Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Algebraické výrazy ve státní maturitní zkoušce

Algebraic expressions in the school leaving exam

Kateřina Markupová

Vedoucí práce: PhDr. Gabriela Knapová, Ph.D

Studijní program: Matematika se zaměřením na vzdělání

Studijní obor: B M 20 (0114RA170007)

2024

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Algebraické výrazy ve státní maturitní zkoušce potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 11. 7. 2024

Velmi bych chtěla poděkovat vedoucí své bakalářské práce PhDr. Gabriele Knapové, Ph.D. za její excelentní vedení, cenné připomínky, rady a komentáře, které mi poskytla během zpracování této práce. Touto cestou bych také chtěla poděkovat mému příteli, rodině a spolužákům, kteří mě po celou dobu psaní této práce podporovali a byli mi oporou po celou dobu studiu.

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce popisuje (algebraické) výrazy tak, jak jsou uváděny ve vybraných středoškolských učebnicích. Jsou zde vysvětleny a na konkrétních příkladech demonstrovány početní operace, které je možné s algebraickými výrazy provádět: sčítání, odčítání, násobení, dělení atd. Další část této práce je zaměřena na rámcový vzdělávací program a na maturitní zkoušku v České republice, konkrétně pak na společnou část maturitní zkoušky z matematiky. V této kapitole jsou také uvedeny základní informace o průběhu a struktuře didaktických testů z matematiky. Jsou zkoumány i typy úloh a jejich hodnocení. V práci jsou také uvedeny hlavní cíle organizace s názvem Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, která společnou část maturitní zkoušky zajišťuje. V poslední části práce je podrobně zkoumán tematický okruh s názvem Algebraické výrazy v konkrétních didaktických testech za vybrané období (2023–2020). U každé úlohy je uvedeno vzorové řešení a tabulka četností bodových zisků žáků. Na základě dat uveřejněných na stránkách Centra pro zajišťování výsledků vzdělávání je provedena analýza úspěšnosti žáků v jednotlivých sledovaných didaktických testech. Hlavním cílem práce je tedy poukázat na konkrétní části algebraických výrazů, které činí žákům největší problémy u didaktických testů z matematiky a které úlohy se v testech vyskytují nejčastěji. V závěru práce je shrnuta úspěšnost žáků v tomto tematickém okruhu a poukázáno na slabá místa v jejich řešeních.

KLÍČOVÁ SLOVA

Algebraické výrazy, státní maturitní zkouška z matematiky, úspěšnost žáků

ABSTRACT

This bachelor thesis describes (algebraic) expressions as they are presented in selected high school textbooks. The numerical operations that can be performed with algebraic expressions are explained and demonstrated with concrete examples. The next part of this thesis focuses on the framework education programme and the leaving examination in the Czech Republic, specifically the common part of the mathematics leaving examination. This chapter also provides basic informations about the process and structure of didactic tests in mathematics. The types of tasks and their evaluation are also examined. The main objectives of the organisation called the Centre for Determination of Educational Results, which provides the common part of the leaving examination, are also presented. In the last part of the thesis, the thematic area called Algebraic expressions in specific didactic tests for a selected period (2023–2020) is examined in detail. For each task, a sample solution and a table of students' score frequencies are provided. On the basis of the data published on the website of the Centre for the Assurance of Educational Results, an analysis of students' success rates in each of the didactic tests previously observed is carried out. The main aim of this thesis is to point out the specific parts of algebraic expressions that cause the students the most problems in didactic tests in mathematics and tasks which occur the most frequently in the tests.The thesis concludes by summarizing students' success rate in this thematic heading and pointing out the weaknesses in their solutions.

KEYWORDS

Algebraic expressions, school leaving exam, students' success rate

Obsah

Úvod

Do školství jsem nastoupila v roce 2017 jako nepedagogický pracovník střední školy. Z důvodu nedostatku pedagogů jsem v roce 2018 dočasně nastoupila na částečný úvazek jako učitelka matematiky. V té době jsem začala pronikat do školského systému a věcí spojených s profesí učitele. Práce pedagogického pracovníka mě natolik uchvátila, že jsem se rozhodla nastoupit na vysokou školu a doplnit si potřebné vzdělání, abych mohla kvalifikovaně vyučovat matematiku.

Na střední školu nastupují žáci na základě jednotné přijímací zkoušky, která je v dnešní podobě povinnou součástí přijímacího řízení do všech maturitních oborů s výjimkou oborů s talentovou zkouškou, jak podrobněji uvádí školský zákon (Zákon č. 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání). Po úspěšném absolvování studia na střední škole s maturitní zkouškou čeká na žáky poslední krok k dospělosti, a tím je maturita. Žáci si v dnešní době mohou volit mezi matematikou a cizím jazykem. Pro žáky je tato zkouška mnohdy stresující, jelikož její úspěšné vykonání následně ovlivní nejen jejich pracovní život, ale velmi často i osobní život. Z tohoto důvodu přikládám ve svých hodinách velkou váhu tomu, aby žáci byli řádně připraveni na tzv. zkoušku z dospělosti.

V první části své práce se zaměřuji na zavedení pojmu výrazy. Já osobně beru algebraické výrazy a jejich úpravy za jednu ze stěžejních kapitol matematiky. Bez znalosti pravidel pro úpravy výrazů bychom velice obtížně hledali řešení v dalších navazujících odvětvích nejen matematiky. Velice důležitou roli hraje mimo samotnou úpravu výrazů i znalost určování (existenčních) podmínek, pro něž má výraz smysl, což mi občas přijde, že je pro žáky zbytečné a neuvědomují si důležitost tohoto kroku.

Pro další část své práce jsem zvolila popis státní maturitní zkoušky z matematiky, která během své existence prošla řadou změn, ať jsou to dvě úrovně obtížnosti nebo povinná maturitní zkouška z matematiky. Dále také popisuji vznik a funkci Centra pro zjišťování výsledků vzdělávání, jakožto organizace zřízená Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy v roce 2006.

Poslední část této práce věnuji konkrétním testům od roku 2023 do roku 2020, kde zkoumám zejména úspěšnost žáků v tematickém okruhu s názvem Algebraické výrazy. Dále také zkoumám typ požadované odpovědi – otevřená/uzavřená úloha, výběr z možností, uvedení výsledku/postupu řešení.

V závěru práce je shrnuta úspěšnost žáků ve společné části maturitní zkoušky z matematiky v tomto vybraném tematickém okruhu.

Práce by tedy měla sloužit především těm, kteří se chtějí připravit na maturitní zkoušku z matematiky, a to konkrétně na tematický okruh Algebraické výrazy. Dále pak i těm, kteří naopak připravují jiné k úspěšnému vykonání maturitní zkoušky.

1 Výrazy

S algebraickými výrazy se prvně žáci setkávají již na základní škole. Jedná se o velmi důležité téma, které je využíváno nejen v matematice, ale často ho aplikujeme například i ve fyzice a dalších vědách. Z tohoto důvodu je důležité věnovat mu při výuce matematiky velkou pozornost.

1.1 Zavedení pojmů

Výrazy popisuje Bušek a Calda (2008) jako zápisy, ve kterých můžeme nalézt konstanty, jež si můžeme představit jako konkrétní čísla, která se nemění, např. $1;\ -8;\ \frac{2}{5}$. Nesmíme však zapomínat ani na konstanty, které na první pohled nemusí jako konkrétní čísla vypadat, ale nepochybně je mezi konstanty řadíme, protože jsou neměnná. Jde o pevně dané číslo, které je iracionální (nedokážeme ho napsat jako zlomek, má nekonečený a neperiodický desetinný rozvoj) jako například π nebo e. Výrazy dále obsahují proměnné, které jsou vyjadřovány libovolným písmenem a spadají do určité množiny, kterou označujeme jako obor proměnné. Ve výrazech spolu mohou být konstanty a proměnné spojovány matematickými (algebraickými) operacemi (např. $+;\ -;\ \cdot$) a závorkami různých úrovní (např. (   ); [   ]).

Výše zmíněné můžeme demonstrovat například na zápisu $\frac{4}{3}\pi r^3$, kde za konstanty, které jsou stálé a neměnné, považujeme $\frac{4}{3}$ a π. Písmeno r označujeme jako proměnnou. Pokud na celý výraz budeme nahlížet jako na zápis, který nám určuje objem koule, je oborem proměnné množina všech kladných reálných čísel, jelikož poloměr koule nemůže být záporné číslo (v případě, že by poloměr byl nula, jednalo by se o kouli s nulovým poloměrem, což představuje bod a objem by pak byl roven nule). Pokud však na zápis budeme nahlížet pouze jen jako na výraz, který nic konkrétního nevyjadřuje, můžeme za proměnnou dosadit libovolné reálné číslo. Z tohoto vyplývá, že pokud není předem stanoven obor proměnné, můžeme za ni dosadit libovolné číslo, pro které neztratí daný výraz smysl. Tím je myšleno, že se musíme vyvarovat situacím, které nedokážeme vyřešit, jako je například dělení nulou, odmocňování záporných čísel (v oboru reálných čísel), logaritmus nekladných čísel.

Pokud dáme dohromady všechny číselné množiny, ze kterých můžeme do výrazu za proměnné dosadit, pak nám vznikne definiční obor daného výrazu. Častokrát se setkáme i se zadáním úlohy, abychom určili podmínky, kdy má daný výraz smysl. Takový typ úlohy uvádí vč. řešení Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání (2020) v didaktickém testu maturitní zkoušky podzimního termínu roku 2020 (obr. 1). V této úloze vycházíme ze dvou základních podmínek existence výrazu. V oboru reálných čísel nemůže být pod odmocninou číslo menší než nula (jelikož $c \in$ R) a zároveň výraz ve jmenovateli nesmí být roven nule (nelze dělit nulou). Tyto podmínky pak musíme vyřešit současně. Průnikem těchto podmínek nám tedy vznikne definiční obor daného výrazu (obvykle zapsaný jako interval), v tomto případě je definičním oborem interval $(-\infty; 1\rangle$.

1 bod

3 Určete všechny hodnoty $c \in$ R, pro které má smysl výraz:

$$\frac{\sqrt{1-c}}{\sqrt{5-c}}$$

Řešení:

$$1-c \geq 0 \wedge 5-c > 0$$
$$c \leq 1 \wedge c < 5$$

$$c \in (-\infty; 1\rangle$$

Obrázek 1 – Vzorové řešení didaktického testu z matematiky v podzimním termínu roku 2020 – Úloha č. 3 (Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, 2020, s. 2)

Pokud za proměnnou dosadíme číslo, které je předem zadané nebo libovolně zvolené, výraz se tak po jeho vyřešení promění v jedno konkrétní číslo, kterému říkáme hodnota výrazu. Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání (2020) uvádí Úlohu č. 24 zaměřenou na určování hodnoty výrazu ve vzorové řešení didaktického testu z matematiky v jarním termínu roku 2019 (obr. 2)

Jiný pohled na zavedení pojmu uvádějí Cizlerová et al. (2013, s. 6), kteří výrazy definují jako „smysluplný zápis matematických symbolů vyjadřující početní operace a pořadí, v němž mají být tyto operace provedeny.“ Jako nesmysluplný výraz si můžeme představit například zápis $2+)\cdot-((5+\cdot+13(\cdot 8$. Jsou v něm obsaženy konstanty a početní operace, ale celkově zápis nedává smysl.

Výrazy můžeme dělit na tři podskupiny – číselné výrazy, algebraické výrazy a nealgebraické výrazy. Pod číselnými výrazy si můžeme představit opět smysluplný zápis, který obsahuje pouze konstanty, které jsou spojeny početními operacemi a závorkami např. $\frac{\sqrt{3^2+4^2}}{[-(-5)-6\cdot 3]+2^3}$. Hodnota tohoto konkrétního výrazu je po vypočítání rovna -1.

2 body

24 Je dán výraz $\frac{12(a-2)^2}{12-6a}$ s reálnou proměnnou a.

Které tvrzení je pravdivé?

A) Pro $a = 101^8$ je výraz kladný.

B) Pro $a = 2$ je hodnota výrazu 0.

C) Hodnota výrazu nemůže být nikdy nulová.

D) Pro všechna $a \neq \frac{1}{6}$ je výraz roven $\frac{(a-2)^2}{1-6a}$.

E) Pro některá a je výraz roven $2(a-2)$.

Řešení:

$\frac{12(a-2)^2}{12-6a} = -2(a-2)$ pro $a \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$

Pro $a < 2$ je hodnota výrazu kladná,
hodnota $a = 2$ nepatří do definičního oboru výrazu,
pro $a > 2$ je hodnota výrazu záporná.

A) $101^8 > 2$, proto pro $a = 101^8$ není výraz kladný.

B) Pro $a = 2$ není výraz definován, tedy hodnota výrazu neexistuje.

C) Pro žádné $a \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$ není hodnota výrazu nulová.

D) Rovnost výrazů $\frac{(a-2)^2}{1-6a} = -2(a-2)$ platí pouze pro $a = 0$.

E) Rovnost $2(a-2) = -2(a-2)$ neplatí pro žádné $a \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$.

Obrázek 2 – Vzorové řešení úlohy č. 24 v didaktickém testu z matematiky v jarním termínu roku 2019 (Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, 2019, s. 16)

Nealgebraický výraz je takový zápis, ve kterém se vyskytují například goniometrické funkce, operace využívané ve výrokové logice, logaritmus aj. Příkladem nealgebraického výrazu může být například $\sin x \cos y + \cos x \sin y$ nebo $\neg(A \cap B)$.

Poslední skupinou jsou algebraické výrazy, kterými se v této práci budu zabývat. Představují číselné výrazy, které jsou doplněny o písmena, která nazýváme proměnné. Algebraické výrazy mohou mít buď jednu proměnnou (např. $x^2 - 1$) nebo více proměnných (např. $\frac{x^2-2xy+y^2}{(x-y)}$). Tuto skupinu můžeme dále členit na mnohočleny, racionální lomené výrazy a iracionální výrazy. Jednotlivým skupinám se budeme věnovat v samostatných oddílech níže.

1.2 Mnohočleny

Jak uvádějí Koldová a Fuchs (2019), mnohočlen (často se v literatuře setkáme i s označením polynom) je takový výraz, který obsahuje součet několika sčítanců, přičemž každý obsahuje součin konstanty (z oboru reálných čísel) a proměnné, která je umocněna. Tato mocnina musí být nezáporné celé číslo (tzn. exponent je přirozené číslo nebo nula). Příkladem mnohočlenu jsou například výrazy $5x^5 - 8x + 2$; $\frac{1}{3}x^{10} - \frac{2}{5}xy^4 + yz - 1$ nebo také $\sqrt{5}x + 2$. Naopak za mnohočleny nepovažujeme zápisy $5\sqrt{x} + 2$; $x^{-2} + x^{-3} + 1$ nebo $\frac{x-3}{x^2+x+10}$. Nejedná se o mnohočleny, protože exponenty proměnné nejsou nezáporná celá čísla.[1]

Opačným polynomem rozumíme takový polynom, který se od původního polynomu odlišuje pouze znaménky, a to u všech koeficientů mnohočlenu. Vždy tedy musíme porovnávat koeficienty u stejné proměnné. Pokud tedy vezmeme například polynom $15x^2z - 12y^2z + 7xz$, jeho opačným polynomem je pak výraz $-15x^2z + 12y^2z - 7xz$. Koeficienty u stejných proměnných jsou navzájem opačná čísla.

Bušek a Calda (2008) rozdělují mnohočleny podle toho, kolik proměnných zápis obsahuje. Pokud se v polynomu vyskytuje pouze jedna proměnná, jedná se o mnohočleny s jednou proměnnou, např. $17x^5 - 13x^3 + 10x - 9$. Má-li polynom více než jednu proměnnou, jedná se o mnohočleny s více proměnnými. Příkladem mnohočlenu se čtyřmi proměnnými je například výraz $m^3 + mn^2o^5 + o^2p^6$.

> Mnohočlen s jednou proměnnou je výraz $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, kde x je proměnná, $a_n,\ a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ jsou reálná čísla nazývaná koeficienty mnohočlenu. Stupeň

[1] Výrazy, které obsahují proměnnou pod odmocninou, se nazývají iracionální výrazy. Pokud má výraz záporný exponent, nebo má proměnnou ve jmenovateli, pak je nazýváme lomený výraz.

mnohočlenu je nejvyšší exponent proměnné x s nenulovým koeficientem (je-li v uvedeném mnohočlenu $a_n \neq 0$, je to mnohočlen n-tého stupně). [...]

Jednotliví sčítanci $a_k x^k$, kde $0 \leq k \leq n$, jsou členy mnohočlenu.

Číslo a_0 se nazývá absolutní člen, člen $a_1 x$ se nazývá lineární člen, člen $a_2 x^2$ se nazývá kvadratický člen, člen $a_3 x^3$ se nazývá kubický člen[2].

Mnohočlen, který obsahuje pouze absolutní člen $a_n \neq 0$, se nazývá mnohočlenem nultého stupně.

Mnohočlenem prvního stupně s jednou proměnnou je mnohočlen ve tvaru $a_1 x + a_0$ (také $ax + b$), kde $a_1 \neq 0$. Nazýváme ho také lineární mnohočlen.

Mnohočlenem druhého stupně s jednou proměnnou je mnohočlen ve tvaru $a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ (také $ax^2 + bx + c$), kde $a_2 \neq 0$. Nazýváme ho také kvadratický mnohočlen.

Mnohočlenem třetího stupně s jednou proměnnou je mnohočlen ve tvaru $a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ (také $ax^3 + bx^2 + cx + d$), kde $a_3 \neq 0$. Nazýváme ho kubický mnohočlen.

Nenulovým mnohočlen rozumíme nulu (stupeň tohoto mnohočlenu nedefinujeme).

(Koldová, Fuchs, 2019, s. 11)

Podle toho, kolik výraz obsahuje sčítanců, můžeme mnohočlen pojmenovat. Obsahuje-li výraz pouze součet dvou sčítanců, říkáme tomuto výrazu dvojčlen, apod.

Dva polynomy jedné proměnné si jsou podle Novotné a Trcha (2000) rovny právě tehdy, když nabývají totožné hodnoty ve všech bodech svého definičního oboru. Abychom nemuseli prověřovat všechny rovnosti, vycházíme z toho, že pokud máme mnohočlen $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ (kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in$ R a $n \in$ N) a mnohočlen $b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ (kde $b_0, b_1, \ldots, b_n \in$ R a $n \in$ N), pak si jsou rovny právě tehdy, když $n = k, a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$, tzn. oba výrazy mají shodný zápis.

Čermák a Červinková (2007) uvádějí, že pokud pracujeme s mnohočleny, můžeme využít zákony komutativnosti a asociativnosti pro sčítání a násobení a také distributivnosti. Operace, které můžeme s mnohočleny provádět, jsou zejména sčítání, odčítání, násobení, dělení a umocňování. Nejčastěji se však snažíme mnohočleny rozložit na součin, čehož využijeme zejména u lomených výrazů k jejich krácení a zjednodušení.

[2] Ostatní členy nemají speciální název.

1.2.1 Sčítání a odčítání mnohočlenů

Sčítání/odčítání mnohočlenů uskutečňujeme tak, že sečteme/odečteme koeficienty členů, u kterých se shodují proměnné (vč. mocnin). U odčítání dojde k tomu, že odčítaný mnohočlen se odečtením promění v opačný mnohočlen, a tím se úloha promění na sčítání (mnohočlen $-$ mnohočlen = mnohočlen $+$ opačný mnohočlen).

Příklad č. 1[3]

Určete součet a rozdíl mnohočlenů $4a^2b - 8a^2c + 2ab + 10bc^2 + c$ a $5ab + bc^2 - 12c$.

Řešení:

Součet: Oba mnohočleny napíšeme vedle sebe a mezi ně vložíme operaci sčítání. Jelikož je před druhou závorkou sčítání, můžeme závorky odstranit bez jakékoli další změny. Součet mnohočlenů pak řešíme tak, že sečteme koeficienty stejných členů:

$(4a^2b - 8a^2c + 2ab + 10bc^2 + c) + (5ab + bc^2 - 12c) =$

$= 4a^2b - 8a^2c + 2ab + 10bc^2 + c + 5ab + bc^2 - 12c =$

$= 4a^2b - 8a^2c + 7ab + 11bc^2 - 11c$

Rozdíl: Opět si opíšeme mnohočleny vedle sebe do závorek a mezi ně vložíme operaci odčítání. V dalším kroku se zbavíme závorek, ale musíme si dát pozor na to, že je před druhou závorkou znaménko mínus. Všechny členy uvnitř druhé závorky tedy vynásobíme číslem -1 a znaménko minus převedeme na plus (změníme znaménka uvnitř druhé závorky, tzn. z druhého mnohočlenu se stane opačný mnohočlen, který přičteme k prvnímu mnohočlenu). Pak postupujeme stejně jako u sčítání tak, že sečteme koeficienty stejných členů:

$(4a^2b - 8a^2c + 2ab + 10bc^2 + c) - (5ab + bc^2 - 12c) =$

$= 4a^2b - 8a^2c + 2ab + 10bc^2 + c - 5ab - bc^2 + 12c =$

$= 4a^2b - 8a^2c - 3ab + 9bc^2 + 13c$

[3] U všech příkladů uvedených v oddílech 1.2.1 až 1.4 se jedná o autorčina originální zadání a řešení.

1.2.2 Násobení mnohočlenů

Při násobení jednočlenu jednočlenem postupujeme tak, že zvlášť vynásobíme koeficienty obou výrazů a zvlášť vynásobíme stejné proměnné podle pravidla $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, kde $a \in$ R, $m, n \in$ N.[4]

Příklad č. 2

Určete součin mnohočlenů $\frac{1}{2}d^2e^3f^5$ a $6de^2f^2$.

Řešení:

Nejprve mezi sebou vynásobíme koeficienty $\frac{1}{2}$ a 6. Následně pak roznásobíme postupně proměnné d, e, f.

$$\left(\frac{1}{2}d^2e^3f^5\right) \cdot (6de^2f^2) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot d^2 \cdot d. e^3 \cdot e^2 \cdot f^5 \cdot f^2 = 3d^3e^5f^7$$

Součin mnohočlenů, které mají libovolný počet členů, provádíme tak, že musíme každý člen jednoho mnohočlenu vynásobit s každým členem druhého mnohočlenu. Násobíme nejen koeficienty, ale i proměnné. Vzniklý výraz pak sečteme, pokud je to možné, a ideálně seřadíme sestupně.

Příklad č. 3

Určete součin mnohočlenů $8a^2b - 8ab - b$ a $2ab + 3b$.

Řešení:

Oba mnohočleny si opět opíšeme do závorek a mezi ně použijeme operaci násobení. Následně si vezmeme každý jeden člen jednoho mnohočlenu a vynásobíme jím všechny členy druhého mnohočlenu. Na závěr, pokud je to možné, sečteme členy, které mají stejné proměnné vč. mocnin tak, jak jsme postupovali u sčítání mnohočlenů.

$$(8a^2b - 8ab - b) \cdot (2ab + 3b) =$$

$$= 16a^3b^2 + 24a^2b^2 - 16a^2b^2 - 24ab^2 - 2ab^2 - 3b^2 =$$

$$= 16a^3b^2 + 8a^2b^2 - 26ab^2 - 3b^2$$

[4] Obdobné vztahy jsou v této práci převzaté bez důkazů, jelikož nejde o stěžejní část této práce.

1.2.3 Umocňování mnohočlenů

Umocňování je operace opakovaného násobení. Pro příklad uvedeme pátou mocninu proměnné a, kterou dokážeme přepsat jako součin, kde mezi sebou pětkrát vynásobíme proměnnou a.

$$a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$$

Díky tomu můžeme na umocňování mnohočlenů nahlížet jako na součin mnohočlenů. Při této početní operaci také můžeme využít vzorce pro druhé/třetí/n -té mocniny součtu nebo rozdílu dvojčlenu.

Pro libovolná čísla $a, b \in$ R a každé $n \in$ N platí:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Všimněme si, že první čtyři vzorce jsou pouze konkrétní vyjádření posledního obecného vzorce pro n-tou mocninu, nazývaného také binomická věta.

Příklad č. 4

Vyřešte $(4xy - y^2)^2$.

Řešení:

Pro výpočet využijeme vzoreček druhé mocniny rozdílu dvojčlenu $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, kde za a budeme dosazovat výraz $4xy$ a za b pak y^2.

$(4xy - y^2)^2 = (4xy)^2 - 2 \cdot 4xy \cdot y^2 + (y^2)^2 = 16x^2y^2 - 8xy^3 + y^4$

Cizlerová et al. (2013) dále také uvádějí umocňování jednočlenu. K této početní operaci využijeme vztahu $(ax^m)^n = a^n x^{m \cdot n}$, kde $a \in$ R, $m, n \in$ N. Umocnění jednočlenu přirozeným exponentem provedeme tak, že umocníme koeficienty a všechny proměnné samostatně.

Pokud je jednočlen záporný, řídíme se pravidlem pro umocňování čísla -1.

Pro $n \in$ N platí: $(-1)^n = 1$ pro n sudé

$(-1)^n = -1$ pro n liché

$-1^n = -1$ pro libovolné n

Příklad č. 5

Vyřešte $\left(-\frac{2}{3}xy^2z^4\right)^5$.

Řešení:

Pro umocnění využijeme výše zmíněný vzorec, kdy musíme každou proměnnou umocnit na pátou mocninu a nesmíme zapomenout umocnit koeficient $-\frac{2}{3}$. Umocníme čitatele, jmenovatele i -1, která je součástí záporného zlomku.

$$\left(-\frac{2}{3}xy^2z^4\right)^5 = \left(-\frac{2}{3}\right)^5 (x)^5(y^2)^5(z^4)^5 = (-1)^5\frac{2^5}{3^5}x^5y^{10}z^{20} = -\frac{32}{243}x^5y^{10}z^{20}$$

1.2.4 Dělení mnohočlenů

U dělení mnohočlenů budeme rozlišovat tři možné situace – dělení jednočlenu jednočlenem, dělení mnohočlenu jednočlenem a dělení mnohočlenu mnohočlenem s jednou proměnnou.

Dělení jednočlenu jednočlenem realizujeme podobně, jako kdybychom násobili dva jednočleny. Vydělíme samostatně koeficienty obou mnohočlenů a samostatně odpovídající si proměnné. U dělení proměnných se pak řídíme pravidlem $a^m : a^n = a^{m-n}$, kde $a \in$ R, $m, n \in$ N. Pokud $n > m$, výsledkem nebude mnohočlen (ten musí mít v exponentu pouze celá nezáporná čísla), ale lomený výraz ($a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, kde $a \in R, n \in N, a \neq 0$). Pokud $n = m$, pak exponent proměnné bude nula, tím se proměnná podle pravidla $a^0 = 1$, pro $a \in$ R, $a \neq 0$, převede na číslo 1 – jednička je u násobení neutrálním prvkem ($a \cdot 1 = a$, kde $a \in$ R), proto jí nemusíme psát. Důležitou součástí dělení je i stanovení existenčních podmínek, za kterých má daný výraz smysl. Musíme předejít situaci, kdybychom dělili nulou. U jednočlenu položíme do nerovnosti postupně všechny proměnné, které se vyskytují v děliteli.

Příklad č. 6

Vydělte jednočlen $12k^2l^8m^4o^{10}$ jednočlenem $-\frac{1}{2}km^4o^5$.

Řešení:

V prvním kroku vydělíme koeficienty 12 a $-\frac{1}{2}$, druhým krokem je dělení stejných proměnných. Nesmíme však zapomínat na fakt, že se musíme vyvarovat dělení nulou, proto je zapotřebí určit podmínky platnosti, tzn. dělitel nesmí být nula. Jelikož se dělitel skládá z několika proměnných, které mají mezi sebou početní operaci násobení, nesmí být ani jeden z nich roven nule.

$$(12k^2l^8m^4o^{10}) : \left(-\frac{1}{2}km^4o^5\right) = \left[12 : \left(-\frac{1}{2}\right)\right](k^2 : k)(l^8)(m^4 : m^4)(o^{10} : o^5) =$$

$$= -24kl^8o^5$$

$k \neq; m \neq 0;\ o \neq 0.$

Dalším typem je <u>dělení mnohočlenu jednočlenem</u>, které vykonáváme tak, že každý člen obsažený v prvním mnohočlenu vydělíme dělitelem (druhým jednočlenem). Dělení prováníme do té doby, dokud je člen prvního mnohočlenu vyšší nebo stejné mocniny. Ostatní členy mnohočlenu, které jsou nižšího stupně, pak připíšeme jako zbytek po dělení. Názorně bychom postup mohli zapsat tak, že každý jeden člen prvního mnohočlenu označíme písmeny A, B, C, D, E a dělitele jako X. Pak by platilo pro $X \neq 0$:

$$(A + B + C + D + E) : X = \frac{A+B+C+D+E}{X} = \frac{A}{X} + \frac{B}{X} + \frac{C}{X} + \frac{D}{X} + \frac{E}{X}.$$

Opět bude platit, že pokud jsou všechny stupně prvního mnohočlenu vyšší než stupeň dělitele, výsledkem je mnohočlen. V opačném případě je výsledkem lomený výraz.

Příklad č. 7

Vydělte mnohočlen $12z^5 - z^3 + 15z^2$ jednočlenem 3z.

Řešení:

Oba mnohočleny si opíšeme vedle sebe do závorek a použijeme početní operaci dělení. Pak vezmeme každý jeden člen prvního mnohočlenu a vydělíme ho jednočlenem 3z.

Tím se nám příklad přetransformuje v postupné dělení jednočlenu jednočlenem. Opět však musíme myslet na existenční podmínky, tzn. vyvarovat se dělení nulou. Jelikož všechny zadané členy dělence mají vyšší stupeň než dělitel, výsledkem bude mnohočlen (výsledek je bez zbytku).

$$(12z^5 - z^3 + 15z^2) : (3z) = (12z^5 : 3z) - (z^3 : 3z) + (15z^2 : 3z) = 4z^4 - \frac{1}{3}z^2 + 5z$$

$z \neq 0$

Příklad č. 8

Vyřešte $(8a^5b^3 + 4a^4b^2 - 5a^3b^2 - 2a^2b) : (2a^2b^2)$.

Řešení:

Postup řešení je obdobný jako u příkladu č. 7.

$$(8a^5b^3 + 4a^4b^2 - 5a^3b^2 - 2a^2b) : (2a^2b^2) =$$

$$= (8a^5b^3 : 2a^2b^2) + (4a^4b^2 : 2a^2b^2) - (5a^3b^2 : 2a^2b^2) - (2a^2b : 2a^2b^2) =$$

$$= 4a^3b + 2a^2 - \frac{5}{2}a - b^{-1} = 4a^3b + 2a^2 - \frac{5}{2}a - \frac{1}{b}$$

$a \neq 0; b \neq 0$

Výsledkem je lomený výraz, jelikož poslední člen prvního mnohočlenu má nižší stupeň než dělitel.

Dělení mnohočlenu mnohočlenem s jednou proměnnou provádíme v několika krocích.

1) Seřadíme členy obou mnohočlenů od nejvyššího stupně po nejnižší.
2) Vydělíme první člen mnohočlenu dělence prvním členem mnohočlenu, kterým dělíme (postup jako u dělení jednočlenu jednočlenem). Podíl připíšeme jako první dílčí výsledek.
3) Výsledkem, který nám vyšel v bodě 2), vynásobíme celý druhý mnohočlen (dělitele) a odečteme ho od prvního mnohočlenu (dělence).
4) Rozdíl z bodu 3) připíšeme pod dělence a celý postup opakujeme, dokud nedojdeme do stavu, kdy vypočtený rozdíl mnohočlenů nemá nižší exponent, než

má dělitel. V takovém případě nám vyšel zbytek po dělení a přičteme ho jako podíl zbytku a dělitele.

5) Určíme podmínky, abychom vyřadili čísla, kdy by dělitel byl roven nule.

Všimněme si, že jednotlivé kroky jsou podobné tomu, jak dělíme dvě přirozená čísla pod sebou v aritmetice.

Příklad č. 9

Vyřešte $(-20x^2 + 28x + 8x^4 - 6x^3 + 35) : (5 + 4x)$.

Řešení:

V prvním kroku si srovnáme členy obou mnohočlenů sestupně podle mocniny: $(8x^4 - 6x^3 - 20x^2 + 28x + 35) : (4x + 5)$. Dále pak první člen dělence vydělíme prvním členem dělitele $8x^4 : 4x = 2x^3$. Tento výsledek si pak napíšeme jako první dílčí výsledek za rovnítko. V dalším kroku pak dělitele vynásobíme výsledkem, který jsme si napsali $(4x + 5) \cdot 2x^3 = 8x^4 + 10x^3$. Tento výraz si pak opíšeme pod první mnohočlen do závorky, a jelikož ho chceme odečíst, přidáme před něj znaménko minus. Pak už jen tyto dva mnohočleny pod sebou odečteme a na výsledek budeme nahlížet jako na nově získaného dělence a postup budeme opakovat do té doby, než nejvyšší člen mnohočlenu vzniklého odčítáním nemá nižší exponent než dělitel. V tomto příkladu nám u posledního odečtení vyšla nula. To znamená, že dělení vyšlo beze zbytku. Nezapomínáme ani na určení podmínky z dělitele.

$(-20x^2 + 28x + 8x^4 - 6x^3 + 35) : (5 + 4x) =$

$= (8x^4 - 6x^3 - 20x^2 + 28x + 35) : (4x + 5) = 2x^3 - 4x^2 + 7$

$\underline{-(8x^4 + 10x^3)}$

$-16x^3 - 20x^2 + 28x + 35$

$\underline{-(-16x^3 - 20x^2)}$

$28x + 35$

$\underline{-(28x + 35)}$

0

Podmínky: $5 + 4x \neq 0$

$$x \neq -\frac{5}{4}$$

Příklad č. 10

Vydělte mnohočlen $(16m^5 - 10m^3 + 4m^2 - 7)$ mnohočlenem $(2m^2 + 2m - 5)$.

Řešení:

Budeme postupovat stejně jako v příkladu č. 9. Jediný rozdíl je v tom, že na konci nám vyjde zbytek po dělení $(197m - 212)$, který přičteme k výsledku do zlomku s dělitelem.

$(16m^5 - 10m^3 + 4m^2 - 7) : (2m^2 + 2m - 5) = 8m^3 - 8m^2 + 23m - 41$

$\underline{-(16m^5 + 16m^4 - 40m^3)}$

$-16m^4 + 30m^3 + 4m^2 - 7$

$\underline{-(-16m^4 - 16m^3 + 40m^2)}$

$46m^3 - 36m^2 - 7$

$\underline{-(46m^3 + 46m^2 - 115m)}$

$-82m^2 + 115m - 7$

$\underline{-(-82m^2 - 82m + 205)}$

$197m - 212$

Celkový výsledek tedy je: $8m^3 - 8m^2 + 23m - 41 + \frac{197m-212}{2m^2+2m-5}$.

Podmínky: $2m^2 + 2m - 5 \neq 0$

Výsledek této nerovnosti určíme (např. podle Čermáka a Červinkové [2007]) pomocí vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ (kde x je proměnná, a, b, c jsou reálná čísla, $a \neq 0$), který má předpis $x_{1,2} \neq \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; $b^2 - 4ac \geq 0$.

Po dosazení dostáváme: $m_{1,2} \neq \frac{-2\pm\sqrt{4+40}}{4} = \frac{-2\pm4\sqrt{11}}{4}$.

Výsledné podmínky tedy jsou: $m_1 \neq \frac{-1+\sqrt{11}}{2}$; $m_2 \neq \frac{-1-\sqrt{11}}{2}$.

1.2.5 Rozkládání mnohočlenu na součin

Rozkládání mnohočlenu na součin vystihuje Bušek a Calda (2008) jako „jeho vyjádření ve tvaru součinu několika mnohočlenů, které jsou zpravidla už nerozložitelné." Základními způsoby, jak mnohočlen rozložit na součin, jsou vytýkání a rozklad pomocí vzorců. Jak bylo již uvedeno výše, rozklad na součin využijeme pro zjednodušování lomených výrazů formou krácení, které můžeme aplikovat pouze u násobení. V oboru reálných čísel však existují výrazy, které nedokážeme rozložit. Výrazem, který je v R nerozložitelný na součin je například výraz $a^2 + b^2$. [5]

Vytýkání uskutečňujeme tak, že výraz, který se objevuje ve všech (popř. v několika) členech mnohočlenu, vytkneme před závorku. Pomocí distributivnosti bychom vytýkání mohli popsat pro všechny $a, b, c \in$ R následovně:

$$ab + ac = a(b + c).$$

Vytýkat můžeme proměnné, čísla i celé výrazy a můžeme jej provádět opakovaně. Občas je také potřeba změnit výraz na opačný výraz, abychom ho mohli vytknout/krátit, jinými slovy vytknout nejprve -1. Konečný výsledek pak musí být ve formě součinu.

Příklad č. 11

Rozložte na součin mnohočlen $-8s^7 - 12s^2 + 6s^6 + 9s$.

Řešení:

Občas nám mnohočlen nabízí několik variant, jak z výrazu vytknout. Proto musíme zkusit různé varianty, abychom se dostali k požadovanému výsledku. Prvně si můžeme všimnout, že každý člen mnohočlenu obsahuje proměnnou s. Pokud ji vytkneme z každého členu, zůstane uvnitř závorky zjednodušený mnohočlen $-8s^6 - 12s + 6s^5 + 9$. Dále je vhodné k sobě sdružit dvojice členů $-8s^6 - 12s$ a $6s^5 + 9$. V prvním výrazu se opakuje číslo 4 a proměnná s, kterou dokážeme opět vytknout. Naproti tomu v druhém výrazu můžeme vytknout číslo 3 (9 i 6 jsou dělitelné 3). Dostaneme se do situace, kdy se pomocí vytýkání objeví dvě závorky, které jsou navzájem opačné $(2s^5 + 3)$ a $(-2s^5 - 3)$. K tomu,

[5] Pokud bychom výraz $a^2 + b^2$ rozkládali v oboru C, dostali bychom výraz $(a + bi) \cdot (a - bi)$.

abychom z nich dostali shodné závorky a mohli je vytknout, využijeme u jedné z nich vytknutí čísla -1. Postup může být tedy následující:

$-8s^7 - 12s^2 + 6s^6 + 9s = s(-8s^6 - 12s + 6s^5 + 9) = s[(-8s^6 - 12s) + (6s^5 + 9)] =$

$= s[4s(-2s^5 - 3) + 3(2s^5 + 3)] = s[-4s(2s^5 + 3) + 3(2s^5 + 3)] =$

$= s[(-4s + 3)(2s^5 + 3)] = s(2s^5 + 3)(-4s + 3)$

Druhý způsob, jak rozložit mnohočlen na součin, je využití vzorců. Pro rozkládání můžeme využít vzorce, které jsou uvedeny v oddíle 1.2.3. Umocňování mnohočlenů a dále pak:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})$$

pro libovolná čísla $a, b \in$ R a každé $n \in$ N. Opět si povšimněme, že první tři vzorce jsou konkrétním příkladem posledního obecného vzorce.

Samostatným celkem jsou kvadratické mnohočleny (které lze rozložit na součin v oboru reálných čísel), u kterých můžeme využít dvou základních pravidel při rozkládání na součin. Prvním z nich jsou tzv. Viètovy vzorce. Pokud existují $r, s \in$ Z taková, že mnohočlen ve tvaru $x^2 + px + q$, kde $p, q \in$ Z, lze rozložit na součin ve tvaru $(x - r)(x - s)$, pak platí:

$$r + s = -p \qquad \wedge \qquad r \cdot s = q$$

Tento vztah můžeme jednoduše i zdůvodnit:

$$x^2 + px + q = (x - r)(x - s) = x^2 - rx - sx + rs = x^2 - (r + s)x + rs$$

Koeficientům p, q přiřadíme hodnoty roznásobeného mnohočlenu $-p = r + s$ a $q = rs$.

Příklad č. 12

Rozložte kvadratický trojčlen $x^2 - 2x - 24$ na součin dvou lineárních dvojčlenů pomocí Viètových vzorců.

Řešení:

Ze zadaného trojčlenu dosadíme koeficienty do Viètových vzorců tak, že platí $p = -2$ a $q = -24$. Budeme tedy hledat dvě celá čísla, jejichž součet je roven číslu $-(-2)$ a součin je roven -24. Číslo -24 můžeme vyjádřit jako součin několika způsoby:

$$-24 = 12 \cdot (-2) = (-12) \cdot 2 = 6 \cdot (-4) = (-6) \cdot 4 = 3 \cdot (-8) = (-3) \cdot 8$$

Jediná dvojice, která má součet roven 2, jsou čísla 6; -4. Hledaná čísla pak dosadíme do součinu $(x - r)(x - s)$.

$r + s = -(-2) \quad \wedge \quad r \cdot s = -24$

$6 + (-4) = -(-2) \quad \wedge \quad 6 \cdot (-4) = -24$

$r = 6; s = -4$

$x^2 - 2x + 24 = (x - 6)[x - (-4)] = (x - 6)(x + 4)$

Čermák a Červinková (2007) poukazují i na druhý postup, který můžeme u kvadratických mnohočlenů využít, jak bylo ukázáno i u příkladu č. 10. Má-li kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ (kde x je proměnná, $a, b, c \in$ R, $a \neq 0$) kořeny x_1, x_2, pak platí $ax^2 + bx + c = a(x - x_1).(x - x_2)$. Kořeny kvadratické rovnice můžeme nalézt pomocí vzorce $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Výraz $b^2 - 4ac$ se nazývá diskriminant a značí se D. Rozlišujeme 3 situace pro diskriminant:

1) Pokud $D > 0$, pak má rovnice 2 reálná řešení x_1, x_2.
2) Pokud $D = 0$, rovnice má jedno dvojnásobné řešení $x_1 = x_2$
3) Pokud $D < 0$, rovnice nemá v oboru reálných čísel řešení.[6]

Výsledné kořeny pak použijeme pro rozklad na součin.

Příklad č. 13

Rozložte mnohočlen $2x^2 - 4x - 30$ pomocí kořenů kvadratické rovnice.

[6] V oboru komplexních čísel má rovnice dva kořeny, které jsou komplexně sdružené. Komplexní čísla ale nejsou povinnou součástí státní maturitní zkoušky, proto jim zde není věnována větší pozornost.

Řešení:

Ze zadaného mnohočlenu si určíme koeficienty, které dosadíme do vzorce pro výpočet kořenů: $a = 2; b = -4; c = -30$. Výsledné kořeny pak dosadíme do součinu $a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.2.(-30)}}{2.2} = \frac{4 \pm \sqrt{256}}{4}$$

$$x_1 = \frac{4 + 16}{4} = 5$$

$$x_1 = \frac{4 - 16}{4} = -3$$

$$2x^2 - 4x - 30 = 2(x - 5) \cdot (x + 3).$$

1.2.6 Největší společný dělitel mnohočlenů

Podle Čermáka a Červinkové (2007) určujeme největšího společného dělitele mnohočlenů obdobně jako u přirozených čísel. Vycházíme z mnohočlenů, které jsou rozloženy na součin, případně je musíme rozložit. Jako největší společný dělitel (značíme NSD) bereme nejnižší mocniny výrazů, které se vyskytují ve všech zadaných mnohočlenech po rozkladu. Hlavním atributem největšího společného dělitele je to, že dělí všechny zadané mnohočleny beze zbytku. Jinými slovy, je to mnohočlen s nejvyšším stupněm, který je dělitelem všech zadaných mnohočlenů. U koeficientů hledáme číslo, které dělí všechny koeficienty opět beze zbytku.

Příklad č. 14

Nalezněte největší společný dělitel mnohočlenů:

$$15x^2y^3(x^2 + 2x - 3)$$

$$5x^3y^2 - 5x^2y^2$$

$$30x^2 - 30.$$

Řešení:

V prvním kroku rozložíme všechny mnohočleny na součin. V druhém kroku hledáme výrazy, které se vyskytují ve všech mnohočlenech, a to v nejnižší mocnině. S koeficienty nakládáme stejně jako s největším společným dělitelem přirozených čísel.

$15x^2y^3(x^2+2x-3) = 15x^2y^3(x-1)(x+3)$

$5x^3y^2 - 5x^2y^2 = 5x^2y^2(x-1)$

$30x^2 - 30 = 30(x^2-1) = 30(x-1)(x+1)$

NSN $= 5(x-1)$

1.2.7 Nejmenší společný násobek mnohočlenů

Znovu se inspirujeme u nejmenšího společného násobku přirozených čísel. Opět musíme všechny mnohočleny rozložit na součin. Výsledný nejmenší společný násobek (značíme nsn) mnohočlenů obsahuje nejvyšší mocninu mnohočlenů, které se ve všech rozkladech vyskytují alespoň jednou. Jeho základní vlastností je to, že je dělitelný všemi zadanými mnohočleny, a to beze zbytku po dělení. Jinými slovy to je mnohočlen, který má jako dělitele všechny zadané mnohočleny. Tuto vlastnost využijeme zejména při určování společného jmenovatele racionálních lomených výrazů. Koeficient nejmenšího společného násobku je číslo, které je dělitelné všemi koeficienty a opět beze zbytku.

Příklad č. 15

Určete nejmenší společný násobek mnohočlenů:

$15x^2y^3(x^2+2x-3)$

$5x^3y^2 - 5x^2y^2$

$30x^2 - 30.$

Řešení:

V prvním kroku si všechny mnohočleny rozložím na součin. Dále pak hledáme všechny výrazy, které se ve všech rozkladech vyskytují alespoň jednou, a vezmeme jejich nejvyšší obsaženou mocninu. S koeficienty zacházím stejně jako při určování nejmenšího společného násobku přirozených čísel.

$15x^2y^3(x^2 + 2x - 3) = 15x^2y^3(x - 1)(x + 3)$

$5x^3y^2 - 5x^2y^2 = 5x^2y^2(x - 1)$

$30x^2 - 30 = 30(x^2 - 1) = 30(x - 1)(x + 1)$

nsn $= 30x^2y^3(x - 1)(x + 1)(x + 3)$

V některé literatuře se můžeme setkat i s tím, že násobek získáte tak, že nejprve zjistíme dělitele a pak doplníme o ty členy (mocniny), které tam ještě chybí.

1.3 Racionální lomené výrazy

Dle Cizlerové et al. (2013) rozeznáme racionální lomené výrazy podle toho, že obsahují podíl dvou mnohočlenů, které jsou zapsané ve tvaru zlomku. Slovem racionální je myšleno, že výraz neobsahuje odmocninu z proměnné. Jelikož se proměnná vyskytuje ve jmenovateli, musíme stanovit podmínky, které zajistí, že jmenovatel nebude roven nule. Mějme dva mnohočleny, které obecně označíme A a B, kde B je různé od nuly. Racionální lomený výraz pak můžeme zapsat ve tvaru $\frac{A}{B}$. Mnohočlen A v čitateli může být libovolný mnohočlen (i konstanta), avšak mnohočlen B musí obsahovat alespoň jednu proměnnou (pokud by byla ve jmenovateli konstanta, jednalo by se pouze o mnohočlen). Za racionální lomené výrazy můžeme považovat například předpisy $\frac{15}{4x^2-9y^5}$; $\frac{x}{y}$; $\frac{38xyz+1}{xy^2z^3}$. Naopak za racionální lomené výrazy nepovažujeme $\frac{7x+7y}{5}$; $\frac{\sqrt{x}+y}{x}$. [7]

Převrácený lomený výraz vytvoříme z lomeného výrazu tak, že zaměníme výraz v čitateli s výrazem ve jmenovateli. Obecně pro libovolné výrazy A a B, kde A, B jsou různé od nuly, je převrácený výraz k výrazu $\frac{A}{B}$ roven $\frac{B}{A}$.

Operace, které s racionálními lomenými výrazy nejčastěji uskutečňujeme, jsou krácení, sčítání a odčítání, násobení, dělení (viz následující oddíly). Celkově se je snažíme zjednodušit.

[7] V prvním případě se jedná o mnohočlen a ve druhém případě jde o iracionální lomený výraz.

1.3.1 Krácení a rozšiřování racionálních lomených výrazů

Za krácení racionálních lomených výrazů považujeme operaci, kdy čitatele i jmenovatele dělíme stejným nenulovým výrazem. Důležitým krokem pro krácení je to, že mnohočlen v čitateli i ve jmenovateli je potřeba rozložit na součinový tvar (pouze tehdy můžeme krátit). Pokud se v rozloženém čitateli i jmenovateli objevuje stejný výraz, může být zkrácen, a celý výraz zjednodušen. Nutno podotknout, že i zde musíme určit existenční podmínky výrazu, které vyhází z toho, že jmenovatel musí být různý od nuly. Označme libovolné mnohočleny jako A, B, C, kde $B\ a\ C$ jsou různé od nuly. Pak můžeme krácení zapsat následovně:

$$\frac{A \cdot C}{B \cdot C} = \frac{\frac{A \cdot C}{C}}{\frac{B \cdot C}{C}} = \frac{A}{B}$$

Příklad č. 16

Zkraťte lomený výraz $\frac{15xy(x^2+2x-3)}{5x^3y^2-5x^2y^2}$.

Řešení:

Prvně si určíme podmínky, za kterých má daný výraz smysl. Podmínky určíme tak, že jmenovatel $5x^3y^2 - 5x^2y^2 \neq 0$. Abychom mohli určit konkrétní podmínky, rozložíme mnohočlen na součin, žádný činitel nesmí být roven nule. Jak již bylo zmíněno, pro samotné krácení, musíme čitatele i jmenovatele také rozložit na součin. Pokud se v čitateli i ve jmenovateli objeví stejný výraz, oba tímto výrazem vydělíme a dostaneme zjednodušený výraz.

Existenční podmínky:

$5x^3y^2 - 5x^2y^2 \neq 0$, tedy

$5x^2y^2(x - 1) \neq 0$, tedy

$x \neq 0 \quad \wedge \quad y \neq 0 \quad \wedge \quad x - 1 \neq 0$, tedy

$x \neq 0 \quad \wedge \quad y \neq 0 \quad \wedge \quad x \neq 1$

Jmenovatele jsme na součin rozložili již při určování existenčních podmínek.

Zjednodušení:

$$\frac{15xy(x^2+2x-3)}{5x^3y^2-5x^2y^2}=\frac{15xy(x-1)(x+3)}{5x^2y^2(x-1)}=\frac{3(x+3)}{xy}$$

Opačnou operací ke krácení je rozšiřování lomených výrazů. Při krácení postupujeme tak, že dělíme čitatele i jmenovatele stejným nenulovým výrazem, při rozšiřování naopak násobíme čitatele i jmenovatele stejným nenulovým výrazem. Pokud obdobně označíme libovolné mnohočleny jako A, B, C, kde $B\ a\ C$ jsou různé od nuly. Pak rozšiřování můžeme zapsat následovně:

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot C}{B\cdot C}$$

Musíme pamatovat na to, že k původním podmínkám lomeného výrazu, musíme ještě zahrnout podmínky výrazu, kterým rozšiřujeme (tímto výrazem násobíme i jmenovatele). Tuto operaci využijeme u vytváření společného jmenovatele při sčítání a odčítání lomených výrazů a také u usměrňování iracionálních lomených výrazů (tj. operace, která vede k odstranění odmocniny ve jmenovateli).

Příklad č. 17

Rozšiřte lomený výraz $\frac{3(x+3)}{xy}$ výrazem $5(x-1)$.

Řešení:

Při rozšiřování musíme čitatele i jmenovatele zadaného výrazu vynásobit výrazem $5(x-1)$. Po roznásobení výrazů, výrazy upravíme (pokud je to možné). V tomto případě můžeme sečíst člen $-15x$ se členem $45x$. Existenční podmínky musíme určit nejen ze zadaného mnohočlenu, ale i z výrazu, kterým rozšiřujeme.

$$\frac{3(x+3)\cdot 5(x-1)}{xy\cdot 5(x-1)}=\frac{15(x^2-x+3x-3)}{5x^2y-5xy}=\frac{15x^2-15x+45x-45}{5x^2y-5xy}=$$

$$=\frac{15x^2+30x-45}{5x^2y-5xy}$$

Existenční podmínky:

$xy\neq 0 \quad \wedge \quad 5(x-1)\neq 0$, tedy

$x \neq 0 \quad \wedge \quad y \neq 0 \quad \wedge \quad x - 1 \neq 0$, tedy

$x \neq 0 \quad \wedge \quad y \neq 0 \quad \wedge \quad x \neq 1$

1.3.2 Sčítání a odčítání racionálních lomených výrazů

Sčítání a odčítání racionálních lomených výrazů provádíme podobně, jako kdybychom počítali číselné zlomky. Opět je potřeba určit podmínky, za kterých má daný výraz smysl. Všechny čitatele i jmenovatele rozložíme na součin, a pokud již v této fázi je možné v rámci jednotlivých zlomků krátit, jednotlivé racionální lomené výrazy zkrátíme. Dále určíme společného jmenovatele mnohočlenů. Ten určíme tak, že najdeme nejmenší společný násobek všech jmenovatelů. Každý racionální lomený výraz pak rozšíříme na lomený výraz, který bude mít ve jmenovateli nejmenší společný násobek jmenovatelů ostatních lomených výrazů, tím vytvoříme jeden společný jmenovatel. Nakonec pak sečteme/odečteme čitatele všech výrazů. V posledním kroku, pokud je to možné, zkrátíme výsledný výraz.

Příklad č. 18

Vypočítejte a zjednodušte: $\frac{5}{5x^2+10x-15} - \frac{5xy^2}{5x^3y^2-5xy^2} + \frac{12}{3x^2-3}$.

Řešení:

V prvním kroku si všechny čitatele i jmenovatele rozložíme na součin. Ze všech jmenovatelů si určíme podmínky. Zkontrolujeme jednotlivé zlomky, zda v nich v tuto chvíli nelze krátit. V našem případě jdou zkrátit všechny zlomky – první krátíme číslem 5, ve druhém výrazu krátíme $5xy^2$ a poslední číslem 3. Následně najdeme nejmenší společný násobek, který bude tvořit společného jmenovatele. Všechny zlomky rozšíříme tak, abychom ve jmenovateli měli nejmenší společný násobek jmenovatelů, který jsme si určili v předchozím kroku. Pak už jen přičteme a odečteme čitatele a výsledný výraz zkrátíme.

$$\frac{5}{5x^2+10x-15} - \frac{5xy^2}{5x^3y^2-5xy^2} + \frac{12}{3x^2-3} =$$

$$= \frac{5}{5(x+3)(x-1)} - \frac{5xy^2}{5xy^2(x^2-1)} + \frac{12}{3(x^2-1)} =$$

$$= \frac{1}{(x+3)(x-1)} - \frac{1}{(x^2-1)} + \frac{4}{(x^2-1)} =$$

$$= \frac{1}{(x+3)(x-1)} - \frac{1}{(x-1)(x+1)} + \frac{4}{(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{(x+1)}{(x+3)(x-1)(x+1)} - \frac{(x+3)}{(x+3)(x-1)(x+1)} + \frac{4(x+3)}{(x+3)(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{(x+1)-(x+3)+4(x+3)}{(x+3)(x-1)(x+1)} = \frac{x+1-x-3+4x+12}{(x+3)(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{4x+10}{(x+3)(x-1)(x+1)}$$

Existenční podmínky:

$5(x+3)(x-1) \neq 0 \quad \wedge \quad 5xy^2(x-1)(x+1) \neq 0 \quad \wedge \quad 3(x-1)(x+1) \neq 0$, tedy

$x \neq -3 \quad \wedge \quad x \neq 1 \quad \wedge \quad x \neq 0 \quad \wedge \quad y \neq 0 \quad \wedge \quad x \neq -1$

1.3.3 Násobení racionálních lomených výrazů

Podle Buška a Caldy (2008) násobíme racionální lomené výrazy tak, že samostatně vynásobíme čitatele a zvlášť jmenovatele. Nechť pro libovolné výrazy A, B, C, D, kde $B, D \neq 0$ platí:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$

Autoři také dále uvádějí, že je vhodné nechat čitatele i jmenovatele ve tvaru součinu (neroznásobovat), jelikož se nám tento tvar hodí při následném krácení lomených výrazů (zjednodušování). Podmínky, za kterých má daný výraz, určujeme ze všech jmenovatelů.

Příklad č. 19

Určete součin $\frac{15x(x^2-36)}{y^2z} \cdot \frac{xyz}{3x^2+15x-18}$.

Řešení:

V prvním kroku vytvoříme součin čitatelů a součin jmenovatelů. Pro další úpravy je vhodné i zde ponechat oba výrazy v součinovém tvaru, kterého využijeme pro krácení a zjednodušení výrazu. V druhém krku rozložíme výrazy $x^2 - 36$ a výraz $3x^2 + 15x - 18$ na součin. Vidíme, že v čitateli a ve jmenovateli máme stejné výrazy, které můžeme krátit. Existenční podmínky určíme z prvního i druhé jmenovatele.

$$\frac{15x(x^2-36)}{y^2z} \cdot \frac{xyz}{3x^2+15x-18} = \frac{15x(x^2-36) \cdot xyz}{y^2z \cdot (3x^2+15x-18)} = \frac{15x^2yz(x-6)(x+6)}{3y^2z(x^2+5x-6)} =$$

$$= \frac{15x^2yz(x-6)(x+6)}{3y^2z(x-1)(x+6)} = \frac{5x^2(x-6)}{y(x-1)} = \frac{5x^3-30x^2}{xy-y}$$

Existenční podmínky:

$y^2z \neq 0 \quad \wedge \quad 3x^2 + 15x - 18 \neq 0$, tedy

$y \neq 0 \quad \wedge \quad z \neq 0 \quad \wedge \quad 3(x-1)(x+6) \neq 0$, tedy

$y \neq 0 \quad \wedge \quad z \neq 0 \quad \wedge \quad x \neq 1 \quad \wedge \quad x \neq -6$

1.3.4 Dělení racionálních lomených výrazů

Při dělení lomených výrazů vycházíme ze základní vědomosti, se kterou jsme se seznámili již na základní škole. Pokud dělíme například číslem 5, nahlížíme na to jako na násobení číslem $\frac{1}{5}$. Tuto znalost využijeme i u dělení racionálních lomených výrazů, které chápeme jako násobení převráceným lomeným výrazem. Nechť pro libovolné výrazy A, B, C, D, kde $C, B, D \neq 0$ platí:

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$$

Jelikož pracujeme s převráceným lomeným výrazem, podmínky musíme určovat nejen ze jmenovatelů podílu, ale i z čitatele dělitele (z toho se nám při převodu na násobení stane jmenovatel). Jinými slovy můžeme říct, že podmínky, za kterých má daný výraz smysl, určujeme ze všech jmenovatelů, které se nám během úprav vyskytnou na pozici jmenovatele.

Příklad č. 20

Určete podíl $\frac{16a^3-48a^2b+36ab^2}{a^5b^3} : \frac{4a^2-10ab+6b^2}{a^4b^5}$.

Řešení:

Prvním krokem řešení je to, že z úlohy na dělení vytvoříme úlohu na násobení tím, že z dělitele uděláme převrácený výraz (čitatele dělitele vyměníme se jmenovatelem dělitele). Pak už postupujeme obdobně jako při násobení racionálních lomených výrazů. Vytvoříme součin z čitatelů a ze jmenovatelů, které necháme v součinovém tvaru. Rozložíme výrazy na součin a zkrátíme. Existenční podmínky tvoříme z obou jmenovatelů, a navíc i z čitatele dělitele, který se v průběhu úprav změní také na jmenovatele.

$$\frac{16a^3 - 48a^2b + 36ab^2}{a^5b^3} : \frac{4a^2 - 10ab + 6b^2}{a^4b^5} =$$

$$= \frac{4a(4a^2 - 12ab + 9b^2)}{a^5b^3} \cdot \frac{a^4b^5}{2(2a^2 - 5ab + 3b^2)} = \frac{4a^5b^5(2a - 3b)^2}{2a^5b^3(a - b)(2a - 3b)} =$$

$$= \frac{2b^2(2a - 3b)}{(a - b)} = \frac{4ab^2 - 6b^3}{a - b}$$

Existenční podmínky:

$a^5b^3 \neq 0 \quad \wedge \quad a^4b^5 \neq 0 \quad \wedge \quad 4a^2 - 10ab + 6b^2 \neq 0$, tedy

$a \neq 0 \quad \wedge \quad b \neq 0 \quad \wedge \quad 2(a - b)(2a - 3b) \neq 0$, tedy

$a \neq 0 \quad \wedge \quad b \neq 0 \quad \wedge \quad a \neq b \quad \wedge \quad a \neq \frac{3}{2}b$

1.3.5 Složený racionální lomený výraz

Složený racionální lomený výraz popisují Koldová a Fuchs (2019) jako lomený výraz, který má v čitateli nebo ve jmenovateli lomený výraz popř. v obou z nich. Při úpravě složených racionálních výrazů postupujeme obdobně, jako při úpravě složených zlomků, se kterými jsme se opět setkali již na základní škole v aritmetice. Hlavní zlomkovou čáru, která nám odděluje lomený výraz v čitateli a lomený výraz ve jmenovateli, přepíšeme jako dělení např. $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{6}} = \frac{2}{3} : \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{4} = \frac{12}{12} = 1$ Pak už postupujeme analogicky, jako při dělení racionálních lomených výrazů. Tedy převedeme dělení do násobení převráceným lomeným výrazem. Pak už jen vynásobíme čitatele spolu a jmenovatele spolu.

Složený racionální lomený výraz můžeme obecně zapsat pro libovolné výrazy A, B, C, D, kde $C, B, D \neq 0$ jako:

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$$

Pří určování podmínek, při kterých má daný výraz smysl, vycházíme opět z toho, že žádný výraz, který se v průběhu úprav vyskytne ve jmenovateli, nesmí být roven nule.

> „ […] podmínky, za nichž mají úpravy prováděné s danými výrazy smysl, je obvykle vhodnější určovat až po jejich provedení, nikoli hned na počátku, kdy jednotlivé výrazy ještě nejsou vyjádřeny jako součin; podmínky, kdy dané výrazy a operace s nimi mají smysl, vyplynou přímo z úprav, které jsou během řešení použity."
>
> (Bušek a Calda, 2008, s. 156)

Příklad č. 21

Zjednodušte $\dfrac{\frac{2m^2n - 2mn^2}{25m^2 - 50mn + 25n^2}}{\frac{6m^3n^3}{5m^2 - 5n^2}}$.

Řešení:

V prvním kroku si upravíme složený racionální lomený výraz na dělení dvou lomených racionálních výrazů. Dělení pak přepíšeme jako násobení za podmínky, že dělitele upravíme jako převrácený lomený výraz. Při násobení lomených výrazů pak postupujeme tak, že vynásobíme oba čitatele a oba jmenovatele. Tím dostáváme jeden lomený výraz, který rozložíme na součin. V posledním kroku už jen zkrátíme stejné výrazy (popř. koeficienty), které jsou obsaženy v čitateli i jmenovateli. Podmínky, za kterých má daný výraz smysl, určujeme z výrazů $25m^2 - 50mn + 25n^2$; $6m^3n^3$ a $5m^2 - 5n^2$. K určení konkrétních podmínek, je potřeba dané výrazy rozložit na součin. Tento krok však již provádíme v průběhu úprav, tudíž konečný rozklad pak můžeme vzít již z řešení – z tohoto důvodu je dobré nejprve řešit samotný výraz a až poté určovat existenční podmínky.

$$\frac{\frac{2m^2n-2mn^2}{25m^2-50mn+25n^2}}{\frac{6m^3n^3}{5m^2-5n^2}} = \frac{2m^2n-2mn^2}{25m^2-50mn+25n^2} : \frac{6m^3n^3}{5m^2-5n^2} =$$

$$= \frac{2m^2n-2mn^2}{25m^2-50mn+25n^2} \cdot \frac{5m^2-5n^2}{6m^3n^3} = \frac{(2m^2n-2mn^2)\cdot(5m^2-5n^2)}{(25m^2-50mn+25n^2)\cdot 6m^3n^3} =$$

$$= \frac{2mn(m-n)\cdot 5(m^2-n^2)}{25(m^2-2mn+n^2)\cdot 6m^3n^3} = \frac{10mn(m-n)(m-n)(m+n)}{150m^3n^3(m-n)^2} = \frac{m+n}{15m^2n^2}$$

Existenční podmínky:

$25m^2-50mn+25n^2 \neq 0 \quad \wedge \quad 5m^2-5n^2 \neq 0 \quad \wedge \quad 6m^3n^3 \neq 0$, tedy

$25(m-n)^2 \neq 0 \quad \wedge \quad 5(m-n)(m+n) \neq 0 \quad \wedge \quad m \neq 0 \quad \wedge \quad n \neq 0$, tedy

$m \neq n \quad \wedge \quad m \neq -n \quad \wedge \quad m \neq 0 \quad \wedge \quad n \neq 0$

1.4 Iracionální výrazy

Podle Cizlerové et al. (2013) je iracionální lomený výraz specifický tím, že se v něm vyskytuje proměnná pod odmocninou. Jinými slovy můžeme říct, že proměnná je umocněna reálným číslem, pak platí $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$, pro $a \in$ R, $m, n \in$ N, $m \neq 0$. Příkladem iracionálních výrazů je zápis $\sqrt[3]{x}$ nebo také $\frac{\sqrt{x-2}+y}{\sqrt[3]{xy}}$. V oddílech 1.2.2 a 1.2.3 jsou uvedena základní pravidla pro počítání s mocninami. Dalšími důležitými vztahy pro řešení iracionálních lomených výrazů pro libovolné proměnné $a, b \geq 0$; $n, m \in$ N, jsou vztahy pro počítání s odmocninami:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};\ b \neq 0$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$$

Všechny pravidla a úpravy, které platí pro mnohočleny a pro racionální lomené výrazy, platí i pro iracionální výrazy (sčítání, násobení atd.). Obvykle řešíme iracionální výrazy tak, že všechny odmocniny, převedeme do tvaru mocniny (pomocí zlomků), a pak už postupujeme stejně, jako při úpravách výrazů s mocninami. Takový typ úlohy uvádí vč. řešení Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání (2020) v didaktickém testu maturitní zkoušky podzimního termínu roku 2020 (obr. 3).

1 bod

2 **Pro** $y \in (0; +\infty)$ **zjednodušte:**

$$\sqrt{\frac{y^{64}}{16} \cdot \left(\frac{2}{y^7}\right)^4} =$$

Řešení:

$$\sqrt{\frac{y^{64}}{16} \cdot \left(\frac{2}{y^7}\right)^4} = \frac{y^{32}}{4} \cdot \left(\frac{2}{y^7}\right)^2 = \frac{y^{32}}{4} \cdot \frac{4}{y^{14}} = \boldsymbol{y^{18}}$$

Obrázek 3 – Vzorové řešení didaktického testu z matematiky v podzimním termínu roku 2020 – Úloha č. 2 (Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, 2020, s. 2)

Při určování podmínek, za kterých má daný výraz smysl, opět vycházíme z předpokladu, že dělitel musí být nenulový. Nově musíme vymezit i podmínky pro výrazy pod odmocninou, jelikož v oboru reálných čísel lze odmocnit pouze nezáporná čísla. Na základě této vlastnosti položíme výraz pod odmocninu větší nebo rovno nule a vyřešíme danou nerovnost. Výsledné existenční podmínky pak zapíšeme do intervalu (sjednocení více intervalů), které nám stanovují definiční obor iracionálního výrazu (tj. množina čísel, ze které můžeme za proměnné dosazovat). Pokud u iracionálních výrazů stanovujeme více podmínek (tj. výraz obsahuje více odmocnin z proměnné nebo odmocninu/odmocniny z proměnné a proměnnou v děliteli), výsledným definičním oborem je průnik všech stanovených podmínek.

Příklad č. 22

Určete definiční obor výrazu $\frac{\sqrt{x+7}}{x} + 2\sqrt{x+1}$.

Řešení:

Základními předpoklady pro určování definičního oboru výrazu je, že dělitel (v tomto příkladu je to výraz x) musí být různý od nuly. Dále pak každý jeden výraz pod odmocninou může být pouze kladné číslo nebo nula. Z toho nám vyplývají tři podmínky, které musí platit zároveň, proto na závěr děláme průnik všech množin.

$x \neq 0 \quad \wedge \quad x + 7 \geq 0 \quad \wedge \quad x + 1 \geq 0$, tedy

$x \neq 0 \quad \wedge \quad x \geq -7 \quad \wedge \quad x \geq -1$, tedy

$x \in$ R$\setminus \{0\} \quad \wedge \quad x \in \langle -7;\ +\infty) \quad \wedge \quad x \in \langle -1;\ +\infty)$, tedy

$x \in \langle -1; 0) \cup (0; +\infty)$

Usměrňování iracionálních lomených výrazů

Usměrňování iracionálních lomených výrazů je úprava pomocí rozšiřování, která vede k tomu, že výsledný lomený výraz neobsahuje odmocninu ve jmenovateli. Kubešová a Cibulková (2006) rozlišují tři základní typy usměrňování zlomků.

Prvním typem je <u>usměrňování iracionálních lomených výrazů, které mají ve jmenovateli druhou odmocninu proměnné</u>, tj. $\frac{A}{\sqrt{B}}$ pro libovolné mnohočleny A, B, kde B > 0. Usměrňování provádíme tak, že výraz rozšíříme zlomkem, který má v čitateli i jmenovateli výraz $\sqrt{B}$:

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A}{\sqrt{B}} \cdot \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{\left(\sqrt{B}\right)^2} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$$

Příklad č. 23

Usměrněte výraz $\frac{d^2 e}{3\sqrt{de}}$ pro $d, e > 0$.

Řešení:

Celý výraz rozšíříme výrazem $\sqrt{de}$. Tím nám ve jmenovateli vznikne druhá mocnina odmocniny výrazu de. Podle předpisu $\sqrt[n]{a^n} = a$, kde $a \geq 0, n \in$ N, přepíšeme jmenovatele pouze jako výraz de, který můžeme navíc zkrátit s čitatelem zlomku.

$$\frac{d^2e}{3\sqrt{de}}\cdot\frac{\sqrt{de}}{\sqrt{de}}=\frac{d^2e\sqrt{de}}{3\left(\sqrt{de}\right)^2}=\frac{d^2e\sqrt{de}}{3de}=\frac{d\sqrt{de}}{3}$$

Druhý typ představují lomené iracionální výrazy, které mají ve jmenovateli třetí a vyšší odmocninu proměnné. Takový výraz můžeme zapsat pro libovolné mnohočleny A, B, kdy $B > 0$ a $m, n \in$ N, $m < n$ jako $\frac{A}{\sqrt[n]{B^m}}$. Pokud by platilo $m > n$, musíme nejprve provést částečné odmocnění, a tím opět dostaneme nerovnost $m < n$. Příkladem je výraz $\sqrt[5]{x^9}=\sqrt[5]{x^{5+4}}=\sqrt[5]{x^5\cdot x^4}=\sqrt[5]{x^5}\cdot\sqrt[5]{x^4}=x\sqrt[5]{x^4}$. Abychom odstranili odmocninu ze jmenovatele, musíme celý výraz rozšířit výrazem $\sqrt[n]{B^{n-m}}$. Pak bude platit:

$$\frac{A}{\sqrt[n]{B^m}}=\frac{A}{\sqrt[n]{B^m}}\cdot\frac{\sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^{n-m}}}=\frac{A\sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^m}\cdot\sqrt[n]{B^{n-m}}}=\frac{A\sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^m\cdot B^{n-m}}}=\frac{A\sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^{m+(n-m)}}}=\frac{A\sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^n}}=$$

$$=\frac{A\sqrt[n]{B^{n-m}}}{B}$$

Příklad č. 24

Usměrněte výraz $\frac{d^2e}{3\sqrt[3]{d^2e}}$ pro $d, e > 0$.

Řešení:

Zadaný výraz rozšíříme výrazem $\sqrt[3]{d^{3-2}e^{3-1}}=\sqrt[3]{de^2}$. Po rozšíření dostáváme ve jmenovateli pod třetí odmocninou třetí mocniny obou proměnných, ze kterých po úpravě dostáváme výraz de, který krátíme s výrazem v čitateli:

$$\frac{d^2e}{3\sqrt[3]{d^2e}}\cdot\frac{\sqrt[3]{de^2}}{\sqrt[3]{de^2}}=\frac{d^2e\sqrt[3]{de^2}}{3\sqrt[3]{d^2e}\cdot\sqrt[3]{de^2}}=\frac{d^2e\sqrt[3]{de^2}}{3\sqrt[3]{d^2ede^2}}=\frac{d^2e\sqrt[3]{de^2}}{3\sqrt[3]{d^3e^3}}=\frac{d^2e\sqrt[3]{de^2}}{3de}=\frac{d\sqrt[3]{de^2}}{3}$$

Posledním typem jsou iracionální lomené výrazy, jejichž jmenovatelé obsahují součet nebo rozdíl dvou výrazů, kdy jeden nebo oba obsahují druhou odmocninu proměnné. V takovéto situaci využíváme vzorec $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. Pokud iracionální lomený výraz má ve jmenovateli součet dvou výrazů, které v sobě zahrnují odmocninu, celý výraz pak rozšíříme stejným výrazem, který se však liší v tom, že místo součtu použijeme rozdíl.

Pro libovolné výrazy A, B, C pro které platí, že $B, C > 0$, zapíšeme usměrnění následovně:

$$\frac{A}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} \cdot \frac{\sqrt{B}-\sqrt{C}}{\sqrt{B}-\sqrt{C}} = \frac{A \cdot \left(\sqrt{B}-\sqrt{C}\right)}{\left(\sqrt{B}+\sqrt{C}\right)\left(\sqrt{B}-\sqrt{C}\right)} = \frac{A \cdot \left(\sqrt{B}-\sqrt{C}\right)}{(\sqrt{B})^2-(\sqrt{C})^2} = \frac{A \cdot \left(\sqrt{B}-\sqrt{C}\right)}{B-C}$$

A naopak pokud jmenovatel obsahuje rozdíl dvou výrazů s odmocninou, rozšíříme ho součtem těchto výrazů. Mějme výrazy A, B, C pro které platí, že $B, C > 0 \wedge B \neq C$, pak usměrnění lomeného výrazu zapíšeme:

$$\frac{A}{\sqrt{B}-\sqrt{C}} \cdot \frac{\sqrt{B}+\sqrt{C}}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} = \frac{A \cdot \left(\sqrt{B}+\sqrt{C}\right)}{\left(\sqrt{B}-\sqrt{C}\right)\left(\sqrt{B}+\sqrt{C}\right)} = \frac{A \cdot \left(\sqrt{B}+\sqrt{C}\right)}{(\sqrt{B})^2-(\sqrt{C})^2} = \frac{A \cdot \left(\sqrt{B}+\sqrt{C}\right)}{B-C}$$

Příklad č. 25

Usměrněte výraz $\frac{4x+1}{6\sqrt{x}-5}$ pro $x > 0$.

Řešení:

Jmenovatel lomeného výrazu je rozdíl dvou výrazů (přičemž první z nich obsahuje odmocninu), proto rozšíříme stejným výrazem s operací sčítání $(6\sqrt{x}+5)$, neboli zadaný výraz vynásobíme lomeným výrazem, který bude mít v čitateli i jmenovateli tento součet. Jmenovatele roznásobíme a čitatele necháme v součinovém tvaru, popř. ho můžeme i roznásobit. Pokud bychom měli složitější výraz nebo více výrazů, je vhodnější nechávat výraz po usměrňování v součinovém tvaru, se kterým se lépe pracuje.

$$\frac{4x+1}{6\sqrt{x}-5} \cdot \frac{6\sqrt{x}+5}{6\sqrt{x}+5} = \frac{(4x+1)\left(6\sqrt{x}+5\right)}{\left(6\sqrt{x}-5\right)\left(6\sqrt{x}+5\right)} = \frac{(4x+1)\left(6\sqrt{x}+5\right)}{\left(6\sqrt{x}\right)^2-5^2} =$$

$$= \frac{(4x+1)\left(6\sqrt{x}+5\right)}{6^2\left(\sqrt{x}\right)^2-25} = \frac{(4x+1)\left(6\sqrt{x}+5\right)}{36x-25} = \frac{24x\sqrt{x}+20x+6\sqrt{x}+5}{36x-25}$$

Celkově jsou iracionální lomené výrazy považovány za jedny z nejtěžších částí algebraických výrazů, protože v nich kombinujeme všechny znalosti z mnohočlenů i z lomených výrazů, a zároveň nám do existenčních podmínek vstupuje i pravidlo pro odmocninu, které řešíme pomocí nerovnic. Na konci úprav iracionálního lomeného výrazu, pak musíme ještě zkontrolovat, jestli se nevyskytuje odmocnina ve jmenovateli, a popřípadě provést usměrnění.

Příklad č. 26

Vyřešte $\dfrac{\sqrt[3]{k^4l^3\sqrt{k^2l^4m\sqrt[3]{m^2}}}}{klm\sqrt[3]{k^2l^2\sqrt{m}}\sqrt{m}}$ pro $k, l, m > 0$.

Řešení:

Pro snadnější řešení převedeme všechny odmocniny do tvaru mocniny. Nesmíme zapomenout, že pokud se vyskytuje odmocnina pod odmocninou, do tvaru mocniny převádíme pomocí závorek. Pak už jen vynásobíme/vydělíme proměnné, které mají stejný základ. Pokud násobíme stejné proměnné, pak jejich exponenty sčítáme, naopak pokud dvě stejné proměnné dělíme, jejich exponenty odčítáme. V posledním krku usměrníme zlomek, a tím se zbavíme odmocniny ve jmenovateli.

$$\frac{\sqrt[3]{k^4l^3\sqrt{k^2l^4m\sqrt[3]{m^2}}}}{klm\sqrt[3]{k^2l^2\sqrt{m}}\sqrt{m}} = \frac{\left\{k^4l^3\left[k^2l^4m(m^2)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}}{klm\left[k^2l^2(m)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}m^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left[k^4l^3\left(k^2l^4mm^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}}{klmm^{\frac{1}{2}}\left(k^2l^2m^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{\left(k^4l^3k^{\frac{2}{2}}l^{\frac{4}{2}}m^{\frac{1}{2}}m^{\frac{2}{6}}\right)^{\frac{1}{3}}}{k\cdot l\cdot m^{\frac{3}{2}}\cdot k^{\frac{2}{3}}\cdot l^{\frac{2}{3}}\cdot m^{\frac{1}{6}}} = \frac{k^{\frac{4}{3}}\cdot l^{\frac{3}{3}}\cdot k^{\frac{2}{6}}\cdot l^{\frac{4}{6}}\cdot m^{\frac{1}{6}}\cdot m^{\frac{2}{18}}}{k\cdot l\cdot m^{\frac{3}{2}}\cdot k^{\frac{2}{3}}\cdot l^{\frac{2}{3}}\cdot m^{\frac{1}{6}}} = \frac{k^{\frac{10}{6}}\cdot l^{\frac{10}{6}}\cdot m^{\frac{5}{18}}}{k^{\frac{5}{3}}\cdot l^{\frac{5}{3}}\cdot m^{\frac{10}{6}}} =$$

$$= k^{\frac{10}{6}}\cdot l^{\frac{10}{6}}\cdot m^{\frac{5}{18}}\cdot k^{-\frac{5}{3}}\cdot l^{-\frac{5}{3}}\cdot m^{-\frac{10}{6}} = k^{\frac{10-10}{6}}\cdot l^{\frac{10-10}{6}}\cdot m^{\frac{5-30}{18}} = m^{\frac{-25}{18}} = m^{-1\frac{7}{18}} =$$

$$= \frac{1}{m\sqrt[18]{m^7}}\cdot\frac{\sqrt[18]{m^{11}}}{\sqrt[18]{m^{11}}} = \frac{\sqrt[18]{m^{11}}}{m^2}$$

2 Maturitní zkouška [8]

Podle aktuálně platného školského zákona (2004) má žák, který nastupuje na střední školu a chce ji zakončit maturitní zkouškou, na výběr z několika variant vzdělávání: šestileté gymnázium, osmileté gymnázium a školy se vzdělávacím programem v délce 4 let (denní studium). Dále maturitní zkoušku zakončují žáci středních škol vzdělávacího programu nástavbového studia, které trvá 2 roky (denní studium) nebo vzdělávacího programu zkráceného studia. K úspěšnému zakončení středoškolské vzdělání s maturitou musí být vykonána maturitní zkouška, která ověřuje dosažení cílů vzdělávání zakotvených v RVP (viz oddíl 2.1) a ŠVP. Tu je možné skládat až po úspěšném zakončení posledního ročníku studia. K její přípravě náleží každému žákovi 5 vyučovacích dnů volna, které určí ředitel školy. Oficiální dokument, který potvrzuje dosažení středního vzdělání s maturitní zkouškou, se nazývá vysvědčení o maturitní zkoušce (dále jen maturitní vysvědčení). Maturitní zkouška obsahuje v dnešní podobě dvě části: společnou a profilovou. Aby žák dosáhl středoškolské vzdělání s maturitou, musí úspěšně vykonat obě tyto části. Pokud se mu jakákoliv část maturitní zkoušky nepovede vykonat úspěšně, může ji opakovat, nejvýše však dvakrát z každé zkoušky. Termín, po který může žák vykonat maturitní zkoušku, je stanoven na dobu maximálně 5 let po datu, kdy už není žákem školy.

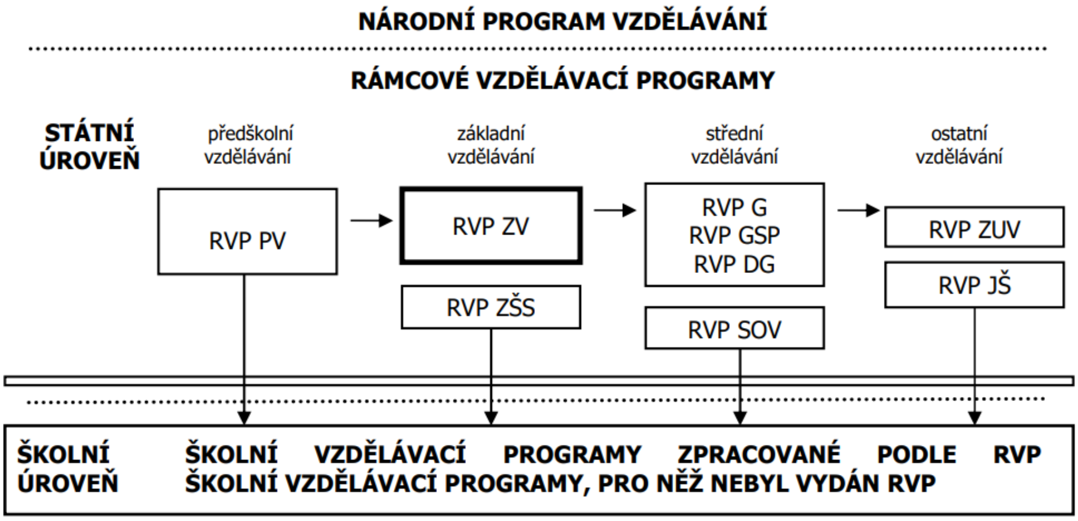
2.1 Rámcový vzdělávací program

Nejdůležitějším právním dokumentem, který vymezuje základní pravidla pro vzdělávání a výchovu v České republice je zákon č. 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (školský zákon), který vydalo Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy (dále jen MŠMT) dne 24. září 2004. Jsou v něm popsány podmínky, pravidla a další důležitá ustanovení pro předškolní, základní, střední, vyšší odborné a některé jiné vzdělávání ve školách a školských zařízeních.

Dále se můžeme setkat s pojmem kurikulární dokumenty. Jedná se o pedagogické dokumenty, které komplexně stanovují hlavní cíle, obsah a další parametry vzdělávání. Rozeznáváme dvě hlavní úrovně těchto dokumentů – úroveň státní a školní (obr. 4). Státní úroveň zahrnujeme Národní program vzdělávání a rámcové vzdělávací programy (dále jen

[8] Níže uvedené informace jsou platné pro školní rok 2023/2024 podle aktuálně platných právních předpisů.

RVP) pro různé typy vzdělávání. Národní program vzdělávání vymezuje hlavní směřování a cíle vzdělávací politiky na národní úrovni. Rámcové vzdělávací programy podle § 4 školského zákona (2004, s. 3) určují „konkrétní cíle, formy, délku a povinný obsah vzdělávání, a to všeobecného a odborného podle zaměření daného oboru vzdělání“ pro jednotlivé etapy vzdělávání (předškolní, základní, střední a ostatní vzdělávání). Školní úroveň kurikulárních dokumentů tvoří školní vzdělávací programy (dále jen ŠVP), které vychází z RVP a které si tvoří školy a podle nich provádí vzdělávání.



Obrázek 4 – Systém kurikulárních dokumentů, Rámcový vzdělávací program pro předškolní vzdělávání (MŠMT, 2021, s. 4)

Tato práce je zaměřena na algebraické výrazy ve státní maturitní zkoušce, proto se zaměříme především na aktuálně platné RVP pro gymnázia, kde je vymezen rozsah znalostí, které by žák na gymnáziu v této oblasti měl dosáhnout (obr. 5).

Každá škola si ve svém ŠVP (podle očekávaných výstupů uvedených v RVP) stanovuje konkrétní vyučovaná témata, která mohou být více specifikována, než je tomu v RVP. Dále také stanovuje, v jakém ročníku je vybrané téma vyučováno tak, aby na sebe jednotlivá témata logicky navazovala. Znalosti, které žák nabyde během osvojování algebraických výrazů, zajisté využije i v dalším učivu na střední škole např. rovnice a nerovnice, výrazy s faktoriály a kombinačními čísly, trigonometrie. Z tohoto důvodu je vhodné tento celek zařazovat do prvního ročníku středoškolského vzdělávání, aby žáci mohli získané znalosti efektivně využívat.

ČÍSLO A PROMĚNNÁ

Očekávané výstupy

žák

- ***užívá vlastnosti dělitelnosti přirozených čísel***
- ***operuje s intervaly, aplikuje geometrický význam absolutní hodnoty***
- ***provádí operace s mocninami a odmocninami, upravuje číselné výrazy***
- ***odhaduje výsledky numerických výpočtů a efektivně je provádí, účelně využívá kalkulátor***
- ***upravuje efektivně výrazy s proměnnými, určuje definiční obor výrazu***
- ***rozkládá mnohočleny na součin vytýkáním a užitím vzorců, aplikuje tuto dovednost při řešení rovnic a nerovnic***
- ***řeší lineární a kvadratické rovnice a nerovnice, řeší soustavy rovnic, v jednodušších případech diskutuje řešitelnost nebo počet řešení***
- ***rozlišuje ekvivalentní a neekvivalentní úpravy***
- ***geometricky interpretuje číselné, algebraické a funkční vztahy, graficky znázorňuje řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav***
- ***analyzuje a řeší problémy, v nichž aplikuje řešení lineárních a kvadratických rovnic a jejich soustav***

Učivo

- **číselné obory** – přirozená, celá, racionální a reálná čísla
- **mocniny** – mocniny s přirozeným, celým a racionálním exponentem, odmocniny
- **výrazy s proměnnými** – mnohočleny, lomené výrazy, výrazy s mocninami a odmocninami
- **rovnice a nerovnice** – lineární rovnice, nerovnice a jejich soustavy, kvadratická rovnice (diskriminant, vztahy mezi kořeny a koeficienty), rovnice a nerovnice v součinovém a podílovém tvaru, rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou, rovnice s neznámou ve jmenovateli a pod odmocninou, logaritmické, exponenciální a goniometrické rovnice

Obrázek 5 – Rámcový vzdělávací program pro gymnázia – Matematika a její aplikace: Číslo a proměnná, (MŠMT, 2021, s. 25)

2.2 Společná část maturitní zkoušky

Společná část maturitní zkoušky se vykonává ze dvou předmětů, které se konají formou didaktického testu zadávaného jednotně a vyhodnocovaného centrálně. Prvním je český jazyk a literatura, u druhého předmětu má žák na výběr mezi pěti cizími jazyky – anglický, německý, ruský, francouzský a španělský (jazyk musí být na škole vyučován) a matematikou. Žák si dále může dobrovolně zvolit nepovinnou zkoušku, a to matematiku rozšiřující a až dva další nepovinné předměty, ze kterých bude společnou část maturitní zkoušky vykonávat (pokud žák neuspěje u nepovinných předmětů a u všech povinných částí uspěje, složil úspěšně maturitní zkoušku). MŠMT vydává nejpozději 4 roky před termínem maturitní zkoušky tzv. katalog požadavků zkoušek společné části maturitní zkoušky (dále jen katalog požadavků), kde jsou uvedeny požadované znalosti, které jsou u maturitní zkoušky prověřovány.

2.3 Profilová část maturitní zkoušky

Profilová část maturitní zkoušky zahrnuje zkoušku z českého jazyka a literatury a z cizího jazyka (pokud si ho žák zvolil ve společné části) a další 2 až 3 povinné zkoušky dle studovaného oboru a RVP. Žák si opět může zvolit další maximálně 2 nepovinné zkoušky, které bude konat. Nejpozději 7 měsíců před tím, než je stanoven termín konání první profilové zkoušky, musí ředitel školy v souladu s prováděcím právním předpisem uveřejnit nabídku všech povinných a nepovinných zkoušek dle ŠVP a RVP. Uveřejnění musí obsahovat témata, formu zkoušek (např. ústní zkouška, maturitní práce vč. obhajoby, praktická zkouška, písemná zkouška) a další náležitosti. Pevně stanovenou formu zkoušky má český jazyk a literatura a cizí jazyk, a tou je písemná práce a ústní zkouška před zkušební komisí. Pokud se žákovi nepovedlo úspěšně vykonat společnou část zkoušky, i tak může přistoupit ke konání profilové části, a následně pak vykonat opravnou zkoušku ze společné části.

2.4 Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání

Podle školského zákona (2004) je Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání (dále jen Centrum) příspěvková organizace zřízená územním samosprávným celkem, která sídlí na adrese Jankovcova 933/63, 170 00 Praha 7. Byla zřízena MŠMT dne 1. 1. 2006. Centrum (2019) o sobě na svých webových stránkách uvádí, že navazuje na činnost organizace s názvem Centrum pro reformu maturitní zkoušky, která byla známá pod zkratkou CERMAT (můžeme se setkat i se zkratkou CZVV). Tím, že došlo k návaznosti mezi těmito dvěma organizacemi, je obvyklé nazývat Centrum i nadále zkratkou CERMAT. Centrum bylo zřízeno pro zajištění společné maturitní zkoušky a jednotné přijímací zkoušky. Hlavní cíle jsou stanoveny ve školském zákoně.

> Centrum a) zajišťuje výrobu zadání zkoušek společné části maturitní zkoušky a jejich distribuci do škol, b) zajišťuje zpracování a centrální vyhodnocení výsledků zkoušek společné části maturitní zkoušky, c) zajišťuje odbornou přípravu pedagogických pracovníků určených ředitelem školy k odborné přípravě pro výkon funkce zadavatele nebo komisaře, d) zajišťuje konání zkoušek ověřujících znalost právních předpisů upravujících organizaci, obsah a průběh maturitní zkoušky, e) vydává pedagogickým pracovníkům, kteří úspěšně vykonali zkoušku podle písmene d), osvědčení o způsobilosti k výkonu funkce zadavatele nebo komisaře, f) jmenuje komisaře a odměňuje je, g) je zpracovatelem registru podle odstavce 1,

h) je správcem registru pedagogických pracovníků oprávněných k výkonu funkce komisaře a zadavatele; registr obsahuje také rodná čísla pedagogických pracovníků, a nebylo-li rodné číslo přiděleno, jméno a příjmení a datum a místo narození.

(Zákon č. 561/2004 Sb., 2004, s. 71 – 72)

Centrum zveřejňuje nejnovější informace na svých internetových stránkách https://maturita.cermat.cz/. Na této adrese najdeme mimo jiné i informace k aktuálním termínům maturitní zkoušky jako jsou kritéria hodnocení, dále také katalogy požadavků, testy a zadání z předešlých let, právní předpisy, informace pro pedagogy apod. Další důležitou webovou stránkou je https://data.cermat.cz/, kde je možné najít data a statistické výstupy nejen z maturitní zkoušky, ale také z jednotné přijímací zkoušky. Jsou zde uveřejněny i souhrnné závěrečné zprávy za jednotlivé roky. Konkrétní výsledky maturitní a jednotné přijímací zkoušky jsou publikovány na stránce https://vysledky.cermat.cz/. Nalezneme zde tři základní typy interpretace dat: agregovaná data, grafické interpretace a položková data.

Agregovaná data jsou klíčovým nástrojem pro analýzu a interpretaci datových souborů ze společné části maturitní zkoušky (v řádném termínu) a jednotné přijímací zkoušky. Data jsou uveřejňována podle kategorií: termín konání, kraj, předmět, škola, obor. Z údajů dokážeme vyčíst, kolik žáků a na jaké škole bylo ke zkoušce přihlášeno, kolik se jich z termínu omluvilo, kolik jich uspělo a neuspělo nebo také kolik jich konalo zkoušku v opravném či náhradním termínu. Dostupné jsou i statistické charakteristiky jako průměr percentilového umístění, směrodatnou odchylku, medián a mezikvartilové rozpětí úspěšnosti.

Grafické interpretace dat slouží k názornému porovnávání výsledků maturitní zkoušky, a to za předměty matematika, anglický jazyk a německý jazyk. Pro srovnání můžeme volit dvě školy, dva obory nebo také dva kraje Výstupem jsou přehledné grafy, které zachycují např. průměrnou úspěšnost žáků vybrané školy.

Položková data jsou uveřejňována v tabulkových souborech, které obsahují informace o bodových výsledcích žáků u společné části maturitní (a jednotné přijímací) zkoušky. Z dat tedy dokážeme vyčíst, kolik žáků volilo jakou odpověď u testů a kolik bodů jim za to bylo přiděleno. Jsou zde publikovány údaje z didaktických testů společné části maturitní zkoušky (a u jednotné přijímací zkoušky za předměty český jazyk a literatura a matematika pro čtyřleté obory a nástavbová studia, šestiletá a osmiletá gymnázia).

2.5 Maturitní zkouška z matematiky

Maturitní zkoušku z matematiky může žák skládat buď ve společné části maturitní zkoušky, nebo v profilové části, jejíž formu určuje ředitel školy dle platných právních předpisů. Žáci si také jako nepovinnou maturitní zkoušku mohou zvolit ve společné části předmět matematika rozšiřující, která byla dříve označována jako Matematika + (do roku 2020). V této práci se zaměříme na maturitní zkoušku z matematiky ve společné části maturitní zkoušky v aktuálně platném znění, jak uvádí Centrum (2019).

2.5.1 Společná část maturitní zkoušky z matematiky

Společná část maturitní zkoušky z matematiky je vykonávána formou jednotného didaktického testu, který je centrálně opravován Centrem a na maturitním vysvědčení je hodnocena slovně „uspěl" s procentuálním vyjádřením úspěšnosti (od roku 2021 se známky ze společné části maturitní zkoušky neuvádějí). Žák při konání zkoušky obdrží zadání tzv. testový sešit, do kterého může libovolně psát (není předmětem hodnocení) a záznamový arch, do kterého žák vyznačuje své odpovědi popř. postup řešení, pokud je to vyžadováno. U každé úlohy je stanoven maximální počet bodů, kterého může žák dosáhnout. Pokud žák neuvede žádnou nebo chybnou odpověď, body se neodčítají. Celkově lze získat z didaktického tesu 50 bodů, k tomu, aby žák u maturitní zkoušky z matematiky uspěl, musí získat nejméně 17 bodů tj. procentuální hranice pro úspěšné vykonání je stanovena na 33 % (v roce 2021 byla hranice úspěšnosti snížena na 27 % opatřením obecné povahy ze dne 7. června 2021 vydané MŠMT). Časový limit, který je žákům přidělen na psaní testu, je 135 minut (před rokem 2021 byl časový limit 120 minut). Žáci s přiznaným uzpůsobením podmínek mají časový limit prodloužen. Při psaní testu je žákům povoleno používat Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce pro střední školy (nesmí obsahovat žádné poznámky, ale může v nich být zvýrazňováno či podtrháváno). Déle je povoleno využívat rýsovací potřeby a kalkulačky bez programování a bez grafického režimu, úprav algebraických výrazů či řešení rovnic. V testu se můžeme setkat se dvěma typy úloh: otevřené a uzavřené.

V první části testu jsou uvedeny otevřené úlohy, ve kterých je požadováno, aby žák do předem vyznačeného orámovaného pole v záznamovém archu uvedl konkrétní výsledek (číselný výsledek, výraz, geometrickou konstrukci aj.), nebo celý postup řešení (pokud v tomto případě žák uvede pouze výsledek bez postupu řešení, není mu přidělen žádný bod). Důležité je, aby žák psal odpovědi otevřených úloh čitelně, protože v opačném případě bude výsledek považován za chybný.

Uzavřené úlohy tvoří druhou část testu. V tomto typu úlohy je vždy pouze jedna správná odpověď a žák má na výběr z předem stanovených možností odpovědí např. pravdivost tvrzení formou ANO/NE, konkrétní výsledky v nabídce odpovědí A, B, C, D, E, přiřazování správného odpovědi z konkrétně nabízených možností. Odpovědi se křížkují do předem vyznačených ohraničených polí v záznamovém archu. Pokud žák během řešení testu potřebuje již zaznamenaný křížek opravit na jinou odpověď, původní pole pečlivě zabarví a křížkem označí novou odpověď.

Pravidelně se žáci mohou hlásit k jarnímu nebo podzimnímu termínu. Výjimkou byl rok 2021, ve kterém MŠMT vyhlásilo i mimořádný termín. Tento termín byl určen pouze pro žáky, kteří se vzdělávali ve školním roce 2020/2021, podali přihlášku k maturitní zkoušce do 1. 12. 2020 a u kterých nastala jedna z následujících dvou situací: k řádnému termínu didaktického testu se žák nemohl dostavit z důvodu karantény/nemoci COVID-19 nebo z důvodu vykonávání nařízené/dobrovolné pracovní povinnosti v zařízení poskytujícím zdravotnické či sociální služby.

2.5.2 Katalog požadavků společné části maturitní zkoušky z matematiky

Centrum vydává v souladu s ustanovením školského zákona katalog požadavků, které schvaluje MŠMT. Posledním aktuálně platným zněním je katalog požadavků účinný od školního roku 2015/2016. Podle Centra (2014) jsou v katalogu požadavků uvedeny požadované znalosti a dovednosti, které jsou ověřovány didaktickým testem a které by měl žák mít k úspěšnému vykonání společné části maturitní zkoušky. Celý dokument je rozdělen do 4 částí: kompetence, tematické okruhy, základní specifikace zkoušky z matematiky a příklady testových úloh.

První část katalogu požadavků pojmenovaná kompetence je rozdělena do 5 základních kategorií kompetencí, k jejichž získání by měla vést výuka matematiky na středních školách.

1) Osvojení matematických pojmů a dovedností

   V této kompetenci se předpokládá, že žák ovládá matematické pojmy a umí je užívat. Dále také dokáže numericky počítat a má osvojené početní operace s proměnnými. Zvládá pracovat s geometrickými útvary – rovinnými i prostorovými. V neposlední řadě umí matematicky argumentovat.
2) Matematické modelování

   Žák umí převést reálné situace do matematických vztahů, vytvořit matematický model, se kterým umí pracovat a ověřit ho.
3) Vymezení a řešení problému

   V této sekci se předpokládá, že žák umí pracovat s problémy podle následujících úkonů: vymezí je, analyzuje je, řeší je pomocí vhodné metody, vyřeší je, diskutuje o výsledcích.
4) Komunikace

   V této části se předpokládá, že žák se umí přesně vyjadřovat a při čtení matematických textů dokáže nabytým informacím porozumět. Dovede nejen číst v grafech, tabulkách aj., ale umí je i vyhodnocovat a interpretovat.
5) Užití pomůcek

   Žák by měl umět využívat odbornou literaturu a zdroje k získání informací. Dále by měl zvládat pracovat s kalkulačkou a počítačem a využívat je k řešení problémů.

Druhá část katalogu požadavků stanovuje tematické okruhy, ze kterých je sestavován didaktický test. Jedná se o témata, které by měl žák ovládat k úspěšnému absolvování maturitní zkoušky. Tato práce se zaměřuje na algebraické výrazy, pro které jsou v katalogu požadavků určeny následující požadované vědomosti:

> Žák dovede:
>
> 2.1 Algebraický výraz – určit hodnotu výrazu; určit nulový bod výrazu; určit definiční obor výrazu; sestavit výraz, interpretovat výraz; modelovat reálné situace užitím výrazů.

2.2 Mnohočleny – užít pojmy člen, koeficient, stupeň mnohočlenu; provádět operace s mnohočleny, provádět umocnění dvojčlenu pomocí vzorců; rozložit mnohočlen na součin vytýkáním a užitím vzorců.

2.3 Lomené výrazy – provádět operace s lomenými výrazy; určit definiční obor lomeného výrazu.

2.4 Výrazy s mocninami a odmocninami – provádět operace s výrazy obsahujícími mocniny a odmocniny; určit definiční obor výrazu s mocninami a odmocninami.

(Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, 2014, s. 8)

Ve třetí části jsou uvedeny základní specifikace zkoušky z matematiky. Jsou zde stručně popsány typy úloh, povolené pomůcky a bodové hodnocení. Na konci tohoto oddílu je uvedena tabulka, ve které jsou stanovena orientační procenta udávající zastoupení skupin požadavků v didaktickém testu z matematiky (obr. 6).

Tematické okruhy	Zastoupené v testu (v %)
1. Číselné množiny	4–12
2. Algebraické výrazy	8–18
3. Rovnice a nerovnice	12–20
4. Funkce	10–20
5. Posloupnosti a finanční matematika	4–14
6. Planimetrie	8–18
7. Stereometrie	4–12
8. Analytická geometrie	4–14
9. Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika	4–14

Obrázek 6 – Orientační procentuální zastoupení tematických okruhů k maturitní zkoušce v didaktickém testu z matematiky – Katalog požadavků – Matematika (Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, 2014, s. 13)

Poslední část katalogu požadavků tvoří příklady testových úloh včetně řešení, které jsou seskupeny do tematických bloků (tak jak jsou stanoveny v druhé části katalogu).

3 Algebraické výrazy ve společné části maturitní zkoušky z matematiky

Algebraické výrazy se podle Katalogu požadavků (Obrázek 6) vyskytují v didaktických testech zhruba s četností 8–18 %. Ve většině případů se jedná o úlohy, které prověřují dovednost žáků ve zjednodušení složeného lomeného výrazu, určování existenčních podmínek, zjednodušování iracionálního lomeného výrazu nebo úprava mnohočlenu. Občas se v úloze prolínají různé tematické okruhy např. algebraické výrazy s rovnicemi a nerovnicemi. Dále najdeme v testu i reálné situace, u kterých je požadováno vyjádřit zadanou vlastnost či vztah pomocí výrazu. Takové úlohy je těžké identifikovat ve vztahu se zařazením do tematického okruhu, protože k výsledku lze dojít různými úvahami a pomocí různých nástrojů. Nejčastěji se jedná o úlohy otevřené a jsou hodnoceny 1 nebo 2 body. Mnohdy se také setkáme s tím, že u složených racionálních výrazů je vyžadován celý postup řešení. V takovém případě jsou stanovena kritéria, tzn. při splnění jakých podmínek je žákovi přiděleno 2 body/1bod/0bodů.

V následujících odstavcích čerpám z dat dostupných na internetové stránce Centra pro zjišťování výsledků vzdělávání https://vysledky.cermat.cz/statistika/Default.aspx, která následně analyzuji.

3.1 Maturitní zkouška z matematiky – podzim 2023

K didaktickému testu z matematiky v podzimním termínu 2023 se dostavilo 1 766 žáků. Zkouška se konala dne 5. 9. 2023. Test obsahoval celkem 25 úloh, z nichž uzavřených bylo 11 a otevřených se v testu vyskytlo 14.

V didaktickém testu se algebraické výrazy vyskytují v jedné úloze a v jedné dílčí úloze.

<u>Úloha č. 3 </u>(Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, Didaktický test z matematiky podzim 2023):

Pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ zjednodušte: **max. 2 body**

$$\left(\frac{\frac{x^2+10}{x}}{x} - 1\right) : \frac{5}{x} =$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení.**

Jedná se o racionální lomený výraz, který obsahuje složený zlomek. Žák musí prokázat, že umí provádět operace s lomenými výrazy, jako jsou odčítání, dělení, násobení a krácení lomených výrazů. Musí také dbát na správné pořadí početních operací. Existenční podmínky (hodnota, která se během úprav objeví ve jmenovateli, musí být různá od nuly) jsou uvedeny již v zadání zápisem $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ (tzn. $x \neq 0$).

Vzorové řešení:[9]

$$\left(\frac{\frac{x^2+10}{x}}{x} - 1\right) : \frac{5}{x} = \left(\frac{x^2+10}{x} \cdot \frac{1}{x} - 1\right) : \frac{5}{x} = \left(\frac{x^2+10}{x^2} - 1\right) \cdot \frac{x}{5} = \frac{x^2+10-x^2}{x^2} \cdot \frac{x}{5} =$$

$$= \frac{10x}{5x^2} = \frac{2}{x}$$

Úloha je otevřeného typu. Žák musí do záznamového archu uvést kromě výsledku i celý postup řešení, který je pak podle určených podmínek hodnocen. Za úlohu může žák získat maximálně 2 body podle následujících kritérií: 2 body obdrží za správný výsledek a správný postup řešení, 1 bod získá za úpravu výrazu, ve kterém se vykytuje právě jedna chyba, kterou může být připsání chybných podmínek, uvedení chybného závěru, nebo absence krácení pouze jedním lineárním členem (ve výsledku se však může objevit pouze jedna zlomková čára) a 0 bodů dostane za absenci postupu, nedokončeného řešení, algoritmicky chybně provedený úkon, nedodržení pořadí operací, které mají navzájem přednost, ignorování závorek, více chyb v postupu nebo se vyskytují úpravy, které jsou nelogické.

Podle agregovaných položkových dat výsledků didaktických testů, které jsou uvedeny v tabulce četností bodových zisků níže (Tabulka 1), obdržela 2 body zhruba třetina žáků. Necelé polovině žáků, kteří se pokusili úlohu vyřešit, bylo přiděleno 0 bodů. Žádnou odpověď do záznamového archu neuvedlo zhruba 16 % žáků.

[9] Všechna řešení uvedená v oddílech 3.1 až 3.9 jsou autorčina originální řešení. Jedná se vždy pouze o jedno z mnoho možných postupů, kterými lze ke správnému výsledku dojít.

Tabulka 1 – Četnosti bodových zisků v úloze č. 3 didaktického testu z matematiky v podzimním termínu 2023

Body	Počet žáků						Procentuální vyjádření
	Prvo - maturant	Odložený řádný termín	Opravný termín	Náhradní termín	Nepovinná zkouška	Celkem	
0	752	5	70	16	1	844	48 %
1	55	0	6	0	0	61	3 %
2	559	1	22	4	1	587	33 %
Bez odpovědi	239	3	26	4	2	274	16 %

Další úlohou, která prověřuje znalost algebraických výrazů, je dílčí úloha situovaná do reálného života.

Úloha č. 10.2 (Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, Didaktický test z matematiky podzim 2023):

Výchozí text k úloze 10

Na 100 km jízdy spotřeboval automobil A 7 litrů benzinu a automobil B o x litrů benzinu méně než automobil A.

Cena benzinu byla 40 Kč za litr.

V závislosti na x vyjádřete v Kč průměrné výdaje za benzin na 1 kilometr jízdy automobilu B.

Vzorové řešení:

V této úloze je požadováno určit výraz, který vyjadřuje průměrné výdaje v Kč na jeden kilometr jízdy automobilu B.

Spotřeba automobilu A na 100 km……………………..…….. 7 litrů

Spotřeba automobilu B na 100 km……………………..…….. $7 - x$ litrů

Spotřeba automobilu B na 1 km………………………..…….. $0{,}07 - 0{,}01x$

Cena benzinu ……………………..………………..…40 Kč/1 litr

Výdaje za benzin na 1 kilometr jízdy B……. $40(0{,}07 - 0{,}01x) = 2{,}8 - 0{,}4x$

Tato úloha je otevřená, kde stačí uvést správný výsledek do záznamového archu. Maximální počet bodů, které lze za tuto úlohu získat, je 1 bod.

Četnosti bodových zisků je uvedena tabulce níže (Tabulka 2). Na tuto dílčí úlohu správně odpovědělo 16 % žáků. Více jak tři čtvrtiny žáků uvedli chybnou odpověď.

Tabulka 2 – Četnosti bodových zisků v dílčí úloze č. 10.2 didaktického testu z matematiky v podzimním termínu 2023

Body	Počet žáků						Procentuální vyjádření
	Prvo - maturant	Odložený řádný termín	Opravný termín	Náhradní termín	Nepovinná zkouška	Celkem	
0	1237	6	99	22	2	1366	77 %
1	260	2	16	1	1	280	16 %
Bez odpovědi	108	1	9	1	1	120	7 %

Z výše uvedených dat vidíme, že úloha na modelování reálných situací dopadla ve vztahu k plnému počtu získaných bodů hůře než úprava složeného racionálního výrazu.

3.2 Maturitní zkouška z matematiky – jaro 2023

Jarní termín maturitní zkoušky roku 2023 celkově konalo 14 013 žáků (včetně žáků, kteří konali zkoušku v odloženém, opravném nahráním termínu nebo si volili matematiku jako nepovinnou zkoušku). Didaktický test žáci psali dne 2. 5. 2023 a obsahoval 14 otevřených úloh a 11 uzavřených (celkem 25 úloh).

Žáci, kteří řešili test v tomto termínu, se mohli s algebraickými výrazy setkat pouze v jedné úloze, která stejně jako úloha č. 3 podzimního termínu 2023 (popsaná v oddíle 3.1) prověřuje žákovu znalost v úpravě složených racionálních lomených výrazech. Úloha je i ohodnocena maximálně 2 body a hodnotící kritéria pro získání jsou opět totožná jako u úlohy č. 3 podzimního termínu 2023.

Úloha č. 3 (Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, Didaktický test z matematiky jaro 2023):

Pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2;\ 0;\ 2\}$ zjednodušte: **max. 2 body**

$$\frac{1}{x+2} - \frac{\frac{x^2}{x^2-4}}{\frac{x}{2}} =$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení.**

V této úloze využijeme znalost rozkladu mnohočlenu na součin užitím vzorce, odčítání, dělení, násobení a krácení lomených výrazů.

Vzorové řešení:

$$\frac{1}{x+2} - \frac{\frac{x^2}{x^2-4}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{x+2} - \frac{x^2}{x^2-4} \cdot \frac{2}{x} = \frac{1}{x+2} - \frac{2x}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x-2)-2x}{(x-2)(x+2)} =$$

$$= \frac{-x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{-(x+2)}{(x-2)(x+2)} = -\frac{1}{(x-2)} = \frac{1}{2-x}$$

Jedná se o otevřenou úlohu, kde je požadováno, aby žák uvedl celý postup řešení.

Tabulka četností bodových zisků níže (Tabulka 3) poukazuje na následující skutečnosti: více než polovina žáků uvedla správný postup i výsledek a získala 2 body, zhruba čtvrtině žáků byla přidělena 0 bodů a přibližně deset procent na úlohu neodpovědělo.

Tabulka 3 – Četnosti bodových zisků v úloze č. 3 didaktického testu z matematiky v jarním termínu 2023

Body	Počet žáků						Procentuální vyjádření
	Prvo - maturant	Odložený řádný termín	Opravný termín	Náhradní termín	Nepovinná zkouška	Celkem	
0	2665	23	348	32	267	3335	24 %
1	1230	7	96	2	72	1407	10 %
2	7218	20	212	10	246	7706	55 %
Bez odpovědi	1134	12	157	17	245	1565	11 %

Pokud bychom srovnali procentuální vyjádření žáků, kteří dosáhli v této úloze maximálního počtu bodů, s úlohou č. 3 podzimního termínu 2023 (obě jsou zaměřeny na složené výrazy), pak bychom došli k závěru, že jarní termín dopadl o poznání lépe než ten podzimní.

3.3 Maturitní zkouška z matematiky – podzim 2022

V podzimním termínu roku 2022 psalo didaktický test z matematiky celkem 1 423 žáků v termínu 2. 9. 2022. Stejně jako v roce 2023 test obsahoval celkem 25 úloh: 11 uzavřených a 14 otevřených.

Algebraické výrazy jsou v testu zastoupeny 2 úlohami.

Úloha č. 2 (Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, Didaktický test z matematiky podzim 2022):

Určete množinu všech $x \in \mathbf{R}$, pro která má smysl výraz: **1 bod**

$$\frac{\sqrt{10-2x}}{\sqrt{x-10}}$$

Úloha je zaměřena na určení existenčních podmínek iracionálního lomeného výrazu. Pro určení výsledných podmínek musí žák vědět, z jakých skutečností se podmínky určují a dále musí prokázat znalost při řešení soustavy nerovnic.

Vzorové řešení:

$10 - 2x \geq 0 \quad \wedge \quad x - 10 > 0$, tedy

$x \leq 5 \quad \wedge \quad x > 10$, tedy

$x \in (-\infty; 5\rangle \quad \wedge \quad x \in (10; +\infty)$, tedy

$\emptyset$

Úloha je otevřeného typu a je hodnocena 1 bodem, pro jehož získání musí žák uvést správný výsledek do záznamového archu.

Z tabulky níže (Tabulka 4) je patrné, že pouze desetina žáků zvládlo vyřešit úlohu. Chybný výsledek do záznamového archu uvedlo přes 60 % žáků a více jak čtvrtina žáků neuvedlo žádný výsledek.

Tabulka 4 – Četnosti bodových zisků v úloze č. 2 didaktického testu z matematiky v podzimním termínu 2022

Body	Počet žáků						Procentuální vyjádření
	Prvo - maturant	Odložený řádný termín	Opravný termín	Náhradní termín	Nepovinná zkouška	Celkem	
0	804	2	48	24	1	879	61,8 %
1	132	0	4	1	0	137	9,6 %
Bez odpovědi	360	2	31	12	2	407	28,6 %

Za další otevřenou úlohou, která prověřuje znalost algebraických výrazů, může žák získat maximálně 2 body. Podmínky, za kterých žák obdrží 2 body/1bod/0 bodů jsou identické jako u úlohy č. 3 podzimního termínu 2023 uvedené v oddíle 3.1.

Úloha č. 5 (Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, Didaktický test z matematiky podzim 2022):

Pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 0\}$ zjednodušte: **max. 2 body**

$$\frac{(x-2)(x+4)}{x+2} : x^2 + \frac{\frac{8}{x+2}}{x^2} =$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení.**

Úloha je jako opět zaměřena na složené racionální lomené výrazy. V úloze by měl žák využít pravidla pro sčítání, násobení, dělení a krácení lomených výrazů. Oproti úloze č. 3 v jarním termínu 2023 (oddíl 0) není v této úloze využito rozkládání na součin pomocí vzorce, ale naopak pomocí vytýkání. Podmínky, za kterých má daný výraz smysl, vyčteme ze zadání úlohy: $x \in \mathrm{R} \setminus \{-2; 0\}$.

Vzorové řešení:

$$\frac{(x-2)(x+4)}{x+2} : x^2 + \frac{\frac{8}{x+2}}{x^2} = \frac{(x-2)(x+4)}{x+2} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{8}{x+2} \cdot \frac{1}{x^2} =$$

$$= \frac{(x-2)(x+4)}{x^2(x+2)} + \frac{8}{x^2(x+2)} = \frac{(x-2)(x+4)+8}{x^2(x+2)} = \frac{x^2+4x-2x-8+8}{x^2(x+2)} =$$

$$= \frac{x^2 + 2x}{x^2(x+2)} = \frac{x(x+2)}{x^2(x+2)} = \frac{1}{x}$$

Z tabulky četnosti bodových zisků (Tabulka 5) uvedené níže je patrné, že pětina žáků získalo plný počet bodů, téměř polovině žáků bylo uděleno 0 bodů a více jak čtvrtina žáků na úlohu do záznamového archu vůbec neodpověděla.

Tabulka 5 – Četnosti bodových zisků v úloze č. 5 didaktického testu z matematiky v podzimním termínu 2022

Body	Počet žáků						Procentuální vyjádření
	Prvo - maturant	Odložený řádný termín	Opravný termín	Náhradní termín	Nepovinná zkouška	Celkem	
0	634	1	47	22	2	706	49,6 %
1	48	1	1	0	0	50	3,5 %
2	274	1	9	5	0	289	20,3 %
Bez odpovědi	340	1	26	10	1	378	26,6 %

V podzimním termínu 2022 se opět setkáváme s faktem, že úprava složeného racionálního výrazu dopadla o poznání lépe než určování existenčních podmínek výrazu.

3.4 Maturitní zkouška z matematiky – jaro 2022

Celkový počet žáků, kteří konali jarní termín společné části maturitní zkoušky z matematiky, je 12 709. MŠMT stanovilo termín konání na den 2. 5. 2022. Opět je v testu 11 uzavřených a 14 otevřených úloh – celkem 25 úloh.

Didaktický test v sobě obsahuje jednu úlohu, které je založena na úpravě racionálního lomeného výrazu. Pro tuto úlohu je klíčová znalost rozkladu mnohočlenu na součin. Využijeme rozklad pomocí vytýkání i pomocí vzorce. Jedná se o otevřenou úlohu za 2 body. Přidělení bodů za uvedený postup a výsledek do záznamového archu je shodný s kritérii v úloze č. 3 podzimního termínu 2023 uvedené v oddíle 3.1.

Úloha č. 6 (Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, Didaktický test z matematiky jaro 2022):

Pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3; 0; 3\}$ zjednodušte: **max. 2 body**

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2 - 3x}\right) : \frac{1}{x^2 - 9} =$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení.**

Početní operace, které jsou pro zjednodušení výrazu potřeba znát, jsou rozklad na součin, sčítání, násobení, dělení a krácení lomených výrazů.

Vzorové řešení:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2 - 3x}\right) : \frac{1}{x^2 - 9} = \left[\frac{1}{x} + \frac{3}{x(x-3)}\right] \cdot \frac{x^2 - 9}{1} = \left[\frac{x - 3 + 3}{x(x-3)}\right] \cdot \frac{(x-3)(x+3)}{1} =$$

$$\frac{x}{x(x-3)} \cdot \frac{(x-3)(x+3)}{1} = x + 3$$

Definiční obor výrazu je určen v zadání úlohy: $x \in \mathrm{R} \setminus \{-3; 0; 3\}$.

Vysokou úspěšnost žáků u této úlohy vyčteme z tabulky níže (Tabulka 6). Úlohu správně vyřešilo tři čtvrtiny žáků. Zhruba 15 % žákům byla udělena 0 bodů.

Tabulka 6 – Četnosti bodových zisků v úloze č. 6 didaktického testu z matematiky v jarním termínu 2022

Body	Počet žáků						Procentuální vyjádření
	Prvo - maturant	Odložený řádný termín	Opravný termín	Náhradní termín	Nepovinná zkouška	Celkem	
0	1483	21	231	42	149	1926	15%
1	361	2	27	4	26	420	3%
2	8951	30	188	25	342	9536	75%
Bez odpovědi	589	13	90	24	111	827	7%

V této úloze dosáhlo maximálního počtu bodů největší procento žáků za celé sledované období napříč různými druhy úloh na algebraické výrazy.

3.5 Maturitní zkouška z matematiky – podzim 2021

Podzimní termín didaktického testu z matematiky v roce 2021 vykonalo celkem 1 085 maturantů dne 1. 9. 2021. Oproti rokům 2022 a 2023 obsahuje test celkem 26 úloh, z nichž 11 úloh je uzavřených a 15 otevřených. S přihlédnutím k odlišným podmínkám vzdělávání žáků ve školním roce 2019/2020 a 2020/2021, kdy velká část výuky probíhala distančním způsob, byla v didaktickém testu z matematiky stanovena hranice úspěšnosti pro rok celý 2021 na 27 %.

V testu najdeme jednu úlohu, která ověřuje znalost algebraických výrazů. Jedná se o otevřenou úlohu za 2 body, u které je zapotřebí uvést celý postup řešení. Kritéria hodnocení jsou stanoveny následovně: 2 body získají žáci, kteří uvedou správný postup i výsledek; 1 bod je přidělen žákům, kteří se v záznamu dopustí jednoho z těchto nedostatků: chybí krácení jedním dvojčlenem, absence koeficientu u jednoho členu, špatně uvedené podmínky nebo závěr, po poslední možné úpravě je uveden chybný úkon, chybný rozklad kvadratického dvojčlenu, který není možné rozložit; 0 bodů obdrží žáci, kteří nedokončili úlohu, nedodrželi správné pořadí početních operací, mají v záznamu více než 1 chybu nebo se jim v postupu objevuje opakovaně stejná chyba.

Úloha č. 5 (Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, Didaktický test z matematiky podzim 2021):

Pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 2\}$ zjednodušte: **max. 2 body**

$$\left(\frac{2}{x+2}+\frac{x}{2-x}\right):\frac{x^2+4}{x+2}=$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení.**

Pro řešení úlohy je zapotřebí znát pravidla pro sčítání, dělení, násobení a krácení lomených výrazů.

Vzorové řešení:

$$\left(\frac{2}{x+2}+\frac{x}{2-x}\right):\frac{x^2+4}{x+2}=\left[\frac{2(2-x)+x(x+2)}{(x+2)(2-x)}\right]\cdot\frac{x+2}{x^2+4}=$$

$$=\left[\frac{4-2x+x^2+2x}{(x+2)(2-x)}\right]\cdot\frac{x+2}{x^2+4}=\frac{x^2+4}{(x+2)(2-x)}\cdot\frac{x+2}{x^2+4}=\frac{1}{2-x}$$

Podmínky, za kterých má zadaný výraz smysl, najdeme opět v zadání úlohy: $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 2\}$.

Jak je uvedeno v tabulce četností bodových zisků níže (Tabulka 7), polovině žáků bylo uděleno 0 bodů. Úspěšně vyřešilo úlohu pouze 18 % žáků.

Tabulka 7 – Četnosti bodových zisků v úloze č. 5 didaktického testu z matematiky v podzimním termínu 2021

Body	Počet žáků						Procentuální vyjádření
	Prvo - maturant	Odložený řádný termín	Opravný termín	Náhradní termín	Nepovinná zkouška	Celkem	
0	437	0	48	59	0	544	50 %
1	78	0	7	10	0	95	9 %
2	163	1	13	18	0	195	18 %
Bez odpovědi	207	0	27	17	0	251	23 %

Maximální počet bodů za tuto úlohu získalo vzhledem k ostatním úlohám na lomené výrazy nejméně žáků.

3.6 Maturitní zkouška z matematiky – mimořádný termín 2021

Vzhledem k situaci spojené s onemocněním COVID-19 stanovilo MŠMT mimořádný termín, který se konal dne 7. 7. 2021. Tohoto mimořádného termínu využilo celkem 2 744 žáků.

Celkový počet úloh v didaktickém testu vč. četnosti otevřených a uzavřených úloh se od podzimního termínu 2021 nezměnil. V tomto mimořádném termínu najdeme celkem 3 úlohy zaměřené na algebraické výrazy.

<u>Úloha č. 1 </u>(Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, Didaktický test z matematiky mimořádný termín 2021):

Pro $n \in \mathbf{N}$ odstraňte závorky a sečtěte: **1 bod**

Výsledný výraz vyjádřete jediným členem, a to bez závorek.

$(-n^4)^{-1} - n^{-4} + (-n)^{-4} =$

Na první pohled se může zdát, že se jedná o úlohu zkoumající znalost mnohočlenů. Avšak zadaný výraz není mnohočlenem, protože exponenty proměnné nejsou nezáporná celá čísla. K vyřešení této úlohy musí student umět použít pravidla pro počítání s mocninami.

Vzorové řešení:

$$(-n^4)^{-1} - n^{-4} + (-n)^{-4} = -n^{-4} - n^{-4} + n^{-4} = -n^{-4}$$

Z tabulky níže (Tabulka 8) vyčteme, že se jedná o jednu z těžších úloh, protože pouze 15 % žáků vyřešilo tuto úlohu správně. Tři čtvrtiny žáků, kteří uvedli do záznamového archu svůj výsledek, odpověděli chybně.

Tabulka 8 – Četnosti bodových zisků v úloze č. 1 didaktického testu z matematiky v mimořádném termínu 2021

Body	Počet žáků					Procentuální vyjádření
	Prvo - maturant	Opravný termín	Náhradní termín	Nepovinná zkouška	Celkem	
0	1543	492	31	1	2067	75 %
1	315	83	3	0	401	15 %
Bez odpovědi	203	69	3	1	276	10 %

Tato úloha je ve sledovaném období ojedinělá. S podobným typem se v této práci v didaktickém testu již nesetkáme.

Druhou úlohou, která prověřuje znalost algebraických výrazů, je otevřená úloha za 2 body, u které řešitel musí uvést svůj postup řešení. Pokud žák uvede správný postup a správný výsledek, jsou mu uděleny 2 body. Žák obdrží 1 bod, pokud se při úpravě výrazu dopustí jedné z následujících nedostatků: při úpravě udělá numerickou chybu, při úpravě jmenovatele prvního zlomku chybně provede odečtení menšitele, je zaznamenána absence koeficientu u jednoho členu, není provedeno krácení jednočlenem, jsou stanoveny chybné podmínky nebo závěr, je proveden chybný úkon po poslední možné úpravě. Varianta, kdy je žákovy uděleno 0 bodů nestane za předpokladu že, je příklad nedokončen, žák nedodržel pořadí operací nebo se vyskytuje algoritmicky opakující se chyba.

Úloha č. 5 (Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, Didaktický test z matematiky mimořádný termín 2021):

Pro $y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ zjednodušte: **max. 2 body**

$$\frac{y-1}{1-\frac{y-1}{y}} \cdot \frac{1}{2y} =$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení.**

Při řešení úlohy si žák musí dát pozor na to, že pokud při odčítání stanovíme společného jmenovatele a chceme odečíst čitatele, odčítaný mnohočlen se odečtením promění v opačný mnohočlen, tj. musíme změnit znaménka u čitatele odčítaného lomeného výrazu. Pak už využijeme pouze znalost pro násobení, dělení a krácení lomených výrazů.

Vzorové řešení:

$$\frac{y-1}{1-\frac{y-1}{y}} \cdot \frac{1}{2y} = \frac{y-1}{\frac{y-(y-1)}{y}} \cdot \frac{1}{2y} = \frac{y-1}{1} \cdot \frac{y}{1} \cdot \frac{1}{2y} = \frac{y-1}{2}$$

V následující tabulce (Tabulka 9) vidíme, že plný počet bodů obdrželo 15% žáků. Zhruba stejná část žáků neuvedla žádnou odpověď do záznamového archu.

Tabulka 9 – Četnosti bodových zisků v úloze č. 5 didaktického testu z matematiky v mimořádném termínu 2021

Body	Počet žáků					Procentuální vyjádření
	Prvo - maturant	Opravný termín	Náhradní termín	Nepovinná zkouška	Celkem	
0	1166	401	26	0	1593	58 %
1	242	60	1	0	303	11 %
2	335	72	2	1	410	15 %
Bez odpovědi	318	111	8	1	438	16 %

Maximálního počtu bodů dosáhlo stejné procento žáků jako v první úloze mimořádného termínu.

Třetí a poslední úlohou na algebraické výrazy je uzavřená úloha za 2 body, které žák získá, pokud zaškrtne v záznamovém archu správnou odpověď. Úloha prozkoumává nejen znalosti algebraických výrazů, ale také vědomosti rovnic a nerovnic. První dvě varianty odpovědí dokážeme prověřit na základě dovednosti k určování existenčních podmínek.

Úloha č. 18 (Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, Didaktický test z matematiky – mimořádný termín 2021):

Je dán výraz V s reálnou proměnnou x: **2 body**

$$V(x) = \frac{x^2}{x(x+2)} + \frac{x}{x+1} - \frac{x}{x+2}$$

Které tvrzení je pravdivé?

A) Hodnota výrazu V je nulová pro $x = 0$.

B) Hodnota výrazu V je rovna 2 pro $x = -2$.

C) Hodnota výrazu V je pro $x = -3$ menší než pro $x = 3$.

D) Hodnota výrazu V nemůže být rovna 1.

E) Hodnota výrazu V nemůže být nikdy záporná.

Vzorové řešení:

A) Výraz není definován pro hodnotu $x = 0$. Tato vlastnost vychází z existenčních podmínek, proto tvrzení není pravdivé.

B) Výraz není definován pro hodnotu $x = -2$. Tato vlastnost vychází z existenčních podmínek, proto tvrzení není pravdivé.

C) Hodnotu výrazu určíme tak, že za proměnnou dosadíme nejprve číslo -3 a vypočteme, poté dosadíme číslo 3 a opět vypočteme. Výsledky pak porovnáme.

$$V(-3) = \frac{(-3)^2}{(-3)[(-3)+2]} + \frac{(-3)}{(-3)+1} - \frac{(-3)}{(-3)+2} = \frac{3}{2}$$

$$V(3) = \frac{3^2}{3(3+2)} + \frac{3}{3+1} - \frac{3}{3+2} = \frac{3}{4}$$

$V(-3) > V(3)$ Tvrzení není pravdivé.

D) Pro ověření, zda výraz může nabývat hodnoty 1, vytvoříme z výrazu rovnici. První člen výrazu lze zkrátit členem x. Po vykrácení si můžeme všimnout, že první zlomek a poslední zlomek jsou stejné, a proto je můžeme odečíst.

$$\frac{x^2}{x(x+2)} + \frac{x}{x+1} - \frac{x}{x+2} = 1$$

$$\frac{x}{x+2} + \frac{x}{x+1} - \frac{x}{x+2} = 1$$

$$\frac{x}{x+1} = 1$$

$$x \neq x+1$$

$0 \neq 1$ Tvrzení je pravdivé, protože výraz nemůže nabývat hodnoty 1 (rovnice nemá řešení)

E) Z výrazu vytvoříme nerovnici, kterou vyřešíme.

$$\frac{x^2}{x(x+2)} + \frac{x}{x+1} - \frac{x}{x+2} < 0$$

$$\frac{x}{x+1} < 0$$

$x \in (-1; 0)$ Tvrzení je nepravdivé, protože výraz nabývá záporných hodnot pro proměnnou z intervalu $(-1; 0)$.

K prověření všech variant odpovědí jsme museli využít i jiných znalostí než jsou pouze algebraické výrazy.

Podle tabulky níže (Tabulka 10) byla nejčastější odpovědí varianta E, která však byla chybná. Správnou odpověď volilo zhruba 16,5 % žáků. Pouze necelé 1 % maturantů neuvedlo žádnou odpověď do záznamového archu. Pokud žák netuší, jak tuto úlohu řešit a ani se nepřiklání k jedné z možných odpovědí, je výhodné si odpověď „tipnout.“ V podmínkách je totiž stanoveno, že se za špatnou odpověď body neodečítají. Tím, že žák zvolí náhodnou variantu odpovědi, má tak aspoň nějakou šanci, že jí odhadl správně, oproti těm, kteří neoznačí žádnou odpověď.

Tabulka 10 – Četnosti bodových zisků v úloze č. 18 didaktického testu z matematiky v mimořádném termínu 2021

Odpověď	Body	Počet žáků					Procentuální vyjádření
		Prvo - maturant	Opravný termín	Náhradní termín	Nepovinná zkouška	Celkem	
A	0	452	142	6	0	600	21,87 %
B	0	289	89	7	1	386	14,07 %
C	0	455	135	7	0	597	21,76 %
D	2	329	118	8	0	455	16,58 %
E	0	517	154	7	1	679	24,74 %
Bez odpovědi	0	19	6	2	0	27	0,98 %

3.7 Maturitní zkouška z matematiky – jaro 2021

V jarním termínu roku 2021 vykonávalo didaktický test celkem 14 912 žáků. Termín, ve kterém žáci vykonávali zkoušky, byl 24. 5. 2021.

Počet a četnost typu úloh je nezměněna. Stejně jako v mimořádném termínu, se v didaktickém testu objevují 3 úlohy na algebraické výrazy, kterými jsou otevřená úloha bez postupu, otevřená úloha s postupem a uzavřená úloha (což si myslím, že bylo záměrem, a to z toho důvodu, aby si testy byly co nejvíce podobné).

První úloha je zaměřena na pravidla pro počítání výrazů s mocninami stejně jako otevřená úloha bez odpovědi v mimořádném termínu.

Úloha č. 1 (Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, Didaktický test z matematiky jaro 2021):

Pro $a \in \mathbf{N}$ upravte výraz a vyjádřete jej ve tvaru odmocniny o základu a: 1bod

$$a^{\frac{1}{4}} : \sqrt[6]{a} =$$

Jedná se o úlohu zaměřenou na úpravu iracionální výrazu. Jednou z variant řešení je, že odmocninu převedeme do tvaru mocniny a výraz pak zjednodušíme. Na konci dostáváme výraz ve tvaru mocniny, který však musíme převést opět do tvaru odmocniny, jak je požadováno v zadání úlohy.

Vzorové řešení:

$$a^{\frac{1}{4}} : \sqrt[6]{a} = a^{\frac{1}{4}} : a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{a}$$

Tato úloha dosahuje velkého procenta úspěšnosti, jak uvádí následující tabulka (Tabulka 11). Správný výsledek uvedly necelé dvě třetiny žáků. Z mého pohledu se jedná o nejjednodušší úlohu na algebraické výrazy z analyzovaných didaktických testů, což prokazuje i vysoká míra úspěšnosti.

Tabulka 11 – Četnosti bodových zisků v úloze č. 1 didaktického testu z matematiky v jarním termínu 2021

Body	Počet žáků						Procentuální vyjádření
	Prvo - maturant	Odložený řádný termín	Opravný termín	Náhradní termín	Nepovinná zkouška	Celkem	
0	3 409	12	658	69	159	4 307	29 %
1	8 623	9	531	49	234	9 446	63 %
Bez odpovědi	843	8	218	27	63	1 159	8 %

Stejně jako v mimořádném termínu je druhou úlohou na algebraické výrazy složený lomený výraz. Úlohy se liší v tom, že tato úloha obsahuje druhou mocninu lomeného výrazu. Kritéria bodového hodnocení jsou totožná s podmínkami stanovenými u úlohy č. 5 mimořádného termínu 2021.

Úloha č. 4 (Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, Didaktický test z matematiky jaro 2021):

Pro $y \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$ zjednodušte: **max. 2 body**

$$\frac{\frac{y}{3} - \left(\frac{y}{3}\right)^2}{3y - 9} =$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení.**

Úloha má ověřit znalost racionálních lomených výrazů. Podmínky, za kterých má daný výraz smysl, jsou určeny již v zadání tj. $y \neq 3$ (trojka je z reálných čísel vyloučena). Ke konečnému zjednodušenému výrazu dojdeme mimo jiné i pomocí vytýkání a krácení.

Vzorové řešení:

$$\frac{\frac{y}{3}-\left(\frac{y}{3}\right)^2}{3y-9}=\frac{y}{3}\left(1-\frac{y}{3}\right)\cdot\frac{1}{3y-9}=\frac{y}{3}\left(\frac{3-y}{3}\right)\cdot\frac{1}{-3(-y+3)}=\frac{y(3-y)}{-27(3-y)}=-\frac{y}{27}$$

Úlohu úspěšně zjednodušilo více než 60 % žáků, jak uvádí následující tabulka (Tabulka 12). Pouze 8 % žáků se danou úlohu nepokusilo vyřešit vůbec.

Tabulka 12 – Četnosti bodových zisků v úloze č. 4 didaktického testu z matematiky v jarním termínu 2021

Body	Počet žáků						Procentuální vyjádření
	Prvo - maturant	Odložený řádný termín	Opravný termín	Náhradní termín	Nepovinná zkouška	Celkem	
0	2 256	11	548	62	147	3 024	20 %
1	1 355	0	164	12	46	1 577	11 %
2	8 350	12	517	47	154	9 080	61 %
Bez odpovědi	914	6	178	24	109	1 231	8 %

Poslední úlohou, prověřující znalosti algebraických výrazů, je uzavřená úloha za 2 body

Úloha č. 18 (Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, Didaktický test z matematiky – jaro 2021):

Je dán výraz: **2 body**

$$V(a)=\frac{(a+4)(a^2-4)(a+3)^2}{(a^2-9)(a-2)^2}$$

Hodnota výrazu $V(a)$ je rovna nule pro

A) alespoň tři celá čísla.

B) právě dvě záporná celá čísla.

C) právě jedno kladné a jedno záporné celé číslo.

D) právě dvě kladná celá čísla.

E) právě jedno celé číslo.

V prvním kroku je dobré lomený racionální výraz upravit do jednoduššího tvaru, se kterým se lépe pracuje a to pomocí vzorců.

Vzorové řešení:

$$\frac{(a+4)(a^2-4)(a+3)^2}{(a^2-9)(a-2)^2}=\frac{(a+4)(a-2)(a+2)(a+3)^2}{(a-3)(a+3)(a-2)^2}=\frac{(a+4)(a+2)(a+3)}{(a-3)(a-2)}$$

Nesmíme zapomenout také určit existenční podmínky.

$a \neq 3;\ a \neq -3;\ a \neq 2$

Abychom zjistili, kdy daný výraz nabývá hodnoty nula, položíme zjednodušený výraz rovno nule. Tím přejdeme do řešení rovnice.

$$\frac{(a+4)(a+2)(a+3)}{(a-3)(a-2)}=0$$

$$(a+4)(a+2)(a+3)=0$$

Výsledkem této rovnice je $a=-4$ a $a=-2$. S ohledem na existenční podmínky nemůže být výsledkem číslo -3. Správná odpověď je B) právě dvě záporná celá čísla.

Žáci by si v této úloze také měli dávat pozor na volená slova v možných variantách odpovědí. Měli by znát rozdíl mezi slovy právě a alespoň a podle toho pak volit správnou odpověď.

Jak uvádí tabulka četnosti bodových zisků (Tabulka 13), nejčastěji žáci volili variantu B, která je správnou odpovědí a to v téměř 35 %. Druhou nejčastější odpovědí (30 %), byla varianta A. K této odpovědi dojdou žáci, kteří zapomenou na určení podmínek, při kterých má daný výraz smysl.

Pokud porovnáme uzavřené úlohy v mimořádném a jarním termínu, pak jarní termín dopadl lépe než ten mimořádný. To může být způsobeno i tím, že v uzavřené úloze mimořádného termínu jsme kromě algebraických výrazů pracovali také s rovnicemi a nerovnicemi, oproti tomu v jarním termínu pouze s rovnicemi.

Tabulka 13 – Četnosti bodových zisků v úloze č. 18 didaktického testu z matematiky v jarním termínu 2021

Odpověď	Body	Počet žáků						Procent. vyjádření
		Prvo - maturant	Odložený řádný termín	Opravný termín	Náhradní termín	Nepovinná zkouška	Celkem	
A	0	4 053	6	327	30	132	4 548	30,50 %
B	2	4 671	3	297	29	122	5 122	34,35 %
C	0	1 908	8	372	47	79	2 414	16,19 %
D	0	1 049	8	217	24	58	1 356	9,09 %
E	0	1 005	4	168	11	52	1 240	8,32 %
Bez odpovědi	0	189	0	26	4	13	232	1,56 %

3.8 Maturitní zkouška z matematiky – podzim 2020

Celkem 2 521 žáků se dostavilo k didaktickému testu v podzimním termínu roku 2020, který se konal 1. 9. 2020. Test je složen z 15 otevřených a 11 uzavřených úloh – celkem tedy 26 úloh.

Znalost algebraických výrazů prověřuje jako první úloha č. 2, která je otevřená. Žák za ni může obdržet 1 bod, pokud do záznamového archu uvede správný výsledek. Jedná se o úlohu zaměřenou na iracionální lomené výrazy.

Úloha č. 2 (Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, Didaktický test z matematiky podzim 2020):

Pro $y \in (0;\ +\infty)$ zjednodušte: **1 bod**

$$\sqrt{\frac{y^{64}}{16} \cdot \left(\frac{2}{y^7}\right)^4} =$$

Prověřována je i znalost umocňování, násobení a krácení lomených výrazů. Kromě toho musí žák umět i odmocňování proměnné s vyšším exponentem než je odmocnitel tzn. umět částečně či plně odmocnit. Úlohu můžeme řešit buď s ponecháním odmocniny, nebo převedeme odmocninu do tvaru mocniny.

Vzorové řešení:

$$\sqrt{\frac{y^{64}}{16}\cdot\left(\frac{2}{y^7}\right)^4} = \sqrt{\frac{y^{64}}{16}\cdot\frac{16}{y^{28}}} = \sqrt{\frac{y^{64}}{y^{28}}} = \sqrt{y^{36}} = y^{\frac{36}{2}} = y^{18}$$

Podmínka, za které má daný výraz smysl, je určena v zadání úlohy, tj. $y \in (0;\ +\infty)$.

Četnosti bodových zisků žáků u této úlohy jsou uvedeny v tabulce níže (Tabulka 14). Pouze necelá pětina žáků vyřešila úlohu správně. Naproti tomu téměř 60 % žáků odpovědělo chybně.

Tabulka 14 – Četnosti bodových zisků v úloze č. 2 didaktického testu z matematiky v podzimním termínu 2020

Body	Počet žáků						Procentuální vyjádření
	Prvo - maturant	Odložený řádný termín	Opravný termín	Náhradní termín	Nepovinná zkouška	Celkem	
0	2	2	1435	54	1	1494	59 %
1	5	0	453	24	0	482	19 %
Bez odpovědi	4	0	512	29	0	545	22 %

Další otevřená úloha, která se zaměřuje na algebraické výrazy, je úloha č. 3, která je hodnocena také 1 bodem. Podobnou úlohu nalezneme i v podzimním didaktickém testu v roce 2022, konkrétně úloha č. 2.

Úloha č. 3 (Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, Didaktický test z matematiky podzim 2020):

Určete všechny hodnoty $c \in$ R, pro která má smysl výraz: 1 bod

$$\frac{\sqrt{1-c}}{\sqrt{5-c}}$$

Úloha je zaměřena na určení existenčních podmínek iracionálního lomeného výrazu. V tomto případě se jedná o stanovení podmínek pro odmocňování a dále pak musíme vyloučit hodnoty, pro které je jmenovatel roven 0.

Vzorové řešení:

$1 - c \geq 0 \quad \wedge \quad 5 - c > 0$, tedy

$c \leq 1 \quad \wedge \quad c < 5$, tedy

$c \in (-\infty; 1\rangle \quad \wedge \quad c \in (-\infty; 5)$, tedy

$c \in (-\infty; 1\rangle$

Úspěšnost této úlohy je velmi nízká, jak uvádí následující tabulka (Tabulka 15). Čtvrtina žáků neuvedlo žádnou odpověď a pouze 6,5 % vyřešilo úlohu správně.

Tabulka 15 – Četnosti bodových zisků v úloze č. 3 didaktického testu z matematiky v podzimním termínu 2020

Body	Počet žáků						Procentuální vyjádření
	Prvo - maturant	Odložený řádný termín	Opravný termín	Náhradní termín	Nepovinná zkouška	Celkem	
0	10	2	1633	63	1	1709	67,8 %
1	1	0	147	16	0	164	6,5 %
Bez odpovědi	0	0	620	28	0	648	25,7 %

Tato úloha dopadla ve vztahu k dosažení maximálního počtu bodů ve sledovaném období nejhůře.

V didaktickém testu se nachází i jedna otevřená úloha (zde č. 5), u které je vyžadováno uvést celý postup řešení. Pokud žák do záznamového archu zaznamená správný postup i správný výsledek, jsou mu přiděleny 2 body (maximální bodové hodnocení úlohy). 1 bod obdrží žák, který má v archu jednu z uvedených nedostatků: numerická chyba, absence krácení výrazu, nesloučené lineární členy, chybný závěr, chybně určené podmínky, špatně určený koeficient u jednoho členu. Obsahuje-li postup více než jednu chybu, opakuje-li se algoritmicky stejná chyba, není-li postup dokončen nebo je-li uveden pouze výsledek bez postupu, žák je hodnocen 0 body.

Úloha č. 5 (Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, Didaktický test z matematiky podzim 2020):

Pro $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1; 0\}$ zjednodušte: **max. 2 body**

$$\frac{a+1}{\frac{a+1}{a}-1} : \frac{a}{a+1} - 1 =$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení.**

Úloha prověřuje žáka ve znalosti úpravy složených racionálních lomených výrazů. Dále musí žák správně provést odčítání, násobení, dělení a krácení lomených výrazů. V úloze se také objevuje vzorec pro druhou mocninu součtu dvojčlenu.

Vzorové řešení:

$$\frac{a+1}{\frac{a+1}{a}-1} : \frac{a}{a+1} - 1 = \frac{a+1}{\frac{a+1-a}{a}} \cdot \frac{a+1}{a} - 1 = \frac{a+1}{1} \cdot \frac{a}{1} \cdot \frac{a+1}{a} - 1 =$$

$$= (a+1)^2 - 1 = a^2 + 2a + 1 - 1 = a^2 + 2a$$

Existenční podmínky udává zadání úlohy: $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1; 0\}$.

Ke správnému výsledku pomocí správného postupu došlo 14 % žáků, jak uvádí následující tabulka (Tabulka 16).

Tabulka 16 – Četnosti bodových zisků v úloze č. 5 didaktického testu z matematiky v podzimním termínu 2020

Body	Počet žáků						Procentuální vyjádření
	Prvo - maturant	Odložený řádný termín	Opravný termín	Náhradní termín	Nepovinná zkouška	Celkem	
0	6	1	1539	67	1	1614	64 %
1	0	0	72	3	0	75	3 %
2	2	1	320	19	0	342	14 %
Bez odpovědi	3	0	469	18	0	490	19 %

3.9 Maturitní zkouška z matematiky – jaro 2020

Konání společné části maturitní zkoušky v jarním termínu bylo stanoveno na 4. 5. 2020 a dostavilo se k němu celkem 15 522 žáků. Test obsahuje celkem 26 úloh, z čehož je 11 uzavřených a 15 otevřených.

První úloha, která je zaměřená na algebraické výrazy, je úloha č. 1. Jde o otevřenou úlohu, u které je do záznamového archu potřeba uvést pouze výsledek úlohy bez postupu řešení. Pokud je výsledek správný, žák obdrží maximální počet bodů tedy 1 bod. V opačném případě je mu přiděleno 0 bodů.

Úloha č. 2 (Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, Didaktický test z matematiky jaro 2020):

Pro $n \in \mathbf{N}$ upravte do tvaru trojčlenu: **1 bod**

$$\left(n \cdot \sqrt{2} + 2\right)^2 - n \cdot \sqrt{18} =$$

Na první pohled si žák může myslet, že se jedná o iracionální výraz, ale pod odmocninou se vykytuje pouze konstanta, nikoliv proměnná. Z tohoto důvodu se jedná o mnohočlen. V úloze je ověřována znalost umocňování součtu dvojčlenu, sčítání a odčítání mnohočlenů. Žák také musí vědět, co znamená pojem trojčlen, aby uvedl výsledek ve správném tvaru.

Vzorové řešení:

$$\left(n \cdot \sqrt{2} + 2\right)^2 - n \cdot \sqrt{18} = \left(n \cdot \sqrt{2}\right)^2 + 2 \cdot 2 \cdot n \cdot \sqrt{2} + 2^2 - n \cdot \sqrt{9 \cdot 2} =$$

$$= 2n^2 + 4\sqrt{2}n + 4 - 3\sqrt{2}n = 2n^2 + \sqrt{2}n + 4$$

Úspěšnost žáků při řešení této úlohy je uvedena v tabulce (Tabulka 17), která poukazuje na fakt, že na tuto úlohu správně odpovědělo pouze 38 % žáků. Pětina žáků neuvedla do záznamového archu žádnou odpověď.

Ve sledovaném období se jedná o unikátní úlohu, jelikož žádná jiná úloha není zaměřena na úpravu mnohočlenu. Jinde než v této úloze se také nesetkáváme s úpravou pomocí vzorce pro umocňování součtu dvojčlenu.

Tabulka 17 – Četnosti bodových zisků v úloze č. 2 didaktického testu z matematiky v jarním termínu 2020

Body	Počet žáků						Procentuální vyjádření
	Prvo - maturant	Odložený řádný termín	Opravný termín	Náhradní termín	Nepovinná zkouška	Celkem	
0	5198	95	866	62	229	6450	42 %
1	5630	15	139	25	111	5920	38 %
Bez odpovědi	2433	52	459	46	162	3152	20 %

Další úloha, která prověřuje znalost algebraických výrazů, je úloha č. 4. Jedná se o otevřenou úlohu, ve které je vyžadován celý postup řešení. Za úlohu je možné získat maximálně 2 body. Jestliže žák uvede do záznamového archu správný postup, který vede ke správnému výsledku, jsou mu přiděleny 2 body. Žák získá 1 body, pokud se dopustí právě jedné z uvedených nedostatků: chybný závěr, numerická chyba, absence krácení, špatně stanovené podmínky. Žákovi je přiděleno 0 bodů, pokud: neuvede postup řešení, postup je nedokončený, objevují se algoritmické chyby nebo pokud postup obsahuje více než 1 chybu.

Úloha č. 4 (Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, Didaktický test z matematiky jaro 2020):

Pro $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1{,}5; 1{,}5\}$ zjednodušte: **max. 2 body**

$$\left(\frac{3a}{2a+3} - \frac{2a^2 - 3a}{4a^2 - 9}\right) : \frac{1}{2a+3} =$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení.**

Úloha ověřuje znalost racionálních lomených výrazů. K vyřešení úlohy je třeba umět rozkládat mnohočleny na součin pomocí vytýkání a pomocí vzorců, odčítat, dělit a krátit lomené výrazy. Žák musí být také obezřetný v pořadí, ve kterém jednotlivé operace provádí.

Vzorové řešení:

$$\left(\frac{3a}{2a+3}-\frac{2a^2-3a}{4a^2-9}\right):\frac{1}{2a+3}=\left[\frac{3a}{2a+3}-\frac{a\cdot(2a-3)}{(2a-3)(2a+3)}\right]:\frac{1}{2a+3}=$$

$$=\frac{3a-a}{(2a+3)}\cdot\frac{2a+3}{1}=2a$$

Existenční podmínky jsou stanoveny již v zadání: $a \neq -1{,}5;\ a \neq 1{,}5$.

Následující tabulka (Tabulka 18) udává úspěšnost žáků v úloze č. 4 didaktického testu z matematiky v jarním termínu 2020, z které je patrné, že více jak polovina žáků získala plný počet bodů.

Tabulka 18 – Četnosti bodových zisků v úloze č. 4 didaktického testu z matematiky v jarním termínu 2020

Body	Počet žáků						Procentuální vyjádření
	Prvo - maturant	Odložený řádný termín	Opravný termín	Náhradní termín	Nepovinná zkouška	Celkem	
0	2406	66	552	45	124	3193	21 %
1	1092	13	165	9	23	1302	8 %
2	8636	40	501	44	225	9446	61 %
Bez odpovědi	1127	43	246	35	130	1581	10 %

3.10 Shrnutí

Při analýze maturitních testů ve sledovaném období se ukázalo, že žáci, kteří konali didaktický test v podzimním termínu, nedosahovali tak dobrých výsledků jako žáci, kteří konali test v jarním termínu. To může poukazovat na fakt, že prvomaturanti jsou nejčastěji přihlášeni k jarnímu termínu a pokud neuspějí, přihlašují se na podzimní termín. Pro porovnání jarního a podzimního termínu můžeme uvést nejnižší a nejvyšší hodnotu procentuální vyjádření žáků, kteří v úloze dosáhli maximálního počtu bodů. V podzimních termínech najdeme nejvyšší hodnotu 35 %. Oproti tomu v jarním termínu dosahuje nejvyšší hodnota 75 %. Když naopak srovnáme nejnižší procento žáků, kteří do záznamového archu uvedli správný výsledek/postup, pak v jarním termínu najdeme úlohu s 34 % a v podzimním termínu s necelými 7 %. Určitě to však neznamená, že by testy v podzimním termínu byly náročnější než ty jarní. Naopak jsou dosti srovnatelné. Výsledek spíš poukazuje na skutečnost, že podzimního termínu se účastní větší podíl žáků, kteří již didaktický test konali, ale neuspěli.

Největší problémy žáci měli s určováním existenčních podmínek výrazu (podmínek, za kterých má daný výraz smysl). Tento typ úlohy se ve sledovaném období objevil dvakrát a obě úlohy byly za 1 bod. V obou případech se jednalo o otevřenou úlohu, u které nebyl požadován postup řešení. Správný výsledek uvedlo v jednom případě pouze 10 % žáků a ve druhém necelých 7 %. U těchto úloh také zaznamenáváme nejvyšší podíl žáků, kteří do záznamového archu neuvedli žádnou odpověď – více jak čtvrtina žáků u obou úloh. Obě úlohy obsahovaly iracionální lomené výrazy. Proměnná pod odmocninou byla zastoupena jak v čitateli, tak ve jmenovateli. Řešení takových úloh pak vychází ze soustavy nerovnic, jak je popsáno v oddíle 1.4.

Špatných výsledků úspěšnosti dosahuje také jediná zastoupená úloha, která zkoumala dosažené znalosti a vědomosti výrazů, jejichž členy jsou umocněny záporným exponentem. Z mého pohledu činila tato úloha žáků značné problémy, protože se v ní skloubí záporný exponent, který umocňuje záporný člen. Na tuto úlohu správně odpovědělo pouze 15 % žáků, 10 % jich neodpovědělo vůbec a 75 % uvedlo do záznamového archu chybnou odpověď. Velice podobných výsledků úspěšnosti dosahuje i dílčí úloha modelující reálnou situaci.

Naopak s nejvyšší úspěšností se setkáváme u lomené výrazy. V jarním termínu roku 2022 vyřešilo správně lomený výraz 75% žáků a v jarním termínu 2020 získalo maximální počet bodů 61% žáků. Tyto procentuální hodnoty patří k těm nejvyšším. Osobně bych řekla, že je to z toho důvodu, že tato část algebraických výrazů je na SŠ procvičována nejvíce (i vzhledem k počtu podobných úloh v učebnicích). Žáci si také nemusí lámat hlavu se složeným zlomkem. Všechny úlohy na lomené výrazy měli již v zadání určené podmínky, za kterých má zadaný výraz smysl (tyto hodnoty byly vyloučeny z oboru hodnot).

Ve sledovaném období se algebraické výrazy objevily celkem v 18 úlohách. Celkem 11 úloh bylo hodnoceno 2 body a zbylým 7 úlohám byl přidělen 1 bod. Četnost úloh zaměřených na algebraické výrazy se pohybuje mezi jednou až třemi úlohami z celkových 25 popř. 26 úloh.

V každém sledovaném didaktickém testu se vždy minimálně jednou objevil buď racionální lomený výraz, nebo složený racionální lomený výraz. V obou případech se jedná o otevřenou úlohu za 2 body, u které musí žák uvést celý postup řešení.

Celkem 16 úloh bylo otevřených a 2 úlohy byly uzavřeného typu. Procento žáků, kteří v uzavřených úlohách nezvolili žádnou odpověď (i když mají na výběr z předem určených možností odpovědí), se pochybuje v jednotkách procent.

Nejčastěji zastoupenou úlohou byly složené racionální lomené výrazy, které se vyskytovaly v analyzovaných testech šestkrát. Oproti tomu například dělení mnohočlenu mnohočlenem s jednou proměnnou se v žádném testu neobjevilo ani jednou. Malé zastoupení měly i mnohočleny, které byly prověřovány pouze jednou úlohou. S pojmem hodnota výrazu se setkáme u 2 uzavřených úloh.

Závěr

Tato práce byla zaměřena na algebraické výrazy ve státní maturitní zkoušce, proto jsem k tomuto tématu přistupovala ze středoškolského pohledu. V první kapitole jsou vysvětleny základní pojmy algebraických výrazů a postupně jsou popsány úkony, které by měl žák dle RVP ovládat. Každý oddíl jsem se snažila doplnit o vlastní originální příklady. V dnešní době existují desítky učebnic pro SŠ, ve kterých najdeme algebraické výrazy včetně řešených příkladů a úloh. Většina z nich je koncipována tak, že v ní žák nalezne zadání úlohy, kterou musí vyřešit a v některých případech si řešení může ověřit ve výsledcích, pokud je učebnice zahrnuje. Malé procento učebnic nabízí i jiné varianty úloh. Žáci pak tedy nejsou připraveni například na uzavřené úlohy, které jsou hojně zastoupeny v didaktických testech maturitní zkoušky. Bohužel se mi z důvodu rozsahu práce nepodařilo konkrétně porovnat úlohy na vybrané téma ve středoškolských učebnicích.

Dalším cílem práce bylo nastudovat aktuální princip státní maturitní zkoušky z matematiky. Ve sledovaném období došlo k několika podstatným změnám. Pozitivní změnou bylo to, že byl navýšen časový limit pro konání testu o 15 min. Další změna se týkala počtu úloh v didaktickém testu. V dnešní době má test 25 úloh, což je o 1 méně než bylo v roce 2021 a dříve. Žáci v dnešní době už na svém maturitním vysvědčení nenajdou známku za vykonanou zkoušku, ale najdou tam pouze slovní hodnocení. Na podmínky hodnocení didaktických testů se podepsala i situace spojená s onemocněním COVID-19. Konkrétně byla snížena hranice úspěšnosti pro maturanty, kteří konali didaktický test ve školním roce 2020/2021, na hranici 27 % a to hlavně z důvodu, že velká část výuky v tomto období probíhala distančním způsobem.

Největší problém u algebraických výrazů mají žáci s určováním podmínek, za kterých má výraz smysl. S touto skutečností se setkávám i ve své praxi na střední škole. Většina žáků na určení existenčních podmínek při řešení výrazů zapomene nebo je určí chybně. Žáci tomuto úkonu nepřikládají velkou váhu i přesto, že tvoří nedílnou součást řešení. Tento fakt se potvrzuje i v analýze dat, která ukazuje na to, že úlohy na existenční podmínky zvládlo vyřešit maximálně 10 % žáků.

Nejúspěšněji žáci řeší úlohy na lomené výrazy. Tyto úlohy nejčastěji prověřují znalost početních operací s lomenými výrazy, kterými jsou zejména sčítání, odčítání, násobení, dělení a krácení.

Nejčastěji jsou algebraické výrazy zařazeny do didaktických testů formou otevřených úloh. Z analýzy dat také vyplývá, že v didaktickém testu najdeme minimálně jednu otevřenou úlohu za 2 body, u které je požadován postup řešení a která je zaměřena na (složené) racionální lomené výrazy.

Tuto práci bych ráda zakončila nejčastější větou, kterou používám ve svých hodinách na střední škole při výuce algebraických výraz: „Nezapomínejte na podmínky!“

Seznam použitých informačních zdrojů

Bušek, I., & Calda, E. (2008). *Matematika pro gymnázia* (4. vydání). Prometheus.

Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. *Katalog požadavků zkoušek společné části maturitní zkoušky platný od školního roku 2015/2016 – Matematika.* (2014). MŠMT: Praha. [cit. 2024-07-06]. Dostupné z: https://maturita.cermat.cz/files/files/katalog-pozadavku/MA_Katalog_pozadavku_MZ_1718.pdf

Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. *Maturitní zkouška 2024 – Zkoušky společné části – Matematika.* 2019. [cit. 2024-07-06]. Dostupné z: https://maturita.cermat.cz/menu/maturitni-zkouska/zkousky-spolecne-casti/matematika

Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. *Maturitní zkouška: Testy a zadání – Matematika.* 2019. [cit. 2024-07-06]. Dostupné z: https://maturita.cermat.cz/menu/testy-a-zadani-z-predchozich-obdobi/matematika/testy-a-zadani-matematika

Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. *Tisková zpráva: Výsledky společné části maturitní zkoušky v jarním zkušebním období 2023.* 2023. Dostupné z: https://maturita.cermat.cz/aktuality/aktualita/490-tz-vysledky-dt-jaro-2023

Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. *Tisková zpráva k podzimním termínům maturitní zkoušky 2023.* 2023. [cit. 2024-07-06]. Dostupné z: https://czvv.cermat.cz/menu/o-nas

Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. *O nás.* 2019. Dostupné z: https://maturita.cermat.cz/files/files/TZ_MP_2023.docx

Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. *Maturita – Testy a zadání – Matematika.* 2019. Dostupné z: https://maturita.cermat.cz/menu/testy-a-zadani-z-predchozich-obdobi/matematika/testy-a-zadani-matematika

Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. *Vzorové řešení didaktického testu z matematiky 2020 – podzim* [online]. Praha: CZVV, 2019. [cit. 2024-06-16]. Dostupné z:https://maturita.cermat.cz/files/files/Matematika/intaktni-zaci/MZ2020P/MZ2020P_MA_vzorove_reseni.pdf

Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. *Vzorové řešení didaktického testu z matematiky 2019 – jaro* [online]. Praha: CZVV, 2019. [cit. 2024-06-16]. Dostupné z: https://maturita.cermat.cz/files/files/testy-zadani-klice/MA_jaro_2019_DT_vzor.pdf

Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. (2007). *Výroční zpráva Centra pro zjišťování výsledků vzdělávání za rok 2006.* [cit. 2024-06-16]. Dostupné z https://czvv.cermat.cz/files/files/vyrocni-zpravy/2006/vyrocni-zprava-CZVV-2006.pdf

Cizlerová, M., Krupka, P., Polnický, Z., & Škaroupková, B. (2013). *Matematika pro střední školy - 2. díl: Výrazy, rovnice a nerovnice – Učebnice*. Didaktis.

Čermák, P., & Červinková, P. (2007). *Odmaturuj! z matematiky 1* (4. vydání). Didaktis.

Koldová, H., & Fuchs, E. (2019). *Matematika s nadhledem od prváku k maturitě: Algebraické výrazy 2. díl*. Fraus.

Kubešová, N., & Cibulková, E. (2006). *Matematika: přehled středoškolského učiva*. Petra Velanová.

Novotná, J., & Trch, M. (2000). *Algebra a teoretická aritmetika: sbírka příkladů* (2. dopl. vyd). Univerzita Karlova.

Opatření obecné povahy ze dne 7. června 2021- Hodnocení didaktického testu z matematiky. MŠMT: Praha. [cit. 2024-07-06]. Dostupné z https://www.cermat.cz/files/files/Aktuality/2021/OOP_MA/MSMT_OOP_DT_MAT_7-6-2021.pdf

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. (2021). MŠMT: Praha. [cit. 2024-07-06]. Dostupné z https://msmt.gov.cz/file/56051/

Rámcový vzdělávací program pro gymnázia. (2021). MŠMT: Praha. [cit. 2024-07-06]. Dostupné z https://revize-ict-g.rvp.cz/files/rvp-g-vyznacene-zmeny.pdf

Zákon o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (školský zákon). [online]. 2004. [cit. 2024-06-22]. Dostupné z: https://msmt.gov.cz/file/61629/download/

Seznam obrázků

Seznam tabulek