

UNIVERZITA KARLOVA – PEDAGOGICKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATIKY A DIDAKTIKY MATEMATIKY
POSUDEK OPONENTA BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Autor práce	<i>Kateřina Markupová</i>
Název práce	<i>Algebraické výrazy ve státní maturitní zkoušce</i>
Autor posudku	<i>Mgr. Michal Zamboj, Ph.D.</i>

Cíle (stanovení, splnění, reflexe splnění)

Práce je věnována úlohám na algebraické výrazy, které se objevují ve státní maturitní zkoušce z matematiky. Práce by měla sloužit jako pomůcka pro žáky i učitele při přípravě na maturitní zkoušky. Vytvořit vhodný materiál pro přípravu na maturitní zkoušku je srozumitelný a dobře stanovený cíl. Mám však výhrady k plnění tohoto cíle v předložené práci. V závěru autorka píše „V dnešní době existují desítky učebnic pro SŠ, ve kterých najdeme algebraické výrazy včetně řešených příkladů a úloh. Většina z nich je koncipována tak, že v ní žák nalezne zadání úlohy, kterou musí vyřešit a v některých případech si řešení může ověřit ve výsledcích, pokud je učebnice zahrnuje. Malé procento učebnic nabízí i jiné varianty úloh. Žáci pak tedy nejsou připraveni například na uzavřené úlohy, které jsou hojně zastoupeny v didaktických testech maturitní zkoušky.“ V tomto tvrzení si jednak částečně odporují první a druhá věta (není jasné, zda jde o dostatek řešených úloh, nebo ne). Vzhledem k práci je však podstatné, že autorka sice vytvořila pro výklad teorie 26 vlastních příkladů, žádný z nich se však nijak nevymyká tomu, co kritizuje výše. Žádná z těchto úloh totiž nepodává alternativní způsoby řešení či metody ověření správnosti výsledku a žádná z úloh není uzavřená. Rozsáhlá část práce je pak věnována zadáním úloh na algebraické výrazy z maturit 2020–2023 a jejich řešením. Snad až na mimořádný termín 2021 se však tyto materiály, včetně vzorových řešení, najdou na stránkách CERMATu. V této kapitole nevidím jiný přínos než to, že autorka tyto úlohy shromáždila na jednom místě a přidala stručné komentáře. U každé z úloh jsou navíc uvedeny tabulky s úspěšností, které jsou taky dostupné na stránkách. Autorka na závěr stručně shrnuje úspěšnost a četnost úloh na algebraické výrazy v jednotlivých termínech. V tomto ohledu bych za přínosnější považoval dlouhodobější statistickou analýzu, ale to by už zřejmě přesahovalo požadavky kladené na bakalářskou práci. Z mého pohledu tedy autorka splňuje vytyčený cíl pouze částečně.

Obsahové části (úplnost, relevance, řazení)

Obsah práce tvoří tři kapitoly. V první kapitole se nachází teoretický výklad k tématu algebraické výrazy a operacím s nimi. Autorka popisuje všechny druhy výrazů, které se ve státní maturitě vyskytují. Navíc je zde část o mnohočlenech s více proměnnými, které se v maturitní zkoušce neobjevují. V druhé kapitole je popsána formální stránka maturitní zkoušky z matematiky. V poslední kapitole jsou uvedeny všechny úlohy na algebraické výrazy ze všech termínů maturitních zkoušek v rozmezí 2020–2023 (za trochu zvláštní považuji sestupné řazení v čase). Struktura práce je přehledná. K relevanci jednotlivých částí jsem se vyjádřil výše.

Odborná část (matematika/didaktika: náročnost, správnost, výstavba, konzistence apod.)

Ze stanovených cílů je zřejmé, že matematická stránka je na úrovni požadované k státní maturitě. Matematickou správnost lze hodnotit pouze v první kapitole. Úlohy jsou povětšinou správně vyřešené a obsahují jen drobné nedostatky. Další nesrovnalosti se nacházejí v teoretickém výkladu. Konkrétně:

- V první kapitole se nachází několik úloh, které jsou zadány slovem „Vyřešte“, a pak následuje výraz. Bez přiloženého řešení však není jasné, co se má udělat.
- str. 18, dělení mnohočlenu jednočlenem: „Opět bude platit, že pokud jsou všechny stupně prvního mnohočlenu vyšší než stupeň dělitele, výsledkem je mnohočlen. V opačném případě je výsledkem lomený výraz.“ Toto tvrzení neplatí pro stupně mnohočlenů o více proměnných. Navíc je stupeň v práci definován pouze pro mnohočlen o jedné proměnné.
- str. 19–20: Algoritmus pro dělení mnohočlenu mnohočlenem s jednou proměnnou by mohl být v práci zdůvodněn.
- str. 22, odst. 1: Autorka při výkladu rozkladu na součin cituje (Bušek a Calda, 2008) „jako vyjádření ve tvaru součinu několika mnohočlenů, které jsou zpravidla už nerozložitelné“. Dále správně přidává i příklad nerozložitelného mnohočlenu. Tématu by podle mého názoru bylo vhodné se věnovat více, protože u složitějších mnohočlenů není jasné, jak zjistit, že jsou „zpravidla nerozložitelné“.
- str. 23–24: Autorka uvádí Vietovy vzorce jako příklad metody pro rozklad kvadratického mnohočlenu jako speciálního případu. Bylo by vhodné zmínit, že i tyto vzorce lze zobecnit. Dále pak uvádí způsob rozkladu přes kořeny kvadratické rovnice. Zde by bylo vhodné explicitně popsát rozdíl obou metod v uvažovaném číselném oboru.
- str. 25: Tvrzení „Jako největší společný dělitel (značíme NSD) bereme nejnížší mocniny výrazů, které se vyskytují ve všech zadaných mnohočlenech po rozkladu“ není správně. Například $NSD(x^3, x^2)$ je x^2 , nikoli x .
- str. 26: Popis „Výsledný nejmenší společný násobek (značíme nsn) mnohočlenů obsahuje nejvyšší mocninu mnohočlenů, které se ve všech rozkladech vyskytují alespoň jednou. Jeho základní vlastností je to, že je dělitelný všemi zadanými mnohočleny, a to beze zbytku po dělení. Jinými slovy to je mnohočlen, který má jako dělitele všechny zadané mnohočleny“ není správně. Zprvu se může stát, že neexistuje mnohočlen, který se ve všech rozkladech vyskytuje alespoň jednou. Zadruhé nelze tvrdit, že uvedená vlastnost je základní, když chybí kritérium toho, že je nejmenší.
- str. 32: Při určování podmínek by bylo pro účely srozumitelnosti vhodné zmínit, že $\frac{C}{D} \neq 0$. Tj. nevytvářelo by se nové pravidlo pro C , ale použilo by se pravidlo pro dělení nulou.
- str. 33, př. 20: V průběhu výpočtu by bylo možné efektivněji zkrátit už ve druhém kroku. Zkrácení je místo toho ponecháno až na poslední krok.
- str. 35, 1.4: Popis „Jinými slovy můžeme říct, že proměnná je umocněna reálným číslem, pak platí $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$, pro $a \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}, m \neq 0$ “ není správně. Tato definice platí pouze pro nezáporné racionální mocniny.
- str. 38: U lomených iracionálních výrazů, které mají ve jmenovateli třetí a vyšší odmocninu proměnné, je nesprávně uvedena podmínka $B > 0$. To by bylo nutné pouze pro liché m a sudé n .
- str. 69–70: V komentáři k úloze je uvedeno, že podmínka $y \in (0, +\infty)$, za které má daný výraz smysl, je uvedena v zadání. V tomto případě nejde o podmínku; tou by bylo $y \neq 0$.
- str. 75–77, shrnutí: V analýze úspěšnosti žáků autorka při srovnání termínů testů píše: „Určitě to však neznamená, že by testy v podzimním termínu byly náročnější než ty jarní. Naopak jsou dosti srovnatelné. Výsledek spíše poukazuje na skutečnost, že podzimního termínu se účastní větší podíl žáků, kteří již didaktický test konali, ale neuspěli.“ Toto tvrzení není ničím podloženo,

jde jen o názor autorky. Dále je uvedeno k vysoké úspěšnosti u lomených výrazů: „Osobně bych řekla, že je to z toho důvodu, že tato část algebraických výrazů je na SŠ procvičována nejvíce (i vzhledem k počtu podobných úloh v učebnicích). Žáci si také nemusí lámat hlavu se složeným zlomkem. . . .“ Znovu jde o subjektivní tvrzení, ke kterému chybí data.

Další poznámky (včetně překlepů):

- str. 13, odst. 4: Místo $a_n \neq 0$ má být $a_0 \neq 0$ pro mnohočlen nultého stupně.
- str. 14, odst. 1: V slovním zápisu „mnohočlen - mnohočlen = mnohočlen + opačný mnohočlen“ by bylo vhodné mnohočleny očíslovat, jinak to nedává smysl.
- str. 15, výpočet v př. 2: Znaménko pro násobení je nesprávně zarovnáno.
- str. 16, odst. 2: „... druhé/třetí/ n -té mocniny ...“ \rightarrow třetí.
- str. 18, př. 6: V podmínkách chybí pravá strana u $k \neq$.
- str. 18, uprostřed: „Dělení prováníme ...“ \rightarrow provádíme.
- str. 21, předposlení ř.: V mezivýsledku má být $\frac{-2 \pm 2\sqrt{11}}{4}$. Výsledek je však správně.
- kapitola 1: Číselné obory by měly být v matematické práci vysázené jako $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$
- str. 26: Na konci prvního výpočtu má být NSD místo NSN.
- str. 27, nad 1.3: „... násobek získáte tak ...“ \rightarrow získáme.
- str. 39, první výpočet: Chybí podmínka $B \neq C$. U druhého výpočtu už je.
- str. 58, uprostřed: „Zhruba 15 % žákům byla udělena 0 bodů.“ \rightarrow bylo uděleno.
- str. 64, část D): Předposlední úprava nedává smysl. Z rovnosti se přechází do nerovnosti. Text by měl navíc začínat na novém řádku.

Přínos (originalita, použitelnost apod.)

Lze ocenit, že autorka vytvořila několik úloh pro procvičování algebraických výrazů. Sbíрку by v případě další revize šlo použít jako ucelený materiál. Jak jsem však uvedl v prvním odstavci, přínos považuji za největší nedostatek práce vzhledem k stanoveným cílům.

Formální náležitosti (gramatika, styl, typografie, grafické části, odkazy a citace, celková úprava)

Až na drobné nedostatky zmíněné výše je práce na dobré úrovni. Jednotlivé části jsou správně citovány. Celková úprava je kvalitní.

Zdroje (reprezentativnost, relevance, použití)

Základ použité literatury pro teoretickou část tvoří dvě středoškolské učebnice, vysokoškolská skripta a tři přehledové materiály pro přípravu na maturitu. Zbytek materiálů jsou kurikulární dokumenty a veřejně dostupné materiály od CERMATu. Pro inspiraci k metodám řešení úloh bych doporučil přidat i nějakou metodickou a didaktickou literaturu. K tématu také existuje velký počet závěrečných prací, které šlo použít.

Vyjádření ke kontrole na plagiáty v systémech Theses a Turnitin: Nalezeno 38 podobných dokumentů v systému Theses. Maximální podobnost 3 %. Vyznačené nálezy se v uvedených dokumentech většinou vůbec neobjevují. V systému Turnitin je celková podobnost 8 %. Jde převážně o dokumenty, které citují stejné zdroje (teorie, kurikulární dokumenty).

Hodnocení: Práce i přes výhrady splňuje požadavky kladené na bakalářskou práci. Práci **doporučuji** k obhajobě.

Otázky k obhajobě:

1. V kapitole 1.2. uvádíte teorii a příklady k mnohočlenům, včetně mnohočlenů s více proměnnými. Můžete popsat, jak jednotlivé členy v zápisu seřazujete (např. na str. 15 přímo píšete, že seřazujete sestupně)? Bude mít způsob seřazení vliv na početní operace? Například při násobení a dělení mnohočlenu $(-c+5a^2+1+2a^2b^2+3b^3)$ (schválně neseřazeno standardně) mnohočlenem $(a-c)$.
2. Můžete vysvětlit, jakým způsobem byste se s využitím Vaší práce pokusila zvýšit úspěšnost úloh zaměřených na algebraické výrazy v maturitní zkoušce z matematiky?

Datum a podpis autora posudku: 22. 08. 2024