Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Množiny bodů v rovině s konstantním poměrem vzdáleností od bodů a přímek

Sets of points in plane with constant ratio of distances to points and lines

David Jelínek

Vedoucí práce: JUDr. Mgr. Filip Beran

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání – Tělesná výchova a sport se zaměřením na vzdělávání

2024

Odevzdáním této bakalářské práce na téma „Množiny bodů dané vlastnosti s konstantním poměrem vzdáleností“ potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 11. července 2024

David Jelínek

Tímto bych rád vyjádřil své poděkování vedoucímu práce panu JUDr. Mgr. Filipu Beranovi za vedení mé bakalářské práce. Vaše odborné rady, trpělivost a podpora byly pro mě neocenitelným přínosem a velmi přispěly k úspěšnému dokončení mé práce.

ABSTRAKT

Tato práce se zabývá množinami bodů v rovině s konstantním poměrem vzdáleností od bodů a přímek a zkoumá jejich konstrukční a analytická odvození. Systematicky rozebírá všechna možná zadání (bod – bod, přímka – přímka, bod – přímka), přičemž postupuje od jednodušších k náročnějším: V první kapitole odvozujeme, že množinou bodů stejně vzdálených od dvou bodů je osa úsečky. Ve druhé kapitole činím totéž pro dvě přímky a výsledkem je osa úhlu, resp. osa pásu. Třetí kapitola bude věnována konstantnímu poměru vzdáleností od dvou bodů, kde bude výsledkem kružnice. Ve čtvrté kapitole se zaměříme na konstantní poměr vzdáleností mezi dvěma přímkami. V páté kapitole se budeme zabývat vzdáleností mezi bodem a přímkou a výsledkem bude parabola. V poslední kapitole prozkoumáme konstantní poměr vzdáleností mezi bodem a přímkou, výsledkem bude elipsa, resp. hyperbola.

Každá kapitola je rozdělena do dvou základních částí: V první části provedeme konstrukční odvození dané množiny bodů a dokážeme, že se jedná o tyto množiny. Druhá část pak je vždy věnována konkrétním příkladům řešeným analyticky, což umožní přesnější a obecnější popis množin bodů, a následně obecnému analytickému odvození pomocí vhodného umístění do soustavy souřadnic.

Další důležitou součástí práce je srovnání středoškolských definic výsledných geometrických útvarů s jejich množinovými definicemi. Toto srovnání odhaluje rozdíly v použití těchto definic, kde množinové definice popisují vlastnosti všech bodů v rovině. Oproti tomu středoškolské se často omezují pouze na jednu část množiny bodů.

Cílem této práce je nejen poskytnout ucelený přehled o různých metodách řešení množin bodů s danými vlastnostmi, ale také ukázat, jak mohou pokročilé analytické metody obohatit výuku matematiky na středních školách a přispět k hlubšímu pochopení geometrických problémů čtenáři.

KLÍČOVÁ SLOVA

množina bodů, geometrie, Apolloniova kružnice, kuželosečky

ABSTRACT

This thesis deals with sets of points in the plane with a constant ratio of distances from points and lines, and examines their constructional and analytical derivations. It systematically analyzes all possible cases (point – point, line – line, point – line), proceeding from simpler to more complex scenarios: In the first chapter, we derive that the set of points equidistant from two points is the perpendicular bisector of the segment connecting the points. In the second chapter, we derive the same for two lines, resulting in the angle bisector, or the bisector of the strip between the lines. The third chapter will focus on the constant ratio of distances from two points, where the result will be a circle. In the fourth chapter, we will focus on the constant ratio of distances between two lines. The fifth chapter will deal with the distance between a point and a line, resulting in a parabola. In the final chapter, we will explore the constant ratio of distances between a point and a line, where the result will be an ellipse or a hyperbola.

Each chapter is divided into two main parts: In the first part, we perform the constructional derivation of the given set of points and prove that it constitutes these sets. The second part is always dedicated to specific examples solved analytically, allowing for a more precise and general description of the sets of points, followed by a general analytical derivation through appropriate placement in the coordinate system.

Another important aspect of this work is the comparison of high school definitions of the resulting geometric shapes with their set-based definitions. This comparison reveals the differences in the use of these definitions, where the set-based definitions describe the properties of all points in the plane. In contrast, the high school definitions often limit themselves to only a part of the set of points.

The aim of this thesis is not only to provide a comprehensive overview of different methods for solving sets of points, with given properties, but also to demonstrate how advanced analytical methods can enhance the teaching of mathematics in high schools. This contributing to a deeper understanding of geometric problems between high school students.

KEYWORDS

Set of points, geometry, Apollonian circle, conic sections

Obsah

Úvod

Množiny bodů dané vlastnosti (anglicky *set of points* nebo také *locus,* množné číslo *loci*) jsou základním pojmem v geometrii. Žáci se s tímto pojmem mohou setkat již v šesté třídě na základní škole, avšak k podrobnějšímu vysvětlení dojde až na středních školách. Proto je cílem této práce je vytvoření výukového materiálu, který bude použitelný ve středoškolské výuce matematiky. Materiál bude obsahovat teoretické i praktické části zaměřené na systematické zpracování všech možností množin bodů s danou vlastností, kde je konstantní poměr vzdáleností. Tento výukový materiál zahrnuje následující body:

Podrobné vysvětlení základních pojmů a definic týkajících se množin bodů s konstantním poměrem vzdáleností.

Prezentace základních příkladů a důkazů vlastností těchto množin bodů.

Postupný rozbor konkrétních typů množin bodů podle obtížnosti uvedeno níže v rozdělení práce.

Vytvoření knihy v softwaru GeoGebra, která bude obsahovat interaktivní animace konstrukcí jednotlivých vyšetřovaných množin bodů.

Řešení krok za krokem konstrukcí, které umožní studentům snadno pochopit principy a vlastnosti těchto množin.

Práce bude strukturována tak, aby postupně vedla studenty od základních až po pokročilejší koncepty, čímž jim umožní systematicky budovat své znalosti a dovednosti v oblasti geometrie.

Upřesněme si, co se myslí pojmem množina bodů dané vlastnosti je. „Množinou bodů dané vlastnosti nazýváme takovou množinu bodů, pro kterou platí, že každý bod této množiny má danou vlastnost a zároveň každý bod, který má danou vlastnost, je bodem této množiny.“ (Moravcová, 2021, s. 111). Zde v úvodu uvedeme několik příkladů těchto množin, kterým se v práci nebudeme podrobně věnovat. Jedná se o známé množiny bodů, jako je Thaletova kružnice, ekvidistanta přímky a kružnice a další.

My se budeme věnovat vztahům mezi dvěma body, mezi dvěma přímkami a mezi přímkou a bodem. Konkrétně se budeme zabývat následujícími množinami:

1) *Množina bodů stejně vzdálených od dvou bodů*: V této kapitole prozkoumáme, jak vypadá množina všech bodů, které jsou stejně vzdálené od dvou pevných bodů. Toto téma nás zavede k pojmu osy úsečky a bude určitou rozcvičkou před zkoumáním složitějších množin.
2) *Množina bodů stejně vzdálených od dvou přímek*: V této kapitole se zaměříme na určení a vlastnosti množiny bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou různých přímek. To nás dovede k pojmům osa úhlu a osa pásu mezi těmito přímkami.
3) *Množina bodů s konstantním poměrem vzdáleností od dvou bodů*: Zde budeme studovat body, které jsou uspořádány tak, že poměr jejich vzdáleností od dvou pevných bodů je konstantní. V této kapitole tak zobecníme množinu zkoumanou v kapitole 1. Dojdeme k závěru, že výslednou množinou bude kružnice, která se v tomto kontextu někdy doplňuje přízviskem *Apolloniova*.
4) *Množina bodů s konstantním poměrem vzdáleností od dvou přímek*: V této kapitole se zaměříme na body, které mají konstantní poměr vzdáleností od dvou různých přímek. Výsledky budou podobné jako v kapitole 2.
5) *Množina bodů stejně vzdálených od bodu a přímky*: Tato kapitola se věnuje množině bodů, které jsou stejně vzdálené od pevného bodu a pevné přímky. Vyšetřování tohoto případu nás zavede k pojmu parabola.
6) *Množina bodů s konstantním poměrem vzdáleností od bodu a přímky*: V závěrečné kapitole prozkoumáme, jak se definuje a jaké vlastnosti má množina bodů, kde poměr vzdáleností od pevného bodu a pevné přímky je konstantní. Rozdělíme si ji na tři podkapitoly závisející na parametru k. Budeme vyšetřovat tři případy, kde $k = 1, k = (0; 1)$ výsledkem bude elipsa a $k > 1$, kde bude výsledkem hyperbola.

Nyní uvedeme objekty, které budeme analyzovat, a specifikujeme, kde se s nimi můžeme poprvé setkat. Osa úsečky, osa úhlu, osa pásu. Tyto pojmy se objevují již v šestém ročníku na základní škole. Studenti se zde učí základy geometrie, které zahrnují základní konstrukce a vlastnosti geometrických objektů. Kružnice, parabola, elipsa, hyperbola. S těmito pojmy se studenti setkávají na střední škole, kde se začínají zabývat složitějšími geometrickými a algebraickými koncepty. Většina z těchto pojmů je však probírána detailněji až na vysoké škole, kde je studium geometrie a analytické geometrie intenzivnější. Dále množiny bodů z kapitoly 4 se většinou ve středoškolských učebních plánech neuvádějí a jsou často opomíjeny i na vysokých školách, pokud se nejedná o specializované kurzy geometrie.

V této práci se zaměříme na různé typy množin bodů dané vlastnosti. Každá kapitola bude rozdělena do dvou hlavních částí. V první části práce se budeme zabývat konstrukcí množiny bodů, které mají specifickou geometrickou vlastnost. Zde se zaměříme na základní principy a metody, které nám umožní systematicky identifikovat tyto body a jejich vzájemné vztahy následované dokázáním dané hypotézy. Druhá část bude věnována konkrétním příkladům, které pomohou k lepšímu pochopení teoretických principů, které jsme si popsali v první části. Tyto příklady nám pomohou vidět, jak se teoretické koncepty aplikují v praktických situacích.Následně se zaměříme na analytické obecné řešení, kde se pokusíme nalézt obecné vzorce a řešení pro dané množiny bodů. Provedeme porovnání definic ze středoškolských učebnic řady *Matematika pro gymnázia* nakladatelství Prometheus, díly *Planimetrie* (Pomykalová, 2018) a *Analytická geometrie* (Kočandrle, 2009), a řady *Matematika pro střední školy* nakladatelství Didaktis, díl *Planimetrie* (Vondra, 2019). Pro srovnání s vysokoškolskými definicemi pak používáme skripta *Základy planimetrie pro učitelské studium* (Moravcová, 2021), která jsou i elektronicky dostupná.

Dříve byly množiny bodů dané vlastnosti dohledatelné pod názvem *geometrická místa bodů*. O nich se můžeme dočíst ve stejnojmenném díle *geometrická místa* (Vyšín, 1950), věnující se příkladům, které prohlubují a rozšiřují tento pojem, a jejich použití pro konstrukce. Analytické řešení množin bodů můžeme naleznout v díle *Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic* (Koman, 1966). Ze současnější literatury můžeme zmínit například *Základy planimetrie pro učitelské studium* (Moravcová, 2021). Pro další procvičení příkladů můžeme využít *Sbírky úloh k Základům planimetrie pro učitelské studium* od stejné autorky. (Moravcová, 2023)

V celé práci, není-li řečeno jinak, uvažujeme body v rovině vybavené standardní eukleidovskou metrikou, tedy v tzv. eukleidovské rovině. Dále se také v práci nebudeme zabývat speciálními případy, kdy zadané objekty splývají (tj. dva totožné body či dvě totožné přímky)

Většina obrázků je autorem vytvořena pomocí GeoGebry, s výjimkou obrázků použitých v důkazech kružnice, elipsy a hyperboly. U každé konstrukce bude přiložen odkaz na animaci konstrukce dané množiny bodů. Zde naleznete odkaz na knihu v GeoGebře, která obsahuje kompletní seskupení těchto animací.

1. Množina bodů stejně vzdálených od dvou bodů – osa úsečky

Začněme nejjednodušším případem, kde vyšetříme množinu bodů, které jsou stejně vzdálené od dvou pevně zadaných pevných bodů A a B, tj.

$$\{X : |AX| = |BX|\}$$

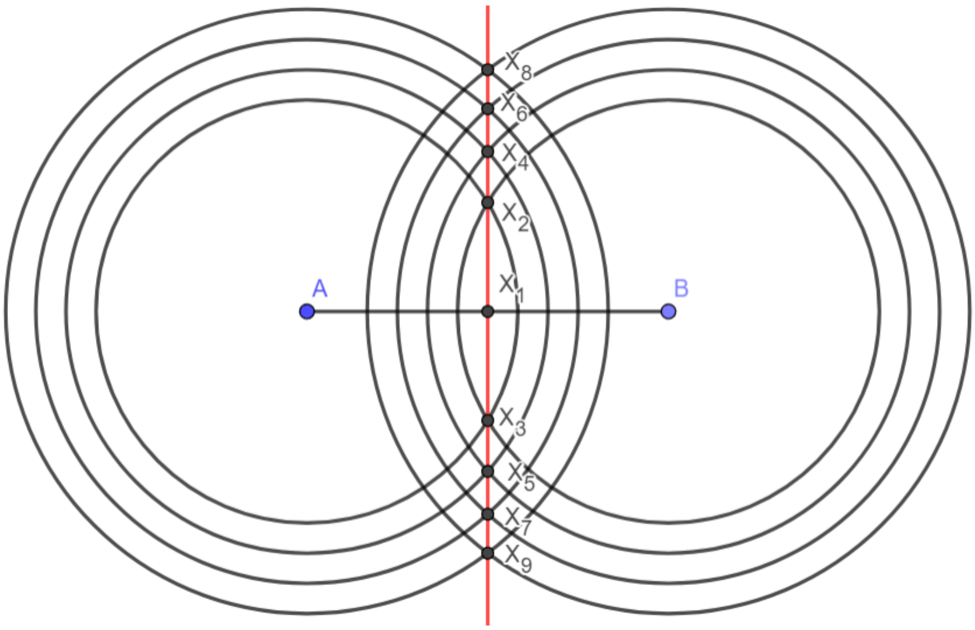
Výsledkem je dle očekávání osa úsečky AB.

1.1 Konstrukční řešení

1.1.1 Odvození hypotézy

Příklad 1.1: Vyšetřete množinu všech bodů stejně vzdálených od pevně daných bodů A a B.

Řešení: V konstrukčním řešení vyjdeme z množinové definice. Zvolme body A a B např. ve vzdálenosti 6. Jeden bod, splňující požadovanou vlastnost, je zřejmý. Střed úsečky AB tedy $|AX| = |BX| = 3$, označme ho X_1. Zamysleme se, jak nalezneme další body? Zvolíme pevně danou vzdálenost a najdeme body s touto vzdáleností pomocí kružnic. Poloměr kružnic má smysl uvažovat větší než vzdálenost od středu. Zvolme větší vzdálenost, než je střed úsečky, např. $|AX| = |BX| = 3{,}5$. Kružnice se protnou ve dvou bodech X_2, X_3. Vyzkoušíme i další hodnoty $|AX| = |\mathrm{BX}| = \{4; 4{,}5; 5\}$, kde po řadě označíme další body.



Obrázek 1: Konstrukce osy úsečky

Popis konstrukce symbolicky:

1. $|AB| = 6$
2. $|AX_1| = |BX_1| = 3$
3. $k_1(A; 3{,}5); k_2(B; 3{,}5)$
4. $X_2, X_3 \in k_1 \cap k_2$
5. $k_3(A; 4); k_4(B; 4)$
6. $X_4, X_5 \in k_3 \cap k_4$
7. $k_5(A; 4{,}5); k_6(B; 4{,}5)$
8. $X_6, X_7 \in k_5 \cap k_6$

Obdobně pro následující body vykreslené v obrázku.

Kdybychom pokračovali v konstrukci dalších bodů, viděli bychom jak se body postupně vykreslují do přímky. Konstrukci dalších bodů ponecháme čtenáři.

Zde čtenář nalezne animaci výše uvedené konstrukce v GeoGebře.

Nyní si uvedeme definice:

Definice 1.1 (Osa úsečky, Prometheus): „Přímka, která prochází středem úsečky a je k ní kolmá, se nazývá *osa úsečky*." (Pomykalová, 2018, s. 21).

Definice 1.2 (Osa úsečky, Didaktis): „Přímka, která prochází středem úsečky a je k ní kolmá, se nazývá *osa úsečky*." (Vondra, 2019, s. 18)

Obě učebnice udávají v základních pojmech osu úsečky totožně. V pozdější kapitole s názvem Množiny bodů dané vlastnosti udávají i její množinovou definici.

Definice 1.3 (Osa úsečky, Prometheus): „*Osa úsečky* AB je množina všech bodů, které mají od daných bodů A, B stejnou vzdálenost." (Pomykalová, 2018, s. 90)

Definice 1.4 (Osa úsečky, Didaktis): „Množina bodů v rovině ρ, které mají stejnou vzdálenost od daných bodů A a B, je *osa úsečky*." (Vondra, 2019, s. 85)

Definice osy úsečky můžeme najít i ve vysokoškolských učebnicích.

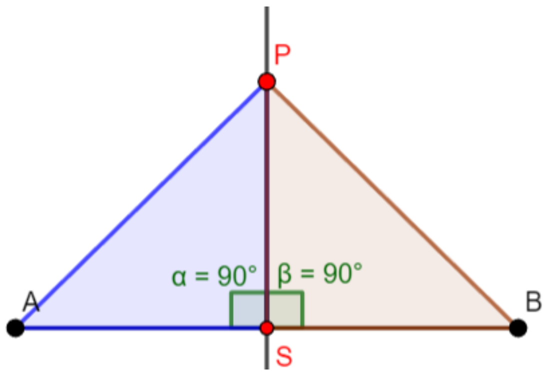
Definice 1.5 (Osa úsečky, MFF): „*Osa úsečky* je přímka kolmá k dané úsečce procházející jejím středem." (Moravcová, 2021, s. 112)

Tato vysokoškolská učebnice udává definici osy úsečky v první kapitole základních pojmů opět jako přímku procházející středem úsečky a kolmou na ni. Později jako množinu bodů. (Moravcová, 2021, s. 112)

1.1.2 Důkaz

Uvedeme si zde krátký důkaz, kde dokážeme, že každý bod této množiny splňuje danou vlastnost a žádný jiný ji nemá.

Důkaz: „Mějme úsečku AB a její osu o_{AB}, která je množinou bodů X, pro něž platí $|AX| = |BX|$. Chceme dokázat, že o_{AB} prochází středem AB a $o_{AB} \perp AB$. Pro střed S úsečky AB platí, že $|AS| = |BS|$, tedy $S \in o_{AB}$. Uvažujme libovolný bod $P \in o_{AB} \wedge P \neq S$. Potom $\triangle ASP \simeq \triangle BSP$ podle věty sss a tedy také $|\sphericalangle ASP| = |\sphericalangle BSP|$. Zároveň však jsou úhly ASP a BSP vedlejší, proto $|\sphericalangle ASP| + |\sphericalangle BSP| = 180°$. Odtud plyne, že $|\sphericalangle ASP| = 90°$ a tedy $o_{AB} \perp AB$." (Moravcová, 2021, s. 30-31)



Obrázek 2: Důkaz osy úhlu

Po zvolení bodu neležícím na ose úsečky již jasně vidíme, že daný bod nesplňuje danou vlastnost.

1.2 Analytické řešení

1.2.1 Konkrétní příklady

Příklad 1.2: Vyšetřete množinu bodů $\{X\colon |AX| = |BX|\}$.

Řešení: Použijeme vzorec pro vzdálenost dvou bodů $|XY| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ a dosadíme zadané hodnoty do rovnice.:

$$|AX| = |BX|$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-6)^2 + y^2}$$
$$x^2 + y^2 = (x-6)^2 + y^2$$
$$x^2 + y^2 = x^2 - 12x + 36 + y^2$$
$$12x = 36$$
$$x = 3$$

Ve druhém kroku jsme obě strany rovnice umocnili. Obecně se nejedná o ekvivalentní úpravu. Zde tomu tak ale je, protože oba výrazy pod odmocninou jsou pro všechny hodnoty x a y nezáporné. Dále v textu již tuto úpravu zmiňovat nebudeme. Přesto můžeme udělat zkoušku. Dosazením $x = 3$.

$$\sqrt{3^2 + y^2} = \sqrt{(3-6)^2 + y^2}$$
$$\sqrt{9 + y^2} = \sqrt{9 + y^2}$$

$$9 + y^2 = 9 + y^2$$
$$0 = 0$$

Vidíme, že rovnice má nekonečně mnoho řešení a že y může být libovolné.

Výsledkem je tedy přímka $p: x = 3$, což je dle očekávání osa úsečky AB.

OBRÁZEK 3: OSA ÚSEČKY PŘ. 1.2

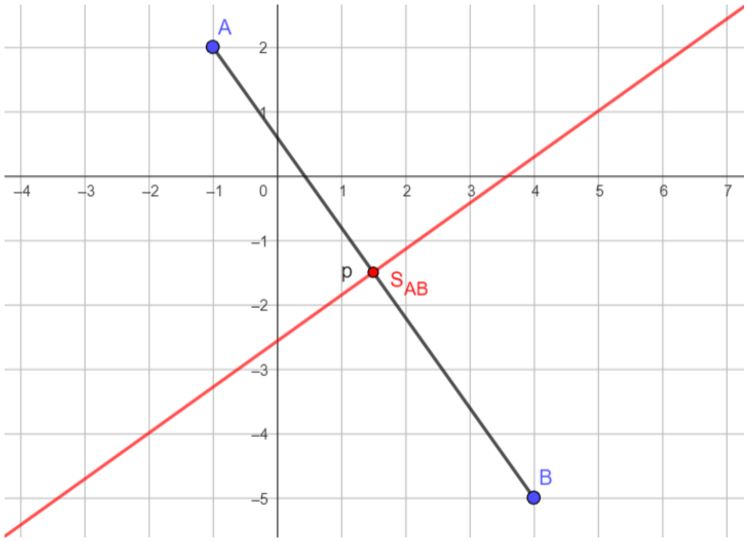
Příklad 1.3: Vyšetřete množinu bodů $\{X\colon |AX| = |BX|\}$, $A[-1,2]$ a $B[4,-5]$

Řešení: Stejně jako v předchozím příkladu použijeme vzorec pro vzdálenost dvou bodů, a dosadíme zadané hodnoty.:

$$|AX| = |BX|$$
$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y+5)^2}$$
$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-4)^2 + (y+5)^2$$
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 8x + 16 + y^2 + 10y + 25$$
$$10x - 14y - 36 = 0$$
$$5x - 7y - 18 = 0$$

Výsledkem je přímka $p: 5x - 7y - 18 = 0$ (viz Obrázek 4: Osa úsečky př. 1.)

Na závěr můžeme ještě dopočítat průsečíky s osami x a y. $P_x\left[\frac{18}{5}; 0\right]$, $P_y\left[0; -\frac{18}{7}\right]$ a zakreslíme graf do soustavy souřadnic.



Obrázek 4: Osa úsečky př. 1.3

Ověříme, že výsledná přímka je skutečně osou úsečky podle středoškolské definice (def. 1.2), tj. že je kolmá k úsečce AB a prochází středem S_{AB}. Z definice normálového vektoru víme, že je na směrový vektor kolmý. Pro ověření použijeme vektor $\overrightarrow{AB} = (5; -7)$ a z něj uděláme směrový vektor $\vec{u} = (7; 5)$ a za normálový dosadíme vektor z přímky p, označíme ho $\vec{v} = (5; -7)$. Vypočítáme skalární součin těchto vektorů.:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (5 \cdot 7 + (-7) \cdot 5)$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Skalární součin vektorů u, v vyšel roven nule a tím jsme ověřili že jsou kolmé. Poslední, co nám schází je ověřit, zda střed úsečky $S_{AB} \in o$. To zjistíme dosazením souřadnic středu $S_{AB} = \left[\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right]$ do rovnice přímky p: $5x - 7y - 18 = 0$:

$$5 \cdot \frac{3}{2} - 7 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 18 = 0$$

$$\frac{15}{2} + \frac{21}{2} - \frac{36}{2} = 0$$

$$0 = 0$$

Ověřili jsme že bod $S_{AB} \in o$. Tím máme ověřenou platnost středoškolské i množinové definice.

1.2.2 Obecné odvození

Příklad 1.4: Vyšetřete množinu bodů $\{X\colon\ |AX| = |BX|\}$, $A[a_1, a_2]$ a $B[b_1, b_2]$.

Řešení:

$$|AX| = |BX|$$

$$\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} = \sqrt{(x-b_1)^2 + (y-b_2)^2}$$

$$(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 = (x-b_1)^2 + (y-b_2)^2$$

$$\mathrm{x}^2 - 2a_1x + a_1^2 + y^2 - 2a_2y + a_2^2 = x^2 - 2b_1x + b_1^2 + y^2 - 2b_2y + b_2^2$$

$$(-2a_1x + 2b_1x) + (-2a_2y + 2b_2y) + a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 + b_2^2 = 0$$

$$(-2a_1 + 2b_1)x + (-2a_2 + 2b_2)y + a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 + b_2^2 = 0$$

Určíme konstanty $e = (-2a_1 + 2b_1), f = (-2a_2 + 2b_2)$ a $g = a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 + b_2^2$.

$$ex + fy + g = 0$$

Výsledkem je obecná rovnice přímky.

Ověříme správnost výpočtu dosazením hodnot z příkladu 1.3, kde $A[-1{,}2], B[4, -5]$.
Vypočítáme koeficienty e, f, g:

$$e = (-2a_1 + 2b_1)$$
$$e = (-2 \cdot (-1) + 2 \cdot 4)$$
$$e = 10$$
$$f = (-2a_2 + 2b_2)$$
$$f = (-2 \cdot 2 + 2 \cdot (-5))$$
$$f = -14$$
$$g = a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 + b_2^2$$
$$g = (-1)^2 + 2^2 - 4^2 - (-5)^2$$
$$g = -36$$

Dosadíme zpět do rovnice:

$$ex + fy + g = 0$$

$$10x - 14y - 36 = 0$$

$$5x - 7y - 18 = 0$$

Výsledek je shodný s výsledkem z příkladu 1.3. Můžeme tedy říct, že obecný výpočet byl správný.

Příklad 1.5: Vyšetřete množinu bodů $\{X\colon\ |AX| = |BX|\}$

Řešení: Na rozdíl od předchozího příkladu, kde jsme body A, B volili obecně, si nyní zvolíme body A, B bez újmy na obecnosti tj. $A[0; 0], B[d; 0]$

$$|AX| = |BX|$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-d)^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 = (x-d)^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 = x^2 - 2dx + d^2 + y^2$$

$$0 = -2dx + d^2$$

$$0 = -2x + d$$

$$x = \frac{d}{2}$$

Závěr: Volili jsme $|AB| = d$, a zjistili jsme, že výsledkem je přímka $p\colon x = \frac{d}{2}$ procházející středem úsečky AB.

Ještě jednodušší volbou bez újmy na obecnosti bodů A, B by bylo zvolit body o souřadnicích $A\left[-\frac{d}{2}; 0\right], B\left[\frac{d}{2}; 0\right]$. Výpočet ponecháme čtenáři. Výsledkem by měla být přímka totožná s osou y souřadnicového systému.

2. Množina bodů stejně vzdálených od dvou přímek – osa úhlu, osa pásu

V této kapitole se budeme zabývat množinou bodů v rovině, které jsou stejně vzdálené od dvou daných přímek p a q, tj.:

$$\{X : |Xp| = |Xq|\}$$

Postupovat budeme obdobně jako v předchozí kapitole. Naším cílem bude identifikovat a analyzovat množinu všech bodů, které splňují tuto podmínku. Zaměříme se na konstrukci této množiny, její geometrické vlastnosti a její analytické vyjádření.

Na rozdíl od předchozího případu z minulé kapitoly musíme řešení rozlišit na dva případy, kdy jsou přímky p a q různoběžné a kdy jsou rovnoběžné.

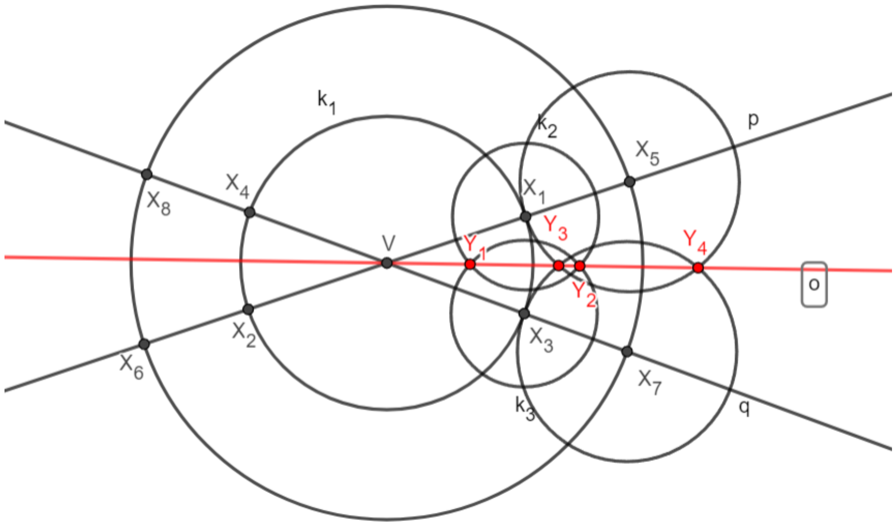
2.1 Konstrukční řešení

2.1.1 Odvození hypotézy – různoběžky

Příklad 2.1: Mějme dvě různoběžné přímky v rovině a jejich průsečík V. Najděte množinu všech bodů stejně vzdálených od obou ramen úhlu s vrcholem V.

Řešení: Nejprve je potřeba si uvědomit, jak nalezneme body, které jsou stejně vzdálené od obou přímek. K tomu využijeme definici kružnice jako množiny všech bodů, které jsou stejně vzdálené od pevného bodu. V tomto případě bude tímto pevným bodem bod V, který je vrcholem úhlu. Pro začátek sestrojíme libovolnou kružnici $k_1(V; r)$, kde r je libovolná vzdálenost. Tato kružnice bude mít s přímkou p dva průsečíky X_1, X_2 a s přímkou q rovněž dva průsečíky X_3, X_4. Nyní vybereme pouze dva z těchto bodů, konkrétně X_1, X_3. Pro další krok sestrojíme dvě kružnice, každou s jedním z vybraných bodů jako středem. Tedy sestrojíme kružnici $k_2(X_1; r_1)$ a kružnici $k_3(X_3; r_1)$, je stejný pro obě kružnice. Je důležité, aby tyto kružnice měly alespoň jeden společný bod. Následně nalezneme průsečíky těchto dvou kružnic k_2 a k_3. Označme tyto průsečíky jako body Y_1 a Y_2. Tyto body Y_1 a Y_2 jsou body, leží stejně vzdálené od obou přímek.

Tento postup zopakujeme ještě jednou s jinými počátečními poloměry kružnic k_1,$k_2 = k_3$.



Obrázek 5: Konstrukce osy úhlu

Popis konstrukce symbolicky:

1) $p \nparallel q\,; V \in p \cap q$
2) $k_1(V; r)$ — r je libovolné
3) $X_1, X_2 \in k_1 \cap p;\ X_3, X_4 \in k_2 \cap q$
4) $k_2(X_1; r_1); k_3(X_3; r_1)$ — r_1 volíme tak, aby k_2 a k_3 měla průnik
5) $Y_1, Y_2 \in k_2 \cap k_3$

Zopakujeme několikrát kroky 2 až 5.

Kdybychom opakovali tento postup stále dokola s různými poloměry, viděli bychom, jak se množina výsledných bodů vykreslí do přímky. Tuto přímku nazýváme osa úhlu o procházející vrcholem V, dělící úhel na dva shodné úhly. Zde čtenář nalezne odkaz na konstrukci v GeoGebře.

Nyní si uvedeme definice osy úhlu.

Definice 2.1 (Osa úhlu, Prometheus): „*Osa úhlu* je polopřímka s počátkem ve vrcholu úhlu, která úhel rozdělí na dva shodné úhly.“ (Pomykalová, 2018, s. 15)

Definice 2.2 (Osa úhlu, Didaktis): „*Osa úhlu* je polopřímka s počátkem ve vrcholu úhlu, která úhel rozdělí na dva shodné úhly.“ (Vondra, 2019, s. 13)

Obě učebnice udávají v základních pojmech osu úhlu totožně. A v pozdější kapitole s názvem Množiny bodů dané vlastnosti udávají její množinovou definici.:

Definice 2.3 (Osa úhlu, Prometheus): „Množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných různoběžek a, b, jsou *osy* o_1', o_1'', o_2', o_2'' *úhlů* sevřených různoběžkami a, b." (Pomykalová, 2018, s. 94)

Definice 2.4 (Osa úhlu, Didaktis): „Množinou bodů v rovině ρ, které mají od daných různoběžek p, q stejnou vzdálenost, je dvojice kolmých přímek, na kterých leží *osy* všech čtyř *úhlů* určených různoběžkami p, q." (Vondra, 2019, s. 86)

Definice 2.5 (Osa úhlu, MFF): „Množinu bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od daných různoběžek a, b nazveme *osu různoběžek* a, b." (Moravcová, 2021, s. 114)

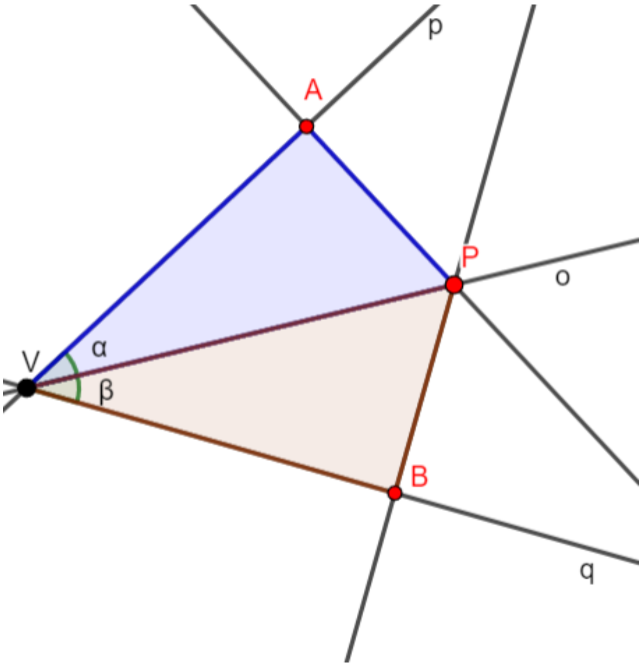
2.1.2 Důkaz – různoběžky

Nyní tedy dokážeme, že množinou bodů stejně vzdálených od dvou různoběžek jsou skutečně přímky, které jednotlivé úhly rozdělují vždy na dva shodné.

Důkaz provedeme pouze pro jeden úhel sevřený těmito přímkami. Zbývající tři osy úhlů by se řešily obdobně.

Důkaz: Mějme dvě různoběžné přímky p a q svírající úhel α s průsečíkem v bodě V a jejich osu o, která je množina bodů X, pro které platí $|Xp| = |Xq|$.

Chceme dokázat, že osa o dělí úhel α na dva shodné úhly. Uvažujme libovolný bod $P \in o \wedge P \neq V$. Z bodu P spustíme kolmici na obě přímky. Průsečík kolmice a přímky p označme A, průsečík kolmice a přímky q označme B. Z definice víme, že $|AP| = |BP|$. Sestrojme $\triangle VAP$ a $\triangle VBP$. Dále víme, že úhly $\sphericalangle VAP = \sphericalangle VBP = 90°$ a úsečka $|VP|$ je přepona obou trojúhelníků. Z toho vyplývá, že $\triangle VAP \simeq \triangle VBP$, podle věty sus. Můžeme tedy říct, že úhly $\sphericalangle AVP = \sphericalangle BVP = \frac{\alpha}{2}$.



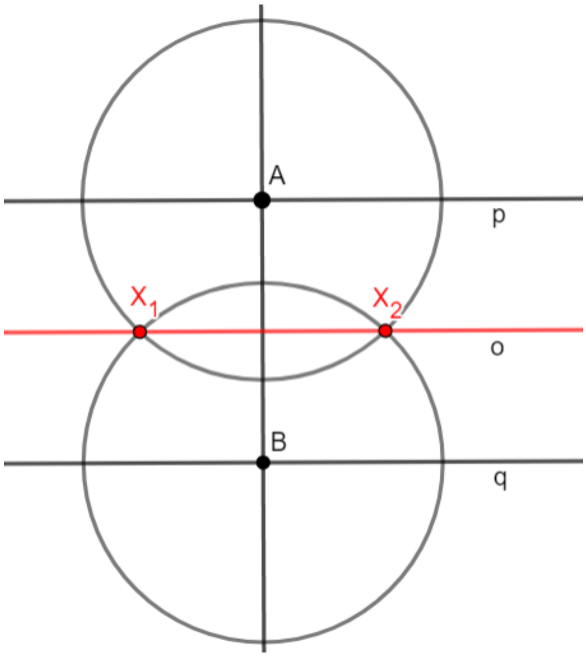
Obrázek 6: Důkaz osa úhlu

2.1.3 Odvození hypotézy – rovnoběžky

Příklad 2.2: Mějme dvě různé rovnoběžné přímky v rovině. Nalezněte množinu všech bodů stejně vzdálených od obou přímek.

Řešení: Pro konstrukční řešení vyjdeme z definice osy pásu (def. 2.4). Zvolíme na jedné z přímek libovolný bod A, vedeme tímto bodem kolmici a nejdeme průsečík s druhou přímkou B

Použijeme znalost definice osy úsečky. Víme že vzdálenost $|AB|$ bude stejná ať zvolíme bod A kdekoliv na přímce. V dalším kroku budeme postupovat stejně jako při hledání osy úsečky. Začneme tím, že z bodu A i bodu B narýsujeme kružnici se stejným poloměrem r. Tento poloměr musí být větší nebo roven polovině vzdálenosti $|AB|$, aby se kružnice mohly protnout. Nyní najdeme průsečíky těchto dvou kružnic, které označíme jako body X_1 a X_2. Tyto body X_1 a X_2 leží na ose úsečky AB a jsou stejně vzdálené od bodů A i B. Posledním krokem bude přímka určená body X_1,X_2, která je množinou bodů stejně vzdálených od obou přímek p, q.



Obrázek 7: Konstrukce osy pásu

Dáno: dvě rovnoběžné různé přímky p a q

Popis konstrukce:

1) $A \in p$
2) $r \perp p \wedge r \in A$
3) $B \in r \cap q$
4) $k_1(A; r); k_2(B; r)$ $\qquad r \geq \frac{AB}{2}$
5) $X_1, X_2 \in k_1 \cap k_2$
6) $\overleftrightarrow{X_1X_2} = o$ $\qquad o$ je osa pásu přímek p,q

Výsledkem je přímka procházející středem úsečky AB. Odkaz na konstrukci v GeoGebře zde.

Nyní si uvedeme definice osy pásu.:

Definice 2.6 (Osa pásu, Prometheus): „Množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných rovnoběžek a, b $(a \neq b)$, *je osa o pásu* (a, b). $\{X \in \rho; |Xa| = |Xb|\} = o$." (Pomykalová, 2018, s. 94)

Definice 2.7 (Osa pásu, Didaktis): „Množinou bodů v rovině ρ, které mají od daných rovnoběžek p,q stejnou vzdálenost, je *osa rovinného pásu* o. $M = \{X \in \rho; |Xp| = |Xq|\}$.“ (Vondra, 2019, s. 86).

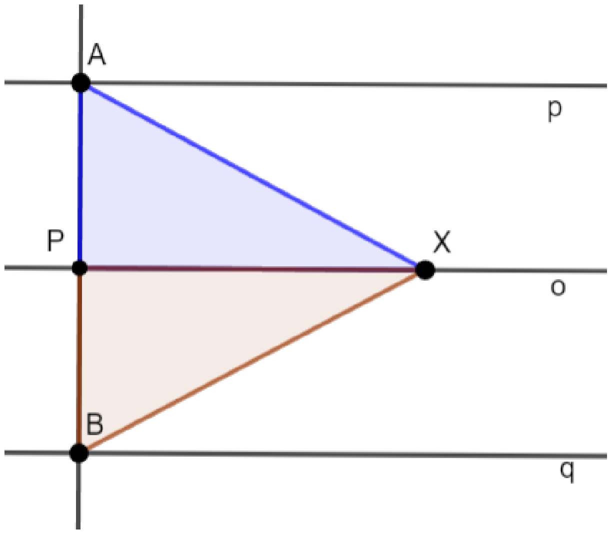
Definice se odlišují pouze značením rovnoběžek.

Definice 2.8 (Osa pásu, MFF): „Množina bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od daných navzájem různých rovnoběžek a, b, nazveme *osou rovinného pásu* určeného přímkami a, b.“ (Moravcová, 2021, s. 113)

2.1.4 Důkaz – rovnoběžky

Nyní tedy dokážeme, že množinou bodů stejně vzdálených od dvou rovnoběžných přímek je skutečně přímka, která je rovnoběžná s přímkami a prochází přesně mezi nimi.

Důkaz: Mějme dvě různé rovnoběžné přímky p a q a jejich osu pásu o, která je množina bodů X, pro něž platí $|Xp| = |Xq|$. Chceme dokázat, že o je rovnoběžná s přímkami p, q a zároveň je stejně daleko od obou přímek. Uvažujeme libovolný bod $P \in o$. Spustíme kolmici z bodu P na obě přímky. Průsečík kolmice a přímky p označme A, a průsečík kolmice a přímky q označme B. Vznikne nám úsečka AB. Bod P se středem úsečky AB a osa pásu jím prochází. Ověříme, zda je osa pásu také osou úsečky AB. Důkaz provedeme obdobně jako v kapitole 1. Uvažujme libovolný bod $X \in o_{AB} \wedge X \neq P$. Potom $\triangle\ APX \simeq \triangle\ BPX$ podle věty sss a tedy také $|\sphericalangle APX| = |\sphericalangle BPX|$. Zároveň však jsou úhly APX a BPX vedlejší, proto $|\sphericalangle APX| + |\sphericalangle BPX| = 180°$. Odtud plyne, že $|\sphericalangle APX| = 90°$ a tedy $o_{AB} \perp AB$. A tedy i osa pásu p a q je stejně vzdálená od obou přímek.



Obrázek 8: Osa pásu důkaz

2.2 Analytické řešení

2.2.1 Konkrétní příklady – různoběžky

Příklad 2.3: Nalezněte množinu bodů $\{X: |Xp| = |Xq|\}$, $p: x + y - 5 = 0$ a $q: 7x - y - 3 = 0$.

Řešení: Nejprve si ukažme vzorec pro nalezení vzdálenosti bodu od přímky. Obecně mějme přímku $p: ax + by + c = 0$ a bod $A[a_1, a_2]$. Z těchto vztahů dosadíme do vzorce:

$$|Ap| = \frac{|aa_1 + ba_2 + c|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

Teď dosadíme za naše zadané hodnoty:

$$|Xp| = \frac{|x + y - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$$

$$|Xq| = \frac{|7x - y - 3|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}}$$

Položíme tyto dvě rovnice do rovnosti

$$\frac{|x + y - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|7x - y - 3|}{\sqrt{7^2 + 1^2}}$$

$$\frac{|x + y - 5|}{\sqrt{2}} = \frac{|7x - y - 3|}{5\sqrt{2}}$$

Vynásobíme celou rovnici $5\sqrt{2}$ a dostaneme:

$$5|x + y - 5| = |7x - y - 3|$$

Odstraníme absolutní hodnoty a vzniknou nám dvě rovnice:

a) $5(x + y - 5) = (7x - y - 3)$
b) $5(x + y - 5) = -(7x - y - 3)$

Vyřešme nejprve první rovnici:

$$5(x + y - 5) = (7x - y - 3)$$
$$5x + 5y - 25 = 7x - y - 3$$
$$2x - 6y + 22 = 0$$
$$x - 3y + 11 = 0$$

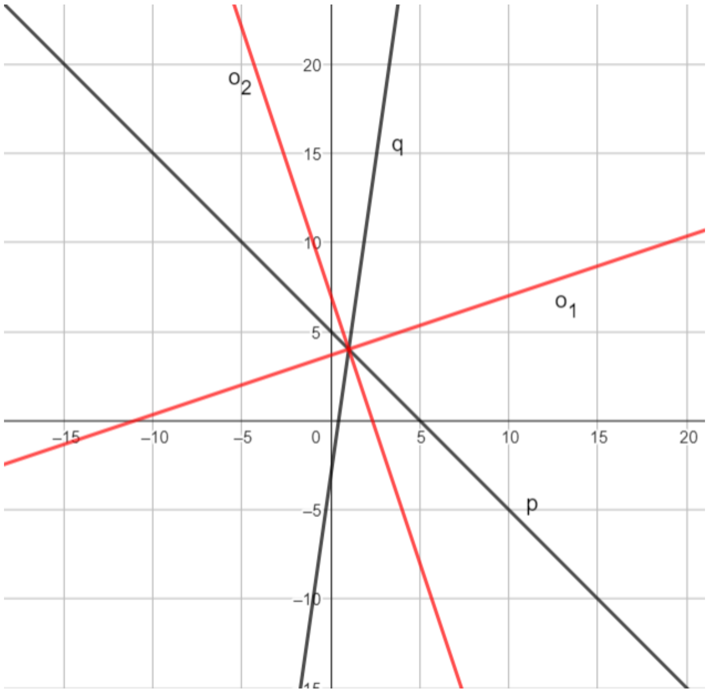
Teď se podíváme na rovnici druhou:

$$5(x + y - 5) = -(7x - y - 3)$$
$$5x + 5y - 25 = -7x + y + 3$$
$$12x + 4y - 28 = 0$$
$$3x + y - 7 = 0$$

Dostali jsme rovnice dvou přímek, které jsou osami úhlů přímek p a q

$$o_1: x - 3y + 11 = 0$$

$$o_2: 3x + y - 7 = 0$$



Obrázek 9: Osy úhlu př. 2.3

Kdybychom již předem věděli, že množina bodů stejně vzdálených od dvou přímek je přímka dělící úhel mezi těmito přímkami na dva shodné úhly, mohli bychom tento problém elegantně řešit pomocí vektorů. Ukážeme si, jak na to:

Příklad 2.4: Vyšetřete množinu bodů $\{X: |Xp| = |Xq|\}$, $p: x + y - 5 = 0$ a $q: 7x - y - 3 = 0$

Řešení: Jak jsme si již řekli výše, výsledkem je přímka dělící úhel mezi přímkami p a q na dva shodné úhly. Pro řešení budeme potřebovat zjistit směrové vektory přímek. Z obecné rovnice přímky můžeme jednoduše zjistit normálový vektor z koeficientů a a b.

Vektory:

Normálový vektor přímky p z koeficientů a,b je $\overrightarrow{n_p} = (1; 1)$

Normálový vektor přímky q z koeficientů a,b je $\overrightarrow{n_q} = (7; -1)$

Směrový vektor dostane prohozením souřadnic a změněním znaménka jedné souřadnice:

Směrový vektor přímky p je $\overrightarrow{s_p} = (-1; 1)$ nebo $\overrightarrow{s_p} = (1; -1)$

Směrový vektor přímky q je $\overrightarrow{s_q} = (1; 7)$ nebo $\overrightarrow{s_q} = (-1; -7)$

Teď tyto vektory potřebujeme sečíst. Abychom je mohli sečíst, musí mít stejnou velikost. Proto je přepíšeme na jednotkové vektory. Jednotkové vektory jsou vektory se stejným směrem a stejnou velikostí jedna. Toho dosáhneme tak, že každý vektor vydělíme jeho vlastní velikostí. Jakmile máme oba vektory převedené na jednotkové, můžeme je snadno sečíst, protože mají stejnou velikost. Tento krok nám umožní najít výsledný vektor, který bude směrovým vektorem přímky dělící úhel na dva shodné úhly. Použijeme směrové vektory $\overrightarrow{s_p} = (-1; 1)$ a $\overrightarrow{s_q} = (1; 7)$

Velikost vektorů:

$$\left|\overrightarrow{s_p}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\left|\overrightarrow{s_q}\right| = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Jak jsme si již řekli, pro získání jednotkového vektoru vydělíme vektor jeho velikostí a dostaneme:

Jednotkový vektor z $\overrightarrow{s_p} = \vec{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Jednotkový vektor z $\overrightarrow{s_q} = \vec{v} = \left(\frac{1}{5\sqrt{2}}; \frac{7}{5\sqrt{2}}\right)$

Sečteme:

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{5\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{7}{5\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{5}; \frac{6\sqrt{2}}{5}\right)$$

Získali jsme směrový vektor přímky dělící úhel na dva shodné úhly. Zbývá poslední část, vytvořit normálový vektor k vektoru $\vec{w}$. Normálovým vektorem bude $\overrightarrow{n_w} = \left(\frac{6\sqrt{2}}{5}; \frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$. Poté je potřeba zapsat obecnou rovnici přímky a dopočítat koeficient c. Pro dopočítání koeficientu c musíme dosadit bod ležící na přímce. Tím bude průsečík přímek p a q. $X[1; 4]$. Pro zkrácení postupu si jen průsečík uvedeme, výpočet přenecháme čtenáři. Dále dosadíme bod X a normálový vektor $\overrightarrow{n_w}$ do obecného předpisu přímky a dopočítáme koeficient c.

$$ax + by + c = 0$$

Dosazení normálového vektoru:

$$\frac{6\sqrt{2}}{5}x+\frac{2\sqrt{2}}{5}y+c=0$$

Dosazení průsečíku p, q:

$$\frac{6\sqrt{2}}{5}\cdot 1+\frac{2\sqrt{2}}{5}\cdot 4+c=0$$

$$c=-\frac{14\sqrt{2}}{5}$$

Dosadíme do zpět do rovnice:

$$\frac{6\sqrt{2}}{5}x+\frac{2\sqrt{2}}{5}y-\frac{14\sqrt{2}}{5}=0$$

$$6x+2y-14=0$$

$$3x+y-7=0$$

Můžeme si všimnout, že výsledek je stejný jako při předchozím výpočtu. Musíme dát ovšem pozor, protože tímto způsobem dostaneme pouze jednu osu. Pro výpočet druhé osy použijeme směrové vektory $\overrightarrow{s_p}=(1;-1)$ a $\overrightarrow{s_q}=(1;7)$. Zjistíme, že výsledkem je druhá osa. Výpočet ponecháme čtenáři. Tento postup není jednodušší než předchozí, jsou ale případy, kdy tento postup bude rychlý a efektivní.

2.2.2 Obecné odvození – různoběžky

Příklad 2.5: Vyšetřete množinu bodů $\{X: |Xp| = |Xq|\}$, kde p a q jsou různoběžné přímky.

Řešení: Vhodně zvolíme přímky $p: y = 0$ a $q: \sin(2\varphi)\, x - \cos(2\varphi)\, y = 0$

Dosadíme do vzorce:

$$|Xp| = |Xq|$$

$$|y| = \frac{|\sin(2\varphi)x - \cos(2\varphi)\, y|}{\sqrt{sin^2\varphi + cos^2\varphi}}$$

$$|y| = |\sin(2\varphi)\, x - \cos(2\varphi)\, y|$$

Řešení rozdělíme na dva případy:

1) $y = \sin(2\varphi)\, x - \cos(2\varphi)\, y$

2) $y = -(\sin(2\varphi)\,x - \cos(2\varphi)\,y)$

První případ:

$$y = \sin(2\varphi)\,x - \cos(2\varphi)\,y$$
$$\sin(2\varphi)\,x - y - \cos(2\varphi)\,y = 0$$
$$\sin(2\varphi)\,x - y(1 + \cos(2\varphi)) = 0$$

Výsledná osa o_1: $\sin\varphi \cdot x - \cos\varphi \cdot y = 0$. To nám však nic moc neřekne. Zkusíme z přímky vytvořit normálový a směrový vektor.

$$\overrightarrow{n_{o_1}} = (\sin(2\varphi)\,; -1 - \cos(2\varphi))$$

$$\overrightarrow{s_{o_1}} = (1 + \cos(2\varphi)\,; \sin(2\varphi))$$

Pomocí vzorců pro goniometrické funkce zkusíme přepsat směrový vektor:

$$\overrightarrow{s_{o_1}} = (1 + cos^2\varphi - sin^2\varphi; 2\sin\varphi\cos\varphi)$$
$$\overrightarrow{s_{o_1}} = (2cos^2\varphi; 2\sin\varphi\cos\varphi)$$
$$\overrightarrow{s_{o_1}} = (\cos\varphi\,; \sin\varphi)$$

Ze směrového vektoru napíšeme obecný tvar rovnice přímky. o_1: $\sin\varphi \cdot x - \cos\varphi \cdot y = 0$.

Druhý případ:

$$-(\sin(2\varphi)\,x - \cos(2\varphi)\,y) = y$$
$$-\sin(2\varphi)\,x - y + \cos(2\varphi)\,y = 0$$
$$-\sin(2\varphi)\,x - y(1 - \cos(2\varphi)\,y) = 0$$

Výsledná osa o_2: $-\sin(2\varphi) \cdot x - y(1 - \cos(2\varphi) \cdot y) = 0$. Stejně jako v předchozím případě nalezneme normálový a směrový vektor přímky a pomocí vzorců pro goniometrické funkce upravíme.

$$\overrightarrow{n_{o_2}} = (-\sin(2\varphi)\,; -1 + \cos(2\varphi))$$
$$\overrightarrow{s_{o_2}} = (-1 + \cos(2\varphi)\,; \sin(2\varphi))$$
$$\overrightarrow{s_{o_2}} = (-1 + cos^2\varphi - sin^2\varphi; 2\sin\varphi\cos\varphi)$$
$$\overrightarrow{s_{o_2}} = (-2sin^2\varphi; 2\sin\varphi\cos\varphi)$$
$$\overrightarrow{s_{o_2}} = (-\sin\varphi\,; \cos\varphi)$$

Ze směrového vektoru napíšeme obecný tvar rovnice přímky o_2: $\cos\varphi \cdot x - \sin\varphi \cdot y = 0$.

Víme že o_1 by měla být kolmá k o_2. Kolmost ověříme pomocí skalárního součinu dvou vektorů.

$$\overrightarrow{s_{o_1}} \cdot \overrightarrow{s_{o_2}} = (\cos\varphi \cdot (-\sin\varphi) + \sin\varphi \cdot \cos\varphi) = 0$$

Vidíme, že kolmost os platí. Poslední vlastnost, kterou musí osy splňovat, že dělí úhel na dva shodné úhly. Všimněme si, že toto je splněno. Pokud se podíváme na předpis přímky q: $\sin(2\varphi) \cdot x - \cos(2\varphi) \cdot y = 0$ a o_1: $\sin\varphi \cdot x - \cos\varphi \cdot y = 0$.

2.2.3 Konkrétní příklady – rovnoběžky

Příklad 2.6: Vyšetřete množinu bodů $\{X: |Xp| = |Xq|\}$, $p: x + y - 12 = 0$ a $q: x + y + 2 = 0$

Řešení: Použijeme stejný vzorec jako v předchozím příkladu:

$$|Ap| = \frac{|aa_1 + ba_2 + c|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

Dosadíme do vzorečku naše zadané hodnoty:

$$|Xp| = \frac{|x + y - 12|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$$

$$|Xq| = \frac{|x + y + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$$

Položíme tyto dvě rovnice do rovnosti:

$$\frac{|x + y - 12|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|x + y + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$$

$$\frac{|x + y - 12|}{\sqrt{2}} = \frac{|x + y + 2|}{\sqrt{2}}$$

$$|x + y - 12|\sqrt{2} = |x + y + 2|\sqrt{2}$$

$$|x + y - 12| = |x + y + 2|$$

Odstraníme absolutní hodnotu a řešení musíme rozdělit na dva případy pro rovnost, protože absolutní hodnota může být rovna kladnému i zápornému výrazu. Kdybychom toto nezohlednili nenalezli bychom všechna řešení.

1) $(x + y - 12) = (x + y + 2)$
2) $(x + y - 12) = -(x + y + 2)$

Nejprve první rovnice:

$$(x + y - 12) = (x + y + 2)$$

$$-12 = 2$$

Vidíme, že nemá řešení.

Druhá rovnice:

$$(x + y - 12) = -(x + y + 2)$$

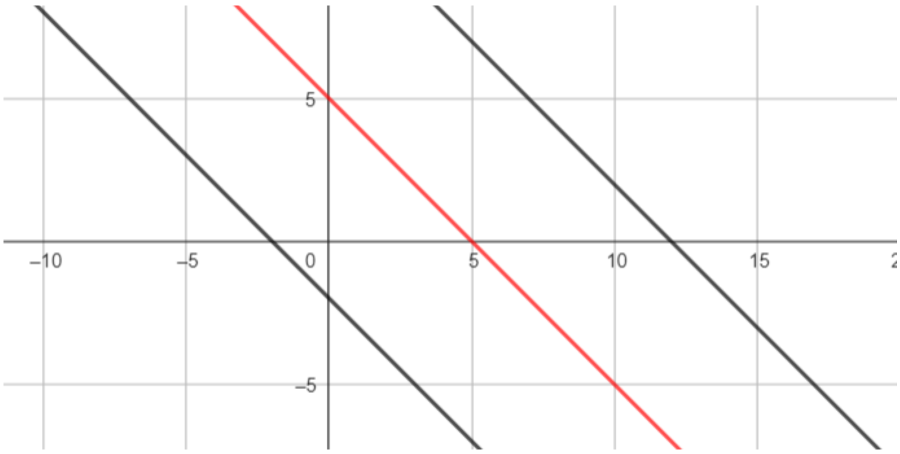
$$x + y - 12 = -x - y - 2$$

$$2x + 2y - 10 = 0$$

$$x + y - 5 = 0$$

Výsledkem je přímka, která je osou pásu přímek p a q

$$o: x + y - 5 = 0$$



Obrázek 10: Osa pásu př. 2.6

Při řešení tohoto příkladu můžeme opět využít výpočty pomocí vektorů. Stejně jako při výpočtu osy úhlu můžeme vycházet z předpokladu, že množina bodů stejně vzdálených od obou rovnoběžných přímek je přímka ležící přesně mezi nimi. Ze zadání lze snadno určit normálový vektor přímek p a q, který je pro obě přímky stejný, protože jsou rovnoběžné a mají stejný směr. Přesněji řečeno, když máme dvě rovnoběžné přímky, jejich normálový vektor je shodný. Tento vektor nám umožní jednoduše určit polohu přímky, která je rovnoměrně vzdálena od obou původních přímek. Tato vlastnost je klíčová při řešení, protože poskytuje jasnou představu o problému a umožňuje využít vlastnosti vektorů k nalezení požadovaného výsledku.

Normálový vektor přímek je $\vec{n} = (1; 1)$. Pro samotný výpočet nám stačí určit bod, kterým výsledná přímka prochází. Tento bod zjistíme jednoduše tak, že nalezneme průsečíky přímek p a q s osou x. Průsečíky jsou $P[12; 0]$ a $Q[-2; 0]$. Víme, že výsledná přímka prochází přesně mezi těmito body, takže nalezneme jejich střed $S_{PQ}[5; 0]$.

Nyní k samotnému výpočtu:

Z normálového vektoru $\vec{n} = (1; 1)$ napíšeme obecnou rovnici přímky $o: x + y + c = 0$.

Pro zjištění koeficientu c pouze dosadíme bod S_{PQ}

$$x + y + c = 0$$

$$5 + c = 0$$

$$c = -5$$

Koeficient c dosadíme zpět do rovnice $o: x + y - 5 = 0$. Vidíme, že se nám výsledek shoduje s postupem řešení z příkladu 2.3. V tomto příkladu je výpočet pomocí vektorů o dost jednodušší.

2.2.4 Obecné odvození – rovnoběžky

Příklad 2.7: Vyšetřete množinu bodů $\{X: |Xp| = |Xq|\}$,kde p a q jsou různé rovnoběžné přímky zadané $p: ax + by + c = 0$ a $q: ax + by + d = 0$.

Řešení: Dosadíme zadané hodnoty do vzorce pro výpočet vzdálenosti bodu od přímky:

$$|Xp| = |Xq|$$

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax + by + d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$|ax + by + c| = |ax + by + d|$$

Musíme rozdělit výpočet na dva případy pro rovnost, protože absolutní hodnota může být rovna kladnému i zápornému výrazu. Kdybychom toto nezohlednili nenalezli bychom všechna řešení.

1) $ax + by + c = ax + by + d$
2) $ax + by + c = -(ax + by + d)$

První případ:

$$ax + by + c = ax + by + d$$

$$c = d$$

V tomto případě je řešením prázdná množina. Případ $c = d$ by znamenal, že přímky p a q jsou totožné, což jsme obecně vyloučili v už v úvodu práce.

Druhý případ:

$$ax + by + c = -(ax + by + d)$$

$$ax + by + c = -ax - by - d$$

$$2ax + 2by + c + d = 0$$

$$ax + by + \frac{c+d}{2} = 0$$

Řešením je přímka, která je osou pásu p, q. Abychom ze dvou rovnoběžných přímek se stejnými koeficienty a, b zjistili jejich osu stačí se zaměřit na koueficienty c, d a zjistit jejich průměr.

Ukažme si, zda funguje obecný vzorec, který jsme odvodili na hodnotách z příkladu 2.6: $p: x + y - 12 = 0$ a $q: x + y + 2 = 0$

Zaměříme se, jak jsme si uvedli výše pouze na koeficienty c, d a vypočítáme jejich průměr.

$$\frac{c+d}{2} = \frac{-12+2}{2} = -5$$

Dosadíme zpět do rovnice s koeficienty a a b. Výsledkem je osa pásu $o: x + y - 5 = 0$ (viz Obrázek 1010)

3. Množina bodů s konstantní poměrem vzdáleností od dvou bodů – kružnice

V této kapitole se budeme zabývat množinou bodů v rovině, které mají konstantní poměr vzdáleností od dvou pevně daných bodů A a B, tj.:

$$\{X : \frac{|XB|}{|XA|} = k\}$$

Po úpravě možno zapsat i takto:

$$\{X : |XB| = k|XA|\}$$

Tento zápis definuje tzv. *Apolloniovu kružnici*. (Moravcová, 2021, s. 121)

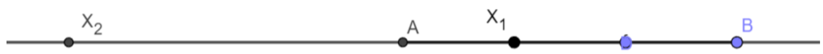
Pokud dosadíme za $k = 1$, nastane případ, který jsme již řešili v první kapitole, tj. osa úsečky. Na výslednou množinu se také můžeme podívat jako na přímku, která je zobecněná kružnice (s „nekonečným poloměrem“, resp. nulovou konstantní křivostí). Pro $k = 0$ by byl výsledkem pouze jeden jediný bod. Budeme tedy uvažovat nezáporné hodnoty k a zároveň k různá od 0 a 1 později vyšetříme že jde o kružnici přesněji Apolloniovu kružnici.

3.1 Konstrukční řešení

3.1.1 Odvození hypotézy

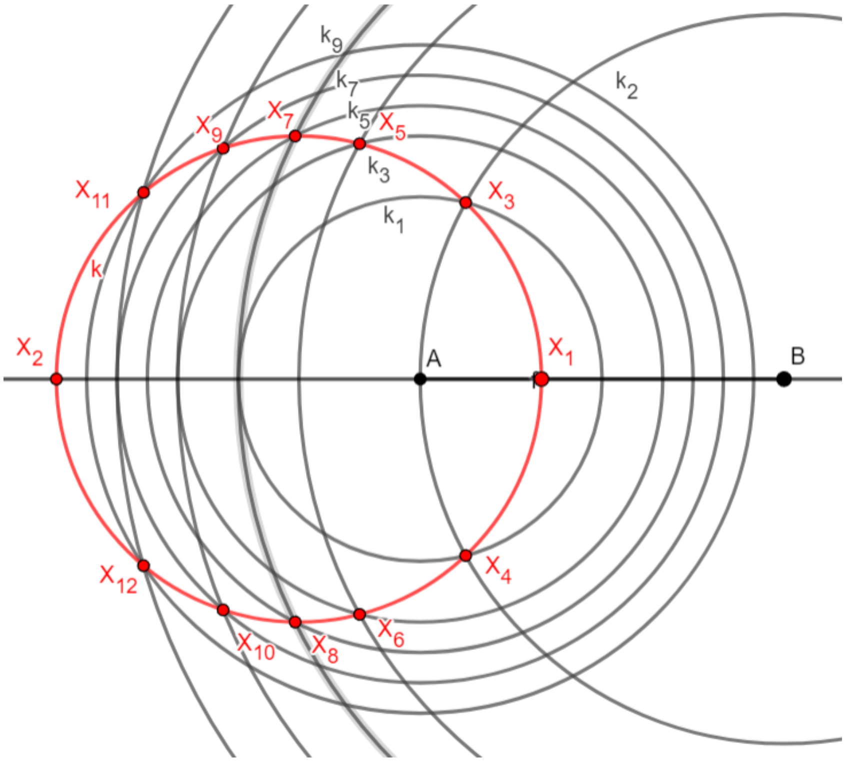
Příklad 3.1: Vyšetřete množinu bodů $\{X\colon |XB| = 2|XA|\}$

Řešení: Nejprve si pojďme uvědomit slovy co máme zadáno. Množinový předpis ze zadání si můžeme přepsat a říct si že hledáme množinu bodů, které mají dvojnásobnou vzdálenost od bodu B, než od bodu A. Zvolme si libovolnou velikost úsečky AB, např. $|AB| = 6$. Když se podíváme na zadání, tak rovnou můžeme jednoduše určit dva body X_1 a X_2 ležící na přímce AB. První bod získáme tak, že rozdělíme úsečku AB na tři stejné díly. V tomto příkladě je postup i výsledek triviální, každý díl bude mít velikost dva. Níže v popisu konstrukce si uvedeme, jak rozdělit libovolnou úsečku na tři stejné díly. Bod X_1 leží na prvním dílku od bodu A. Druhý bod X_2 leží ve vzdálenosti $|AB|$ od bodu A na opačné straně než bod B. Jinými slovy $|X_1A| = 2$ a $|X_2A| = 6$.



Obrázek 11: Apolloniova kružnice krajní body

Další body získáme za pomocí kružnic, z bodu A narýsujeme kružnici $k_1(A, r)$, kde $r = 3$, a z bodu B kružnici $k_2(B, 2r)$. Kružnice k_1 a k_2 se protnou ve dvou bodech X_3, X_4. Pro další body zvolíme jiné poloměry $r_2 = 4$, $r_3 = 4{,}5$, $r_4 = 5$, $r_5 = 5{,}5$ a vytvoříme kružnice z bodů A, B se stejným předpisem $k_n(A, r)$, $k_n(B, 2r)$. Vzniknou body $X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}$. Můžeme si všimnout, že body, které dostáváme připomínají kružnici. Kdybychom volili pro r libovolnou velikost v intervalu (2,6) dostaneme další body kružnice. Ponecháme čtenáři.



Obrázek 12: Konstrukce Apolloniovy kružnice

Dáno: úsečka AB

Popis konstrukce rozdělení úsečky na tři stejné dílky:

I. $\overleftrightarrow{AC} \in A \wedge \overleftrightarrow{AC} \nparallel \overline{AB} \wedge \sphericalangle CAB = 45°$ úhel CA může být i jiný

II. $l_1(A; 2); Y_1 \in l_1 \cap \overleftrightarrow{AC}$ $r = 2$ je zvolen mnou, může být samozřejmě jiný. Výsledek bude stejný.

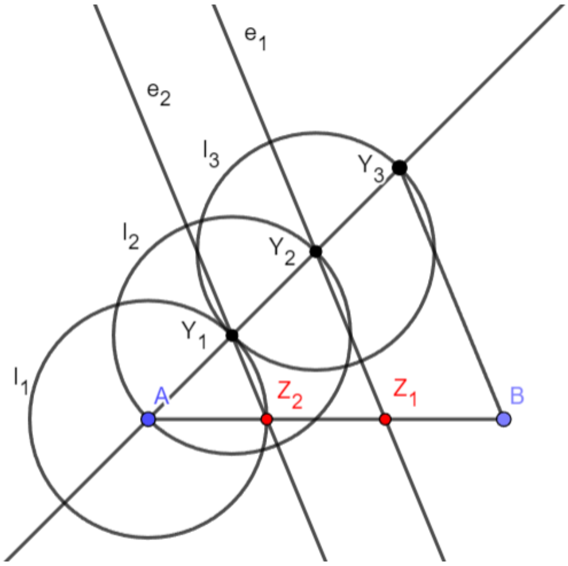
III. $l_2(Y_1; 2); Y_2 \in l_2 \cap \overleftrightarrow{AC}$

IV. $l_3(Y_2; 2); Y_3 \in l_3 \cap \overleftrightarrow{AC}$

V. $\overline{Y_3B}$

VI. $e_1 \parallel \overline{Y_3B} \wedge e_1 \in Y_2;\ Z_1 \in e_1 \cap \overline{AB}$

VII. $e_2 \parallel \overline{Y_3B} \wedge e_1 \in Y_1;\ Z_1 \in e_2 \cap \overline{AB}$



Obrázek 13: Rozdělení úsečky na tři stejné díly

Nyní se zaměříme na samotný popis konstrukce množiny bodů ze zadání. Navážeme na popis výše.

1) $k_1(A; r = |AB|);\ X_2 \in k_1 \cap \overleftrightarrow{AB}$
2) $k_2(A; 3), k_3(B; 6); X_3, X_4 \in k_2 \cap k_3$
3) $k_4(A; 4), k_5(B; 8); X_5, X_6 \in k_4 \cap k_5$
4) $k_6(A; 4{,}5), k_7(B; 9); X_7, X_8 \in k_6 \cap k_7$

Obdobně pro další body.

Výsledná množina je Apolloniova kružnice. Odkaz na konstrukci v GeoGebře naleznete zde

Nyní si uvedeme definice kružnice:

Definice 3.1 (Kružnice, Didaktis): „Množinou bodů v rovině ρ, které mají od daného bodu S danou vzdálenost r, je *kružnice* $k(S; r)$.“ (Vondra, 2019, s. 84)

Definice 3.2 (Kružnice, Prometheus): „*Kružnice* $k(S; r)$ je množina všech bodů, které mají od daného bodu S danou vzdálenost r.“ (Pomykalová, 2018, s. 90)

Definice se shodují.

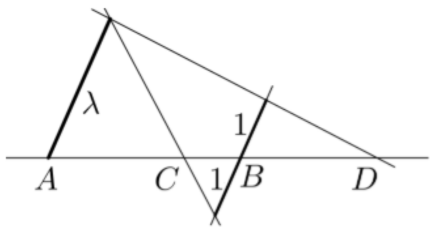
Definice 3.2 (Kružnice, MFF): „*Kružnice* je množina bodů ležících ve vzdálenosti r od bodu (středu) S.“ (Moravcová, 2021, s. 45)

3.1.2 Důkaz

Uvedeme si zde důkaz.

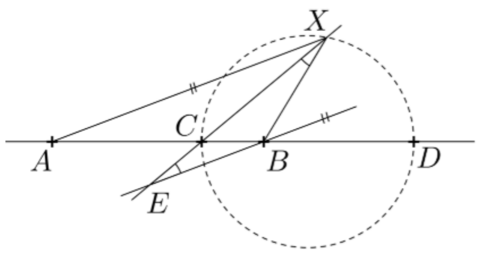
Důkaz: Celý důkaz i s obrázky je převzatý z učebnice (Moravcová, 2021, s. 122-123)

Nejprve ukážeme, že splňuje-li bod X daný vztah, potom je prvkem kružnice k nad průměrem CD. Body C, D nalezneme na přímce AB pomocí podobných trojúhelníků (viz Obrázek 14). Mimochodem, se jedná o body, jejichž dělicí poměr vzhledem k bodům A, B je roven$k$, resp. $-k$, a pro $k \neq 1$ je lze vždy sestrojit.



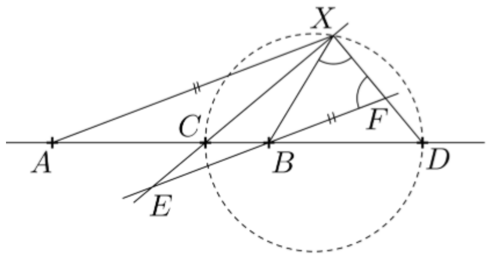
Obrázek 14: Konstrukce bodů C a D

Předpokládejme, že pro bod X různý od C, D platí $\frac{|AX|}{|BX|} = k$. Veďme bodem B přímku rovnoběžnou s AX (viz Obrázek 15). Její průsečík s přímkou CX označme E. Z podobnosti trojúhelníků AXC a BEC (uu; shodnost dvojic úhlů plyne ze shodnosti vrcholových úhlů, a z rovnoběžnosti přímek) plyne $\frac{|AX|}{|BE|} = \frac{|AC|}{|BC|} = k = \frac{|AX|}{|BX|} \Rightarrow |BE| = |BX|$.Trojúhelník BEX je tedy rovnoramenný a dle věty. Vnitřní úhly trojúhelníku přilehlé k základně jsou shodné platí $|\sphericalangle BXE| = |\sphericalangle BEX|$.



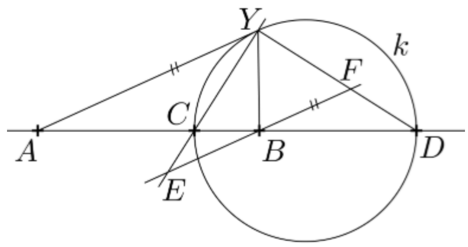
Obrázek 15 Rovnoramenný trojúhelník BEX

Obdobně z podobnosti trojúhelníků ADX a BDF, kde F je průsečíkem přímek BE a DX, odvodíme rovnost $|BF| = |BX|$. Poté bude velikost úhlů při vrcholech F a X zvýrazněných na obrázku 13 shodná.



Obrázek 16: Rovnoramenný trojúhelník BFX

Dle věty: „Velikost vnějšího úhlu při vrcholu A trojúhelníku ABC je rovna součtu velikostí vnitřních úhlů při vrcholech B a C" (Moravcová, 2021, s.28) je $2|\sphericalangle BXC| + 2|\sphericalangle BXD| = |\sphericalangle F\,BX| + |\sphericalangle XBE|$. Úhly FBX a XBE jsou vedlejší, proto $|\sphericalangle F\,BX| + |\sphericalangle XBE| = 180°$, a tedy $|\sphericalangle BXC| + |\sphericalangle BXD| = 90°$. Bod X proto náleží Thalétově kružnici k nad úsečkou CD (viz *Thalétova věta,* Moravcová, 2021, s. 51). Dále je třeba ukázat, že každý bod kružnice k má požadovanou vlastnost. Uvažujme libovolný bod $Y \in k$, tedy $|\sphericalangle CYD| = 90°$. Označme po řadě E, F průsečíky přímek CY , DY s přímkou vedenou bodem B rovnoběžně s přímkou AY (obr. 14).



Obrázek 17: K druhé části důkazu Apolloniovy kružnice

Z podobnosti dvojic trojúhelníků ACY , BCE a ADY , BDF (uu) vyplývá rovnost poměrů $\frac{|AY|}{|BE|} = \frac{|AC|}{|BC|} = k = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AY|}{|BF|}$, a tedy $|BE| = |BF|$. Jelikož je $|\sphericalangle DYC| = 90° = |\sphericalangle FYE|$, leží bod Y na Thalétově kružnici t nad EF, a tedy $|BE| = |BY|$.

Již víme, že $\frac{|AY|}{|BE|} = \frac{|AC|}{|BC|} = k$. Dosadíme-li za $|BE|$ výraz $|BY|$, dostáváme požadovaný vztah $\frac{|AY|}{|BY|} = k$.

3.2 Analytické řešení

3.2.1 Konkrétní příklady

Příklad 3.2: Vyšetřete množinu bodů $\{X\colon |XB| = 2|XA|\}$, $A[6,0]$ a $B[0,0]$

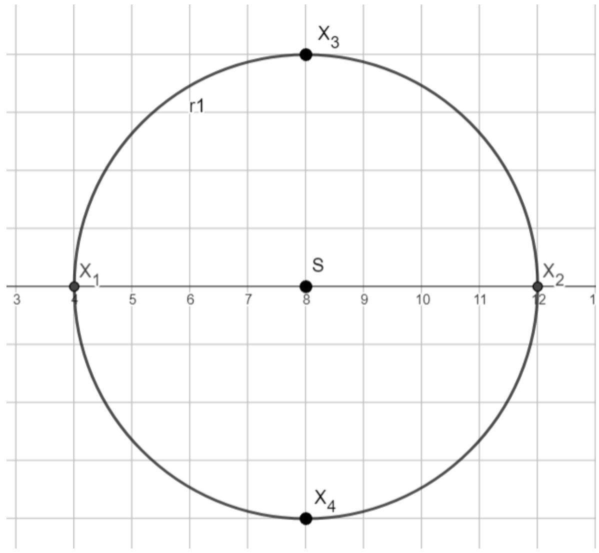
Řešení: Dosadíme zadané body do vzorců:

$$\begin{aligned}
|XB| &= 2|XA| \\
\sqrt{x^2+y^2} &= 2\sqrt{(x-6)^2+y^2} \\
x^2+y^2 &= 4[(x^2-12x+36)+y^2] \\
x^2+y^2 &= 4x^2-48x+144+4y^2 \\
3x^2-48x+144+3y^2 &= 0 \\
3(x^2-16x)+3y^2+144 &= 0 \\
3[(x-8)^2-64]+3y^2+144 &= 0 \\
3(x-8)^2-192+3y^2+144 &= 0 \\
3(x-8)^2+3y^2 &= 48 \\
(x-8)^2+y^2 &= 16
\end{aligned}$$

V pátém kroku použijeme postup pro doplnění na čtverec a potom dále upravujeme rovnici. Výsledná rovnice je ve středovém tvaru kružnice.

Ze středového tvaru rovnice kružnice můžeme snadno určit souřadnice středu kružnice $S[8,0]$ a poloměr $r = 4$.

Zjistíme průsečíky s osami a nalezneme nějaké zajímavé body, abychom mohli zakreslit do soustavy souřadnic. Průsečíky s osou x máme dva $X_1[4;0], X_2 = [12;0]$. Průsečíky s osou y nemá. Dále můžeme určit další dva body pomocí souřadnic středu kružnice a poloměru kružnice, a to tak že k y souřadnici středu přičteme a odečteme r, $X_3[8;4]$ a $X_4[8;-4]$.



Obrázek 18: Kružnice př. 3.2

Příklad 3.3: Napište rovnici množiny všech bodů, které mají od bodu $C[4,7]$ třikrát větší vzdálenost než od bodu $D[8,-1]$. Ukažte, že touto množinou je kružnice, určete její střed a poloměr.

Řešení: Nejprve si zadání převedeme do množivého zadání. $\{X: |XC| = 3 \cdot |XD|\}$. Použijeme vzorec pro vzdálenost dvou bodů a dosadíme

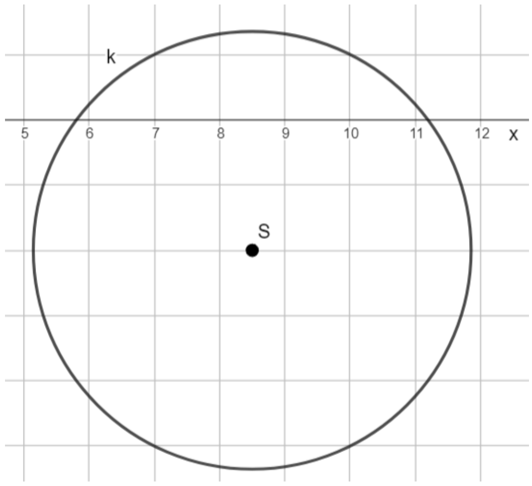
$$|XC| = 3|XD|$$
$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-7)^2} = 3\sqrt{(x-8)^2 + (y+1)^2}$$
$$(x-4)^2 + (y-7)^2 = 9[(x-8)^2 + (y+1)^2]$$
$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 14y + 49 = 9(x^2 - 16x + 64 + y^2 + 2y + 1)$$
$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 14y + 49 = 9x^2 - 144x + 576 + 9y^2 + 18y + 9$$
$$8x^2 - 136x + 8y^2 + 32y + 520 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 17x + 4y + 65 = 0$$

Výpočtem jsme dostali obecnou rovnici kružnice. Pro určení jejího středu a poloměru musíme převést obecný tvar rovnice na středový tvar rovnice kružnice. To uděláme doplněním na čtverec.

$$(x - \frac{17}{2})^2 - \frac{289}{4} + (y+2)^2 - 4 + 65 = 0$$
$$(x - \frac{17}{2})^2 + (y+2)^2 = \frac{289}{4} + 4 - 65$$

$$(x-\frac{17}{2})^2+(y+2)^2=\frac{45}{4}$$

Ze středové rovnice kružnice už můžeme určit střed $S\left[\frac{17}{2},-2\right]$ a poloměr $r=\frac{3\sqrt{5}}{2}$.



Obrázek 19: Kružnice př. 3.3

3.2.2 Obecné odvození

Příklad 3.4: Vyšetřete množinu bodů $\{X: |XB|=k|XA|\}$

Řešení: Dosadíme do rovince:

$$|XB|=k|XA|$$

$$\sqrt{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2}=k\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2}$$

$$(x-b_1)^2+(y-b_2)^2=k^2[(x-a_1)^2+(y-a_2)^2]$$

$$x^2-2xb_1+b_1^2+y^2-2yb_2+b_2^2=k^2(x^2-2xa_1+a_1^2+y^2-2ya_2+a_2^2)$$

$$x^2-2xb_1+b_1^2+y^2-2yb_2+b_2^2=k^2x^2-2k^2xa_1+k^2a_1^2+k^2y^2-2k^2ya_2+k^2a_2^2$$

$$x^2-k^2x^2-2xb_1+2k^2xa_1+y^2-k^2y^2-2yb_2+2k^2ya_2+b_1^2+b_2^2-k^2a_1^2-k^2a_2^2=0$$

$$(1-k^2)x^2+(1-k^2)y^2-2xb_1+2k^2xa_1-2yb_2+2k^2y+b_1^2+b_2^2-k^2a_1^2-k^2a_2^2=0$$

$$x^2+y^2+\left(\frac{-2b_1+2k^2a_1}{(1-k^2)}\right)x+\left(\frac{-2b_2+2k^2a_2}{(1-k^2)}\right)y+\frac{b_1^2+b_2^2-k^2a_1^2-k^2a_2^2}{(1-k^2)}=0$$

Zvolme koeficienty:

$$D = \left(\frac{-2b_1 + 2k^2a_1}{(1-k^2)}\right)$$

$$E = \left(\frac{-2b_2 + 2k^2a_2}{(1-k^2)}\right)$$

$$F = \frac{b_1^2 + b_2^2 - k^2a_1^2 - k^2a_2^2}{(1-k^2)}$$

Dosadíme koeficienty do vypočítané rovnice a získáme obecnou rovnici kružnice.

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Dále můžeme rovnici převést na středový tvar rovnice kružnice. Doplníme na čtverec.

Pro x:

$$x^2 + Dx = (x + \frac{D}{2})^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2$$

Pro y:

$$y^2 + Ey = (y + \frac{E}{2})^2 - \left(\frac{E}{2}\right)^2$$

Dosadíme.

$$(x + \frac{D}{2})^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 - \left(\frac{E}{2}\right)^2 + F = 0$$

$$(x + \frac{D}{2})^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F$$

Ze středové rovnice kružnice můžeme snadno získat střed kružnice $S = \left[-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right]$, a poloměr kružnice $r = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F}$. Po dosazení:

$$S = \left[\frac{b_1 - k^2a_1}{(1-k^2)}; \frac{b_2 - k^2a_2}{(1-k^2)}\right]$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{-b_1 + k^2 a_1}{(1 - k^2)}\right)^2 + \left(\frac{-b_2 + k^2 a_2}{(1 - k^2)}\right)^2 - \left(\frac{b_1^2 + b_2^2 - k^2 a_1^2 - k^2 a_2^2}{(1 - k^2)}\right)}$$

Pro ověření správnosti výpočtu si dosadíme zadané hodnoty z příkladu 3.3, kde $C[4,7]$, $D[8,-1]$ a $k = 3$.

Vypočítáme koeficienty D, E, F:

$$D = \left(\frac{-2b_1 + 2k^2 a_1}{(1 - k^2)}\right)$$

$$D = \left(\frac{-2 \cdot 4 + 2 \cdot 3^2 \cdot 8}{(1 - 3^2)}\right)$$

$$D = -17$$

$$E = \left(\frac{-2b_2 + 2k^2 a_2}{(1 - k^2)}\right)$$

$$E = \left(\frac{-2 \cdot 7 + 2 \cdot 3^2 \cdot (-1)}{(1 - 3^2)}\right)$$

$$E = 4$$

$$F = \frac{b_1^2 + b_2^2 - k^2 a_1^2 - k^2 a_2^2}{(1 - k^2)}$$

$$F = \frac{4^2 + 7^2 - 3^2 \cdot 8^2 - 3^2(-1)^2}{(1 - 3^2)}$$

$$F = 65$$

Pomocí vypočítaných koeficientů spočítáme střed kružnice S:

$$S = \left[-\frac{D}{2}; -\frac{E}{2}\right]$$

$$S = \left[-\frac{(-17)}{2}; -\frac{4}{2}\right]$$

$$S = \left[\frac{17}{2}; -2\right]$$

A také poloměr kružnice r:

$$r = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F}$$

$$r = \sqrt{\left(-\frac{17}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - 65}$$

$$r = \sqrt{\frac{45}{4}}$$

$$r = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Ještě dosadíme koeficienty do středového tvaru rovnice kružnice:

$$(x + \frac{D}{2})^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F$$

$$(x - \frac{17}{2})^2 + (y + 2)^2 = \left(-\frac{17}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - 65$$

$$(x - \frac{17}{2})^2 + (y + 2)^2 = \frac{45}{4}$$

Všechny výsledky sedí s výsledky z příkladu 3.3. Z toho vyplývá, že se nám podařilo odvodit správný vzorec (viz Obrázek 19: Kružnice př. 3.39).

4. Množina bodů s konstantním poměrem vzdálenosti od dvou přímek

V této kapitole se budeme zabývat vyšetřením množiny bodů v rovině, které splňují specifický geometrický vztah vůči dvěma přímkám p a q, tj.:

$$\{X : |Xp| = k|Xq|\}$$

Výsledná množina nemá žádné ustálené pojmenování. Řešení opět rozdělíme na dva případy. Přímky p a q jsou různoběžné, a kdy jsou přímky p a q rovnoběžné. Vyšetření této množiny zobecňuje množiny z kapitoly 2. Podobně jako v kapitole 3, kde jsme při volbě $k = 1$ získali jako výsledek osu úsečky, obdobně i v tomto případě bude při volbě $k = 1$ výsledkem osa úhlu, respektive osa pásu.

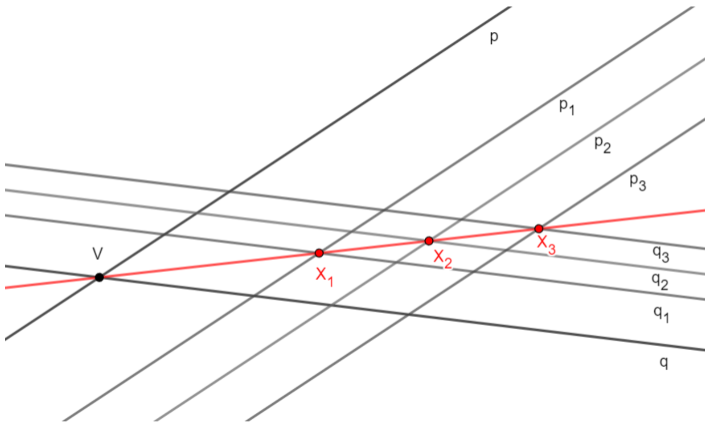
4.1 Konstrukční řešení

4.1.1 Odvození hypotézy – různoběžky

Příklad 4.1: Vyšetřete množinu bodů, které mají konstantní poměr vzdáleností od dvou různoběžných přímek. $\{X : |Xp| = k|Xq|\}$

Řešení: Pro řešení si určíme konkrétní poměr $k = 2$. Vzdálenost bodu X od přímky p bude dvakrát větší, než vzdálenost bodu X od přímky q. Abychom toto dodrželi, budeme využívat rovnoběžky s přímkami p a q. Rovnoběžky s přímkou p budou ve vzdálenost $2k; k \in (0; \infty)$ od přímky p a rovnoběžky s přímkou q budou ve vzdálenosti $k; k \in (0; \infty)$ od přímky q.

Vyšetříme pouze jedno řešení. Další budou obdobná a znázorněná v odkazu na geogebru níže. Pro konstrukci prvního bodu X_1 zvolíme za $k = 1$, sestrojíme přímku p_1 rovnoběžnou s přímkou p ve vzdálenosti 2 a přímku q_1 rovnoběžnou s přímkou q ve vzdálenosti 1. Bod X_1 je průsečíkem přímek p_1 a q_1. Popíšeme si zde ještě konstrukci jednoho bodu. Zvolíme další hodnotu $k = 1{,}5$, sestrojíme přímku p_2 rovnoběžnou s přímkou p ve vzdálenosti 3 a přímku q_2 rovnoběžnou s přímkou q ve vzdálenosti 1,5. Bod X_2 je průsečíkem přímek p_2 a q_2. Pro další body obdobně, ponecháme čtenáři.



Obrázek 20: Konstrukce bodů splňující vlastnost z př. 4.1

Dáno: různoběžné přímky p a q

Popis konstrukce:

1) $p_1 \parallel p \wedge |p_1 p| = 2$
2) $q_1 \parallel q \wedge |q_1 q| = 1$
3) $X_1 \in p_1 \cap q_1$
4) $p_2 \parallel p \wedge |p_2 p| = 3$
5) $q_2 \parallel q \wedge |q_2 q| = 1{,}5$
6) $X_2 \in p_2 \cap q_2$
7) $p_3 \parallel p \wedge |p_3 p| = 4$
8) $q_3 \parallel q \wedge |q_3 q| = 2$
9) $X_3 \in p_3 \cap q_3$

Obdobně pro další body.

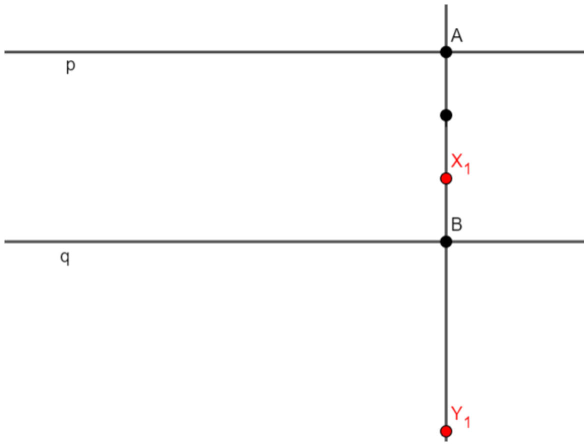
Kdybychom postupně konstruovali do „nekonečna“ další body, všimli bychom si, že výsledkem je přímka. Přikládám zde řešení v GeoGebře.

4.1.2 Odvození hypotézy – rovnoběžky

Příklad 4.2: Vyšetřete množinu bodů, které mají konstantní poměr vzdáleností od dvou rovnoběžných přímek. $\{X : |Xp| = k|Xq|\}$

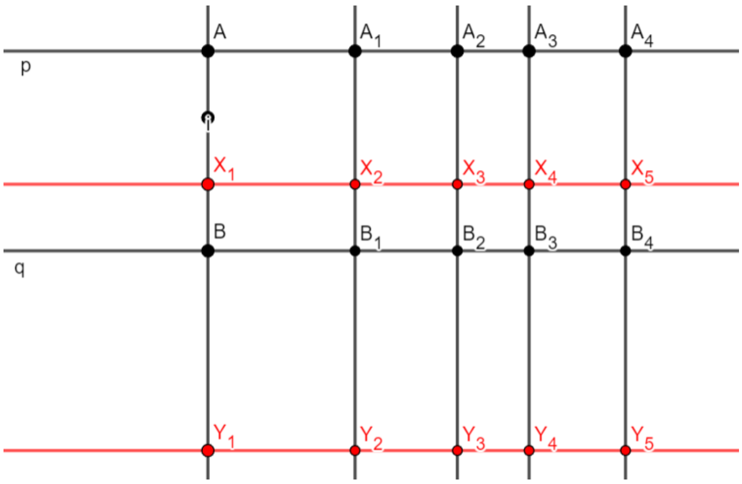
Řešení: Pro řešení zvolíme poměr $k = 2$. Narýsujeme dvě rovnoběžné přímky p, q v libovolné vzdálenosti od sebe. Na přímce p zvolíme libovolný bod $A \in p$. Z bodu A

spustíme kolmici k přímce q, průsečík kolmice a přímky q označíme jako bod B. Když se podíváme na zadání, tak rovnou můžeme jednoduše určit oba body splňující naši podmínku. Oba body jsou prvky přímky AB. První bod X_1 získáme tak, že rozdělíme úsečku AB na tři stejné díly. Bod X_1 leží dva díly od bodu A a jeden díl od bodu B. Druhý bod Y_1 leží na přímce AB za bodem B ve vzdálenosti $|AB|$.



Obrázek 21:Konstrkce bodů splňující vlastnost př. 4.2

Pro určení dalších bodů zvolíme na přímce p po řadě body A_1, A_2, A_3 a A_4 a budeme opakovat stejný postup.



Obrázek 22: Konstrukce dalších bodů př. 4.2

Už teď je zřejmé že výsledná množina se bude skládat ze dvou rovnoběžných přímek.

Dáno: přímky p, q

Popis konstrukce:

1) $A \in p$
2) $r \perp p \wedge r \in A$
3) $B \in r \cap q$
4) $\overline{AB}$
5) Rozdělení úsečky AB na tři stejné díly (popsáno v kapitole 3)
6) $X_1 \in \overline{AB} \wedge |AX_1| = 2|BX_1|$
7) $Y_1 \in \overleftrightarrow{AB} \wedge |AY_1| = 2|BY_1|$

Obdobně pro další body.

Zde přikládám odkaz na animaci v GeoGebře.

4.2 Analytické řešení

4.2.1 Konkrétní příklad – různoběžky

Příklad 4.3: Vyšetřete množinu bodů v rovině, které mají konstantní poměr vzdáleností od dvou různoběžných přímek. $\{X : |Xp| = k|Xq|\}$, kde $k = 2$, $p: x + y - 5 = 0$ a $q: 7x - y - 3 = 0$

Řešení:

$$|Xp| = 2|Xq|$$

$$\frac{|x + y - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\frac{|7x - y - 3|}{\sqrt{7^2 + 1^2}}$$

$$\frac{|x + y - 5|}{\sqrt{2}} = 2\frac{|7x - y - 3|}{5\sqrt{2}}$$

$$5|x + y - 5| = 2|7x - y - 3|$$

Rozdělíme na dva případy:

1) $5(x + y - 5) = 2(7x - y - 3)$
2) $5(x + y - 5) = -2(7x - y - 3)$

První případ:

$$5(x + y - 5) = 2(7x - y - 3)$$
$$5x + 5y - 25 = 14x - 2y - 6$$

$$9x - 7y + 19 = 0$$

Druhý případ:

$$5(x + y - 5) = -2(7x - y - 3)$$

$$5x + 5y - 25 = -14x + 2y + 6$$

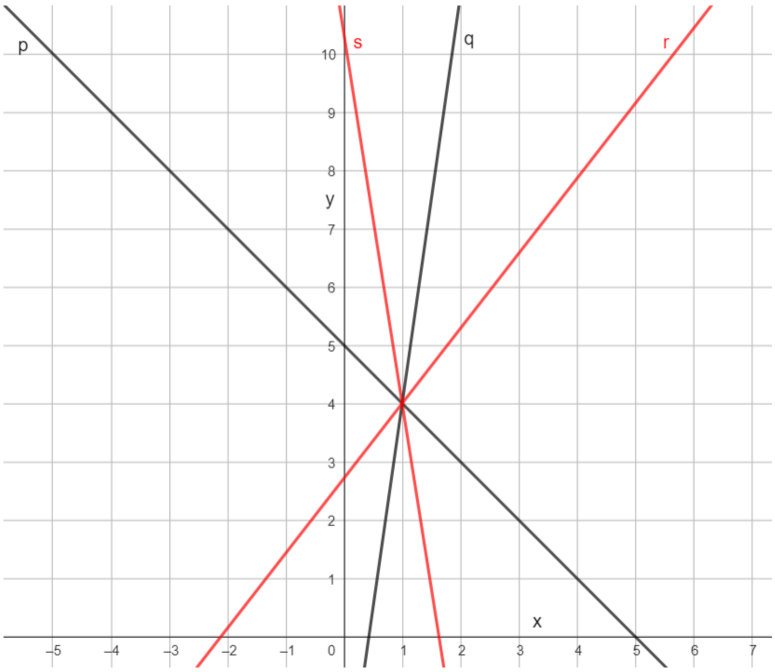
$$19x + 3y - 31 = 0$$

Závěr: Množina všech bodů v rovině, které mají konstantní poměr vzdáleností od dvou různoběžných přímek $p: x + y - 5 = 0$ a $q: 7x - y - 3 = 0$ s poměrem $k = 2$, je určena rovnicemi:

$$r: 9x - 7y + 19 = 0$$

$$s: 19x + 3y - 31 = 0$$

Tedy množina všech hledaných bodů je určena těmito dvěma různoběžnými přímkami.



Obrázek 23: Výsledek množiny bodů př. 4.3

4.2.2 Obecné odvození – různoběžky

Příklad 4.4: Vyšetřete množinu bodů v rovině, které mají konstantní poměr vzdáleností od dvou různoběžných přímek. $\{X : |Xp| = k|Xq|\}$. $p: ax + by + c = 0$ a $q: ax + by + d = 0$

Řešení: Předpokládejme že, přímky se protínají právě v jednom bodě, a to v počátku souřadnicového systému. Přímky můžeme přepsat, p: $a_1x + b_1y = 0$, q: $a_2x + b_2y = 0$

Dosadíme do zadání:

$$\frac{|a_1x + b_1y|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = k\frac{|a_2x + b_2y|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

$$|a_1x + b_1y| = k\frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}|a_2x + b_2y|$$

Zvolíme parametr λ:

$$\lambda = k\frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Přepíšeme rovnici:

$$|a_1x + b_1y| = \lambda|a_2x + b_2y|$$

Řešení rozdělíme na dva případy:

1) $(a_1x + b_1y) = \lambda(a_2x + b_2y)$
2) $(a_1x + b_1y) = -\lambda(a_2x + b_2y)$

První případ:

$$(a_1x + b_1y) = \lambda(a_2x + b_2y)$$

$$a_1x + b_1y = \lambda a_2x + \lambda b_2y$$

$$a_1x - \lambda a_2x + b_1y - \lambda b_2y = 0$$

$$(a_1 - \lambda a_2)x + (b_1 - \lambda b_2)y = 0$$

Druhý případ:

$$(a_1x + b_1y) = -\lambda(a_2x + b_2y)$$

$$a_1x + b_1y = -\lambda a_2x - \lambda b_2y$$

$$a_1 x + \lambda a_2 x + b_1 y + \lambda b_2 y = 0$$
$$(a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y = 0$$

Závěr: Množina všech bodů v rovině, které mají konstantní poměr vzdáleností od dvou různoběžných přímek $p: a_1 x + b_2 y = 0$ a $q: a_2 x + b_2 y = 0$ s poměrem k, je určena rovnicemi:

$$r: (a_1 - \lambda a_2)x + (b_1 - \lambda b_2)y = 0$$

$$s: (a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y = 0$$

Výsledkem jsou dvě různoběžné přímky závislé na koeficientu λ.

Stejně jako v předchozím případě ověříme správnost výpočtu dosazením konkrétních hodnot z již řešeného příkladu, kde $k = 2$, $p: x + y - 5 = 0$ a $q: 7x - y - 3 = 0$

Nejprve vypočítáme koeficient λ:

$$\lambda = k \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

$$\lambda = 2 \frac{\sqrt{1^2 + 1^2}}{\sqrt{7^2 + (-1)^2}}$$

$$\lambda = 2 \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}$$

$$\lambda = \frac{2}{5}$$

Nejprve dosadíme do přímky r:

$$r: (a_1 - \lambda a_2)x + (b_1 - \lambda b_2)y = 0$$

$$\left(1 - \frac{2}{5} \cdot 7\right)x + \left(1 - \frac{2}{5} \cdot (-1)\right)y = 0$$

$$-\frac{9}{5}x + \frac{7}{5}y = 0$$

$$9x - 7y = 0$$

Ještě musíme dosadit průsečík přímky p s přímkou q, $P_{pq}[1;4]$ a zjistit koeficient c, protože v obecném odvození jsme uvažovali průsečík přímek v počátku souřadnicového systému.

$$9x - 7y + c = 0$$

$$9 \cdot 1 - 7 \cdot 4 + c = 0$$

$$c = 19$$

Dosadíme nazpět a vyjde nám:

$$9x - 7y + 19 = 0$$

Což je totožný výsledek s výsledkem z příkladu 4.3.

Nyní dosadíme do přímky s:

$$s: (a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y = 0$$

$$\left(1 + \frac{2}{5} \cdot 7\right)x + \left(1 + \frac{2}{5} \cdot (-1)\right)y = 0$$

$$\frac{19}{5}x + \frac{3}{5}y = 0$$

$$19x + 3y = 0$$

Znovu dosadíme průsečík $P_{pq}[1;4]$ a vypočítáme koeficient d.

$$19x + 3y + d = 0$$

$$19 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + d = 0$$

$$d = -31$$

Dosadíme koeficient d zpět do rovnice.

$$19x + 3y - 31 = 0$$

Což je totožný výsledek s výsledkem z příkladu 4.3.

Oba výsledky jsou správné. Z toho vyplývá, že se nám podařilo odvodit správný vzorec (viz Obrázek 234).

4.2.3 Konkrétní příklad – rovnoběžky

Příklad 4.5: Vyšetřete množinu bodů, které mají konstantní poměr vzdáleností od dvou rovnoběžných přímek. $\{X : |Xp| = k|Xq|\}$, $k = 2$, $p: 3x - 2y + 6 = 0$ a $q: 3x - 2y - 12 = 0$

Řešení: Dosadíme do zadání:

$$|Xp| = 2|Xq|$$
$$\frac{|3x - 2y + 6|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = 2\frac{|3x - 2y - 12|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}}$$
$$|3x - 2y + 6| = 2|3x - 2y - 12|$$

Rozdělíme na dva případy:

1) $(3x - 2y + 6) = 2(3x - 2y - 12)$
2) $(3x - 2y + 6) = -2(3x - 2y - 12)$

První případ:

$$(3x - 2y + 6) = 2(3x - 2y - 12)$$
$$3x - 2y + 6 = 6x - 4y - 24$$
$$3x - 2y - 30 = 0$$

Druhý případ:

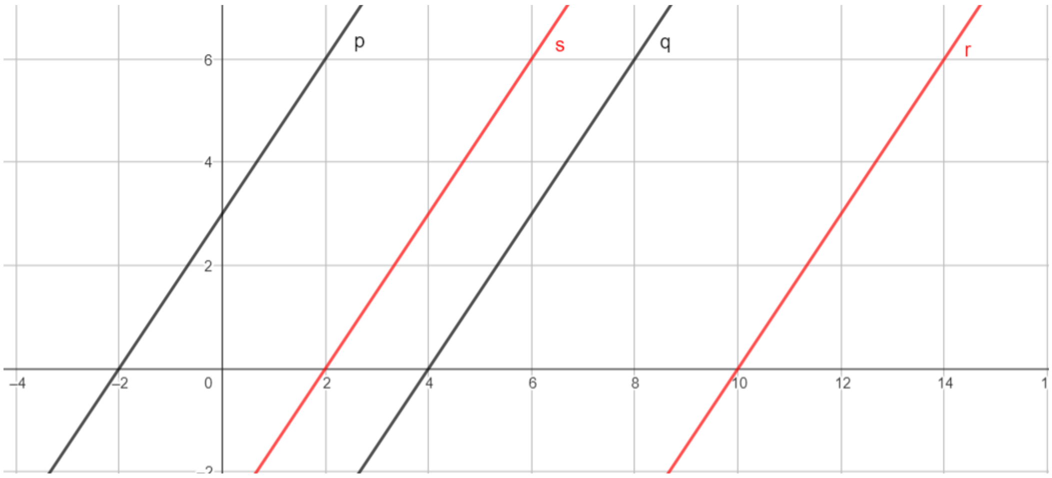
$$(3x - 2y + 6) = -2(3x - 2y - 12)$$
$$3x - 2y + 6 = -6x + 4y + 24$$
$$9x - 6y - 18 = 0$$
$$3x - 2y - 6 = 0$$

Závěr: Množina všech bodů v rovině, které mají konstantní poměr vzdáleností od dvou rovnoběžných přímek $p: 3x - 2y + 6 = 0$ a $q: 3x - 2y - 12 = 0$ s poměrem $k = 2$, je určena rovnicemi:

$$r: 3x - 2y - 30 = 0$$

$$s: 3x - 2y - 6 = 0$$

Tedy množina všech hledaných bodů je určena těmito dvěma rovnoběžnými přímkami.



Obrázek 24: Výsledná množina bodů př. 4.5

4.2.4 Obecné odvození – rovnoběžky

Příklad 4.6: Vyšetřete množinu bodů v rovině, které mají konstantní poměr vzdáleností od dvou rovnoběžných přímek. $\{X : |Xp| = k|Xq|\}$, $p: ax + by + c = 0$ a $q: ax + by + d = 0$

Řešení:

$$|Xp| = k|Xq|$$

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = k\frac{|ax + by + d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$|ax + by + c| = k|ax + by + d|$$

Rozdělíme na dva případy:

1) $(ax + by + c) = k(ax + by + d)$
2) $(ax + by + c) = -k(ax + by + d)$

První případ:

$$(ax + by + c) = k(ax + by + d)$$

$$ax + by + c = kax + kby + kd$$

$$ax - kax + by - kby = kd - c$$

$$ax(1 - k) + by(1 - k) = kd - c$$

$$ax + by = \frac{kd - c}{(1 - k)}$$

Druhý případ:

$$(ax + by + c) = -k(ax + by + d)$$

$$ax + by + c = -kax - kby - kd$$

$$ax + kax + by + kby = -kd - c$$

$$ax(1 + k) + by(1 + k) = -kd - c$$

$$ax + by = \frac{-kd - c}{(1 + k)}$$

Závěr: Množina všech bodů v rovině, které mají konstantní poměr vzdáleností od dvou rovnoběžných přímek $p: ax + by + c = 0$ a $q: ax + by + d = 0$ s poměrem k, je určena rovnicemi:

$$r: ax + by = \frac{kd - c}{(1 - k)}$$

$$s: ax + by = \frac{-kd - c}{(1 + k)}$$

Výsledkem jsou dvě rovnoběžné přímky závislé na koeficientu k.

Zkusme dosadit hodnoty z minulého příkladu 4.5, $k = 2$, $p: 3x - 2y + 6 = 0$ a $q: 3x - 2y - 12 = 0$

Nejprve do přímky r:

$$r: ax + by = \frac{kd - c}{(1 - k)}$$

$$3x - 2y = \frac{2 \cdot (-12) - 6}{(1 - 2)}$$

$$3x - 2y = \frac{-30}{-1}$$

$$3x - 2y - 30 = 0$$

Vidíme, že jsme vzorec odvodili správně, protože se výsledek shoduje s výsledkem z příkladu 4.5 (viz Obrázek 243).

Nyní dosadíme do přímky s:

$$s: ax + by = \frac{-kd - c}{(1 + k)}$$

$$3x - 2y = \frac{-2 \cdot (-12) - 6}{(1 + 2)}$$

$$3x - 2y = \frac{18}{3}$$

$$3x - 2y - 6 = 0$$

Vidíme, že i v tomto případě se výsledek shoduje s výsledkem z příkladu 4.3 (viz Obrázek 243). Takže odvozený vzorec je správný.

5. Množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od daného bodu a dané přímky – parabola

V této kapitole se zaměříme na analýzu množiny bodů v rovině, které jsou stejně vzdálené od pevně dané přímky d a bodu F, tj.:

$$\{X : |XF| = |Xd|\}$$

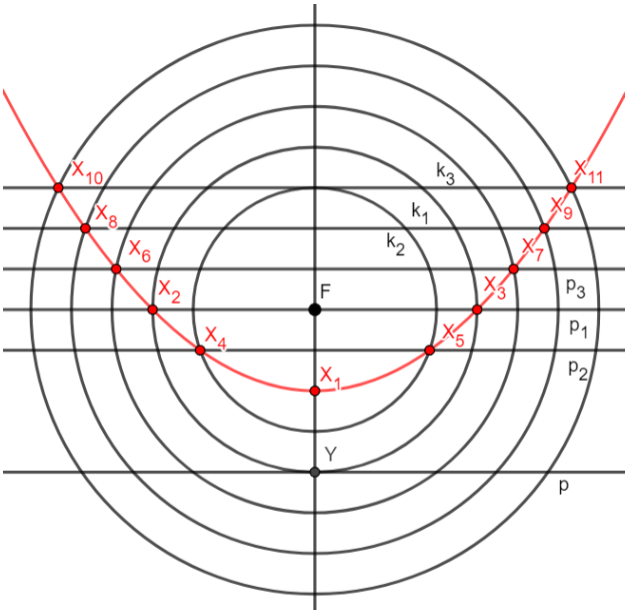
Naším cílem bude identifikovat a popsat geometrický tvar této množiny, který je v tomto případě parabolou. Podrobně prozkoumáme konstrukci této paraboly, její vlastnosti a analytické vyjádření, abychom získali hlubší porozumění tomuto geometrickému vztahu.

5.1 Konstrukční řešení

5.1.1 Obecné odvození

Příklad 5.1: Vyšetřete konstrukčně množinu bodů dané vlastnosti, které mají stejnou vzdálenost od pevně daného bodu F a přímky p.

Řešení: Zvolíme si libovolnou vzdálenost bodu F od přímky p, například $|Fp| = 4$. Prvním intuitivním bodem, který nás může napadnout, je bod získaný spuštěním kolmé úsečky z bodu F na přímku p a nalezením jejího středu. Označme tento bod X_1. Další dva body můžeme snadno určit tak, že vedeme přímku p_1, rovnoběžnou s přímkou p skrze bod F, a narýsujeme kružnici k_1 se středem v bodě F a poloměrem 4. Průnik rovnoběžky p_1 s kružnicí k_1 vzniká ve dvou bodech, které označíme X_2 a X_3. Pro nalezení dalších bodů budeme používat rovnoběžky s přímkou p a kružnice se středem v bodě F. Další body získáme tak, že narýsujeme přímku p_2, rovnoběžnou s přímkou p ve vzdálenosti $|p_2p| = 3$, a kružnici k_2 se středem v bodě F a poloměrem 3. Průnik kružnice k_2 s přímkou p_2 vzniká ve dvou bodech, které označíme X_4 a X_5. Postup pro nalezení dalších bodů bude obdobný. Vždy budeme hledat rovnoběžky s přímkou p a průniky těchto rovnoběžek s kružnicemi se středem v bodě F. Pokud bychom například chtěli najít další body, můžeme zvolit přímku p_3 rovnoběžnou s přímkou p ve vzdálenosti $|p_3p| = 5$ a kružnici k_3 se středem v bodě F a poloměrem 5. Průnik těchto dvou objektů nám opět poskytne další body, které označíme X_6 a X_7. Tímto způsobem můžeme pokračovat dle potřeby a získávat další body. Zvolíme další vzdálenosti $\{6; 7; 8\}$ a poloměry $\{6; 7; 8\}$.



Obrázek 25: Konstrukce paraboly

Popis konstrukce:

I. $p, F; |pF| = 4$

II. $(\overline{FY} \perp p) \wedge (Y \in p)$

III. $X_1 = S_{FY}$

IV. $p_1 \parallel p \wedge p_1 \in F; k_1(F; 4)$

V. $X_2, X_3 \in p_1 \cap k_1$

VI. $p_2 \parallel p \wedge |p_2 p| = 3; k_2(F; 3)$

VII. $X_4, X_5 \in p_2 \cap k_2$

VIII. $p_3 \parallel p \wedge |p_3 p| = 5; k_3(F; 5)$

IX. $X_6, X_7 \in p_3 \cap k_3$

Obdobně pro další body.

Z výše popsaného postupu vyplývá, že body, které jsme nalezli pomocí rovnoběžek s přímkou p a kružnic se středem v bodě F, jsou prvkem křivky zvané parabola. Konkrétně se jedná o parabolu, která má přímku p jako svou řídící. Bod F jako ohnisko. Pokud bychom pokračovali v rýsování dalších rovnoběžek a kružnic, všechny nalezené body by stále ležely na této parabole. Tímto způsobem tedy můžeme dospět k závěru, že všechny body určené výše popsaným postupem, vykreslí parabolu.

Odkaz na GeoGebru zde:

Nyní si uvedeme definici paraboly:

Definice 5.1 (Parabola, Prometheus): „V rovině je dán bod F a přímka q, která jím neprochází. Množina všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od bodu F a od přímky q, se nazývá *parabola*. Bod F se nazývá ohnisko, přímka q řídící přímka paraboly.“ (Kočandrle, Boček, 2009, s. 170)

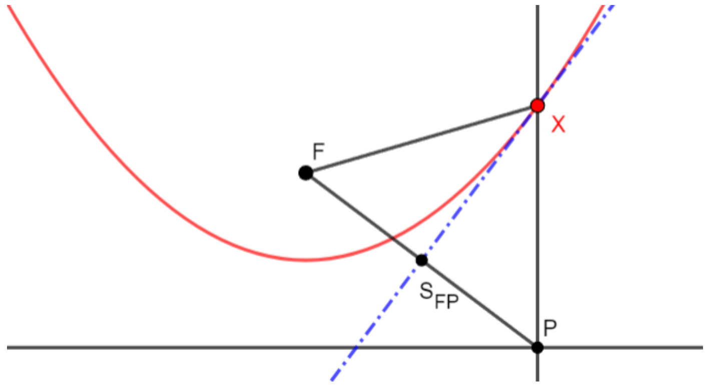
Definice 5.2 (Parabola, Didaktis): „*Parabola* je množina všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od daného bodu a dané přímky, která jimi neprochází. $|XF| = |Xp|$“ (Vondra, 2019, s. 86)

Obě definice jsou správné a adekvátní pro pochopení pojmu parabola. Definice 5.1 poskytuje více detailů a je vhodná pro čtenáře, kteří preferují slovní popis a konkrétní pojmenování prvků. Definice 5.2 je stručnější a přímější, využívající matematický zápis pro definování podmínky paraboly, což může být užitečné pro čtenáře se zájmem o formální matematiku.

Definice 5.3 (Parabola, MFF): „Množinu bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od daného bodu F jako od dané přímky d, přičemž $F \notin d$, nazveme *parabolou.* Bod F nazýváme ohniskem paraboly, přičemž d řídící přímkou paraboly a $|Fd|$ parametrem paraboly.“ (Moravcová, 2021, s. 119)

5.1.2 Důkaz

Důkaz: Mějme parabolu p, s řídící přímkou d a ohniskem F. Chceme dokázat, že parabola je množina bodů $\{X: |XF| = |Xd|\}$. Uvažujme libovolný bod $X \in p$, z bodu X. Spustíme kolmici na přímku d. Průsečík kolmice a přímky d označme P. Spuštěním kolmice na přímku d jsme zajistili nejkratší vzdálenost bodu X od přímky d, a proto platí $|Xd| = |XP|$. Z definice víme, že $|Xd| = |XF|$, proto platí $|XP| = |XF|$. Bod X je prvkem úsečky FP. Tím jsme dokázali, že $\{X: |XF| = |Xd|\}$ je parabola.



Obrázek 26: Důkaz parabola

Existenci paraboly lze dokázat i pomocí Quételetovy – Dandelionovi věty, kterou si uvedeme v následující kapitole. Důkaz nalezneme např. ve středoškolské učebnici deskriptivní geometrie (Pomykalová 2023, s. 273–274).

5.2 Analytické řešení

5.2.1 Konkrétní příklad

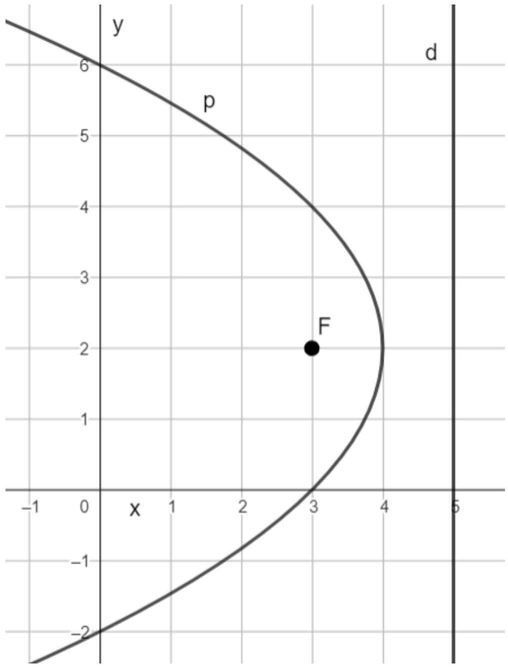
Příklad 5.2: Vyšetřete množinu bodů, které mají stejnou vzdálenost od pevně daného bodu $F[3; 2]$ a přímky $d: x = 5$.

Řešení: Pro vyšetření množiny ze zadání použijeme množinový zápis $\{X: |XF| = |Xd|\}$.

Dosadíme:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = |x-5|$$
$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = (x-5)^2$$
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 10x + 25$$
$$4x - 12 + y^2 - 4y = 0$$
$$(y-2)^2 - 4 + 4x - 12 = 0$$
$$(y-2)^2 = -4(x-4)$$

Vyšel nám vrcholový tvar rovnice paraboly, ze kterého určíme vrchol $V[4;2]$ a vzdálenost ohniska F od řídící přímky d; $p = 2$. Můžeme ještě dopočítat průsečíky s osami $P_x[3;0], P_{y_1}[0;6], P_{y_2}[0;-2]$. Zakreslíme parabolu do grafu



Obrázek 27: Parabola př. 5.2

5.2.2 Obecné odvození

Příklad 5.3: Vyšetřete množinu bodů, které mají stejnou vzdálenost od pevně daného bodu F a přímky d.

Řešení: Zadání přepíšeme do množinového zápisu $\{X: |Xd| = |XF|\}$, vzdálenost přímky d od bodu F zvolíme obecně jako parametr p. $|Ad| = p$.

Vhodně bod i přímku umístíme do soustava souřadnic např. $A\left[0,\frac{p}{2}\right], d: y = -\frac{p}{2}$

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \left|y - \left(-\frac{p}{2}\right)\right|$$

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}$$

$$x^2 = 2py$$

Výslednou rovnici můžeme zobecnit i pro střed, který není v počátku a upravíme ji.

$$(x - m)^2 = 2p(y - n)$$

6 Množina bodů s konstantním poměrem vzdálenosti od bodu a přímky – kuželosečky

Kuželosečky můžeme definovat jako množiny bodů, které mají konstantní poměr vzdálenosti od určitého bodu a přímky. Tento poměr označujeme jako k. Matematicky lze tuto definici vyjádřit jako množinu bodů X, pro které platí $\{X: |XF| = k|Xd|\}$. F je pevný bod (ohnisko) a d je pevná přímka (řídicí přímka). Pokud je tento poměr roven 1 ($k = 1$), jedná se o přesnou definici paraboly. Tuto situaci jsme podrobně prozkoumali v kapitole 5.

V následujících kapitolách se budeme věnovat různým druhům kuželoseček, které vzniknou, když hodnota k bude jiná než 1. Každá hodnota k představuje jiný typ kuželosečky.

6.1 Elipsa

V této kapitole se budeme zabývat množinou bodů v rovině, které mají konstantní poměr vzdáleností od pevně daného bodu F a pevně dané přímky d, tj.:

$$\{X : |XF| = k|Xd|\}$$

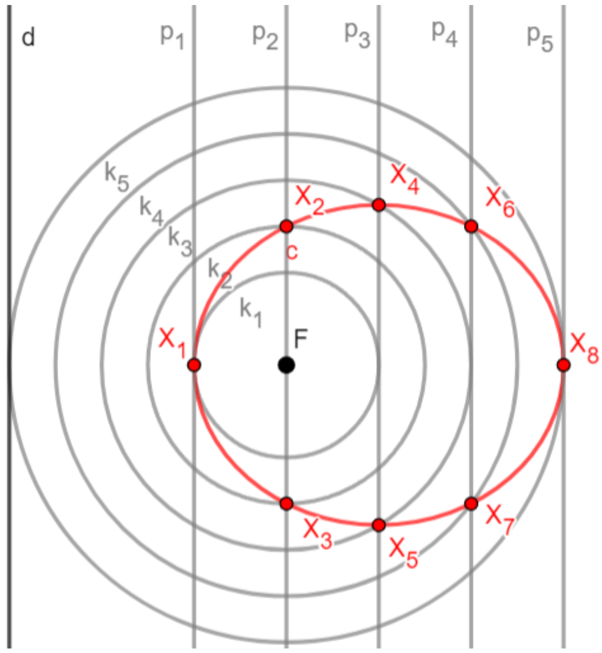
k je konstanta v intervalu $(0; 1)$. Cílem této kapitoly je identifikovat a analyzovat geometrický tvar této množiny, popsat její vlastnosti a nalézt její analytické vyjádření.

6.1.1 Obecné odvození množiny bodů, které mají vzdálenost od pevného bodu rovnu polovině vzdálenosti od pevné přímky

Příklad 6.1: Vyšetřete množinu bodů danou $\left\{X: |XF| = \frac{1}{2}|Xd|\right\}$

Řešení: Vhodně si zvolíme hodnoty, aby se nám dobře rýsovalo. Narýsujeme libovolnou svislou přímku d v rovině a bod F, který je od přímky d ve vzdálenosti 3. Pokud se podíváme na zadání, tak vzdálenost bodu $|Xd|$ musí být dvojnásobně dlouhá než $|XF|$. Stejně jako u konstrukčního řešení paraboly budeme využívat kružnic a přímek rovnoběžných s přímkou d. U paraboly jsme volili velikost poloměru a vzdálenost rovnoběžky stejnou. V tomto případě musíme zvolit vzdálenost rovnoběžky dvakrát větší, než je poloměr kružnice. Nejprve zvolme kružnici k_1 se středem F a poloměrem 1 a přímku p_1 ve vzdálenosti 2 od přímky d. Kružnice k_1 se protne s přímkou p_1 právě v jednom bodě X_1. Další kružnici zvolíme o něco větší, k_2 se středem F a poloměrem 1,5, a přímku p_2 ve vzdálenosti 3. Průsečíkem budou bodyX_2 a X_3. Tento postup budeme opakovat ještě několikrát s kružnicemi k se středem F a poloměry $2, 2{,}5$ a 3 a s přímkami p ve vzdálenostech $4, 5$ a 6. Průsečíky, které postupně vzniknou, označme X_4, X_5, X_6, X_7 a X_8.

Kdybychom zvolili další kružnici, například k_6 se středem F a poloměrem 4, a rovnoběžku p ve vzdálenosti 8, kružnice i přímka by splňovaly podmínku ze zadání, ale neměly by žádný společný průsečík.



Obrázek 28: Konstrukce Elipsy $|XF| = \frac{1}{2}|Xd|$

Dáno: přímka d, bod F

Popis konstrukce:

1) $X_1 = k_1(F; 1) \cap p_1; p_1 \parallel d \wedge |p_1 d| = 2$
2) $X_{2,3} = k_2(F; 1{,}5) \cap p_2; p_2 \parallel d \wedge |p_2 d| = 3$
3) $X_{4,5} = k_3(F; 2) \cap p_3; p_3 \parallel d \wedge |p_3 d| = 4$

4) $X_{6,7} = k_4(F; 2{,}5) \cap p_4; p_4 \parallel d \wedge |p_4 d| = 5$
5) $X_8 = k_5(F; 3) \cap p_5; p_5 \parallel d \wedge |p_5 d| = 6$

Pokud budeme nadále volit kružnice s poloměrem $r = (1; 3)$ a rovnoběžky ve vzdálenosti $|pd| = (2; 6)$. Bude se nám postupně vykreslovat množina bodů, které říkáme elipsa.

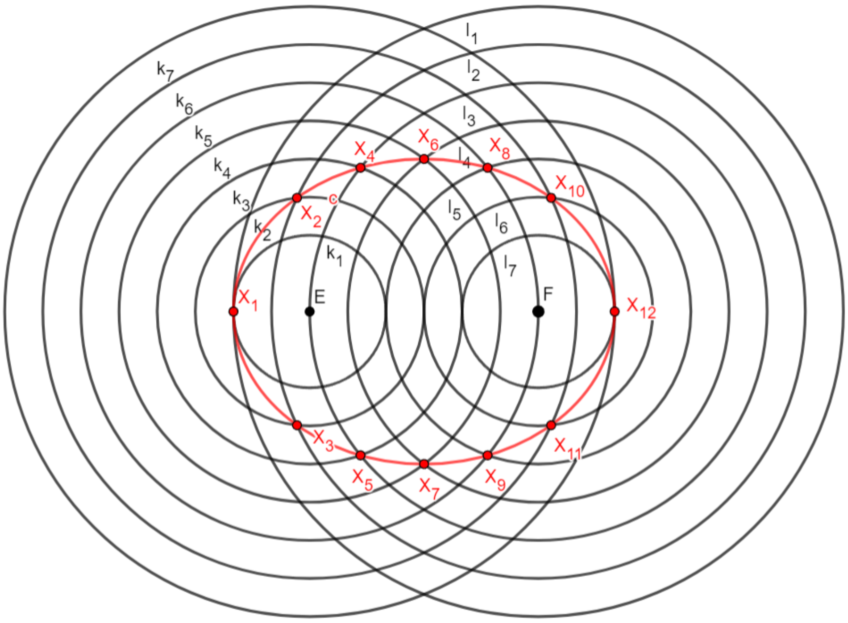
Odkaz na konstrukci v GeoGebře naleznete zde.

6.1.2 Obecné odvození množiny bodů, které mají od dvou daných různých bodů konstantní součet vzdáleností

Příklad 6.2: Vyšetřete množinu bodů $\{X: |XE| + |XF| = k\}$

Řešení: Zvolíme dva body v rovině, E a F, a jejich vzdálenost, například $|EF| = 6$. Dále si musíme určit konstantu, která musí být větší než vzdálenost mezi body E a F. Vybereme například konstantu $k = 10$. Abychom dodrželi tuto konstantní vzdálenost, budeme využívat kružnice. Konstrukce bude probíhat následujícím způsobem: nejprve narýsujeme kružnici $k(E; r)$ se středem v bodě E a poloměrem r. Poté narýsujeme druhou kružnici $l(F; 10 - r)$ se středem v bodě F a poloměrem $10 - r$. Tímto postupem zajistíme, že vzdálenost mezi body na těchto dvou kružnicích bude vždy rovna konstantě 10. Volba poloměru $10 - r$ pro druhou kružnici je důležitá, aby součet vzdáleností od bodů E a F byl konstantní a roven 10.

Přesuňme se již k samotné konstrukci. Poloměry musíme volit tak, aby měly alespoň jeden průsečík. Narýsujme první kružnici $k_1(E; 2)$ a $l_1(F; 8)$. Kružnice k_1 a l_1 se protnou právě v jednom bodě, označme ho X_1. Nyní zvolme $k_2(E; 3)$ a $l_2(F; 7)$, kružnice k_2 a l_2 se protnou ve dvou bodech. Body označme X_2 a X_3. Pro další body zvolme po řadě kružnice $k(E; 4; 5; 6; 7; 8)$ a kružnice $l(F; 6; 5; 4; 3; 2)$. Body po řadě označíme $X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}$.



Obrázek 29: Ohnisková konstrukce elipsy

Kdybychom pokračovali v konstrukci dalších bodů zjistili bychom že výsledná množina vykresluje elipsu. Zde přikládám odkaz na GeoGebru s animací vykreslení elipsy podle ohniskové definice.

Dáno: $E, F\,; |EF| = 6$

Popis konstrukce:

1) $X_1 : X_1 = k_1(E;2) \cap l_1(F;8)$
2) $k_2(E;3); l_2(F;7) \wedge\ X_{2,3}, X_3 \in k_2 \cap l_2$
3) $k_3(E;4); l_3(F;6) \wedge\ X_4, X_5 \in k_3 \cap l_3$
4) $k_4(E;5); l_4(F;5) \wedge\ X_6, X_7 \in k_4 \cap l_4$
5) $k_5(E;6); l_5(F;4) \wedge\ X_8, X_9 \in k_5 \cap l_5$
6) $k_6(E;7); l_6(F;3) \wedge\ X_{10}, X_{11} \in k_6 \cap l_6$
7) $k_7(E;8); l_7(F;2) \wedge X_{12} \in k_7 \cap l_7$

Nyní si uvedeme definici elipsy.:

Definice 6.1 (Elipsa, Didaktis): „*Elipsa* je množina bodů roviny, které mají od dvou daných bodů konstantní součet vzdáleností větší než vzdálenost těchto bodů. $|XE| + |XF| =$ konst.“ (Vondra, 2019, s. 86)

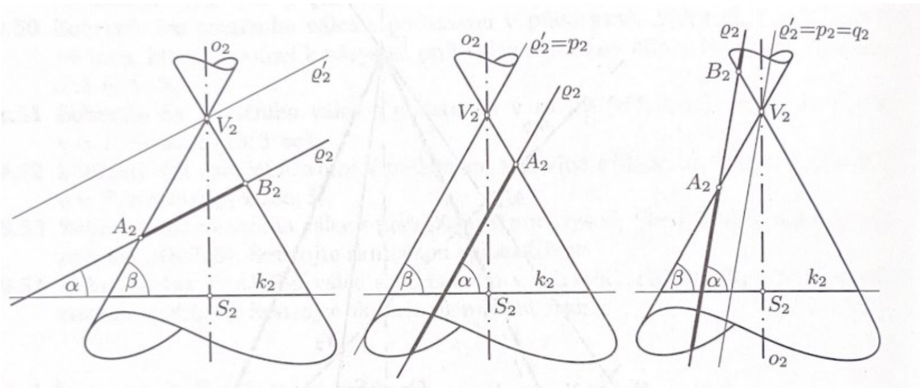
Definice 6.2 (Elipsa, Prometheus): „V rovině jsou dány dva body E, F. Množina všech bodů X roviny, pro které se součet $|XE| + |XF|$ vzdáleností bodu X od bodů E, F rovná danému číslu většímu než $|EF|$, se nazývá *elipsa*. Body E a F se nazývají ohniska elipsy.“ (Kočandrle, Boček, 2009, s. 156)

Obě definice správně popisují elipsu. Definice 6.1 je stručnější a využívá přímý matematický zápis, což může být užitečné pro rychlé pochopení podmínky. Definice 6.2 je více rozvinutá a poskytuje podrobnější popis a pojmenování prvků, což může být přínosné pro lepší porozumění.

Definice 6.3 (Elipsa, MFF): „Množina bodů v rovině, které mají od dvou daných různých bodů E, F konstantní součet vzdáleností roven v, kde $v > |EF|$, nazveme *elipsou*. Body E, F nazýváme ohniska elipsy.“ (Moravcová, 2021, s. 119)

6.1.3 Důkaz

Důkaz, že množina všech bodů $\{X: |XE| + |XF| = konst.\}$ je elipsa, může být elegantně proveden pomocí *Quételetovi – Dandelionovi věty 1*: „Řez rotační kuželové plochy rovinami, které nejsou vrcholové, jsou kuželosečky s ohnisky v dotykových bodech kulových ploch vepsaných kuželové ploše a dotýkajících se roviny řezu.“ (Pomykalová, 2023, s. 272)

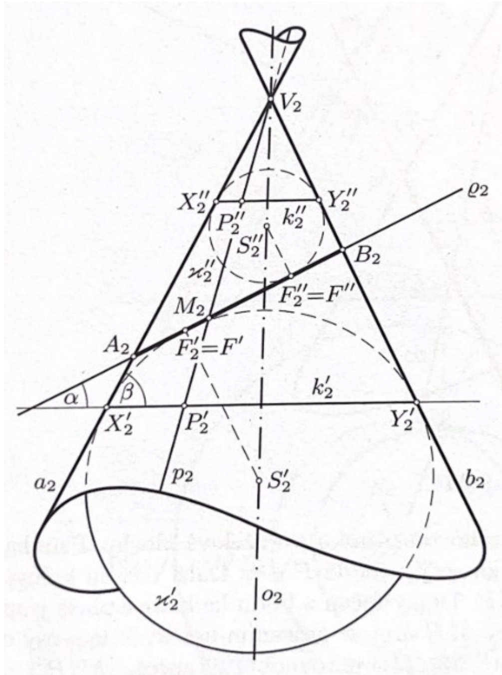


Obrázek 30: Quételetova – Dandelionova věta (Pomykalová, 2023, s. 272)

Jestliže rovina ρ není rovnoběžná se žádnou povrchovou přímkou rotační kuželové plochy, pak kuželosečkou řezu je elipsa. Podle Quételetovy – Dandelinovy věty jsou její ohniska dotykové body vepsaných kulových ploch do kuželové plochy, které se taktéž dotýkají roviny ρ.

Důkaz: Důkaz je inspirovaný podle důkazu z knihy (Pomykalové, 2023, s. 264-266 a 273-274)

Při důkazu budeme čerpat z obr. 28. Je dána kuželová plocha, která má osu o v nárysně, rovina řezu ρ je k nárysně kolmá. Nárysem roviny řezu je přímka ρ_2. Odchylka α roviny ρ_2 od roviny libovolné povrchové kružnice a odchylka β povrchových přímek kuželové plochy od této roviny jsou ve vztahu $\alpha < \beta$. Nárysy a_2, b_2 obrysových přímek a, b kuželové plochy protíná přímka ρ_2 v bodech A_2, B_2. Úsečka A_2B_2 je nárysem řezu kuželové plochy rovinou ρ.



Obrázek 31: Důkaz elipsa (Pomykalová, 2023, s. 273)

Do kuželové plochy vepíšeme kulové plochy χ' a χ'' tak, aby se dotýkaly kuželové plochy i roviny ρ. Středy S' a S'' těchto kulových ploch jsou prvkem osy kuželové plochy. Nárysem kulových ploch jsou kruhy ${\chi_2}'$ a ${\chi_2}''$ o středech ${S_2}' \in o_2$ a ${S_2}'' \in o_2$ dotýkající se přímek a_2, b_2 v bodech ${X_2}'$, ${Y_2}'$ a ${X_2}''$, ${Y_2}''$. Úsečky ${X_2}'{Y_2}'$ a ${X_2}''{Y_2}''$ jsou nárysy k_2' a k_2'' povrchových kružnic k' a k'', podél kterých se kulové plochy dotýkají kuželové plochy. Dotykové body kulových ploch s rovinou ρ jsou body F' a F'' ležící v nárysně; $F' = {F_2}'$, $F'' = {F_2}''$. Libovolným bodem M řezu vedeme povrchovou přímku p kuželové plochy. Přímka $p = \overleftrightarrow{MV}$. Přímka p se dotýká kulové plochy χ' v bodě $P' \in k'$. Další tečnou plochy χ' procházející bodem M je přímka MF'. Protože délky tečen vedených z bodu ke kulové ploše jsou stejné, je $|MP'| = |MF'|$. Přímka p se dotýká také kulové plochy χ'', a to v bodě $P'' \in k''$. Tečnou plochy χ'' je i přímka MF'', a proto $|MP''| = |MF''|$. Pro součet délek $|MF'|$ a $|MF''|$ tedy platí:

$$|MF'| + |MF''| = |MP'| + |MP''| = |P'P''| = |S'S''|$$

Krajní body úsečky AB jsou rovněž body řezu, a proto

$$|AF'| + |BF''| = |AX'| + |AX''| = |X'X''| = |S'S''|$$

resp.

$$|BF'| + |BF''| = |BY'| + |BY''| = |Y'Y''| = |S'S''|$$

Protože je ale $|AF'| = |BF''|$, dostáváme $|S'S''| = |BF''| + |AF''| = |AB|$.

Bod M řezu tak splňuje podmínku $|MF'| + |MF''| = |AB|$. Neboli součet vzdáleností libovolného bodu M řezu od daných bodů F' a F'' je konstantní a rovná se délce $|AB| > |F'F''|$. To znamená, že řezem je elipsa s ohnisky v bodech F' a F''.

6.1.4 Konkrétní příklad – konstantní poměr vzdáleností

Příklad 6.3: Vyšetřete množinu bodů, které mají vzdálenost od pevného bodu F rovnu polovině vzdálenosti od pevné přímky d. $d: x = -2$, $F[1; 0]$

Řešení: Pro vyšetření zadané množiny budeme vycházet z předpisu $\left\{X: |XF| = \frac{1}{2}|Xd|\right\}$. Dosadíme zadané hodnoty:

$$|XF| = \frac{1}{2}|Xd|$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \frac{1}{2}|x - (-2)|$$

$$(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}(x+2)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = \frac{1}{4}(x^2 + 4x + 4)$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$$

$$4x^2 - 8x + 4 + 4y^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$3x^2 - 12x + 4y^2 = 0$$

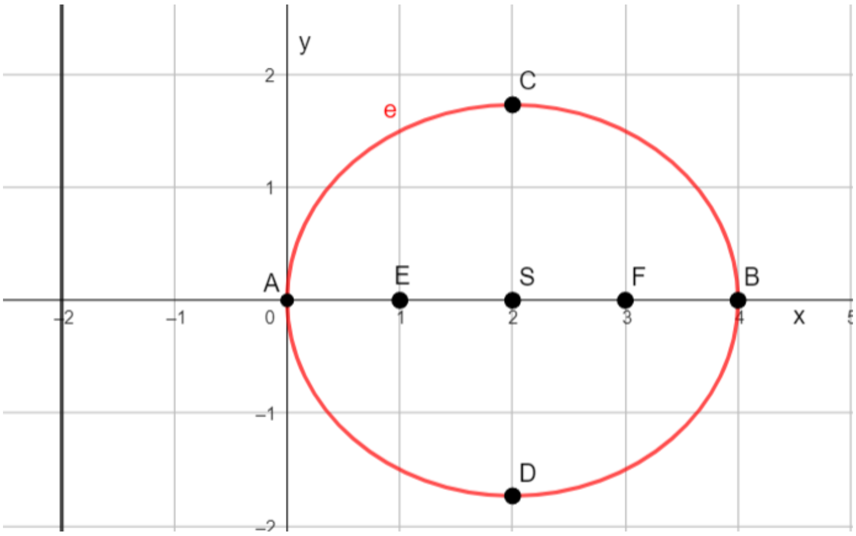
Vyšla nám rovnice kuželosečky. Pomocí doplnění na čtverec upravíme na středový tvar rovnice kuželosečky.

$$3(x^2 - 4) + 4y^2 = 0$$

$$3(x-2)^2 + 4y^2 = 12$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

Ze středového tvaru poznáme, že jde o rovnici elipsy. Lehce vyčteme základní údaje $S[2;0]$, $a = 2$, $b = \sqrt{3}$, $e = 1$. Můžeme také určit souřadnice vrcholů a ohnisek. $E[1;0], F[3;0], A[0;0], B[4;0], C[2;\sqrt{3}], D[2;-\sqrt{3}]$. Body zaznačíme do soustavy souřadnic a nakreslíme elipsu.



Obrázek 32: Elipsa |XF|=1/2|Xd| př. 6.3

6.1.4 Konkrétní příklad – ohniskové zadání

Příklad 6.4: Vyšetřete množinu bodů $\{X: |XE| + |XF| = 2a\}$, kde $E[-3;0]; F[3;0]$ a $a = 5$

Řešení: Zaměřme se nejprve na množinový zápis $\{X: |XE| + |XF| = 2a\}$ a vyřešme pomocí vzorce pro vzdálenost dvou bodů.

$$|XE| + |XF| = 2a$$

$$\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 2 \cdot 5$$

$$\sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$$

$$(x+3)^2 + y^2 = 100 - 20\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + (x-3)^2 + y^2$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 = 100 - 20\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + x^2 - 6x + 9 + y^2$$

$$12x - 100 = -20\sqrt{(x-3)^2 + y^2}$$

$$-3x + 25 = 5\sqrt{(x-3)^2 + y^2}$$

$$9x^2 - 150x + 625 = 25(x^2 - 6x + 9 + y^2)$$

$$9x^2 - 150x + 625 = 25x^2 - 150x + 225 + 25y^2$$

$$16x^2 + 25y^2 = 400$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

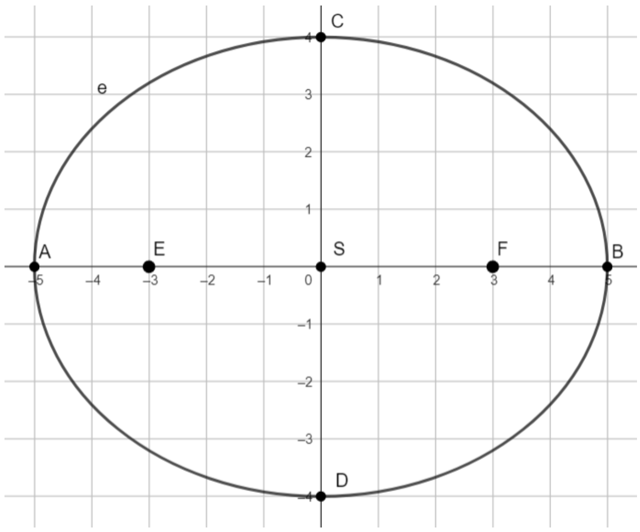
Výpočtem jsme získali rovnici elipsy, ze které můžeme určit excentricitu a délku hlavní a vedlejší poloosy.

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$e = \sqrt{25 - 16}$$

$$e = 3$$

Můžeme určit vrcholy elipsy $A[-5; 0]$; $B[5; 0]$; $C[0; 4]$; $D[0; -4]$



Obrázek 33: Elipsa př. 6.4

6.1.5 Obecné odvození množiny bodů s konstantním poměrem vzdáleností od přímky a bodu

Příklad 6.5: Vyšetřete množinu bodů $\{X : |XF| = k|Xp|\}$, $k = \frac{1}{2}$, $p: y = -\frac{2}{3}k$ a $F\left[0; \frac{d}{3}\right]$

Řešení:

$$|XF| = k|Xd|$$

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{d}{3}\right)^2} = \frac{1}{2}\left|y + \frac{2}{3}d\right|$$

$$x^2 + \left(y - \frac{d}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(y + \frac{2}{3}d\right)^2$$

$$x^2 + y^2 - \frac{2dy}{3} + \frac{d^2}{9} = \frac{1}{4}\left(y^2 + \frac{4dy}{3} + \frac{4d^2}{9}\right)$$

$$x^2 + y^2 - \frac{2dy}{3} + \frac{d^2}{9} = \frac{1}{4}y^2 + \frac{dy}{3} + \frac{d^2}{9}$$

$$x^2 + \frac{3}{4}y^2 - dy = 0$$

$$4x^2 + 3y^2 - 4dy = 0$$

$$4x^2 + 3\left(y^2 - \frac{4dy}{3}\right) = 0$$

$$4x^2 + 3\left(y - \frac{2}{3}d\right)^2 = \frac{4}{3}d^2$$

$$\frac{3x^2}{d^2} + \frac{9\left(y - \frac{2}{3}d\right)^2}{4d^2} = 1$$

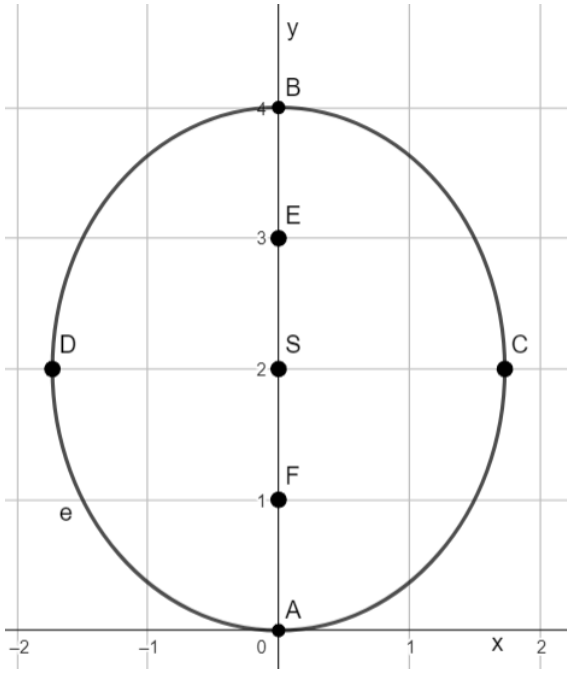
Výsledkem je rovnice elipsy závislá na parametru d, d je vzdálenost bodu F od přímky p.

Ověříme dosazením za parametr např. $d = 3$:

$$\frac{3x^2}{3^2} + \frac{9\left(y - \frac{2}{3} \cdot 3\right)^2}{4 \cdot 3^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{3} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

Ze středové rovnice elipsy určíme střed $S[0; 2]$, velikost hlavní a vedlejší poloosy $a = \sqrt{4}$ a $b = \sqrt{3}$, excentricitu $e = 1$ a vrcholy $A[0; 0], B[0; 4], C[\sqrt{3}; 0]$ a $D[-\sqrt{3}; 0]$. Můžeme zakreslit elipsu do grafu.



Obrázek 34: Elipsa př. 6.5

6.1.6 Obecné odvození – ohnisková definice

Příklad 6.6: Vyšetřete množinu bodů $\{X: |XE| + |XF| = 2a\}$.

Řešení: Nejprve se zkusme zamyslet, jak bychom mohli body E, F vhodně umístit do soustavy souřadnic. Zvolme bod $E[-e; 0]$ a $F[e; 0]$, dosadíme do rovnice

$$|XE| + |XF| = 2a$$

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a$$

$$(x+e)^2 + y^2 + 2\sqrt{(x+e)^2 + y^2}\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + (x-e)^2 + y^2 = 4a^2$$

$$x^2 + 2e + e^2 + y^2 + 2\sqrt{(x+e)^2 + y^2}\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + x^2 - 2e + e^2 + y^2 = 4a^2$$

$$2\sqrt{(x+e)^2 + y^2}\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 4a^2 - 2x^2 - 2e^2 - 2y^2$$

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2}\sqrt{(x-e)^2+y^2} = 2a^2 - x^2 - e^2 - y^2$$

Umocněním a dalšími ekvivalentními úpravami se dopracujeme až ke kroku:

$$a^4 - a^2x^2 - e^2a^2 + e^2x^2 - a^2y^2 = 0$$

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$$

Můžeme si všimnout výrazu $(a^2 - e^2)$. Čemu se rovná? U kuželoseček máme dva vzorce kde se vyskytuje písmeno e. Hyperbola $e^2 = a^2 + b^2$, Elipsa $e^2 = a^2 - b^2$. Který vzorec se nám hodí více? Pojďme se podívat na vzorec pro excentricitu elipsy. Můžeme ho upravit na $b^2 = a^2 - e^2$. Dosadíme do námi upravené rovnice.

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Upravená rovnice je rovnice elipsy ve středovém tvaru se středem v počátku souřadnicového systému. Obecně můžeme tuto rovnici upravit pro střed libovolně umístěný v systému souřadnic $S[m, n]$.

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

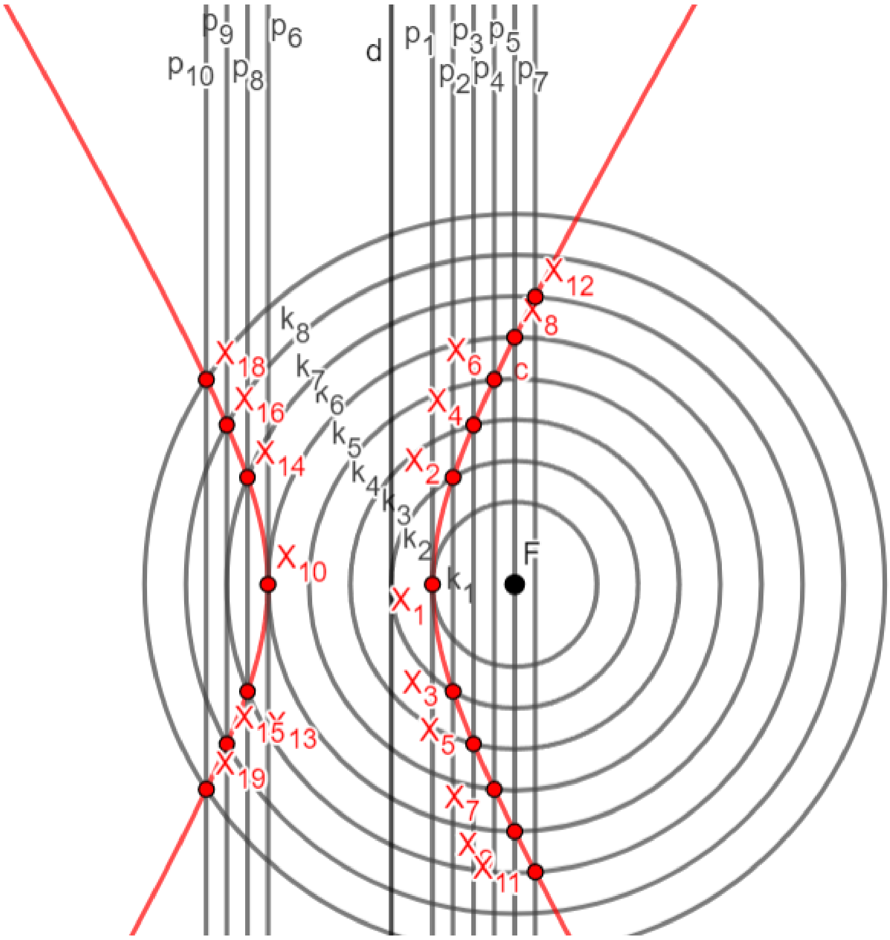
6.2 Hyperbola

V předchozí kapitole jsme se zabývali množinou bodů v rovině, které mají konstantní poměr vzdáleností od pevně daného bodu a pevně dané přímky, kde poměr k byl v intervalu (0; 1). Nyní se zaměříme na další případ, který nastává, když k je větší než 1. Tento případ představuje jiný geometrický tvar a vlastnosti množiny bodů, což nám umožní prozkoumat rozdíly mezi těmito dvěma scénáři. V této kapitole budeme detailně analyzovat množinu bodů $\{X : |XF| = k|Xd|\}$ pro $k > 1$, popíšeme její konstrukci, geometrické vlastnosti a analytické vyjádření.

6.2.1 Obecné množiny bodů, které mají dvojnásobnou vzdálenost od pevného bodu než od pevné přímky

Příklad 6.7: Vyšetřete množinu bodů, které mají dvojnásobnou vzdálenost od pevného bodu F než od pevné přímky d.

Řešení: Budeme postupovat obdobně jako při vyšetřování elipsy v předchozí kapitole. Vybereme si vhodné hodnoty, které nám usnadní rýsování. Narýsujeme libovolnou svislou přímku d v rovině a bod F, který je od přímky d ve vzdálenosti 3. Pokud se podíváme na zadání, tak vzdálenost bodu $|Xd|$ musí být poloviční než vzdálenost $|XF|$. Budeme opět využívat kružnic a přímek rovnoběžných s přímkou d. U elipsy jsme volili vzdálenost rovnoběžky dvakrát větší, než je poloměr kružnice. V tomto případě musíme zvolit vzdálenost rovnoběžky poloviční, než je poloměr kružnice. Nejprve zvolíme kružnici k_1 se středem F a poloměrem 2 a poté narýsujeme přímku p_1 ve vzdálenosti 1 od přímky d. Kružnice k_1 se protne s přímkou p_1 právě v jednom bodě X_1. Další kružnici zvolíme o něco větší, k_2 se středem F a poloměrem 3, a přímku p_2 ve vzdálenosti 1,5. Průsečíkem budou body X_2 a X_3. Tento postup budeme opakovat ještě několikrát s kružnicemi k se středem F a poloměry 4 a 5 s přímkami p ve vzdálenostech 2 a 2,5. Průsečíky, které postupně vzniknou, označme X_4, X_5, X_6, X_7. V následující volbě kružnic, budeme postupovat stejně jako doposud. U rovnoběžek však dojde ke změně. Zvolenou vzdálenost budeme muset přenášet nejen na jednu stranu od přímky d, ale i na druhou stranu. Důvodem je, že i na této straně splňují průsečíky kružnic a rovnoběžek počáteční podmínku. V další volbě kružnice tedy pokračujeme stejně jako dosud. Narýsujeme kružnici k_5 se středem v bodě F a poloměrem 6. Poté narýsujeme dvě rovnoběžky. První p_5 ve stejném směru jako dosud a druhou rovnoběžku p_6 ve směru opačném. Obě však ve vzdálenosti 3 od přímky d. Tentokrát vzniknou tři průsečíky. Označme je X_8, X_9 a X_{10}. Pokračujme stejným postupem a narýsujme kružnici k_6 s poloměrem 7, a opět dvě rovnoběžky p_7, p_8 ve vzdálenosti 3,5 od přímky d. Průsečíky označme X_{11}, X_{12}, X_{13} a X_{14}. V dalším postupu se budeme věnovat pouze „druhé straně“. Narýsujeme kružnici k_7 s poloměrem 8 a rovnoběžku p_9. Průsečíky označme X_{15}, X_{16}. Pro naše potřeby narýsujeme poslední dva body X_{17}, X_{18} ležící na průsečíku kružnice k_8 s poloměrem 9 a rovnoběžky p_{10} ve vzdálenosti 4,5.



Obrázek 35: Konstrukce hyperboly {X: |XF| = 2|Xd|}

Vyšetřovaná množina bodů začíná připomínat hyperbolu. Kdybychom pokračovali v rýsování získali bychom více bodů ležících na parabole. [Zde]() přikládám odkaz na geogebru vykreslující celou množinu bodů ze zadání.

Dáno: přímka d, bod F ve vzdálenosti 3 od přímky d

Popis konstrukce:

1) $X_1 = k_1(F;2) \cap p_1; p_1 \parallel d \wedge |p_1 d| = 1$
2) $X_{2,3} = k_2(F;3) \cap p_2; p_2 \parallel d \wedge |p_2 d| = 1{,}5$
3) $X_{4,5} = k_3(F;4) \cap p_3; p_3 \parallel d \wedge |p_3 d| = 2$
4) $X_{6,7} = k_4(F;5) \cap p_4; p_4 \parallel d \wedge |p_4 d| = 2{,}5$
5) $X_{8,9} = k_5(F;6) \cap p_5; p_5 \parallel d \wedge |p_5 d| = 3$
6) $X_{10} = k_5(F;6) \cap p_6; p_6 \parallel d \wedge |p_6 d| = 3$

7) $X_{11,12} = k_6(F;7) \cap p_7; p_7 \parallel d \wedge |p_7 d| = 3{,}5$

8) $X_{13,14} = k_6(F;7) \cap p_8; p_8 \parallel d \wedge |p_8 d| = 3{,}5$

9) $X_{15,16} = k_7(F;8) \cap p_9; p_9 \parallel d \wedge |p_9 d| = 4$

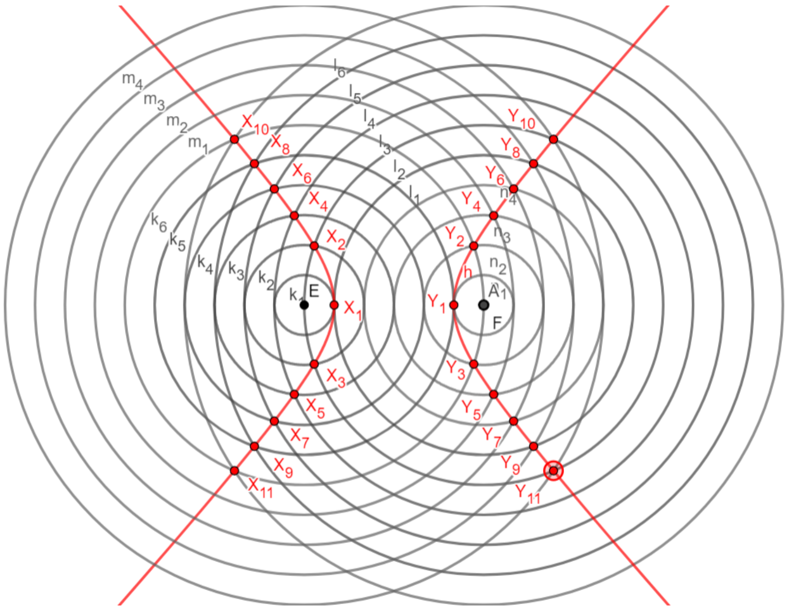
10) $X_{17,18} = k_8(F;9) \cap p_{10}; p_{10} \parallel d \wedge |p_{10} d| = 4{,}5$

6.2.2 Obecné odvození množiny bodů roviny, které mají od dvou daných bodů konstantní rozdíl vzdáleností menší než vzdálenost těchto bodů

Příklad 6.8: Vyšetřete množinu bodů roviny, které mají od dvou daných bodů konstantní rozdíl vzdáleností menší než vzdálenost těchto bodů. $\big||XE| - |XF|\big| = 2a$

Řešení: Řešení musíme rozdělit na dva případy $|XE| - |XF| = 2a \vee |XF| - |XE| = 2a$. Budeme řešit jeden případ, druhý je obdobný. Zvolíme dva body v rovině, E a F, a jejich vzdálenost, například $|EF| = 6$. Vybereme konstantu $a = 4$. Abychom dodrželi tento konstantní rozdíl vzdáleností, budeme využívat kružnice. Konstrukce bude probíhat následujícím způsobem: nejprve narýsujeme kružnici $k(E;r)$ se středem v bodě E a poloměrem r. Poté narýsujeme druhou kružnici $l(F;r+4)$ se středem v bodě F a poloměrem $r+4$. V druhém případě to bude přesně naopak. Narýsujeme kružnici $k(F;r)$ se středem v bodě F a poloměrem r. Poté narýsujeme druhou kružnici $l(E;r+4)$ se středem v bodě E a poloměrem $r+4$. Tímto postupem zajistíme, že rozdíl vzdáleností mezi body na těchto dvou kružnicích bude vždy roven konstantě 4.

Přesuňme se již k samotné konstrukci. Poloměry musíme volit tak, aby měly alespoň jeden průsečík. Narýsujme první kružnici $k_1(E;1)$ a $l_1(F;5)$. Kružnice k_1 a l_1 se protnou právě v jednom bodě. Bod označme X_1. Nyní zvolme kružnice $k_2(E;2)$ a $l_2(F;6)$. Kružnice k_2 a l_2 se protnou ve dvou bodech, které označme X_2 a X_3. Pro další body zvolme po řadě kružnice $k(E;3;4;5;6)$ a kružnice $l(F;7;8;9;10)$. Body po řadě označíme $X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}$. Pro druhé rameno zde postup vypisovat nebudeme. Je totiž obdobný s jediným rozdílem, kdy poloměry kružnic z bodu E vyměníme za poloměry kružnic z bodu F. Vykresleno v obrázku konstrukci ponecháme čtenáři.



Obrázek 36: Konstrukce hyperboly ||XE|-|XF||=2a

Dáno: Bod E, Bod F, vzdálenost bodů $|EF| = 6$

Popis konstrukce:

1) $X_1 = k_1(E; 1) \cap l_1(F; 5)$
2) $X_{2,3} = k_2(E; 2) \cap l_2(F; 6)$
3) $X_{4,5} = k_3(E; 3) \cap l_3(F; 7)$
4) $X_{6,7} = k_4(E; 4) \cap l_4(F; 8)$
5) $X_{8,9} = k_5(E; 5) \cap l_5(F; 9)$
6) $X_{10,11} = k_6(E; 6) \cap l_6(F; 10)$

Obdobně pro další body.

Pro zajímavost zde zmíníme i konstrukci druhého ramene:

1) $Y_1 = m_1(E; 5) \cap n_1(F; 1)$
2) $Y_{2,3} = m_2(E; 6) \cap n_2(F; 2)$
3) $Y_{4,5} = m_3(E; 7) \cap n_3(F; 3)$
4) $Y_{6,7} = m_4(E; 8) \cap n_4(F; 4)$

5) $Y_{8,9} = m_5(E; 9) \cap n_5(F; 5)$
6) $Y_{10,11} = m_6(E; 10) \cap n_6(F; 6)$

Obdobně pro další body.

Kdybychom pokračovali v konstrukci dalších bodů zjistili bychom že výsledná množina vykresluje hyperbolu. Zde přikládám odkaz na GeoGebru s animací vykreslení hyperboly podle ohniskové definice.

Nyní si uvedeme definici hyperboly.

Definice 6.4 (Hyperbola, Didaktis): „*Hyperbola* je množina bodů roviny, které mají od dvou daných bodů konstantní rozdíl vzdáleností menší než vzdálenost těchto bodů. $\left||XE| - |XF|\right| =$ konst.“ (Vondra, 2019, s. 86)

Definice 6.5 (Hyperbola, Prometheus): „V rovině jsou dány dva různé body E, F. Množina všech bodů X roviny, pro které se $\left||XE| - |XF|\right|$ rovná danému kladnému číslu, které je menší než $|EF|$, se nazývá *hyperbola*. Body E, F jsou ohniska této hyperboly“ (Kočandrle, 2009, s. 182)

Obě definice správně popisují hyperbolu. Definice 6.4 je stručnější a využívá přímý matematický zápis, což může být užitečné pro rychlé pochopení podmínky. Definice 6.5 je více rozvinutá, poskytuje podrobnější popis a pojmenování prvků, což může být přínosné pro lepší porozumění.

Definice 6.6 (Hyperbola, MFF): „Množinu bodů v rovině, které mají od dvou daných různých bodů E, F konstantní absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností rovnou v, kde $0 < v < |EF|$, nazveme hyperbolou. Body E, F nazýváme ohniska hyperboly.“ (Moravcová, 2021, s. 120)

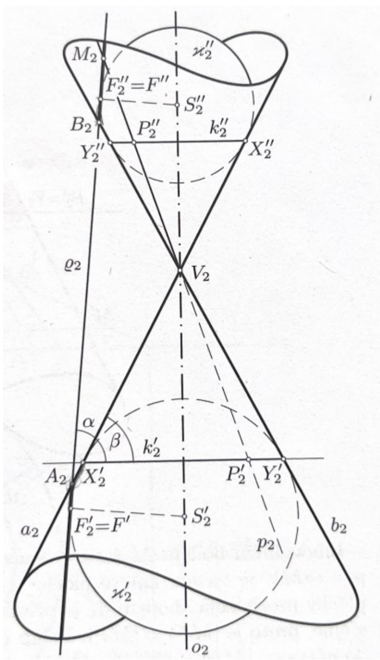
6.2.3 Důkaz

Nyní si dokážeme, že $\left||XE| - |XF|\right| =$ konst. je opravdu hyperbola.

Jestliže je rovina ρ rovnoběžná se dvěma povrchovými přímkami rotační kuželové plochy, je řezem hyperbola. Podle Quételetovy – Dandelinovi věty jsou její ohniska jsou dotykové body kulových ploch vepsaných do kuželové plochy a dotýkajících se roviny ρ

Důkaz: Důkaz je inspirovaný podle důkazu z knihy (Pomykalové, 2023, s. 264-266 a 273-274)

Při důkazu budeme čerpat z obr. 37. Je dána kuželová plocha, která má osu o v nárysně. Rovina řezu ρ je k nárysně kolmá. Nárysem roviny řezu je přímka ρ_2. Odchylka α roviny ρ_2 od roviny libovolné povrchové kružnice a odchylka β povrchových přímek kuželové plochy od této roviny je ve vztahu $\alpha > \beta$. Nárysy a_2, b_2 obrysových přímek a, b kuželové plochy protíná přímka ρ_2 v bodech A_2, B_2.



Obrázek 37: Důkaz hyperbola (Pomykalová, 2023, s. 273)

Do kuželové plochy vepíšeme kulové plochy χ' a χ'' tak, aby se dotýkaly kuželové plochy i roviny ρ. Středy S' a S'' těchto kulových ploch jsou prvkem osy kuželové plochy. Nárysem kulových ploch jsou kruhy ${\chi_2}'$ a ${\chi_2}''$ o středech ${S_2}' \in o_2$ a ${S_2}'' \in o_2$ dotýkající se přímek a_2, b_2 v bodech ${X_2}'$, ${Y_2}'$ a ${X_2}''$, ${Y_2}''$. Úsečky ${X_2}'{Y_2}'$ a ${X_2}''{Y_2}''$ jsou nárysy k_2' a k_2''

povrchových kružnic k' a k'', podél kterých se kulové plochy dotýkají kuželové plochy. Dotykové body kulových ploch s rovinou ρ jsou body F' a F'' ležící v nárysně; $F' = F_2'$, $F'' = F_2''$. Libovolným bodem M, řezu, který je prvkem průniku přímky ρ_2 a kuželové plochy, vedeme povrchovou přímku p kuželové plochy. Přímka $p = \overleftrightarrow{MV}$. Přímka p se dotýká kulové plochy χ' v bodě $P' \in k'$. Další tečnou plochy χ' procházející bodem M je přímka MF'. Protože délky tečen vedených z bodu ke kulové ploše jsou stejné, je $|MP'| = |MF'|$. Přímka p se dotýká také kulové plochy χ'', a to v bodě $P'' \in k''$. Tečnou plochy χ'' je i přímka MF'' a proto $|MP''| = |MF''|$. Pro rozdíl délek $|MF'|$ a $|MF''|$ tedy platí:

$$\big||MF'| - |MF''|\big| = ||MP'| - |MP''|| = |P'P''| = |S'S''|$$

Krajní body úsečky AB jsou rovněž body řezu, a proto

$$\big||AF'| - |AF''|\big| = \big||AX'| - |AX''|\big| = |X'X''| = |S'S''|$$

resp.

$$\Big||BF'| - \big|BF''\big|\Big| = \big||BY'| - |BY''|\big| = |Y'Y''| = |S'S''|$$

Protože je ale $|AF'| = |BF''|$, dostáváme $|S'S''| = \big||BF''| - |AF''|\big| = |AB|$.

Bod M řezu tak splňuje podmínku $\big||MF'| - |MF''|\big| = |AB|$. Neboli rozdíl vzdáleností libovolného bodu M řezu od daných bodů F' a F'' je konstantní.

6.2.3 Konkrétní příklad množiny bodů, které mají dvojnásobnou vzdálenost od pevného bodu než od pevné přímky

Příklad 6.9: Vyšetřete množinu všech bodů, které mají poloviční vzdálenost od přímky $d: y = 2$ než od bodu $F[3; -1]$.

Řešení: Pro výpočet využijeme množinový zápis $\{X: |XF| = 2|Xd|\}$.

Dosadíme zadané hodnoty:

$$|XF| = 2|Xd|$$

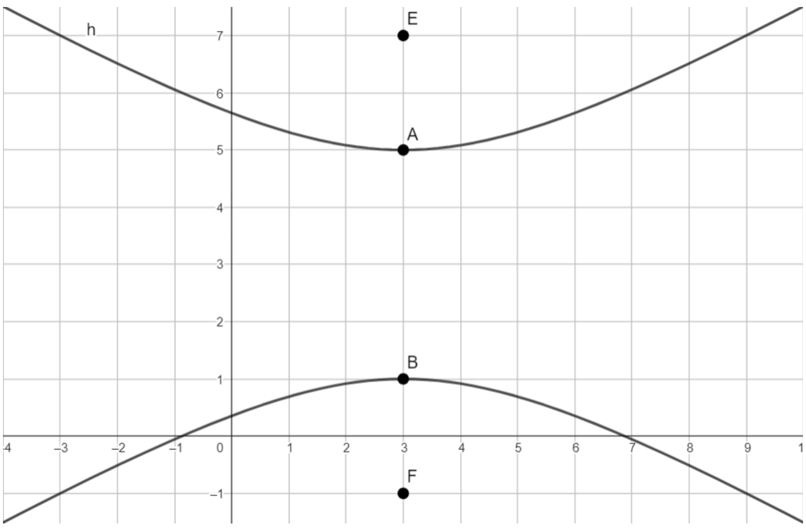
$$\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2} = 2|y-2|$$
$$(x-3)^2+(y+1)^2 = 4(y-2)^2$$
$$x^2-6x+9+y^2+2y+1 = 4(y^2-4y+4)$$
$$x^2-6x+9+y^2+2y+1 = 4y^2-16y+16)$$
$$x^2-6x-3y^2+18y = 6$$

Vyšel nám obecný tvar rovnice hyperboly. Převedeme na středový tvar rovnice hyperboly.

$$(x-3)^2-9-3((y-3)^2-9) = 6$$
$$(x-3)^2-3(y-3)^2 = -12$$
$$-\frac{(x-3)^2}{12}+\frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

Z výsledné středové rovnice můžeme určit všechny základní hodnoty. Souřadnice středu $S[3;3]$. Velikost hlavní a vedlejší poloosy $a = 2\sqrt{3}, b = 2$, excentricitu $e = 4$, souřadnice ohnisek $E[7;3], F[3;-1]$ a souřadnice vrcholů $A[5;3], B[1;3]$.

Můžeme zakreslit do grafu.



Obrázek 38: Hyperbola př. 6.9

6.2.4 Konkrétní příklad – ohniskové zadaní

Příklad 6.10: Vyšetřete množinu všech bodů roviny, které mají od dvou daných bodů konstantní rozdíl vzdáleností menší než vzdálenost těchto bodů. $E[-5;0], F[5;0]$ a $a = 3$

Řešení: Přepíšeme zadání do množinového zápisu $\{X: \left||XE|-|XF|\right| = 2a\}$.

Dosadíme do rovnice:

$$\left||XE| - |XF|\right| = 2a$$

$$\left|\sqrt{(x+5)^2 + y^2} - \sqrt{(x-5)^2 + y^2}\right| = 6$$

$$(x+5)^2 + y^2 - 2\sqrt{(x+5)^2 + y^2}\sqrt{(x-5)^2 + y^2} + (x-5)^2 + y^2 = 36$$

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 + x^2 - 10x + 25 + y^2 - 36 = 2\sqrt{(x+5)^2 + y^2}\sqrt{(x-5)^2 + y^2}$$

$$2x^2 + 2y^2 + 14 = 2\sqrt{(x+5)^2 + y^2}\sqrt{(x-5)^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 + 7 = \sqrt{(x+5)^2 + y^2}\sqrt{(x-5)^2 + y^2}$$

$$(x^2 + y^2 + 7)^2 = ((x+5)^2 + y^2)((x-5)^2 + y^2)$$

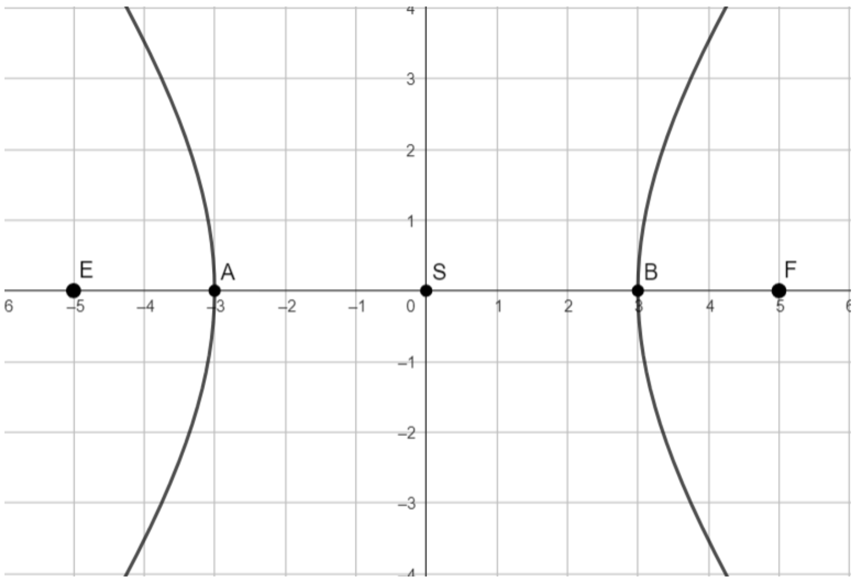
$$x^4 + y^4 + 49 + 2x^2y^2 + 14x^2 + 14y^2 = x^4 + y^4 + 625 - 50x^2 + 2x^2y^2 + 50y^2$$

$$64x^2 - 36y^2 = 576$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Z výsledné středové rovnice můžeme určit všechny základní hodnoty. Souřadnice středu $S[3; 3]$. Velikost hlavní a vedlejší poloosy $a = 3, b = 4$, excentricitu $e = 5$, souřadnice ohnisek $E[-5; 0], F[5; 0]$ a souřadnice vrcholů $A[-3; 0], B[3; 0]$.

Můžeme zakreslit do grafu.



Obrázek 39: Hyperbola př. 6.10

6.2.5 Obecné odvození množiny bodů s konstantním poměrem vzdáleností od přímky a bodu

Příklad 6.11: Vyšetřete množinu bodů $\{X : |XF| = k|Xp|\}$, $k = 2$, $p: x = -\frac{2}{3}d$ a $F\left[\frac{d}{3}; 0\right]$.

Řešení:

$$|XF| = k|Xd|$$

$$\sqrt{\left(x-\frac{d}{3}\right)^2 + y^2} = 2\left|x + \frac{2}{3}d\right|$$

$$\left(x-\frac{d}{3}\right)^2 + y^2 = 4\left(x + \frac{2}{3}d\right)^2$$

$$x^2 - \frac{2}{3}dx + \frac{d^2}{9} + y^2 = 4\left(x^2 + \frac{4}{3}dx + \frac{4d^2}{9}\right)$$

$$x^2 - \frac{2}{3}dx + \frac{d^2}{9} + y^2 = 4x^2 + \frac{16}{3}dx + \frac{16d^2}{9}$$

$$-3x^2 - 6dx + y^2 = \frac{15d^2}{9}$$

$$-3[(x+d)^2 - d^2] + y^2 = \frac{15d^2}{9}$$

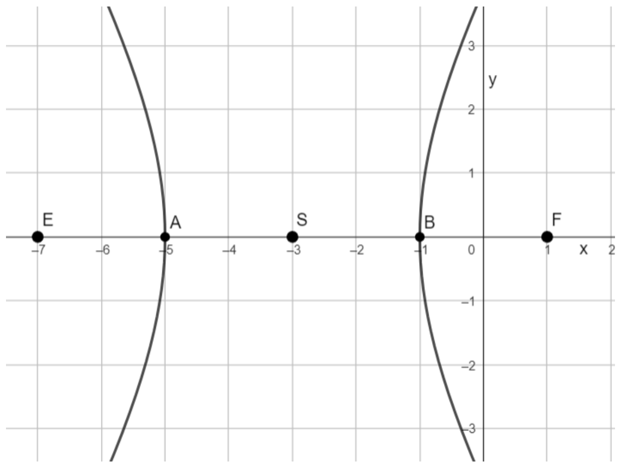
$$-3(x+d)^2 + y^2 = -\frac{4d^2}{3}$$
$$\frac{9(x+d)^2}{4d^2} - \frac{3y^2}{4d^2} = 1$$

Výsledkem je rovnice hyperboly závislá na parametru d, d je vzdálenost bodu F od přímky p.

Ověříme dosazením za parametr např. $d = 3$:

$$\frac{9(x+3)^2}{4 \cdot 3^2} - \frac{3y^2}{4 \cdot 3^2} = 1$$
$$\frac{(x+3)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

Ze středové rovnice elipsy určíme střed $S[-3; 0]$, velikost hlavní a vedlejší poloosy $a = \sqrt{4}$ a $b = 2\sqrt{3}$, excentricitu $e = 4$ a vrcholy $A[-5; 0]$ a $B[-1; 0]$ Můžeme zakreslit elipsu do grafu.



Obrázek 40: Hyperbola př. 6.11

6.2.6 Obecné odvození – ohnisková definice

Příklad 6.12: Vyšetřete množinu všech bodů roviny, které mají od dvou daných bodů konstantní rozdíl vzdáleností menší než vzdálenost těchto bodů.

Řešení: Přepíšeme zadání do množinového zápisu $\{X: ||XE| - |XF|| = 2a\}$. Vhodně umístíme body E a F do soustavy souřadnic $E[-e; 0], F[e; 0]$.

Dosadíme do rovnice:

$$\left||XE| - |XF|\right| = 2a$$

$$\left|\sqrt{(x-e)^2 + y^2} - \sqrt{(x+e)^2 + y^2}\right| = 2a$$

$$(x-e)^2 + y^2 - 2\sqrt{(x-e)^2 + y^2}\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + (x+e)^2 + y^2 = 4a^2$$

Roznásobením a dalšími ekvivalentními úpravami dostaneme:

$$2x^2 + 2e^2 + 2y^2 - 2\sqrt{(x-e)^2 + y^2}\sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 4a^2$$

$$x^2 + e^2 + y^2 - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}\sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a^2$$

$$(x^2 + e^2 + y^2)^2 = ((x-e)^2 + y^2)((x+e)^2 + y^2)$$

Dalším roznásobením a ekvivalentními úpravami dostaneme:

$$4a^2 - 4a^2x^2 - 4e^2a^2 - 4a^2y^2 + 4e^2x^2 = 0$$

$$a^2 - a^2x^2 - e^2a^2 - a^2y^2 + e^2x^2 = 0$$

$$(e^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(e^2 - a^2)$$

Můžeme si všimnout výrazu $(e^2 - a^2)$. Čemu se rovná? U kuželoseček máme dva vzorce, kde se vyskytuje písmeno e. Hyperbola $e^2 = a^2 + b^2$, Elipsa $e^2 = a^2 - b^2$. Který vzorec se nám hodí více? Pojďme se podívat na vzorec pro excentricitu hyperboly, který můžeme upravit na $b^2 = e^2 - a^2$. Dosadíme do námi upravené rovnice.

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Upravená rovnice je rovnice hyperboly ve středovém tvaru se středem v počátku souřadnicového systému. Obecně můžeme tuto rovnici upravit pro střed libovolně umístěný v systému souřadnic $S[m, n]$.

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

Závěr

V této práci jsme si kladli za cíl vytvořit ucelený a prakticky využitelný materiál pro výuku konstrukční a analytické geometrie na středních školách, doplněný knihou animací v programu GeoGebra, která je strukturovaná dle kapitol práce.

V každé kapitole je čtenář podrobně proveden dvěmi částmi.

V první části každé kapitoly jsme se věnovali konstrukční hypotéze, která vycházela z množinové nebo středoškolské definice zadané množin bodů. Postupnými konstrukcemi jednotlivých bodů jsme systematicky vykreslovali danou množinu, což nám umožnilo si vizuálně představit, jak daná množina může vypadat. Následně jsme uvedli definice těchto množin z různých zdrojů odborné literatury. Tento krok byl klíčový pro sjednocení terminologie a pochopení různých přístupů k danému problému. Uvedené definice jsme doplnili o matematické důkazy, kterými jsme ověřili, že konstrukce skutečně odpovídají požadovaným vlastnostem množin bodů. Tímto jsme zajistili, že naše praktické konstrukce jsou teoreticky správné a že všechny zkoumané množiny splňují stanovené vlastnosti. Tento přístup, kombinující praktickou konstrukci a teoretickou analýzu, nám umožnil komplexně pochopit a popsat jednotlivé množiny bodů. Kromě toho nám tento postup pomohl vytvořit výukový materiál v programu Geogebra, který je vizuálně názorný, a zároveň použitelný pro efektivní výuku a porozumění studentů.

V druhé části každé kapitoly jsme se věnovali podrobnému vysvětlení postupů analytického řešení konkrétních příkladů. Každý příklad jsme řešili pomocí matematických vzorců, které popisují vzdálenost mezi dvěma body nebo vzdálenost bodu od přímky. V některých případech jsme používali kombinace obou těchto vzorců, abychom mohli analyzovat dané množiny bodů. Aplikovali jsme příslušné vzorce a pomocí algebraických úprav jsme dospěli k rovnici, která popisovala danou množinu bodů. Tato rovnice nám umožnila určit vlastnosti těchto bodů, jako jsou jejich poloha a následně bylo možné je zakreslit do grafu. Následně jsme se zaměřili na obecné odvození rovnic pro zadané množiny bodů. Nejprve jsme formulovali obecný vzorec, který popisuje danou množinu. Pro usnadnění některých výpočtů a zachování přehlednosti jsme často volili strategické umístění bodů nebo přímek. Například jsme mohli volit souřadnice tak, aby se výrazně zjednodušily výpočty, aniž by tím byla ovlivněna obecnost řešení, a aby byla univerzálně použitelná pro různé konkrétní případy. Po odvození obecné rovnice jsme do těchto vzorců dosazovali konkrétní hodnoty. Tento postup nám umožnil ověřit správnost odvozeného vzorce, přičemž jsme zkontrolovali, zda výsledné rovnice odpovídají předchozím výpočtům.

V práci jsme vždy analyzovali množinu danou konkrétním množinovým zápisem a následně jsme poskytli středoškolské definice k těmto množinám. Porovnáme si tedy použití těchto dvou typů definic. Množinová definice je obecnější a abstraktnější. Umožňuje přesněji popsat širokou škálu matematických objektů a vztahů mezi nimi. Je univerzálně platná bez ohledu na konkrétní kontext. Středoškolská definice je méně obecná a více konkrétní. Je navržena tak, aby byla snadno pochopitelná pro studenty na středoškolské úrovni. Zaměřuje se na konkrétní případy a aplikace, které jsou v souladu s učebními osnovami. Ve středoškolských učebnicích se při řešení příkladů častěji setkáváme se zadáním, ve kterém je již určeno, o jakou množinu bodů se jedná, a cílem je pouze zjistit její rovnici, nakreslit graf nebo jiné vlastnosti. Zadání ve stylu "vyšetřete množinu bodů a určete, o jakou množinu jde" se objevuje jen zřídka. S tímto typem úlohy se setkáváme spíše až na vysoké škole.

Téma této práce je množné nadále rozvádět. Mohli bychom například řešit i další množiny bodů dané vlastnosti, jako jsou ekvidistanty aj. Nabízí se také řešení dalších úloh podobných typů, které se zabývají vlastnostmi a charakteristikami množin bodů. Můžeme zkoumat různé geometrické transformace těchto množin, jako jsou posuny, rotace a zrcadlení, a jejich vliv na vlastnosti množin. Rovněž je možné se zaměřit na analýzu množin v různých souřadnicových soustavách, například v polárních souřadnicích nebo v prostoru vyšší dimenze.

Seznam použitých informačních zdrojů

KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-390-5.

KOMAN, Milan. *Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic* [online]. Praha: Mladá fronta, 1966 [cit. 2024-07-09]. Dostupné z: https://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/403577

MORAVCOVÁ, Vlasta a Jana HROMADOVÁ. *Základy Planimetrie pro učitelské studium* [online]. Praha: MatfyzPress, 2021 [cit. 2024-07-07]. ISBN 978-80-7378-457-7. Dostupné z: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~morava/planimetrie.html

MORAVCOVÁ, Vlasta a Jana HROMADOVÁ. *Sbírka úloh k Základům planimetrie pro učitelské studium* [online]. Praha: MatfyzPress, 2023 [cit. 2024-07-07]. ISBN 978-80-7378-489-8. Dostupné z: https://karlin.mff.cuni.cz/~morava/Sbirka_planimetrie_final.pdf

POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: Planimetrie. 5*. Praha: Prometheus, 2018. ISBN 978-80-7196-358-5.

POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika s nadhledem: od prváku k maturitě*. Plzeň: Fraus, 2019. Škola s nadhledem. ISBN 978-80-7489-494-7.

POMYKALOVÁ, Eva. *Deskriptivní geometrie pro střední školy*. 2. Prometheus, 2023. ISBN 978-80-7196-554-1.

VONDRA, Jan, Dana GAZÁRKOVÁ, Stanislava MELICHAROVÁ a René VOKŘÍNEK. *Matematika pro střední školy*. Vydání druhé. Brno: Didaktis, [2019]-. ISBN 978-80-7358-320-0.

VYŠÍN, Jan. *Geometrická místa*. Online. Praha: Prometheus, 1950. Dostupné z: https://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/402903. [cit. 2024-07-07].

Seznam příloh

Seznam obrázků