretické části je rozšíření schémat typu ADER na obecně nestrukturované sítě konečných objemů. Speciální pozornost je věnována schématům druhého řádu (ADER2) pro dvourozměrné úlohy na nestrukturovaných trojúhelníkových sítích. Jako testovací příklady byla vybrána úloha jejíž řešení obsahuje ostré nespojitosti a úloha (stále ještě fyzikálně relevantní) s řešením hladkým známá v literatuře jako *vortex evolution problém*. V práci jsou uvedeny příklady výpočtů pro které bylo druhého řádu dosaženo. Zároveň je z výsledků patrné, že u schémat typu ADER velmi záleží na použité polynomiální rekonstrukci. U úloh s nespojitým řešením je stabilní polynomiální rekonstrukce problém, kterému je třeba v budoucnu věnovat další pozornost. Podařilo se naprogramovat metodu, u níž bylo dosaženo experimentálního řádu přesnosti 2 a při jejímž rozšíření do třech dimenzí nenarazíme na větší komplikace.

Příloha A

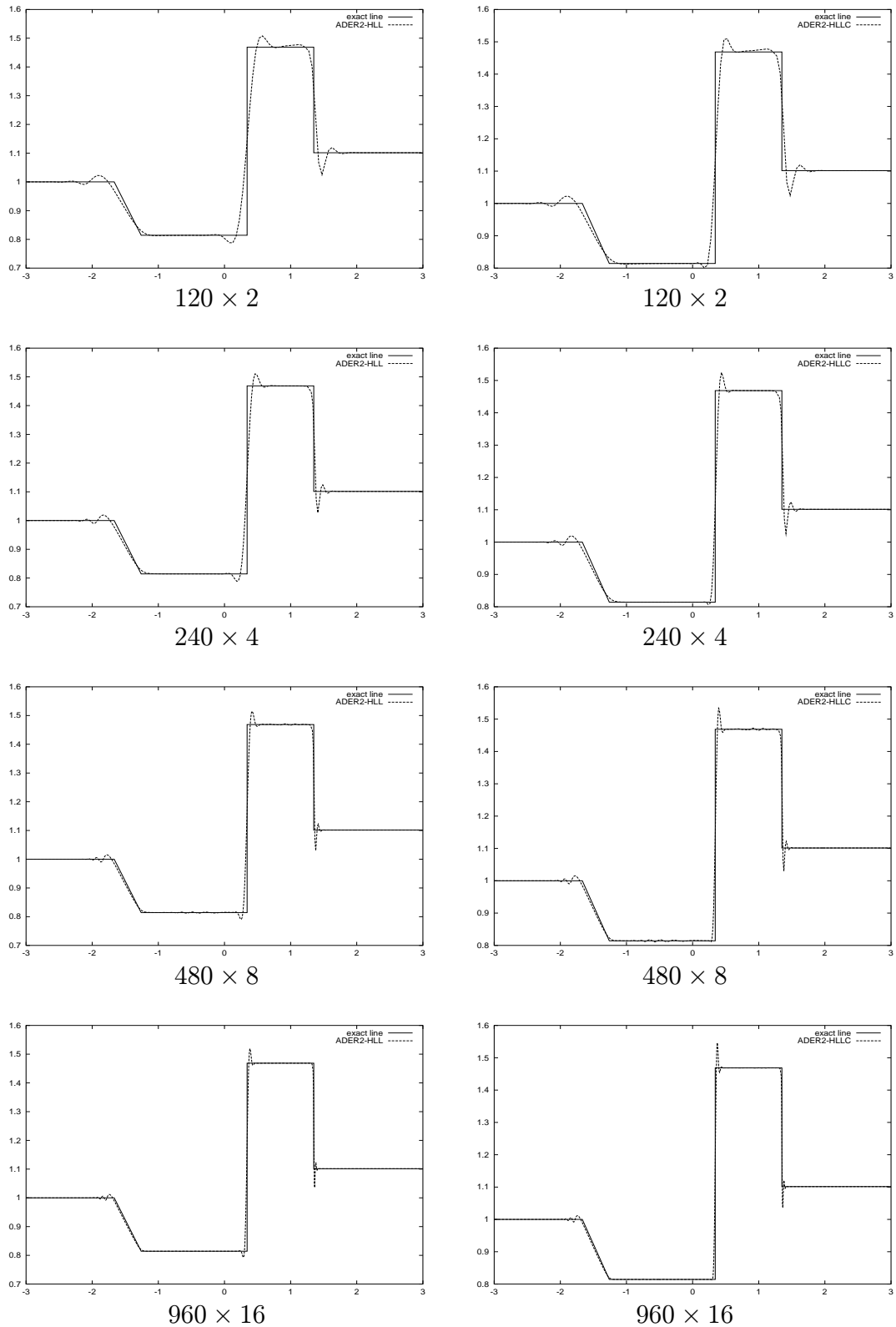
Obrázky



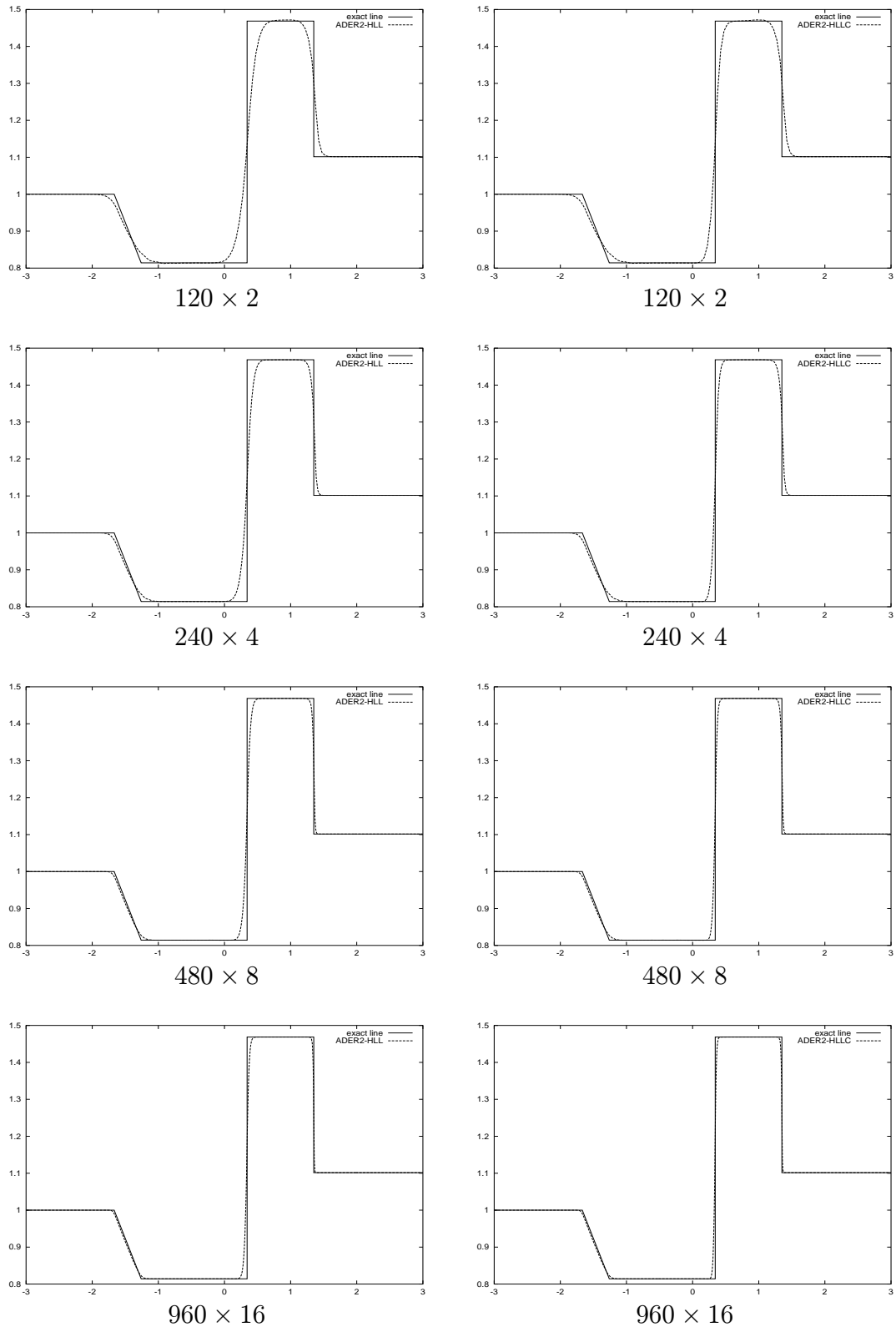
Obrázek A.1: Rozložení hustoty v numerickém řešení Sodovy trubice pomocí HLL schématu (vlevo) a HLLC schématu (vpravo) na řezu $x_2 = 0.05$ s oblastí Ω diskretizovanou kartézskou sítí, čísla pod obrázky udávají počet objemů



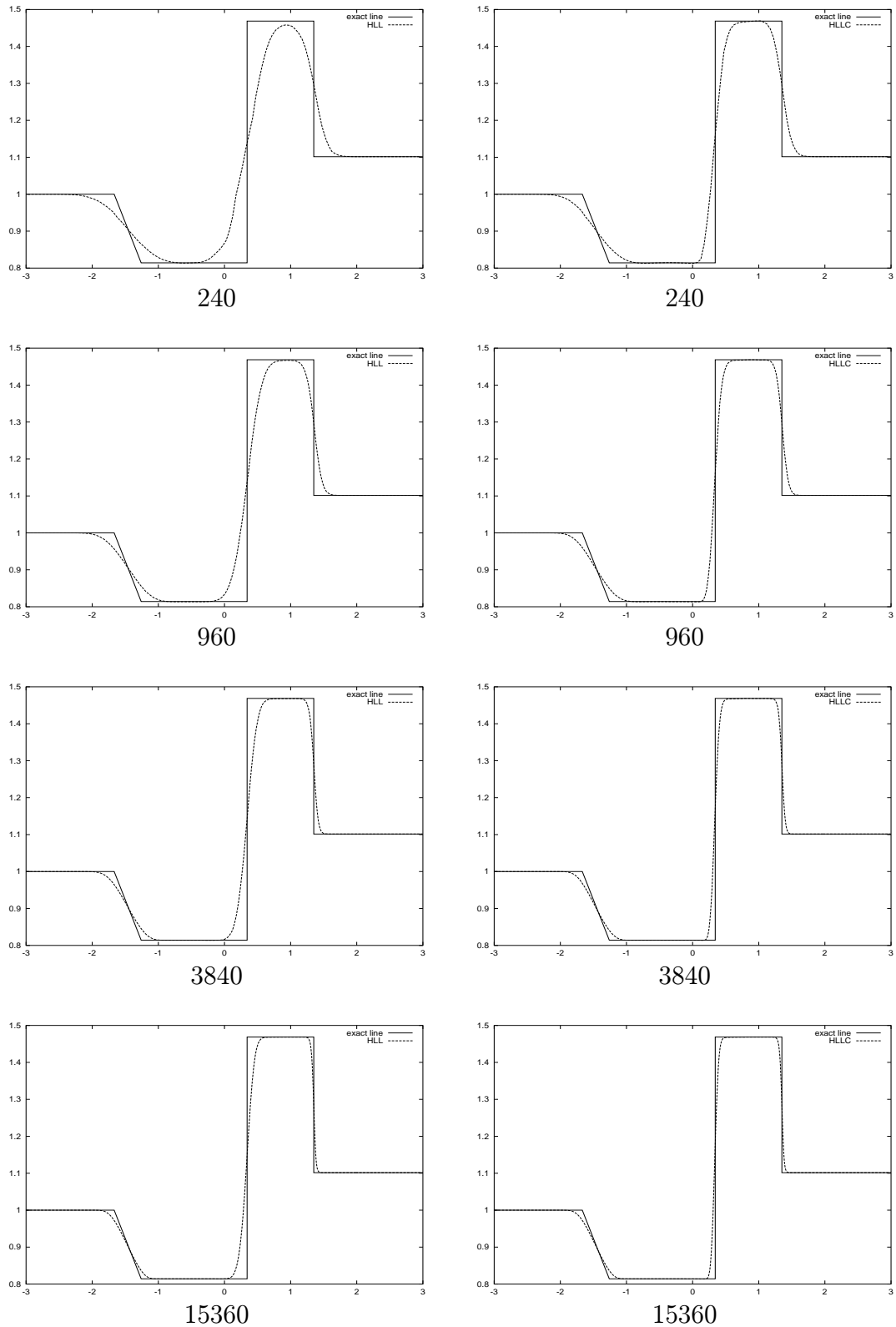
Obrázek A.2: Rozložení hustoty v numerickém řešení Sodovy trubice pomocí schématu ADER2–HLL (vlevo) a ADER2–HLLC (vpravo) s použitím rekonstrukce WENO2 na řezu $x_2 = 0.05$ s oblastí Ω diskretizovanou kartézskou sítí, čísla pod obrázky udávají počet objemů



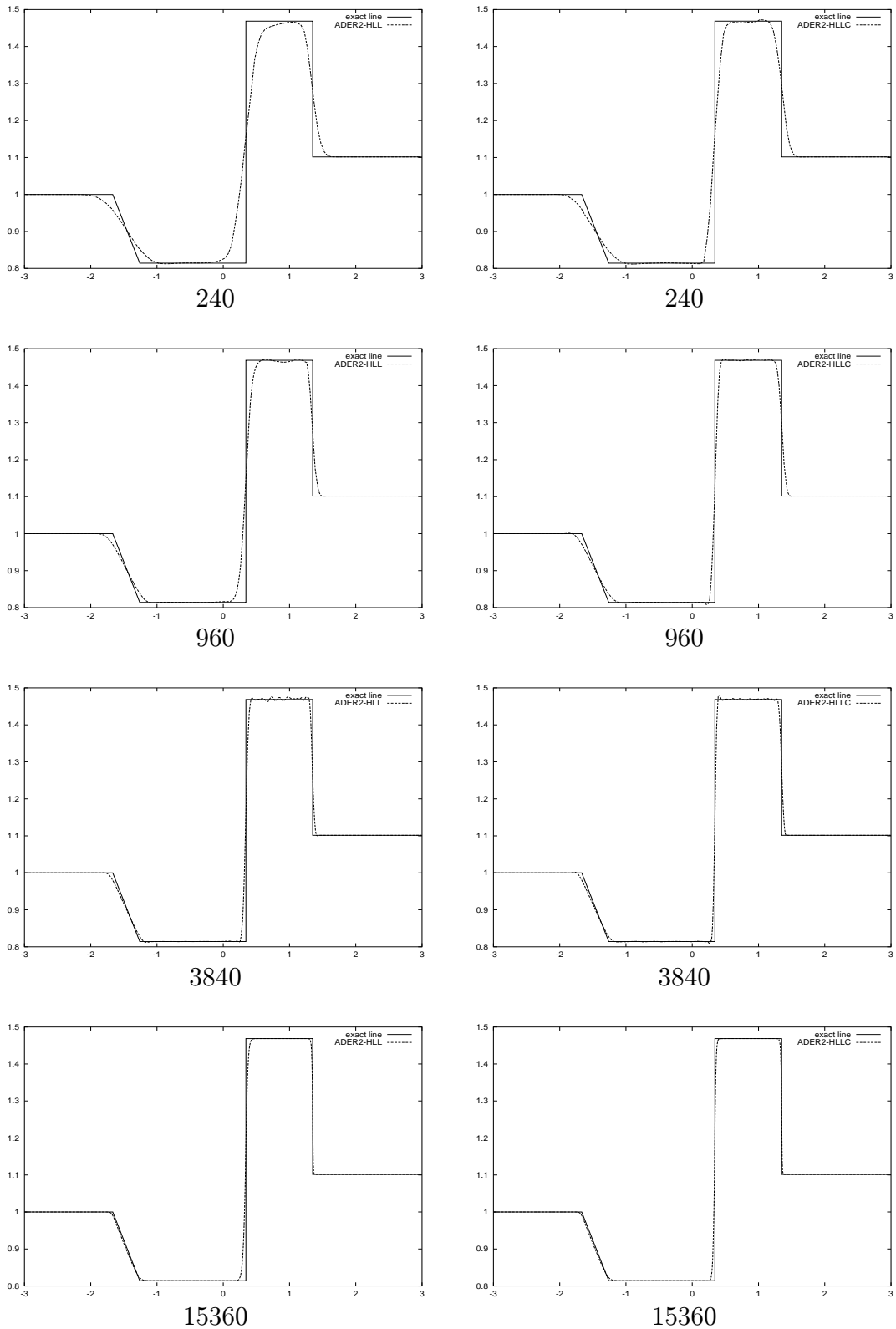
Obrázek A.3: Rozložení hustoty v numerickém řešení Sodovy trubice pomocí schématu ADER2–HLL (vlevo) a ADER2–HLLC (vpravo) s použitím rekonstrukce CD na řezu $x_2 = 0.05$ s oblastí Ω diskretizovanou kartézskou sítí, číslo pod obrázky udává počet objemů, čísla pod obrázky udávají počet objemů



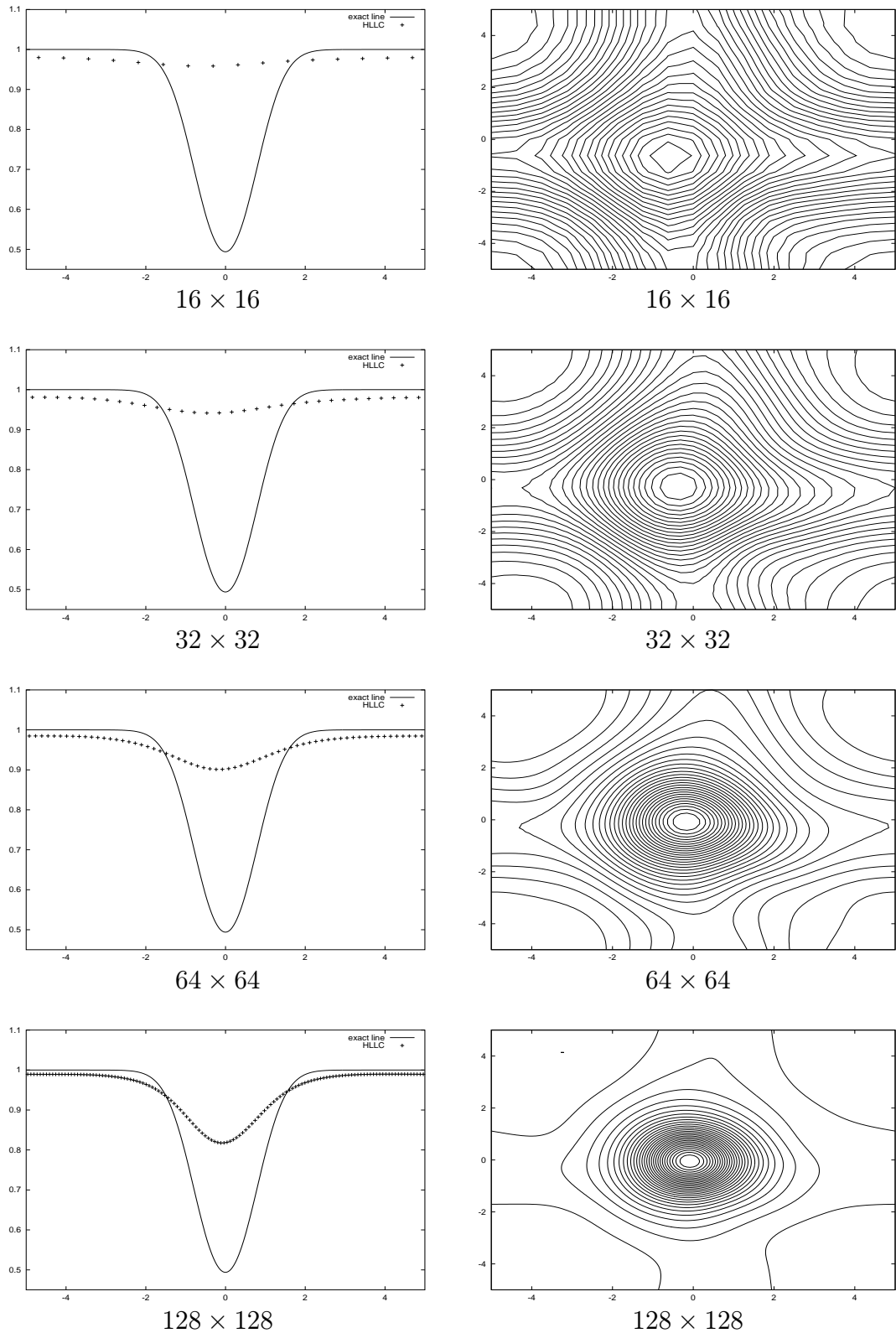
Obrázek A.4: Rozložení hustoty v numerickém řešení Sodovy trubice pomocí schématu ADER2–HLL (vlevo) a ADER2–HLLC (vpravo) s použitím rekonstrukce CD+lim na řezu $x_2 = 0.05$ s oblastí Ω diskretizovanou kartézskou sítí, čísla pod obrázky udávají počet objemů



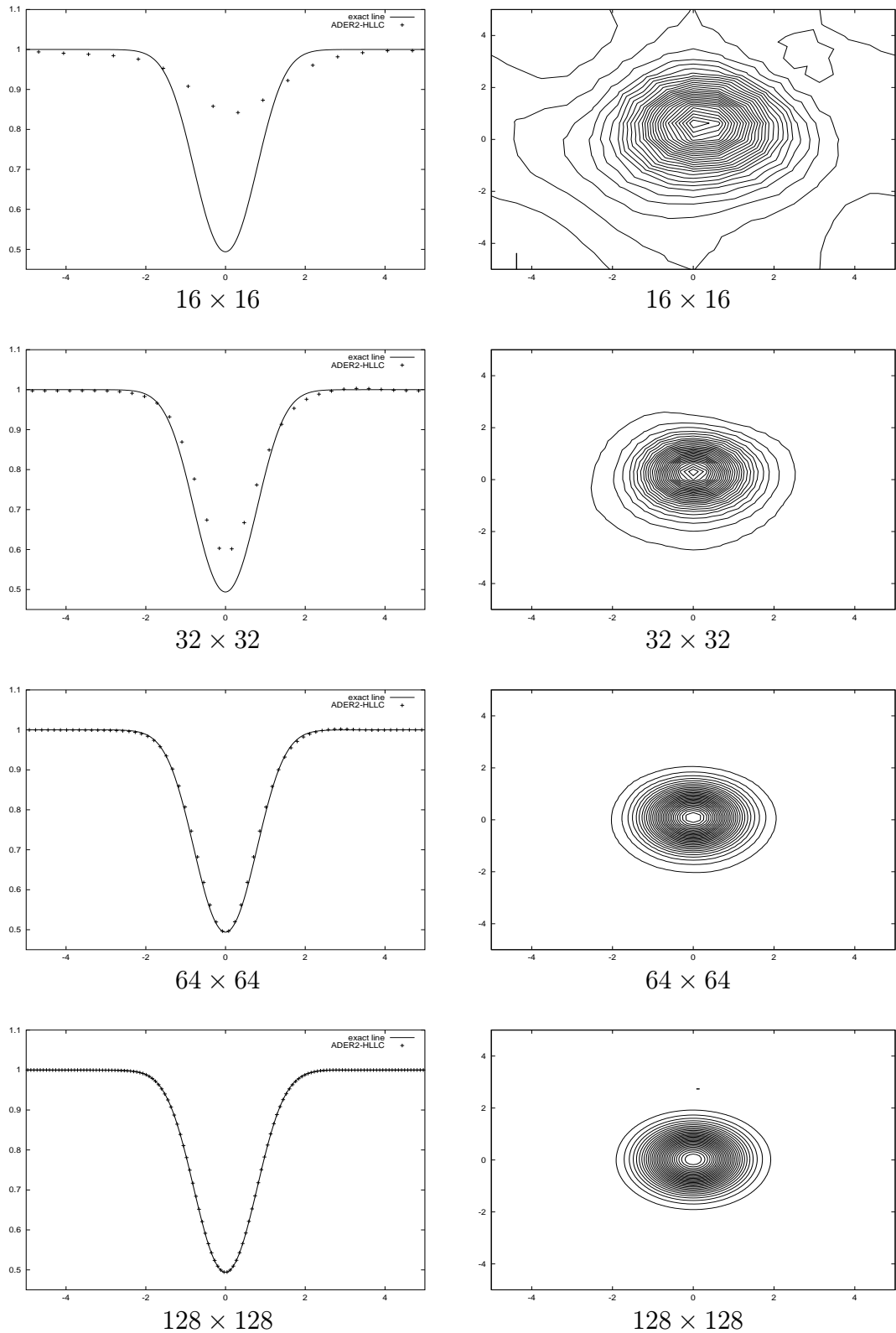
Obrázek A.5: Rozložení hustoty v numerickém řešení Sodovy trubice pomocí HLL schématu (vlevo) a HLLC schématu (vpravo) na řezu $x_2 = 0.05$ s oblastí Ω diskretizovanou nestrukturovanou trojúhelníkovou sítí, čísla pod obrázky udávají počet objemů



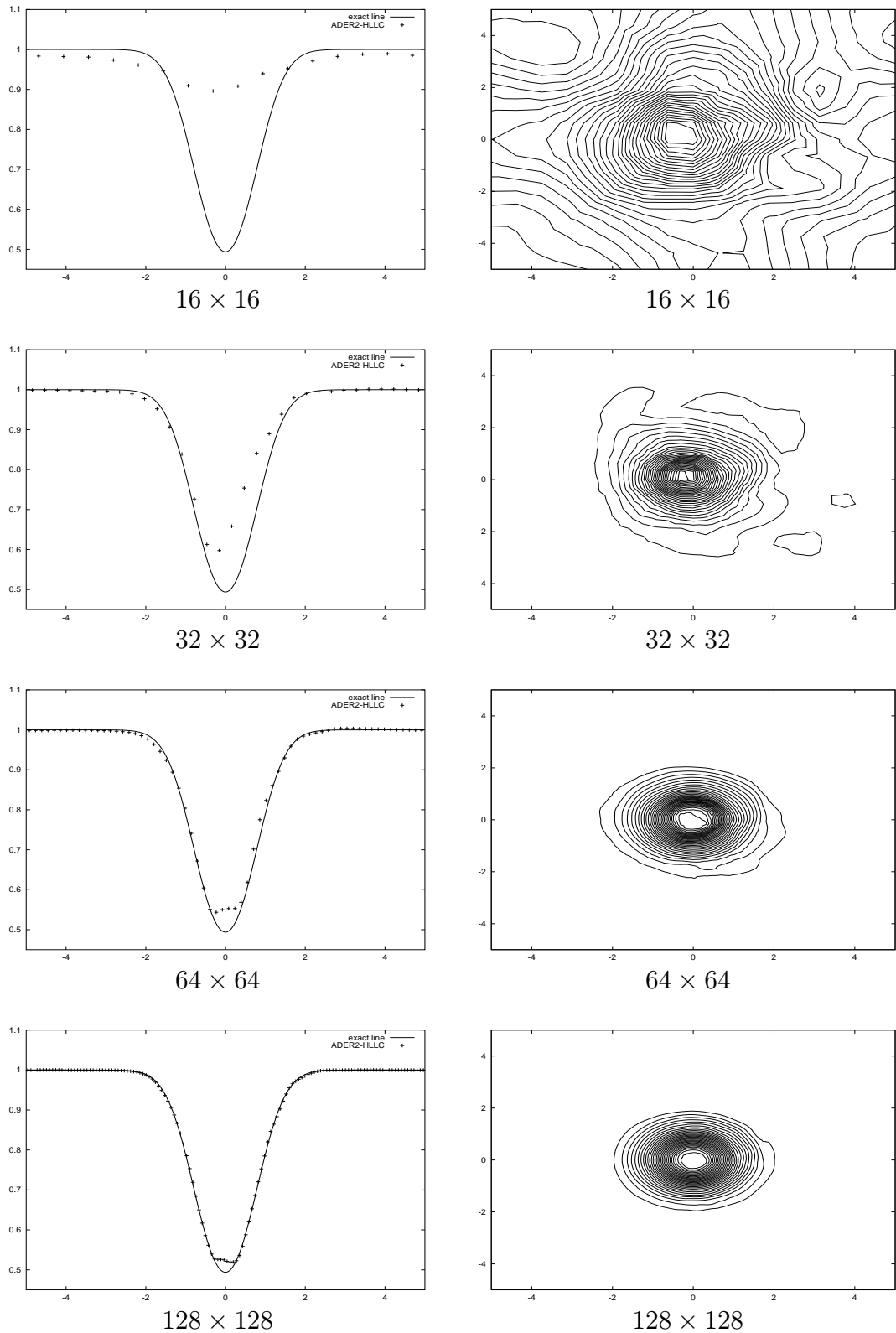
Obrázek A.6: Rozložení hustoty v numerickém řešení Sodovy trubice pomocí schématu ADER2–HLL (vlevo) a ADER2–HLLC (vpravo) s použitím rekonstrukce CD+lim na řezu $y=0.05$ s oblastí Ω diskretizovanou nestrukturovanou trojúhelníkovou sítí, čísla pod obrázky udávají počet objemů



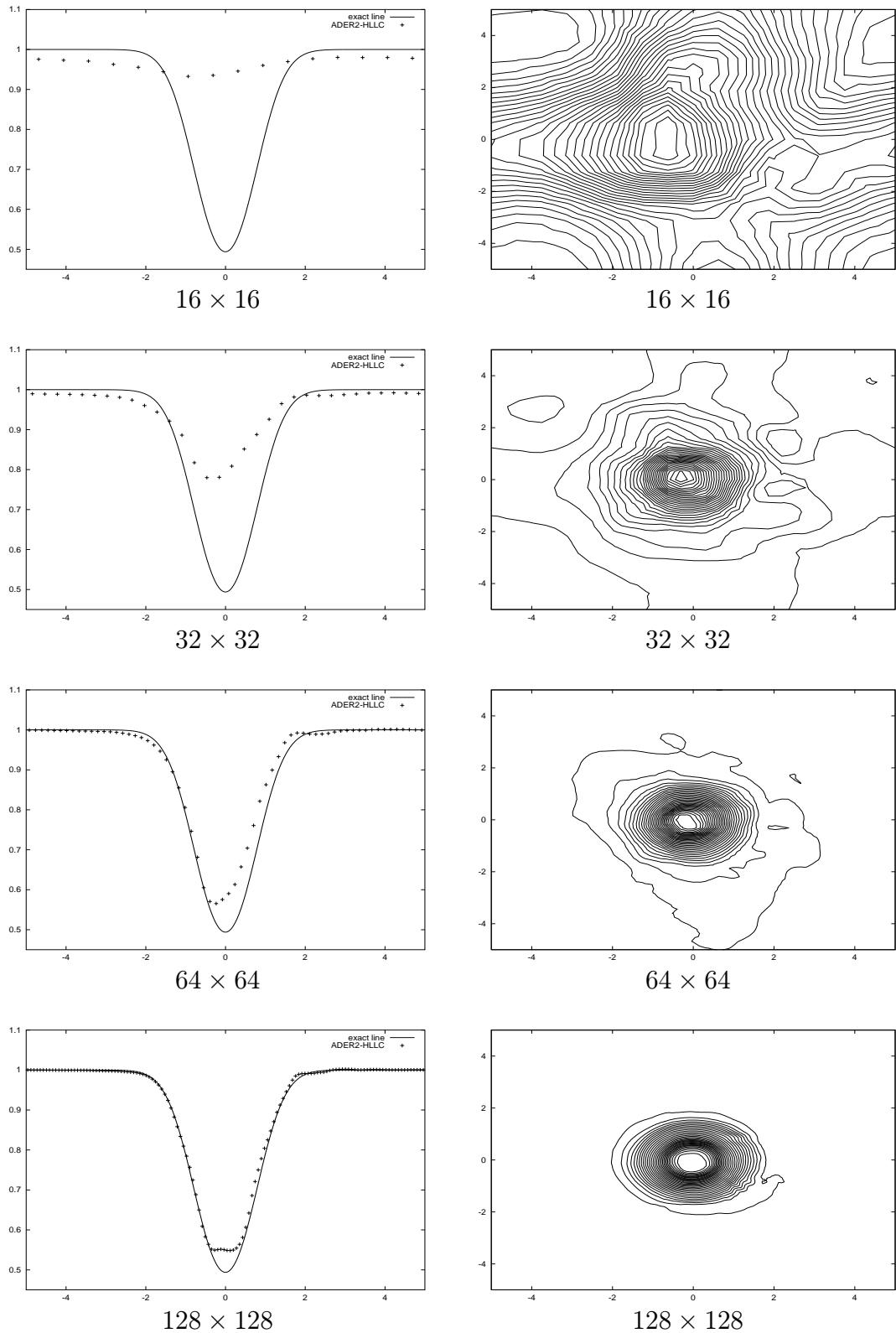
Obrázek A.7: Rozložení hustoty v numerickém řešení vortex evolution problému pomocí HLLC schématu s oblastí Ω diskretizovanou kartézskou sítí. Vlevo je řez podél osy x_1 a vpravo izokřivky v oblasti Ω_h , čísla pod obrázky udávají počet objemů



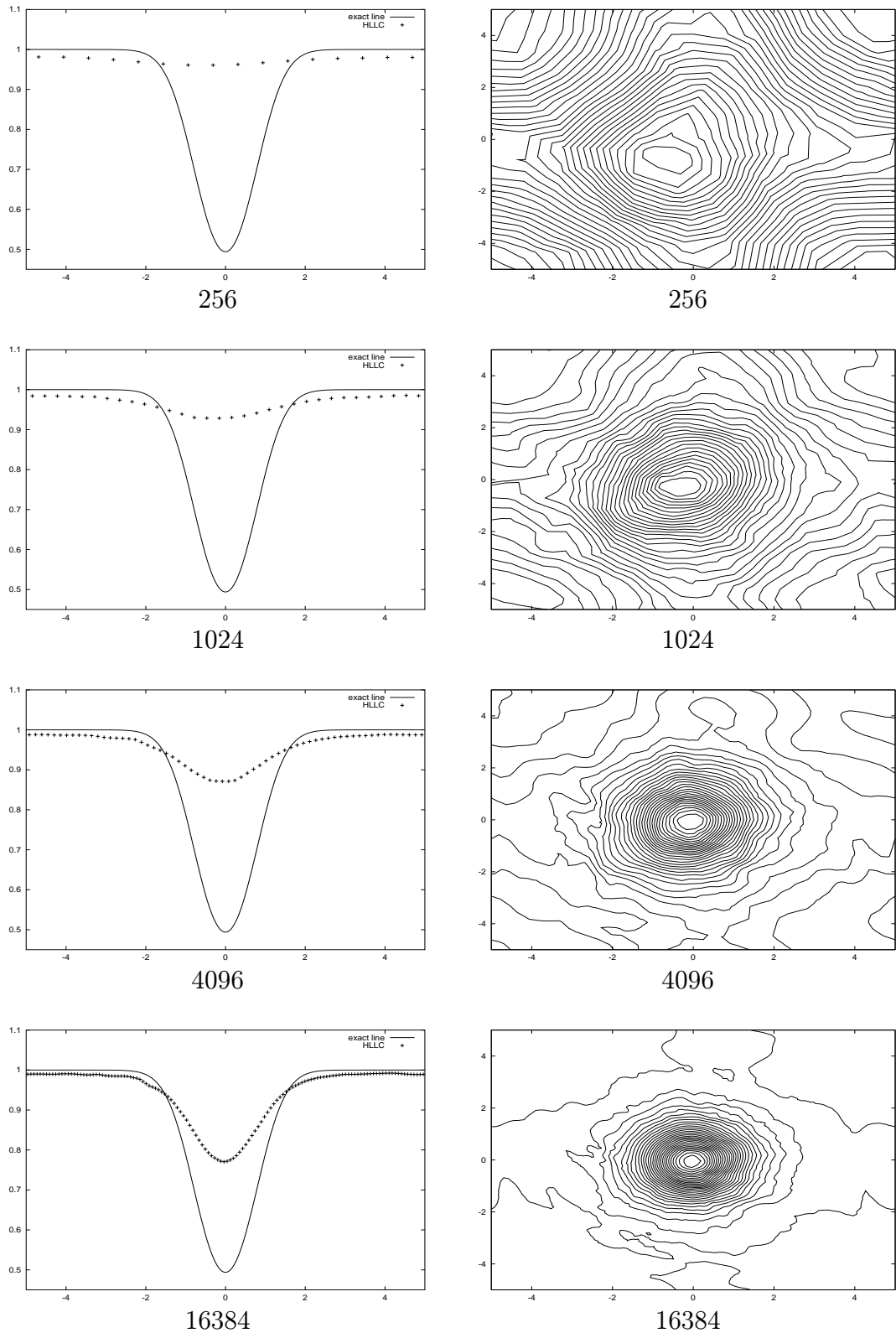
Obrázek A.8: Rozložení hustoty v numerickém řešení vortex evolution problému pomocí ADER2-HLLC schématu s použitím rekonstrukce CD a oblastí Ω diskretizovanou kartézskou sítí. Vlevo je řez podél osy x_1 a vpravo izokřivky v oblasti Ω_h , čísla pod obrázky udávají počet objemů



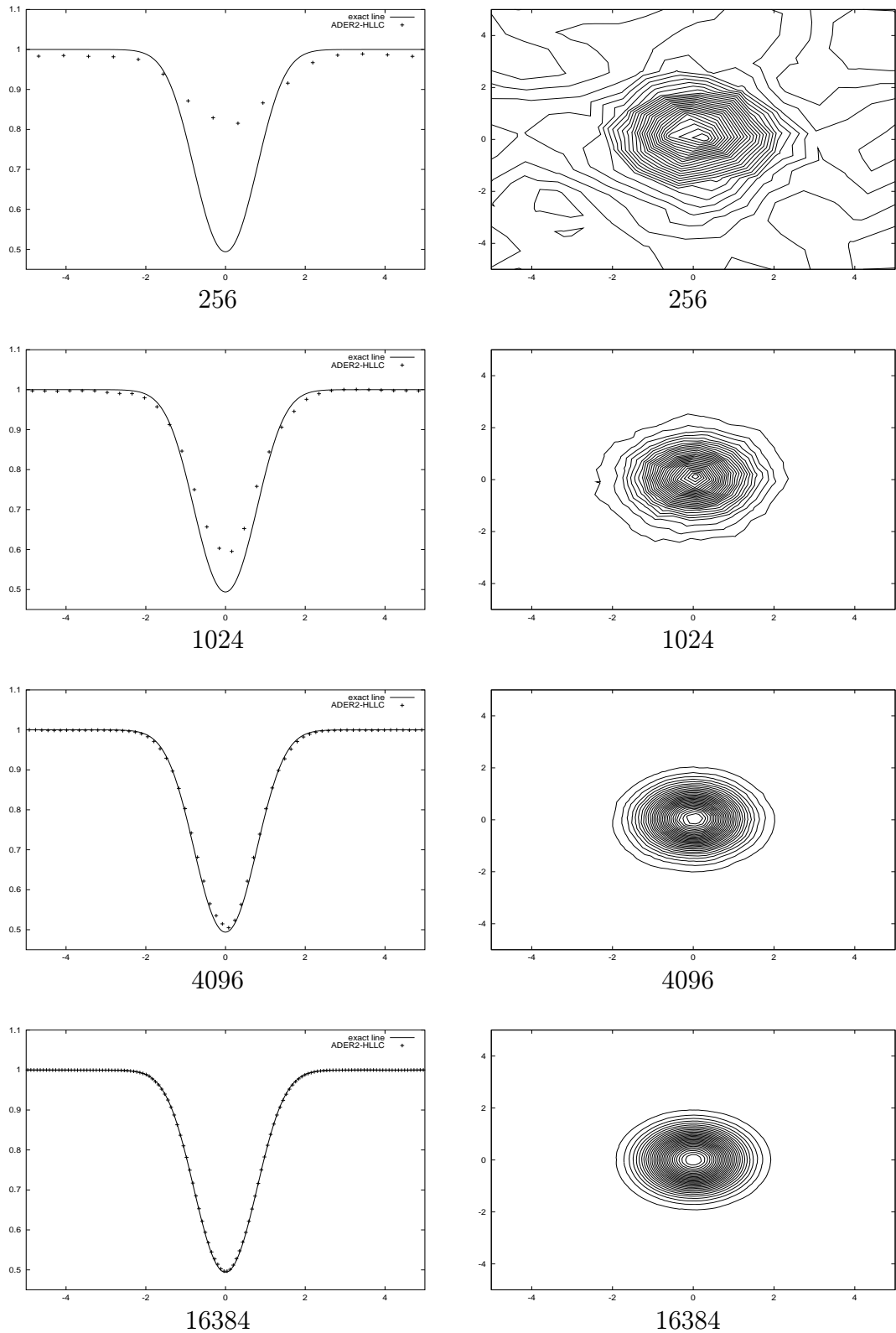
Obrázek A.9: Rozložení hustoty v numerickém řešení vortex evolution problému pomocí ADER2-HLLC schématu s použitím rekonstrukce CD+lim a oblasti Ω diskretizovanou kartézskou sítí. Vlevo je řez podél osy x_1 a vpravo izokřivky v oblasti Ω_h , čísla pod obrázky udávají počet objemů



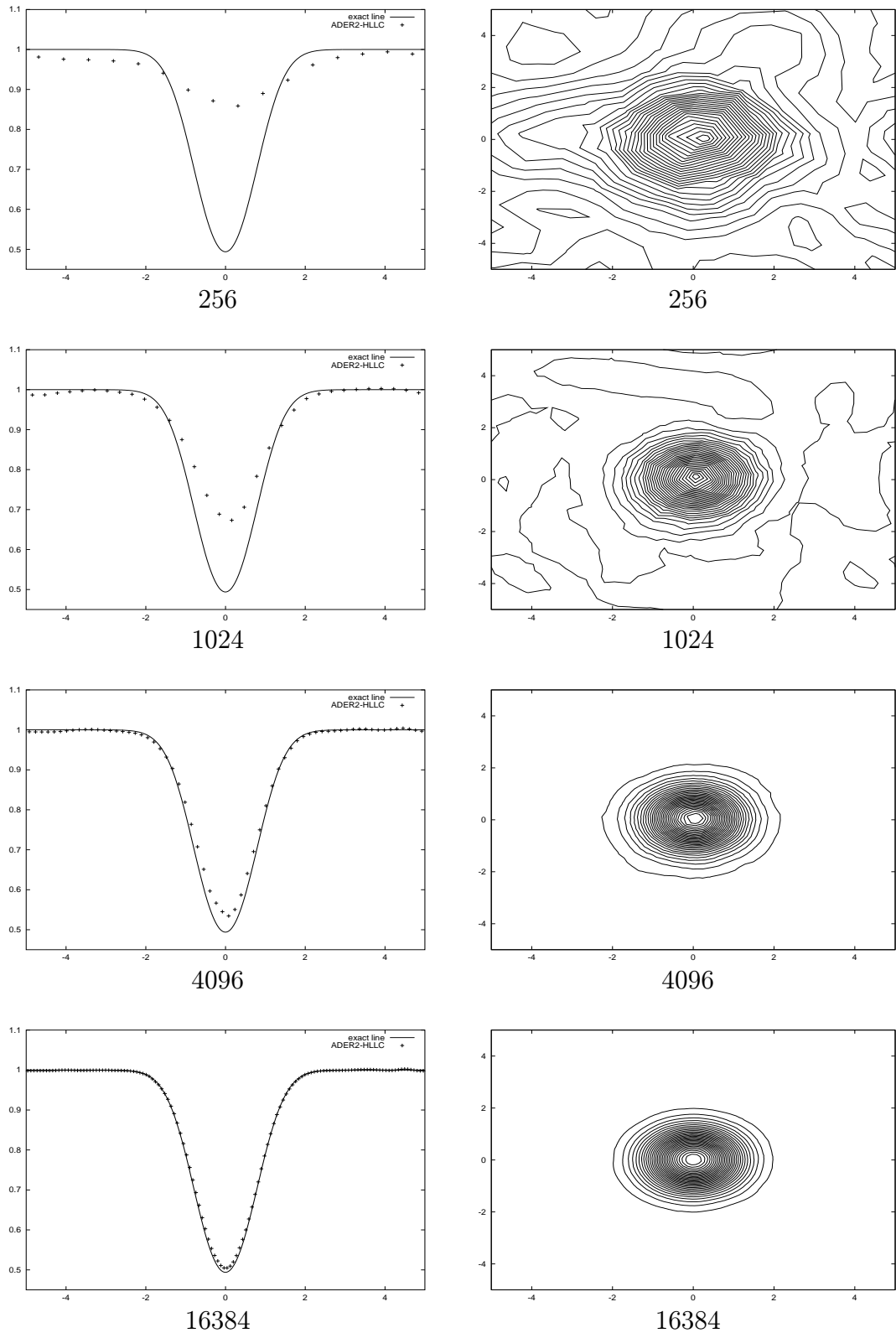
Obrázek A.10: Rozložení hustoty v numerickém řešení vortex evolution problému pomocí ADER2-HLLC schématu s použitím rekonstrukce WENO2 a oblasti Ω diskretizovanou kartézskou sítí. Vlevo je řez podél osy x_1 a vpravo izokřivky v oblasti Ω_h , čísla pod obrázky udávají počet objemů



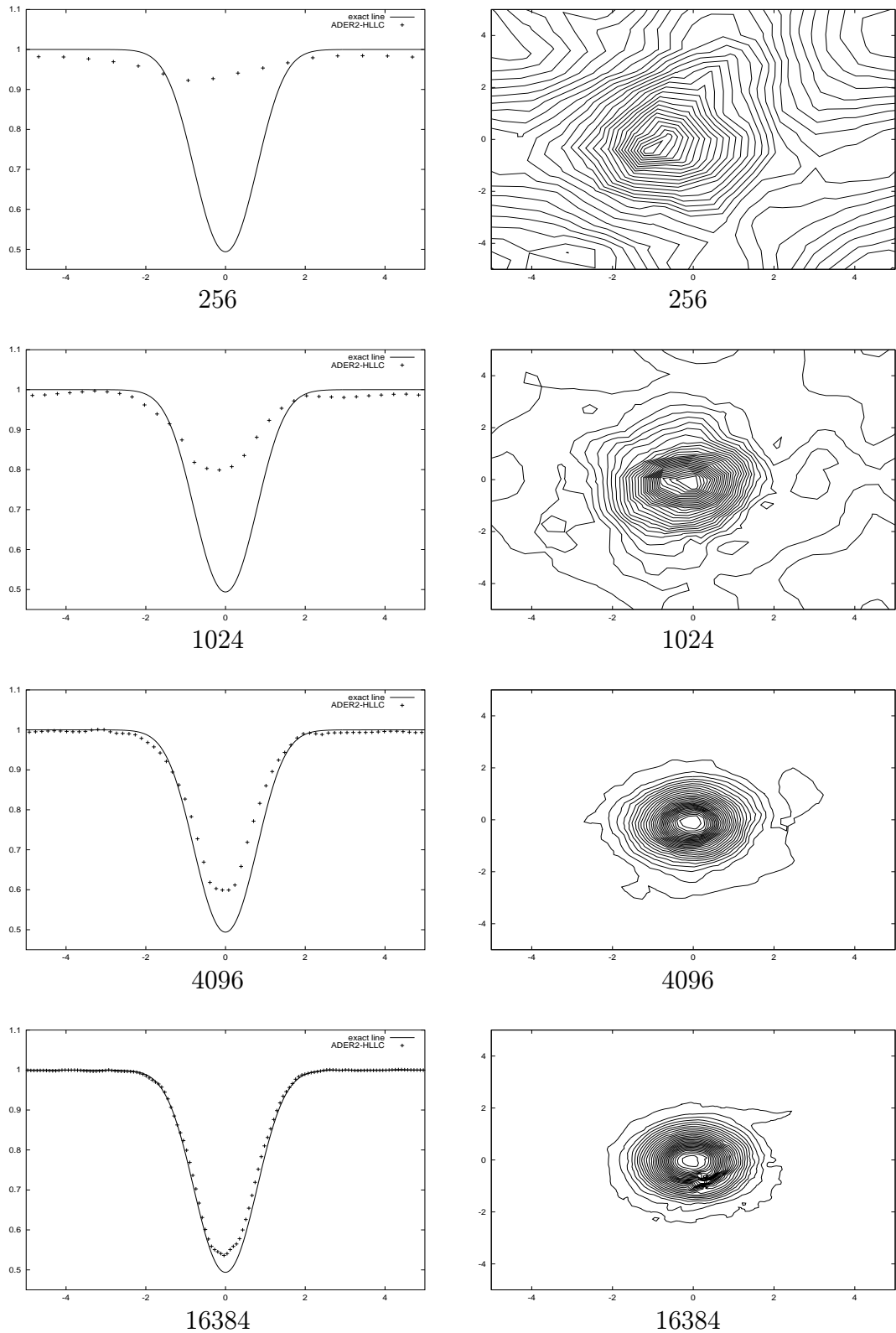
Obrázek A.11: Rozložení hustoty v numerickém řešení vortex evolution problému pomocí HLLC schématu s oblastí Ω diskretizovanou nestrukturovanou trojúhelníkovou sítí. Vlevo je řez podél osy x_1 a vpravo izokřivky v oblasti Ω_h , čísla pod obrázky udávají počet objemů



Obrázek A.12: Rozložení hustoty v numerickém řešení vortex evolution problému pomocí ADER2-HLLC schématu s použitím rekonstrukce CD a oblastí Ω diskretizovanou nestrukturovanou trojúhelníkovou sítí. Vlevo je řez podél osy x_1 a vpravo izokřivky v oblasti Ω_h , čísla pod obrázky udávají počet objemů



Obrázek A.13: Rozložení hustoty v numerickém řešení vortex evolution problému pomocí ADER2-HLLC schématu s použitím rekonstrukce CD+lim a oblastí Ω diskretizovanou nestrukturovanou trojúhelníkovou sítí. Vlevo je řez podél osy x_1 a vpravo izokřivky v oblasti Ω_h , čísla pod obrázky udávají počet objemů



Obrázek A.14: Rozložení hustoty v numerickém řešení vortex evolution problému pomocí ADER2-HLLC schématu s použitím rekonstrukce WENO2 a oblastí Ω diskretizovanou nestrukturovanou trojúhelníkovou sítí. Vlevo je řez podél osy x_1 a vpravo izokřivky v oblasti Ω_h , čísla pod obrázky udávají počet objemů

Literatura

- [1] M. Feistauer, J. Felcman, and M. Lukáčová-Medvidová. Combined finite element–finite volume solution of compressible flow. *J. Comput. Appl. Math.*, 63:179–199, 1995.
- [2] M. Feistauer, J. Felcman, and I. Straškraba. *Mathematical and Computational Methods for Compressible Flow*. Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [3] C. Hu, J. Shi, and C.-W. Shu. A Technique of Treating Negative Weights in WENO Schemes. Technical Report ICASE-2000-49, Institute for Computer Applications in Science and Engineering, Hampton, 2000.
- [4] A. Iske and M. Käser. ADER Schemes on Triangular Meshes for Scalar Conservation Laws.
<http://www.math.le.ac.uk/people/aiske/papers/ader.pdf>.
- [5] M. Käser. ADER schemes for the Solution of Conservation Laws on Adaptive Triangulations.
http://www.ing.unitn.it/~kaeserm/index.php_files/SOURCES/ader.ps.gz.
- [6] C.-W. Shu. Essentially Non-Oscillatory and Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. Technical Report ICASE-97-65, Institute for Computer Applications in Science and Engineering, Hampton, 1997.
- [7] V. A. Titarev and E. F. Toro. ADER Schemes for Scalar Hyperbolic Conservation Laws in Three Space Dimensions.
<http://www.newton.cam.ac.uk/preprints/NI03063.pdf>.
- [8] V. A. Titarev and E. F. Toro. ADER Schemes for Three-Dimensional Non-Linear Hyperbolic Systems.
<http://www.newton.cam.ac.uk/preprints/NI04007.pdf>.
- [9] V. A. Titarev and E. F. Toro. Finite Volume WENO Schemes for Three-Dimensional Conservation Laws.
<http://www.newton.cam.ac.uk/preprints/NI03057.pdf>.
- [10] V. A. Titarev and E. F. Toro. TVD Fluxes for High-Order ADER Schemes.
<http://www.newton.cam.ac.uk/preprints/NI03011.pdf>.
- [11] E. F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, Berlin, 1997.