



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ludvík Vízdal

**Slabé hodnoty a slabá měření v kvantové
mechanice**

Ústav částicové a jaderné fyziky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Pavel Cejnar, Dr., DSc.

Studijní program: Fyzika

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Tímto bych chtěl poděkovat vedoucímu bakalářské práce prof. RNDr. Pavlu Cejnarovi, Dr., DSc. za veškeré rady a pomoc během vypracování.

Název práce: Slabé hodnoty a slabá měření v kvantové mechanice

Autor: Ludvík Vízdal

Ústav: Ústav částicové a jaderné fyziky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Pavel Cejnar, Dr., DSc., Ústav částicové a jaderné fyziky

Abstrakt: Cílem této práce je seznámení čtenářů s konceptem slabých měření v kvantové mechanice. Nejprve je zde zaveden model nepřímého měření jako alternativní vyjádření Von Neumannova postulátu o měření. Tento model vede k možnému zobecnění ve formě slabých měření. Poté je zaveden koncept postselekce a jeho začlenění do problematiky slabých měření, které vede ke slabým hodnotám fyzikálních veličin. Všechny tyto teoretické koncepty jsou prezentovány na jednoduchých modelových příkladech. Na závěr je zde otevřena diskuze o možné interpretaci slabých hodnot a jejich experimentálního ověření.

Klíčová slova: nepřímé měření, slabé měření, slabá hodnota, postselekce

Title: Weak values and weak measurements in quantum mechanics

Author: Ludvík Vízdal

Institute: Institute of particle and nuclear physics

Supervisor: prof. RNDr. Pavel Cejnar, Dr., DSc., Institute of particle and nuclear physics

Abstract: The main goal of this thesis is to introduce to readers the concept of weak measurements in quantum mechanics. Firstly a model of indirect measurements is established as an alternative to Von Neumann measurement postulate. This model leads to a possible generalization in a form of weak measurements. Then the concept of postselection is introduced and involved into the issue of weak measurements which leads to the weak values of physical quantities. All these theoretical concepts are presented using simple model examples. Finally, a discussion is provided on the possible interpretation and of weak values and their experimental verification.

Keywords: indirect measurement, weak measurement, weak value, postselection

Obsah

Úvod	6
1 Ideální měření	7
1.1 Typy časového vývoje	7
1.1.1 Unitární evoluce kvantového systému	7
1.1.2 Proces měření na kvantovém systému	7
1.2 Projektivní měření na čistém stavu	8
1.3 Projektivní měření na smíšeném stavu	9
1.4 Model nepřímého měření	10
1.4.1 Popis systému a měřicího přístroje	10
1.4.2 Interakce s měřicím přístrojem	11
1.4.3 Stav objektového systému po interakci	13
1.4.4 Projektivní měření na měřicím přístroji	13
1.5 Příklad ideálního nepřímého měření diskrétních hodnot	14
1.6 Příklad ideálního nepřímého měření spojité veličiny	16
2 Slabé měření	19
2.1 Gaussovský stav měřicího přístroje	19
2.2 Diskuze limitních hodnot	20
2.3 Příklad slabého měření diskrétních hodnot	21
2.4 Příklad slabého měření spojité veličiny	23
3 Měření s postselekcí	25
3.1 Zavedení postselekce	25
3.2 Odvození slabých hodnot pro čistý stav	26
3.3 Příklad postselekce na diskrétním systému	27
3.4 Příklad postselekce na spojitém systému	29
3.4.1 Postselekce souřadnice	29
3.4.2 Postselekce hybnostního stavu	29
3.4.3 Postselekce gaussovského vlnového balíku	30
3.5 Paradox tří krabic	31
3.6 Interpretace slabých hodnot	34
Závěr	35
Literatura	36
Seznam obrázků	37

Úvod

Postulát o měření je spojen s kvantovou mechanikou již od jejích počátků. Podle něj akt měření způsobí nedeterministický a bezprostřední přechod kvantového systému do stavu po měření. Teoretický fyzik John Von Neumann přišel s alternativním popisem, jak popsat měření pomocí interakce měřeného systému a měřicího přístroje. Tento přístup se označuje jako nepřímé měření. Ukážeme na jednoduchých modelových příkladech jak pro diskrétní, tak spojitě pozorovatelné, že nepřímé měření vede ke stejným výsledkům, jaké dostáváme z postulátu o měření. Systém se poté bude nacházet ve stavu, který už je pouhou dekoherovanou statistickou směsí.

Nepřímé měření nám otevře cestu k zobecnění ve formě slabého měření. Představa je taková, že se budeme zajímat o nepřímé měření, ve kterém bude interakce mezi systémem a měřicím přístrojem co nejslabší. Toho lze pro účely výpočtů dosáhnout tak, že stavy v Hilbertově prostoru měřicího přístroje nebudou dokonale rozlišitelné, ale budou mít mezi sebou překryv. Slabé měření ukážeme opět na modelových příkladech pro diskrétní i spojitou pozorovatelnou.

Zavedeme koncept postselekcce stavu a v kombinaci se slabým měřením odvodíme vztah pro slabé hodnoty pozorovatelných. Právě tyto slabé hodnoty jsou pozoruhodné, protože nemusí ležet uvnitř intervalu vlastních hodnot, a dokonce mohou být i komplexní. Zmíněné vlastnosti ukážeme na modelových příkladech slabého měření s postselekcí opět pro diskrétní i spojitý případ. Formulujeme také jeden myšlenkový experiment převzatý z literatury. Slabé hodnoty mají i svou stinnou stránku spočívající v jejich fyzikální interpretaci. K tomu na závěr uvedeme krátký náhled.

1 Ideální měření

Proces měření v kvantové mechanice je jedním ze dvou možných procesů evoluce kvantového systému. Rozlišujeme unitární evoluci a proces měření jako dva fundamentálně odlišné způsoby vývoje v čase. Vlastnosti a rozdíly obou typů si nejprve krátce rozebereme. Abychom nezpůsobili zmatek v terminologii podotkněme, že spojení ideální měření budeme používat společně se synonymy projekivní měření nebo také silné měření, případně jejich kombinace.

1.1 Typy časového vývoje

V této sekci rozebereme stručně dva různé typy časového vývoje v kvantové mechanice. Také zde zformulujeme možné znění postulátu o měření. Dynamika kvantových systémů je důležitou kapitolou v kurzech kvantové mechaniky a různé přístupy lze najít prakticky ve všech knihách pojednávajících o kvantové mechanice.

1.1.1 Unitární evoluce kvantového systému

Unitární evoluce je vyjádřena pomocí unitárních operátorů působících na Hilbertově prostoru. Jejich zavedení vychází z nestacionární Schrödingerovy rovnice popisující dynamiku. Tyto operátory striktně splňují důležitá kritéria. Transformace zprostředkovaná unitárním operátorem je spojena s přechodem od jedné ortonormální báze k druhé ortonormální bázi. Inverze unitárního operátoru odpovídá hermitovskému sdružení tedy $\hat{U}^{-1} = \hat{U}^+$. Odsud ihned plyne fakt, že unitární transformace zachovává skalární součin a tedy i normu stavového vektoru. Čistý stav po unitární transformaci zůstává nadále čistým stavem a smíšený zůstává smíšeným stavem. Jako další vlastnost můžeme zmínit, že vlastní čísla unitárních operátorů jsou ve tvaru $\lambda = e^{i\varphi}$, tedy leží na jednotkové kružnici v komplexní rovině. Vlastní vektory příslušející různým vlastním číslům jsou ortonormální a v neposlední řadě unitární operátor můžeme zapsat jako komplexní exponenciálu hermitovského operátoru.

Podrobné zavedení i důkazy vyjmenovaných vlastností můžeme najít v literatuře zabývající se kvantovou mechanikou jako například [1]. Unitární evoluce, jak jsme ji vyložili, je deterministická a také reverzibilní.

1.1.2 Proces měření na kvantovém systému

Tento proces je odlišným typem vývoje systému, jedná se o náhlou změnu stavu způsobenou provedením měření na systému. Otázkami, proč a jestli vůbec je nutné celý tento popis (a také celý postulát) zavádět, se v této práci zabývat nebudeme. Uvedeme zde pouze základní myšlenku, proč se něco takového zavedlo, a poté uvedeme přímo možné znění postulátu, od kterého se odrazíme v dalších odstavcích.

Uvažme známý dvojštěrbinový experiment, při kterém neprovádíme zatím žádné měření, vidíme tedy na stínítku patřičný interferenční obrazec. Pokud bychom však nějakým způsobem provedli detekci procházející částice za jednou ze štěrbin např. u štěrbin A , tak stejné měření provedené bezprostředně poté

musí být v souladu s prvním, a tedy detekujeme částici opět za štěrbinou A . To je v souladu s intuicí, protože částici nemůžeme detekovat za druhou štěrbinou B , když jsme ji před okamžikem lokalizovali za štěrbinou A . Taková je motivace k tomu, že při měření se něco stalo s kvantovou superpozicí a došlo k redukci stavu právě do stavu, který byl změřen. To nás už vede k postulátu označovaném jako postulát o kolapsu stavového vektoru nebo postulát o měření nebo také Von Neumanův projekční postulát. Jeho přesné znění je možné najít ve více formách, my zde uvedeme formulaci převzatou (se změnou značení) z knihy [2]:

„Měření fyzikální veličiny A s výsledkem a_n , kde a_n je vlastní číslo odpovídajícího samosdruženého operátoru \hat{A} , převádí měřený systém ze stavu $|\psi\rangle$ do stavu $|a_n\rangle$, kde $|a_n\rangle$ je vlastním stavem příslušejícímu k vlastnímu číslu a_n , tj. $\hat{A}|\psi\rangle = a_n|a_n\rangle$.“

Tato formulace se uvádí v úvodních kurzech kvantové mechaniky. Pro naše budoucí účely se od této formulace odvíjíme a vyjádříme ji ve více matematické formě, kterou v dalším využijeme. Také rozebereme podobu postulátu pro případ degenerovaného spektra. Projektivní měření popíšeme jak pro čistý, tak pro smíšený stav systému. Nadále budeme v této sekci uvažovat pouze pozorovatelné s diskretním spektrem. Pro případ operátoru se spojitým spektrem si měření demonstrováme na příkladu. V plné obecnosti totiž s operátory se spojitým spektrem nastává problém, že jejich vlastní vektory nelze normalizovat standardním způsobem. Jako příklad můžeme uvést operátor hybnosti, jehož vlastní stavy odpovídají rovinným vlnám, které musíme normalizovat na δ -funkci.

Ještě zde uvedeme vlastnosti procesu měření do kontrastu s vlastnostmi unitární evoluce. Proces není deterministický, jak rozebereme dále, můžeme získat pouze pravděpodobnostní rozdělení možných výsledků. Dále je v jistém smyslu nevratný, protože z naměřeného výsledku nemůžeme nikdy určit původní kvantovou superpozici. Neunitarita je zřejmá, ale navíc zde není zaručená ani linearita. Sice se v celé práci budeme pohybovat na půdě nerelativistické kvantové mechaniky, ale můžeme také zmínit, že uvedený kolaps (redukce) stavového vektoru proběhne „okamžitě“ ve všech místech prostoru. Další podrobnosti a důkazy těchto vlastností jsou uvedeny v učebnicích kvantové mechaniky jako např. v knize [1].

Jak jsme již zmínili, v této práci se nebudeme zabývat podstatou projekčního postulátu, v mnoha případech nás ani konkrétní výsledek měření nebude zajímat. Rozebereme zde podrobně schématický postup, jak je možné popsat proces měření, o kterém jsme se doposud zmiňovali, tedy měření ideální. V dalším tento popis zobecníme do situací, kdy měření už nebude ideální, ale v jistém slova smyslu slabé.

1.2 Projektivní měření na čistém stavu

Uvažme libovolný čistý stav $|\psi\rangle$ na Hilbertově prostoru fyzikálních stavů, který není vlastním stavem vybrané pozorovatelné \hat{A} . Předpokládáme-li, že vlastní stavy operátoru \hat{A} tvoří úplnou (v tomto případě diskretní) ortonormální bázi $\{|a_i\rangle\}$ na uvažovaném Hilbertově prostoru, pak zcela jistě můžeme stav $|\psi\rangle$ vyjádřit v této bázi a zapsat ho jako $|\psi\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle$. Možnými výsledky měření veličiny \hat{A} jsou pak vlastní hodnoty a_i . Nemůžeme však žádným způsobem dopředu určit, která z těchto hodnot bude výsledkem měření. Co určit můžeme, jsou pravděpodobnosti

$\text{prob}(a_i|\psi)$ naměření výsledku a_i a to následovně [3]

$$\text{prob}(a_i|\psi) := |\langle a_i|\psi\rangle|^2 \quad (1.1)$$

$$= |c_i|^2. \quad (1.2)$$

Z postulátu vyplývá, že stav systému se okamžitě po měření „zredukuje“ do vlastního stavu $|a_i\rangle$. Nutno podotknout, že tak nastane pouze v případech, kdy je dané vlastní číslo nedegenerované. Tedy vlastnímu číslu v takovém případě přísluší právě jeden vlastní stav.

V obecnějším případě, kdy každé vlastní číslo může být d_i –krát degenerované, bude stav systému po měření popsán projektorem na příslušný degenerovaný podprostor. Takový projektor můžeme zapsat ve tvaru [3]

$$\hat{P}_i = \sum_k |a_i^{(k)}\rangle \langle a_i^{(k)}|, \quad (1.3)$$

kde k běží od 1 do d_i , tedy do dimenze příslušného degeneračního podprostoru. Obecněji bude tedy stav po měření vypadat [3]

$$|\psi'\rangle = \frac{\hat{P}_i |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi|\hat{P}_i|\psi\rangle}}. \quad (1.4)$$

Výraz ve jmenovateli zajišťuje, aby stav po měření byl normovaný. Zde se ukazuje skutečnost, že proces měření není unitární, a tedy nezachovává normu stavového vektoru. Vidíme, že pro případ $d_i = 1$, tedy případ nedegenerovaného podprostoru bude stav po měření odpovídat vlastnímu stavu $|a_i\rangle$.

1.3 Projektivní měření na smíšeném stavu

V případě, kdy je systém popsán klasickou statistickou směsí normalizovaných čistých stavů, popisujeme jej pomocí operátorů matic hustoty. Formální zavedení můžeme najít např. v [1]

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i|, \quad (1.5)$$

kde $\langle \phi_i|\phi_i\rangle = 1$, $p_i \geq 0$ a $\sum_i p_i = 1$. Matice hustoty musí být hermitovská, mít jednotkovou stopu a její vlastní čísla leží v intervalu $[0,1]$. Matice hustoty po provedení měření a přečtení výsledku bude vypadat následovně [3, 4]

$$\hat{\rho}'(a_i|\hat{\rho}) = \frac{\hat{P}_i \hat{\rho} \hat{P}_i}{\text{prob}(a_i|\hat{\rho})} \quad (1.6)$$

$$= \frac{\hat{P}_i \hat{\rho} \hat{P}_i}{\text{Tr}(\hat{P}_i \hat{\rho})}, \quad (1.7)$$

přičemž čárkou značíme stav po měření a v závorce zdůrazňujeme naměření výsledku a_i v původní matici hustoty $\hat{\rho}$. Jmenovatel se zde vyskytuje opět z důvodu normalizace, tentokrát však požadujeme, aby matice hustoty po měření měla jednotkovou stopu. Výpočetem se dá jednoduše ověřit, že tomu tak skutečně je, přičemž se využije cykličnost stopy a faktu, že kvadrát projektoru je opět

projektor. Takovou matici hustoty po měření s výsledkem a_i můžeme nazvat podmíněnou maticí hustoty po měření [3].

Měření sice způsobilo přechod matice hustoty systému do matice hustoty po měření (1.7), ale stále ve hře zůstává statistická neurčitost. Pravděpodobnost naměření vlastní hodnoty a_i operátoru \hat{A} v systému popsaném pomocí matice hustoty $\hat{\rho}$ bude [3]

$$\text{prob}(a_i|\hat{\rho}) = \text{Tr}(\hat{P}_i\hat{\rho}). \quad (1.8)$$

Nyní přichází důležitý bod. Budeme chtít popsat systém po měření maticí hustoty, ale nebude nás zajímat výsledek měření. V takovém případě musíme výsledný stav popsat jako sumu přes všechny možné výsledky měření váženou jejich pravděpodobnostmi [3]

$$\sum_i \text{prob}(a_i|\hat{\rho}) \cdot \hat{\rho}'(a_i|\hat{\rho}) \quad (1.9)$$

$$= \sum_i \text{prob}(a_i|\hat{\rho}) \cdot \frac{\hat{P}_i\hat{\rho}\hat{P}_i}{\text{prob}(a_i|\hat{\rho})} \quad (1.10)$$

$$= \sum_i \hat{P}_i\hat{\rho}\hat{P}_i \quad (1.11)$$

$$\equiv \hat{\rho}'. \quad (1.12)$$

Měření bylo provedeno, ale nepřčetli jsme výsledek. Došlo k redukci stavu systému, který je nyní popsán pouze statistickou směsí možných výsledků. Tím jsme získali (nepodmíněnou) matici hustoty po měření, která závisí pouze na původním tvaru matice hustoty před měřením.

1.4 Model nepřímého měření

Přístup, který jsme dosud uváděli, vůbec nepopisoval, jakým způsobem bylo měření provedeno. Proces měření se dá alternativně popsat procedurou, která se nazývá nepřímé měření (angl. indirect measurement). Tento koncept původně navrhl John Von Neuman. Konkrétní popis jsme převzali z článku [3]. Měření bude detailněji popsáno interakcí mezi měřeným systémem a měřicím zařízením. Použitím tohoto schématu získáme stejné výsledky jako při projektivním měření, avšak otevřeme si tím cestu k zobecnění ve formě slabého měření.

Idea je následující. Zjednodušeně řečeno, necháme měřený systém interagovat s měřicím přístrojem, tím vznikne provázaný stav. Poté provedeme parciální stopu přes systém měřicího přístroje nebo projektivní měření přímo na měřicím přístroji. Ukáže se, že pokud se nebudeme zajímat o konkrétní výsledek tohoto měření, obě varianty se budou shodovat. Přestože na zkoumaném systému jako takovém měření provedeno nebylo, zjistíme, že se bude nacházet přesně ve stavu, jako by měření provedeno bylo, ale nikdo neregistroval jeho výsledek. Výsledným stavem bude dekoherovaná statistická směs čekající jen než se „podíváme“, jakou hodnotu jsme vlastně změřili.

1.4.1 Popis systému a měřicího přístroje

Uvažujme dva Hilbertovy prostory popisující dva systémy. První systém je měřený systém nebo také objektový systém, zde chceme provést měření. Druhý

systém označíme jako měřicí přístroj nebo systém M. V tomto schématu tedy jak systém, tak měřicí přístroj jsou popsány kvantově.

Hilbertův prostor měřicího přístroje označíme \mathcal{H}_M . Jeho úplnou ortonormální bázi tvoří stavy $|m^{(k)}\rangle$, kde $k = 1, 2, \dots, d_M$. d_M je dimenze Hilbertova prostoru přístroje. Tuto ortonormální bázi můžeme považovat za vlastní stavy operátoru \hat{M} , který na tomto prostoru působí [3]. Hamiltonián toho systému bude nezávislý na čase. Označíme ho \hat{H}_M . Systém M je připraven v počátečním stavu $|m^{(0)}\rangle$, který nemusí být nutně vlastním stavem operátoru \hat{M} . Počáteční stav systému M ve formě matice hustoty zapíšeme $\hat{\mu}_0 = |m^{(0)}\rangle \langle m^{(0)}|$

Hilbertův prostor měřeného systému označíme \mathcal{H}_S . Jeho úplnou ortonormální bázi tvoří vlastní stavy $|a_i\rangle$, kde $i = 1, 2, \dots, d_S$. Jsou to vlastní stavy operátoru \hat{A} . Hamiltonián měřeného systému je taktéž nezávislý na čase a označen \hat{H}_S . Měřený systém se na počátku nachází ve stavu $|\psi_0\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle$, obecně daného nějakou lineární kombinací vlastních stavů měřené veličiny \hat{A} . Matici hustoty takového systému zapíšeme $\hat{\rho} = |\psi_0\rangle \langle \psi_0|$.

Celkový Hilbertův prostor je dán direktním součinem dvou výše popsaných prostorů $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_M$. Celkový čistý počáteční stav můžeme zapsat jako direktní součin $|\Psi_0\rangle = |\psi_0\rangle \otimes |m^{(0)}\rangle$. V této chvíli se zjevně jedná o separovaný stav. Celkový smíšený počáteční stav zapíšeme obdobně jako direktní součin matic hustoty obou podsystémů $\hat{\sigma}_0 = \hat{\rho}_0 \otimes \hat{\mu}_0$. S indexem 0 značíme všechny stavy i matice hustoty na počátku před jakoukoliv interakcí. Také zopakujeme, že počáteční situace je taková, že systém a měřicí přístroj nejsou nijak provázány ani zkorelovány. Hamiltonián celkového systému můžeme zapsat $\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_M + \hat{H}_{\text{int}}$, kde \hat{H}_{int} značí interakční Hamiltonián [3]. Tímto způsobem jde rozepsat každý Hamiltonián dvou systémů. Evoluční operátor tedy zapíšeme

$$\hat{U} = e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_S + \hat{H}_M + \hat{H}_{\text{int}})t}. \quad (1.13)$$

Nyní provedeme předpoklad, že Hamiltoniány příslušející oběma podsystémům jsou v naší problematice zanedbatelně malé oproti interakčnímu Hamiltoniánu. Nezaměřujeme se totiž na vlastní evoluci podsystémů, ale na jejich vzájemný vývoj, který mění provázanost (korelaci) mezi nimi. Poté se evoluční operátor zredukuje na

$$\hat{U} \approx e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{\text{int}}t}. \quad (1.14)$$

Konkrétní tvar interakčního Hamiltoniánu je dán [3, 4]

$$\hat{H}_{\text{int}} = \kappa \hat{A} \otimes \hat{\pi}. \quad (1.15)$$

Přičemž první část součinu $\hat{A} \otimes \hat{\pi}$ působí na \mathcal{H}_S a jedná se přímo o operátor měřené veličiny \hat{A} . Druhý operátor v součinu $\hat{A} \otimes \hat{\pi}$ působí na prostoru \mathcal{H}_M a značí hybnost kanonicky sdruženou k operátoru souřadnice na systému M. Velikost nebo potažmo „sílu“ interakčního Hamiltoniánu můžeme korigovat bezrozměrnou konstantou κ . K této konstantě se vrátíme později.

1.4.2 Interakce s měřicím přístrojem

Nejprve budeme uvažovat, že celkový systém je připraven v čistém separovaném stavu $|\Psi_0\rangle$. Podsystémy necháme interagovat tak, že na ně zapůsobíme naším

evolučním operátorem (1.14). Stavy a později i matice hustoty po zapůsobení evolučního operátoru budeme značit s indexem 1. Dostáváme

$$|\Psi_1\rangle = \hat{U} |\Psi_0\rangle \quad (1.16)$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}\kappa t \hat{A} \otimes \hat{\pi}} |\psi_0\rangle \otimes |m^{(0)}\rangle \quad (1.17)$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}\kappa t \hat{A} \otimes \hat{\pi}} \sum_i c_i |a_i\rangle \otimes |m^{(0)}\rangle. \quad (1.18)$$

Ihned si všimněme, že stav $|a_i\rangle$ je vlastním stavem operátoru \hat{A} , tedy jeho působení bude vypadat následovně

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\kappa t \hat{A}} |a_i\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\kappa t a_i} |a_i\rangle. \quad (1.19)$$

Při provádění podrobného výpočtu bychom exponenciálu rozvedli do řady, každou mocninou operátoru zapůsobili na vlastní vektor, tím bychom dostali mocniny vlastního čísla a_i , pak bychom jen rozvoj zase vrátili do exponenciály. Po zapůsobení na stav $|a_i\rangle$ se z této části exponenciály stalo pouze číslo. Máme už jen exponenciálu operátoru hybnosti, který působí na prostoru měřicího přístroje. Celkový stav systému po interakci tedy bude [4]

$$|\Psi_1\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle \otimes e^{-\frac{i}{\hbar}\kappa t a_i \hat{p}} |m^{(0)}\rangle \quad (1.20)$$

$$\equiv \sum_i c_i |a_i\rangle \otimes |m^{(i)}\rangle. \quad (1.21)$$

Operátor, který nyní v rovnici (1.20) působí na počáteční stav přístroje, je vlastně operátorem translace. Výsledný stav celkového systému po interakci už není separovaným, nýbrž provázaným stavem.

Stav přístroje je posunut operátorem translace. O jakou hodnotu? O hodnotu $\kappa t a_i$. Pro tento posunutý stav měřicího přístroje jsme použili označení $e^{-\frac{i}{\hbar}\kappa t a_i \hat{p}} |m^{(0)}\rangle \equiv |m^{(i)}\rangle$. Index i v závorce značí právě posunutí o $\kappa t a_i$.

Chceme-li popsat vývoj systému zadaného ve formě matic hustoty podsystemů, využijeme opět náš evoluční operátor (1.14). Dostáváme

$$\hat{\sigma}_1 = \hat{U} \hat{\sigma}_0 \hat{U}^+ \quad (1.22)$$

$$= \hat{U} (\hat{\rho}_0 \otimes \hat{\mu}_0) \hat{U}^+ \quad (1.23)$$

$$= \sum_{i,j} (c_i c_j^* |a_i\rangle \langle a_j|) \otimes |m^{(i)}\rangle \langle m^{(j)}| \quad (1.24)$$

$$= \sum_{i,j} c_i c_j^* |a_i\rangle |m^{(i)}\rangle \langle m^{(j)}| \langle a_j| \quad (1.25)$$

$$= \sum_{i,j} (\langle a_i | \hat{\rho}_0 | a_j \rangle |a_i\rangle \langle a_j|) \otimes |m^{(i)}\rangle \langle m^{(j)}| \quad (1.26)$$

$$= \sum_{i,j} (\hat{P}_i \hat{\rho}_0 \hat{P}_j) \otimes |m^{(i)}\rangle \langle m^{(j)}|. \quad (1.27)$$

Všechny uvedené formy zápisu matice hustoty systému po interakci jsou ekvivalentní. Také se shodují s výsledkem, který bychom dostali, kdybychom zapsali čistý stav po interakci (1.21) do podoby matice hustoty $\hat{\sigma}_1 = |\Psi_1\rangle \langle \Psi_1|$. Shodu lze nejlépe vidět ze tvaru (1.25).

1.4.3 Stav objektového systému po interakci

Nyní budeme chtít znát, v jakém stavu se nachází objektový podsystém po interakci. Toho docílíme provedením parciální stopy přes systém M [3]

$$\hat{\rho}_1 = \text{Tr}_M(\hat{\sigma}_1) \quad (1.28)$$

$$= \sum_k \langle m^{(k)} | \hat{\sigma}_1 | m^{(k)} \rangle \quad (1.29)$$

$$= \sum_{i,j,k} \hat{P}_i \hat{\rho}_0 \hat{P}_j \langle m^{(k)} | m^{(i)} \rangle \langle m^{(j)} | m^{(k)} \rangle \quad (1.30)$$

$$= \sum_k \hat{P}_k \hat{\rho}_0 \hat{P}_k \quad (1.31)$$

$$= \sum_k c_k c_k^* |a_k\rangle \langle a_k| \quad (1.32)$$

$$= \sum_k |c_k|^2 |a_k\rangle \langle a_k|. \quad (1.33)$$

Využili jsme zásadního předpokladu, že stavy systému M jsou ortonormální. Tedy platí $\langle m^{(i)} | m^{(j)} \rangle = \delta_{ij}$, což je pravda pouze v případě ideálního měření. Ortonormalitu můžeme interpretovat tak, že stavy systému M mezi sebou dokážeme dokonale rozlišit, tedy nemají žádný překryv. Zjednodušeně řečeno ručička takového měřicího přístroje má podobu delta funkce.

Systém je nyní dán pouze statistickou směsí, měření jakoby bylo provedeno, ale neregistrovali jsme výsledek. Rozpoznáváme zde alternativní vyjádření postulátu o měření ve tvaru (1.11).

Pokud bychom se zajímali o stav systému M po interakci, provedli bychom parciální stopu matice $\hat{\sigma}_1$ přes objektový systém. S využitím ortonormality vlastních stavů $|a_i\rangle$ dostáváme [3]

$$\hat{\mu}_1 = \text{Tr}_S(\hat{\sigma}_1) \quad (1.34)$$

$$= \sum_k \langle a_k | \hat{\sigma}_1 | a_k \rangle \quad (1.35)$$

$$= \sum_k \langle a_k | \hat{\rho}_0 | a_k \rangle |m^{(k)}\rangle \langle m^{(k)}| \quad (1.36)$$

$$= \sum_k |c_k|^2 |m^{(k)}\rangle \langle m^{(k)}|. \quad (1.37)$$

Použitím nepřímého měření s dokonale rozeznatelnými (ortonormálními) stavy měřicího přístroje jsme získali stejné výsledky jako u přímého projektivního měření v případě, že se nezajímáme o konkrétní výsledek měření. Tedy model nepřímého měření funguje, jak bychom požadovali.

1.4.4 Projektivní měření na měřicím přístroji

Jak jsme avizovali na začátku kapitoly, tak nyní ukážeme, jak ještě můžeme dospět k matici hustoty podsystému (1.33). Provedeme projektivní měření na systému M . Tím zrušíme provázání systému a přístroje a vytvoříme separovaný stav. Vzhledem k tomu, že se jedná o projektivní měření, systém případně do

stavu po měření daného postulátem (1.7)

$$\hat{\sigma}'_1(m^{(k)}|\hat{\sigma}_1) = \frac{(\hat{1}_S \otimes \hat{P}_k) \hat{\sigma}_1 (\hat{1}_S \otimes \hat{P}_k)}{\text{prob}(m^{(k)}|\hat{\sigma}_1)}. \quad (1.38)$$

Protože na objektovém systému žádné měření neprovádíme, tak na jeho podprostoru působíme pouze jednotkovým operátorem. Pravděpodobnost naměření hodnoty $m^{(k)}$ ve jmenovateli vypočítáme na základě vztahu (1.8) [3]. Matici hustoty objektového podsystemu získáme provedením parciální stopy celkové matice hustoty přes systém přístroje. Formálně to zapíšeme následovně [3]

$$\hat{\rho}'_1(m^{(k)}|\hat{\sigma}_1) = \text{Tr}_M [\hat{\sigma}'_1(m^{(k)}|\hat{\sigma}_1)] \quad (1.39)$$

$$= \frac{\text{Tr}_M [(\hat{1}_S \otimes \hat{P}_k) \hat{\sigma}_1 (\hat{1}_S \otimes \hat{P}_k)]}{\text{prob}(m^{(k)}|\hat{\sigma}_1)} \quad (1.40)$$

$$= \frac{\langle m^{(k)}|\hat{U}(\hat{\rho}_0 \otimes \hat{\mu}_0)\hat{U}^+|m^{(k)}\rangle}{\text{prob}(m^{(k)}|\hat{\sigma}_1)}. \quad (1.41)$$

Výraz by se dal ještě rozepsat se zavedením tzv. měřících operátorů, které však nadále v této práci nebudeme potřebovat, proto je ani nebudeme zavádět. Poznamenejme pouze, že pokud by nás nezajímalo výsledky projektivního měření na měřicím přístroji, tak bychom matici hustoty systému získali jako sumu přes všechny možné výsledky vážené jejich pravděpodobnostmi

$$\sum_k \text{prob}(m^{(k)}|\hat{\sigma}_1) \cdot \hat{\rho}'_1(m^{(k)}|\hat{\sigma}_1) \quad (1.42)$$

$$= \sum_k \text{prob}(m^{(k)}|\hat{\sigma}_1) \cdot \frac{\langle m^{(k)}|\hat{U}(\hat{\rho}_0 \otimes \hat{\mu}_0)\hat{U}^+|m^{(k)}\rangle}{\text{prob}(m^{(k)}|\hat{\sigma}_1)} \quad (1.43)$$

$$= \sum_k \langle m^{(k)}|\hat{U}(\hat{\rho}_0 \otimes \hat{\mu}_0)\hat{U}^+|m^{(k)}\rangle \quad (1.44)$$

$$= \sum_k \langle m^{(k)}|\hat{U}\hat{\sigma}_0\hat{U}^+|m^{(k)}\rangle \quad (1.45)$$

$$= \sum_k \langle m^{(k)}|\hat{\sigma}_1|m^{(k)}\rangle \quad (1.46)$$

$$= \hat{\rho}_1. \quad (1.47)$$

Což se přesně shoduje s maticí hustoty systému po interakci získanou pomocí parciální stopy. Využili jsme rovnice (1.23) a (1.30). Tedy projektivní měření na systému M bez přečtení výsledku nás dovedlo ke stejnému tvaru matice hustoty systému.

Jako důležitý výsledek celé kapitoly o nepřímém měření zdůrazníme to, že matice hustoty objektového systému po nepřímém měření $\hat{\rho}_1$ získaná ať už přes parciální stopu celkového systému nebo přes projektivní měření na přístroji se shoduje s nepodmíněnou maticí hustoty $\hat{\rho}'$ danou postulátem o měření (1.11).

1.5 Příklad ideálního nepřímého měření diskretních hodnot

V této sekci se pokusíme výše uvedené schéma nepřímého měření aplikovat na měření v nejjednodušším Hilbertově prostoru dimenze 2. Naší pozorovatelnou

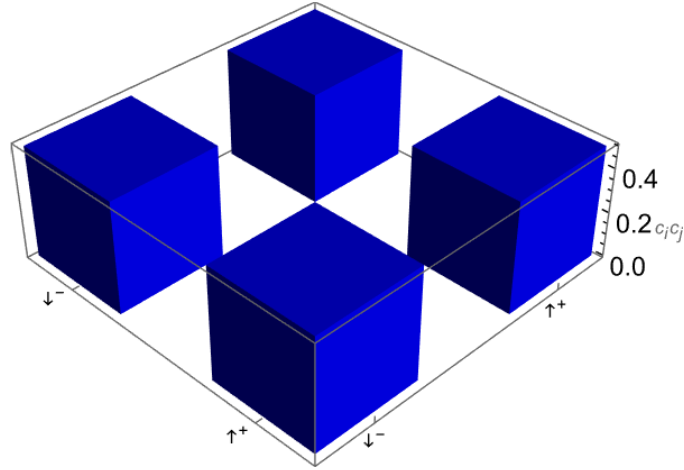
bude projekce spinu o velikosti $\frac{1}{2}$ do osy z \hat{S}_z . Vlastní vektory budeme značit $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$. Vybraný stav na tomto prostoru zapíšeme

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle. \quad (1.48)$$

Zřejmě se jedná o čistý stav, který ve formě matice hustoty můžeme zapsat

$$\hat{\rho}_0 = |\psi_0\rangle \langle\psi_0| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (1.49)$$

Graficky můžeme matici hustoty počátečního stavu reprezentovat v diskretním sloupcovém grafu v obrázku 1.1.



Obrázek 1.1 Grafické vykreslení matice hustoty systému před interakcí.

Abychom mohli pohodlně určit, zda a jak moc je daný stav čistý resp. smíšený, zavedeme si pro to dvě kritéria. Obě jsme převzali z učebnic kvantové mechaniky (např. [1]). Stopa kvadrátu matice hustoty je rovna jedné právě tehdy, když stav je čistý. Kdykoliv je stav smíšený, tak stopa kvadrátu matice hustoty je menší než jedna. Vágně řečeno, čím je stav smíšenější, tím je stopa kvadrátu matice hustoty menší od jedničky. Další možností, jak zjistit čistotu stavu je přes entropii S .

$$S = -k \text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) \quad (1.50)$$

$$= -k \sum_i \rho_i \ln \rho_i \quad (1.51)$$

Čísla ρ_i jsou vlastní čísla matice hustoty. Konstantu k můžeme položit rovnu jedné. Čistému stavu nutně odpovídá nulová entropie, nejvíce smíšenému stavu entropie $\ln(d_{\mathcal{H}})$. V našem případě veličiny nabývají

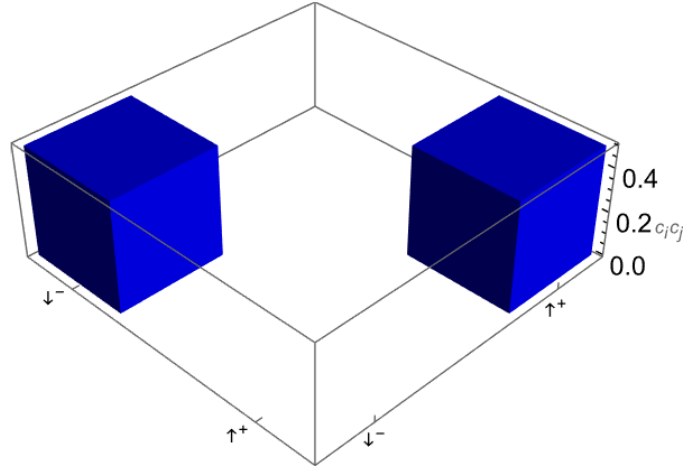
$$S_0 = 0, \quad (1.52)$$

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_0^2) = 1. \quad (1.53)$$

To odpovídá čistému stavu dle předpokladu. Nyní přímočaře aplikujeme proceduru ideálního nepřímého měření. Matice hustoty systému po měření bez přechtení výsledku bude ve tvaru (1.33) konkrétně

$$\hat{\rho}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (1.54)$$

Jedná se čistě o statistickou směs, pokud bychom nyní přečetli výsledek, tak s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ dostaneme spin $|\uparrow\rangle$ a se stejnou pravděpodobností $\frac{1}{2}$ dostaneme spin $|\downarrow\rangle$. Graficky můžeme matici hustoty zase vykreslit v sloupcovém grafu 1.2.



Obrázek 1.2 Grafické vykreslení matice hustoty systému po ideálním nepřímém měření.

Důležité je zdůraznit, že systém se nyní nenachází v čistém stavu. Ve skutečnosti se jedná o stav, o kterém bychom řekli, že je smíšený nejvíce. To můžeme vidět přímo ze stopy kvadrátu matice hustoty a entropie

$$S_1 = \ln(2), \quad (1.55)$$

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_1^2) = \frac{1}{2}. \quad (1.56)$$

Entropie se zvýšila, to také nasvědčuje tomu, že proběhl neunitární proces. Protože unitárním procesem nikdy nemůžeme z čistého stavu vytvořit stav smíšený [1]. Entropie dosahuje maximální hodnoty, proto je stav nejvíce smíšený. Kdybychom si jako počáteční stav zvolili libovolný jiný, postupovali bychom analogickým způsobem a vždy bychom došli k závěru, že po procesu nepřímého měření se entropie stavu zvýšila.

1.6 Příklad ideálního nepřímého měření spojitě veličiny

V této sekci se pokusíme ukázat, jak by mohlo vypadat ideální nepřímé měření spojitě veličiny v našem případě souřadnice \hat{X} . Stav systému na počátku zapíšeme pomocí spojitě funkce od souřadnice x

$$|\psi_0\rangle = \int dx \psi(x) |x\rangle. \quad (1.57)$$

Ve formě matice hustoty stejný stav zapíšeme jako

$$\hat{\rho}_0 = |\psi_0\rangle \langle\psi_0| \quad (1.58)$$

$$= \int \int dx dx' \psi(x) \psi^*(x') |x\rangle \langle x'|. \quad (1.59)$$

Maticové elementy vyjádříme

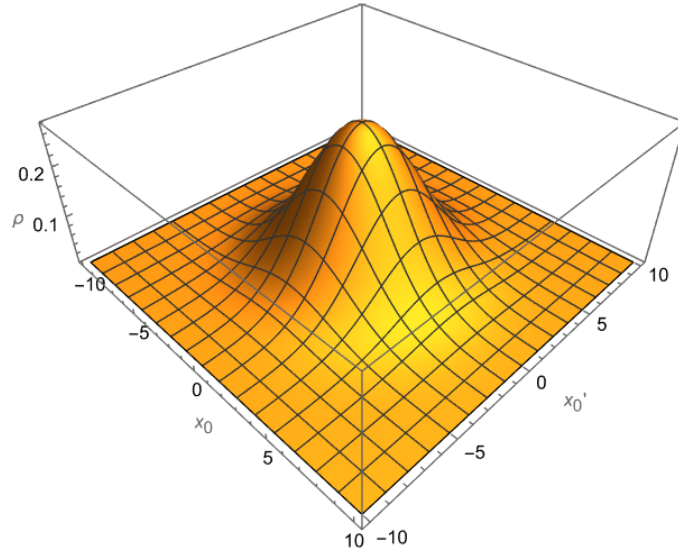
$$\langle x_0 | \hat{\rho}_0 | x'_0 \rangle = \int \int dx dx' \psi(x) \psi^*(x') \langle x_0 | x \rangle \langle x' | x'_0 \rangle \quad (1.60)$$

$$= \int \int dx dx' \psi(x) \psi^*(x') \delta(x - x_0) \delta(x' - x'_0) \quad (1.61)$$

$$= \psi(x_0) \psi^*(x'_0), \quad (1.62)$$

kde jsme využili normalizaci souřadnice na δ -funkci $\langle x | x' \rangle = \delta(x - x')$.

Výsledné maticové elementy můžeme vykreslit do 3D grafu jako plochu na nějaké oblasti. Stačí si zvolit libovolnou normalizovanou funkci. Pro ilustraci jsme jako vlnovou funkci použili gausián se střední hodnotou v bodě $(x_0, x'_0) = (0, 0)$ a pološířkou $\sigma = 2$ a vykreslili ji do obrázku 1.3.



Obrázek 1.3 Grafické vykreslení vlnové funkce systému před interakcí.

Celá procedura nepřímého měření bude probíhat ve stejném duchu s tím, že stav systému M bude místo diskrétní hodnoty úměrné a_i posunut o spojitou hodnotu úměrnou x . Přičemž jako počáteční stav přístroje bereme stále $|m^{(0)}\rangle$. Formálně můžeme počáteční separovaný stav systému a přístroje zapsat následovně

$$|\Psi_0\rangle = |\psi_0\rangle \otimes |m^{(0)}\rangle \quad (1.63)$$

$$= \int dx \psi(x) |x\rangle \otimes |m^{(0)}\rangle \quad (1.64)$$

a provázaný stav po vzájemné interakci (stav přístroje je posunutý vždy o reálnou hodnotu x)

$$|\Psi_1\rangle = \int dx \psi(x) |x\rangle \otimes |m^{(x)}\rangle. \quad (1.65)$$

Nyní stejně jako v diskrétním případě provedeme parciální stopu přes systém M a využijeme ortonormalitu jeho stavů $\langle m^{(x)} | m^{(x')} \rangle = \delta(x - x')$

$$\hat{\rho}_1 = \int d\tilde{x} \int \int dx dx' \psi(x) \psi^*(x') |x\rangle \langle x'| \langle m^{(\tilde{x})} | m^{(x)} \rangle \langle m^{(x')} | m^{(\tilde{x})} \rangle \quad (1.66)$$

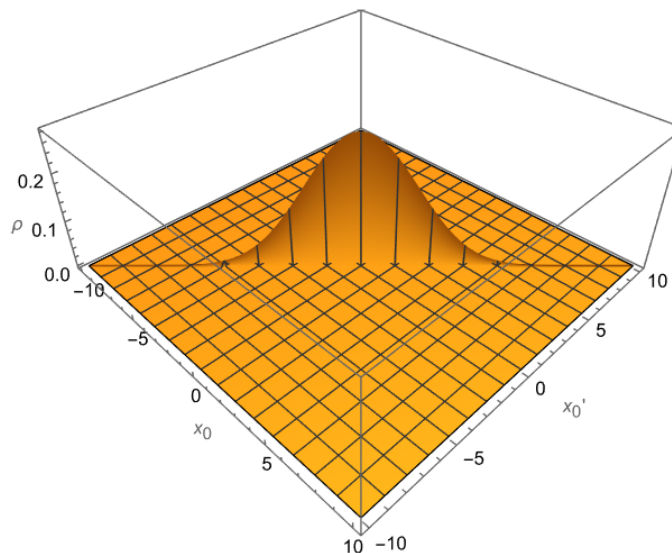
$$= \int d\tilde{x} \int \int dx dx' \psi(x) \psi^*(x') \delta(x - \tilde{x}) \delta(x' - \tilde{x}) |x\rangle \langle x'| \quad (1.67)$$

$$= \int dx |\psi(x)|^2 |x\rangle \langle x|. \quad (1.68)$$

Když nyní zapíšeme maticové elementy $\langle x_0 | \hat{\rho}_1 | x'_0 \rangle$ dostaneme výraz

$$\langle x_0 | \hat{\rho}_1 | x'_0 \rangle = |\psi(x_0)|^2 \delta(x_0 - x'_0). \quad (1.69)$$

Vidíme, že po ideálním měření zbyly opět pouze „diagonální elementy“ matice hustoty. Ve spojitém případě si to můžeme představit tak, že vlnová funkce je nenulová pouze v bodech, kdy $x_0 = x'_0$ a všude jinde je nulová. Opět jsme získali pouze statistickou směs. Pro případ vlnové funkce ve tvaru gausiánu opět o pološírce $\sigma = 2$ jsme pro ilustraci vykreslili situaci do obrázku 1.4.



Obrázek 1.4 Grafické vykreslení vlnové funkce systému po ideálním nepřímém měření.

Ve spojitém případě bychom se při přímém výpočtu entropie a stopy kvadrátu matice hustoty dostali k problémům s neurčitými výrazy. Z toho důvodu uvedeme pouze výsledný vztah pro stopu kvadrátu matice hustoty, ze kterého jde dobře vidět, že stav po nepřímém měření je zcela jistě smíšený

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_1^2) = \text{Tr}(\hat{\rho}_1 \hat{\rho}_1) \quad (1.70)$$

$$= \int dx |\psi(x)|^4 \leq 1. \quad (1.71)$$

Vlnovou funkci považujeme za normovanou, tedy že integrál druhé mocniny její velikosti je roven jedné. Z toho důvodu bude integrál její čtvrté mocniny určitě menší nebo roven 1, což odpovídá smíšenému stavu. Rovnost nastane v případě, když už počáteční vlnová funkce odpovídala δ -funkci.

2 Slabé měření

Doposud jsme se věnovali ideálnímu měření, které jsme popsali z pohledu projekčního postulátu, ale také přes schéma nepřímého měření. Právě druhý zmíněný přístup nám umožní udělat krok k zobecnění a zavedení pojmu slabé měření. Zásadní změnou oproti ideálnímu nepřímému měření bude to, že stavy měřicího přístroje už nebudou dokonale rozlišitelné a tedy ortonormální. Jinými slovy měřicí přístroj nebude „ideální“ a jeho „ručička“ nebude ukazovat ostrou hodnotu, ale její neurčitost v poloze bude popsána nějakým rozdělením, v našem případě gaussovským se střední hodnotou ξ_0 a pološířkou Γ .

Před podrobným zavedením ještě zmíníme fyzikální intuici vedoucí k tomuto zobecnění. Je zřejmé, že stav měřeného systému, který studujeme, je po procesu měření narušen. To můžeme vidět při porovnání původní matice hustoty systému $\hat{\rho}_0$ s maticí hustoty po projektivním měření bez přečtení výsledku $\hat{\rho}'$ (1.11) nebo po ideálním nepřímém měření $\hat{\rho}_1$ (1.31). Je nějaká možnost, abychom systém při procesu měření tolik nenarušili, ale narušili ho nějakým způsobem méně? Zde přichází myšlenka slabého měření. Slabé měření je takové, které naruší stav zkoumaného systému, co nejméně jak to jen jde [3]. Cenou za to však bude, že z výsledků takového měření nebude ihned zřejmé, co vlastně znamenají. Tím, že systém narušíme jen slabě, získáme tak jen nějakou informaci, která nebude mít povahu vlastních hodnot vybrané pozorovatelné.

K pojmu slabé měření se dá také dospět tak, že bezrozměrnou konstantu κ zajišťující „sílu“ interakce mezi měřeným systémem a měřicím přístrojem budeme brát co nejmenší možnou. Ukážeme, že tímto přechodem se dá zajistit limita nekonečně slabého měření. Dále využijeme malé velikosti této konstanty při odvození slabých hodnot v další sekci.

2.1 Gaussovský stav měřicího přístroje

Pro obecnější popis použijeme pro „tvar“ neboli neurčitost stavu měřicího přístroje v poloze avizované gaussovské rozdělení. Různé stavy přístroje teď budou mít nenulový překryv, jinými slovy už nebudou ortonormální. Vlnová funkce takového stavu v souřadnicové reprezentaci stavů přístroje bude vypadat následovně

$$|m^{(0)}\rangle = \int d\xi \frac{1}{(2\pi\Gamma^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{(\xi-\xi_0)^2}{4\Gamma^2}} |\xi\rangle, \quad (2.1)$$

přičemž hodnota ξ_0 značí počáteční polohu středu gausiánu a Γ jeho pološířku.

Celkový systém po interakci bude stále popsán vztahem (1.25)

$$\hat{\sigma}_1 = \sum_{i,j} c_i c_j^* |a_i\rangle |m^{(i)}\rangle \langle m^{(j)}| \langle a_j|. \quad (2.2)$$

Teď, když chceme dostat matici hustoty objektového podsystemu, provedeme partiální stopu, ale protože jsme stavy systému M vyjádřili v souřadnicové reprezentaci,

musíme i stopu vypočítat spojitě. Sumaci nahradí integrál a dostáváme

$$\hat{\rho}_1 = \int d\xi \sum_{i,j} c_i c_j^* |a_i\rangle \langle a_j| \langle \xi | m^{(i)} \rangle \langle m^{(j)} | \xi \rangle \quad (2.3)$$

$$= \sum_{i,j} c_i c_j^* |a_i\rangle \langle a_j| \int d\xi \langle \xi | m^{(i)} \rangle \langle m^{(j)} | \xi \rangle. \quad (2.4)$$

Přistoupíme nyní pouze k výpočtu integrálu a dostaneme

$$\int d\xi \langle \xi | m^{(i)} \rangle \langle m^{(j)} | \xi \rangle \quad (2.5)$$

$$= \int \int \int d\xi d\xi' d\xi'' \frac{1}{(2\pi\Gamma^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(\xi' - (\xi_0' + \kappa t a_i))^2 + (\xi'' - (\xi_0'' + \kappa t a_j))^2}{4\Gamma^2}} \langle \xi | \xi' \rangle \langle \xi'' | \xi \rangle \quad (2.6)$$

$$= \int d\xi \frac{1}{(2\pi\Gamma^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(\xi - (\xi_0 + \kappa t a_i))^2 + (\xi - (\xi_0 + \kappa t a_j))^2}{4\Gamma^2}} \quad (2.7)$$

$$= e^{-\frac{\kappa^2 t^2}{8\Gamma^2} (a_i - a_j)^2}. \quad (2.8)$$

Využili jsme normalizaci souřadnice přístroje na δ -funkci $\langle \xi | \xi' \rangle = \delta(\xi - \xi')$ a výpočetního softwaru pro integrály. Vidíme, že výraz nezávisí na počátečních polohách středů stavů přístroje ξ_0' a ξ_0'' . Dosazením vyčísleného integrálu do rovnice (2.4) dostáváme

$$\hat{\rho}_1 = \sum_{i,j} c_i c_j^* |a_i\rangle \langle a_j| \cdot e^{-\frac{\kappa^2 t^2}{8\Gamma^2} (a_i - a_j)^2}. \quad (2.9)$$

Tím jsme získali matici hustoty objektového systému po slabém (neideálním) měření.

2.2 Diskuze limitních hodnot

V tomto oddíle chceme ověřit, zda výsledek z předešlé sekce (2.9) v limitním případě přechází na vztah (1.33). Provedeme také stručnou diskuzi opačného limitního případu.

V limitě ideálního, nekonečně silného měření potřebujeme ze vztahu (2.9) získat vztah (1.33). Potřebujeme ukázat, že exponenciála (2.8) přechází pro $\Gamma \rightarrow 0^+$ k Kroneckerovskému δ_{ij} . Vlastně to znamená, že budeme pološířku stavů měřicího přístroje zmenšovat co nejvíce, až se z nich stanou dokonale rozlišitelné stavy s nulovým překryvem, jako tomu bylo v případě ideálního měření. Limitu formálně zapíšeme

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0^+} e^{-\frac{\kappa^2 t^2}{8\Gamma^2} (a_i - a_j)^2} \quad (2.10)$$

a vyřešíme ji pro dva možné případy zvlášť. Pro $a_i \neq a_j$ dostaneme

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0^+} e^{-\frac{\kappa^2 t^2}{8\Gamma^2} (a_i - a_j)^2} = 0. \quad (2.11)$$

Pro $a_i = a_j$ provedeme nejdříve dosazení a až poté limitní přechod, abychom se vyhnuli neurčitým výrazům v exponentu

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0^+} e^{-\frac{\kappa^2 t^2}{8\Gamma^2} (a_i - a_j)^2} = \lim_{\Gamma \rightarrow 0^+} e^{-\frac{\kappa^2 t^2}{8\Gamma^2} \cdot 0} \quad (2.12)$$

$$= \lim_{\Gamma \rightarrow 0^+} e^0 \quad (2.13)$$

$$= 1. \quad (2.14)$$

Tímto jsme tedy ukázali požadované limitní chování.

Přistupme k opačné limitě. V podstatě to znamená, aby celá exponenciála (2.8) v limitě vymizela k 1. To můžeme zajistit vícero možnostmi. Provedením limitního přechodu $\Gamma \rightarrow +\infty$ zajistíme nekonečně velkou pološířku gaussiánu a tedy nekonečně slabé měření, protože zjednodušeně řečeno stavy systému M mají tak velkou neurčitost v lokalizaci, že jejich rozdělení přesahují celé spektrum vlastních hodnot operátoru \hat{A} , a tudíž nám nedají žádnou konkrétní hodnotu ze spektra operátoru \hat{A} . Jako bychom vlastně měření neprovedli, protože jsme žádnou informaci nezískali. Další možností je provedení limitního přechodu $\kappa \rightarrow 0^+$ za konstantního t nebo $t \rightarrow 0^+$ za konstantního κ nebo $(\kappa t) \rightarrow 0^+$. Můžeme tedy naši konstantu určující „sílu“ interakce poslat k nule nebo nekonečně zkrátit čas interakce, tak že vlastně žádná interakce neproběhne a my dostaneme v limitě nekonečně slabé měření.

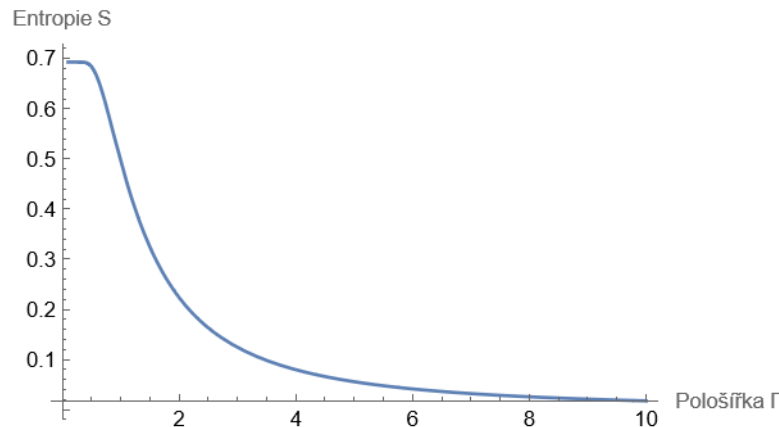
Nerigorózním způsobem jsme ukázali, že obecnější popis stavu systému M ve formě gaussiánu přechází v limitě ke správným výsledkům uvedeným výše.

2.3 Příklad slabého měření disktrétních hodnot

V této části navážeme na sekci 1.5 a rozebereme popsání měření spinu s neideálním měřicím přístrojem. Matice hustoty systému před interakcí zůstává stejná (1.49). Opět aplikujeme proceduru nepřímého měření, tentokrát však s gaussovskými stavy systému M. Matice hustoty systému po interakci s takovými stavy systému M bude vypadat podle obecného tvaru (2.9) a konkrétně po dosazení hodnot

$$\hat{\rho}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} e^{-\frac{\kappa^2 t^2}{2\Gamma^2}} \\ \frac{1}{2} e^{-\frac{\kappa^2 t^2}{2\Gamma^2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

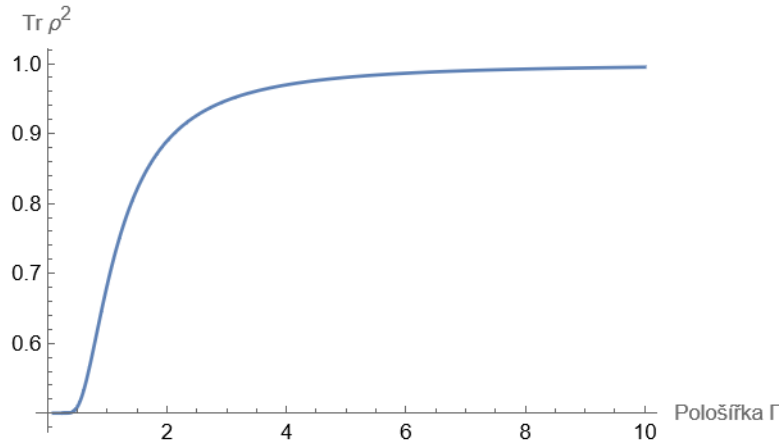
Vidíme, že jsme dostali tvar odlišný jak od původního tvaru před interakcí, tak od tvaru po silném nepřímém měření (1.54). Intuitivně bychom mohli říct, že jsme dostali něco mezi. Exponenciály v mimodiagonálních členech zajistí jejich rychlý útlum se zmenšující se pološířkou Γ . Pokud bychom chtěli obecně vypočítat entropii nebo stopu kvadrátu, dostali bychom dlouhé, mnoho neříkající obecné výrazy. Proto by bylo vhodné zvolit konkrétní číselné hodnoty za parametry κ, t, Γ . Alternativně jsme závislost entropie na pološířce Γ vykreslili do obrázku 2.1



Obrázek 2.1 Závislost entropie na pološířce gaussiánu stavu přístroje pro $t = \kappa = 1$.

V obrázku 2.1 vidíme, že pokud jde pološířka k nule, tedy gaussian se blíží k δ -funkci a entropie stavu systému po interakci je blízká hodnotě $\ln(2) \approx 0,69$. Dostáváme tedy shodu s limitou ideálního měření. Na druhé straně s rostoucí pološířkou entropie poměrně rychle klesá a stav systému po interakci se blíží čistému stavu, jaký byl před interakcí.

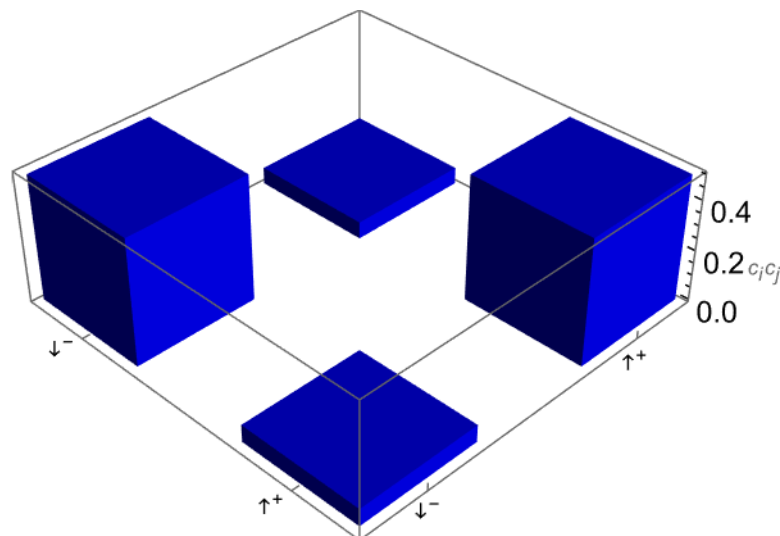
Podobně vykreslíme i závislost stopy kvadrátu matice hustoty na pološířce do obrázku 2.2.



Obrázek 2.2 Závislost stopy kvadrátu matice hustoty na pološířce gaussianu stavu přístroje pro $t = \kappa = 1$.

V obrázku 2.2 vidíme, že pro téměř nulovou pološířku se stopa kvadrátu blíží hodnotě $\frac{1}{2}$, což odpovídá ideálnímu měření. V opačném případě stopa kvadrátu rychle roste a pro větší hodnoty pološířky se blíží k jedné, což odpovídá čistému stavu před interakcí.

Podobně jako v případě ideálního měření, můžeme jako vizualizaci matice hustoty vykreslit ve sloupcovém grafu v obrázku 2.3 pro konkrétní hodnoty $\kappa = 1$, $t = 1$ a $\Gamma = \frac{1}{2}$. Tyto hodnoty jsme zvolili záměrně, protože se zde entropie prudce mění, jak můžeme vidět na základě obrázku 2.1.



Obrázek 2.3 Grafické vykreslení matice hustoty po slabém měření pro $t = \kappa = 1$ a $\Gamma = \frac{1}{2}$.

2.4 Příklad slabého měření spojitě veličiny

V této sekci navážeme na kapitolu 1.6 a rozebereme situaci, kdy i stavy systému M v případě měření spojitě veličiny nebudou ortonormální. Vyjdeme z matice hustoty po interakci objektového a měřicího systému (1.66). Nejprve se zaměříme na výpočet skalárního součinu dvou různých stavů systému M . Využijeme stejného postupu jako v obecném diskretním případě a dostaneme podobný výsledek

$$\langle m^{(x)} | m^{(x')} \rangle = e^{-\frac{\kappa^2 t^2}{8\Gamma^2} (x-x')^2}. \quad (2.16)$$

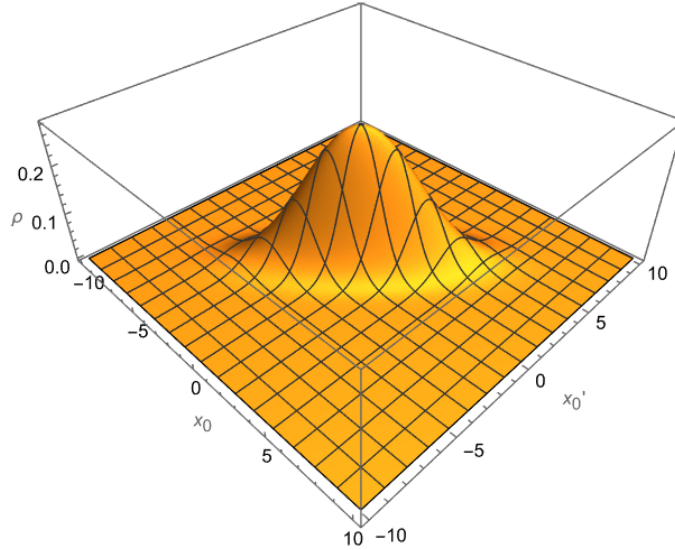
Matice hustoty systému po interakci bude tedy vypadat

$$\hat{\rho}_1 = \int \int dx dx' \psi(x) \psi^*(x') e^{-\frac{\kappa^2 t^2}{8\Gamma^2} (x-x')^2} |x\rangle \langle x'| \quad (2.17)$$

a její maticové elementy

$$\langle x_0 | \hat{\rho}_1 | x'_0 \rangle = \psi(x_0) \psi^*(x'_0) e^{-\frac{\kappa^2 t^2}{8\Gamma^2} (x_0-x'_0)^2}, \quad (2.18)$$

v čemž můžeme vidět jistý spojitý analog vztahu (2.9). Vidíme že na „diagonále“ v bodech $x_0 = x'_0$ je exponenciála rovna jedné a dostáváme stejné hodnoty jako při ideálním měření. Nicméně mimo „diagonálu“ už vlnová funkce není nutně nulová, ale je tlumena exponenciálním faktorem. Názorně to můžeme vidět v obrázku 2.4. Použili jsme číselné hodnoty $t = 1$, $\kappa = 0,7$, $\sigma = 2$ a $\Gamma = 0,5$. Tyto hodnoty jsme zvolili tak, aby šlo vidět rychlé exponenciální utlumení, když se x_0 liší od x'_0 .



Obrázek 2.4 Grafické vykreslení vlnové funkce po slabém měření.

Dostali jsme analogický výsledek k diskretnímu případu. V diskretním případě byly mimodiagonální elementy matice hustoty exponenciálně tlumeny. Podobně jsou exponenciálně tlumeny „mimodiagonální“ spojitě maticové elementy, tedy kde $x_0 \neq x'_0$. Pokud bychom použili jinou vlnovou funkci, dostali bychom samozřejmě podobný výsledek.

Podobně jako v případě ideálního měření bychom se i zde při přímém výpočtu entropie a stopy kvadrátu matice hustoty dostali k problémům s neurčitými výrazy.

Opět uvedeme pouze výsledný vztah pro stopu kvadrátu matice hustoty

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_1^2) = \int \int dx dx' |\psi(x)|^2 |\psi(x')|^2 e^{-\frac{\kappa^2 t^2}{8\Gamma^2}(x-x')^2} \leq 1. \quad (2.19)$$

Argumentace poslední nerovnosti je podobná jako v případě ideálního nepřímého měření. Pro $\Gamma \rightarrow 0^+$ se z exponenciály stane delta funkce, tím se zredukuje jedna integrace a x nahradí x' . Tím dostaneme stejný výraz jako v případě ideálního měření. Stopa kvadrátu matice hustoty je tedy menší než 1, proto se jedná o smíšený stav. Naopak kdyby exponenciála přešla limitně k 1, mohli bychom rozdělit integrál na dva a z předpokladu normalizace vlnových funkcí bychom dostali ve vztahu rovnost, což by odpovídalo čistému stavu. Tím se ukazuje, že v případě nekonečně slabého měření (odpovídající nekonečně velké pološířce stavu měřicího přístroje) bychom systém nijak nenarušili, stav by zůstal čistý.

3 Měření s postselekcí

V této sekci přidáme do našich úvah tzv. postselekcí. Uvidíme, že přináší rozšíření naší problematiky slabých měření a konečně se díky ní dostaneme ke slabým hodnotám fyzikálních veličin. Pravděpodobnostní rozdělení naměřených hodnot pozorovatelné už nebude záviset pouze na výchozím stavu, ale i na finálním tzv. postselektovaném stavu. Tento koncept původně pochází od Aharonova, Bergmanna a Lebowitze, můžeme ho najít např. v [5]. Popis zavedení postselekcce, který zde uvádíme my, pochází z článku [3]. Postselekcce lze zavést obecně bez souvislosti se slabým měřením. Takovým způsobem ji také zavedeme. V další podsekci však využijeme postselekcí v kombinaci právě se slabým měřením vybudovaným výše.

3.1 Zavedení postselekcce

Názorným postupem, jak popsat proces postselekcce, je následující schéma [3]. Mějme situaci, kdy na stejném systému provedeme dvě měření za sebou. Obě měření jsou nedestruktivní, to znamená, že pro měření nedojde ke zničení systému jako takového. To je ovšem rozdílná věc oproti kolapsu či redukci vlnové funkce. Na začátku máme systém připravený v čistém stavu $|s\rangle$. Provedeme silné měření pozorovatelné \hat{S} s nedegenerovaným spektrem. Systém se poté ocitne ve vlastním stavu $|s_i\rangle$ operátoru \hat{S} s pravděpodobností $\text{prob}(s_i|s) = |\langle s_i|s\rangle|^2$. Teď přichází zásadní krok. Bezprostředně po tomto měření pozorovatelné \hat{S} provedeme druhé měření jiné pozorovatelné \hat{F} . Z výsledků tohoto druhého měření se budeme zajímat pouze o jeden vybraný (postselektovaný) stav $|f\rangle$, který je samozřejmě vlastním stavem pozorovatelné \hat{F} . Sdružená pravděpodobnost naměřeného konkrétního stavu $|s_i\rangle$ v prvním měření a stavu $|f\rangle$ ve druhém bude dána součinem pravděpodobností, protože se jedná o nezávislé jevy [3]

$$\text{prob}(s_i, f|s) = \text{prob}(s_i|s) \cdot \text{prob}(f|s_i) \quad (3.1)$$

$$= |\langle f|s_i\rangle|^2 \cdot |\langle s_i|s\rangle|^2. \quad (3.2)$$

Pokud by nás však nezajímalo mezistav $|s_i\rangle$, tedy do výsledného stavu $|f\rangle$ jsme mohli přejít z libovolného mezistavu, musíme vysčítat přes všechny mezistavy [3]

$$\text{prob}(f|s) = \sum_i \text{prob}(s_i, f|s) \quad (3.3)$$

$$= \sum_i |\langle f|s_i\rangle|^2 \cdot |\langle s_i|s\rangle|^2. \quad (3.4)$$

Položme si nyní otázku. Jaká bude pravděpodobnost naměřeného mezistavu $|s_i\rangle$ při daném koncovém stavu $|f\rangle$ $\text{prob}(s_i|f, s)$? Využijeme vzorec pro podmíněnou pravděpodobnost a dosadíme výše získané výsledky [3]

$$\text{prob}(s_i|f, s) = \frac{\text{prob}(s_i, f|s)}{\text{prob}(f|s)} \quad (3.5)$$

$$= \frac{|\langle f|s_i\rangle|^2 |\langle s_i|s\rangle|^2}{\sum_j |\langle f|s_j\rangle|^2 |\langle s_j|s\rangle|^2}. \quad (3.6)$$

Tento vzorec se nazývá Aharonovo-Bergmannovo-Lebowitzovo pravidlo [3]. V tomto případě jsme uvažovali nedegenerované spektrum operátoru \hat{S} . Pro degenerovaný případ bychom akorát vzorec přepsali s využitím projektorů [3]

$$\text{prob}(s_i|fs) = \frac{|\langle f|\hat{P}_i|s\rangle|^2}{\sum_j |\langle f|\hat{P}_j|s\rangle|^2}. \quad (3.7)$$

Postselekcí bychom mohli zjednodušeně popsat tak, že provádíme měření na velkém souboru stejných systémů a výsledky, které se neshodují s naším vybraným postselektovaným stavem, zahodíme. Jako platné výsledky našeho měření bereme v potaz jen ty, které odpovídají postselektovanému stavu. Postselekcce tedy klade jakousi nadstavbovou podmínku na stav po měření. Uvidíme dále, že tímto mechanismem můžeme dostávat nečekané výsledky měření, které budou převyšovat i rozsah vlastních hodnot. Tedy postselekcce se v tomto slova smyslu bude dít využít k „zesílení“ naměřených hodnot.

3.2 Odvození slabých hodnot pro čistý stav

Pro jednoduchost se na počátku dostaneme ke slabým hodnotám pomocí odvození, kdy objektový i měřicí systém jsou v čistých stavech. Vracíme se tedy ke vztahu (1.21), který popisuje interakci podsystémů. Pro lepší přehlednost přeznačíme stav objektového systému, abychom na první pohled viděli, že se jedná o počáteční (preselektovaný) stav

$$\sum_i c_i |a_i\rangle \equiv |\psi_i\rangle. \quad (3.8)$$

Postselekcí stavu $|\psi_f\rangle$ provedeme zapůsobením operátoru $|\psi_f\rangle \langle\psi_f| \otimes \hat{\mathbf{I}}_M$. Dostáváme

$$\left(|\psi_f\rangle \langle\psi_f| \otimes \hat{\mathbf{I}}_M\right) |\Psi_1\rangle = \left(|\psi_f\rangle \langle\psi_f| \otimes \hat{\mathbf{I}}_M\right) e^{-\frac{i}{\hbar}\kappa t \hat{A} \otimes \hat{\pi}} |\psi_i\rangle \otimes |m^{(0)}\rangle. \quad (3.9)$$

Za výchozího předpokladu, že (bezrozměrná) konstanta κ je malá, provedeme rozvoj exponenciály do prvního řádu [3]. Právě zde hraje roli „slabost“ interakce mezi měřeným systémem a měřicím přístrojem. Dostáváme

$$\left(|\psi_f\rangle \langle\psi_f| \otimes \hat{\mathbf{I}}_M\right) e^{-\frac{i}{\hbar}\kappa t \hat{A} \otimes \hat{\pi}} |\psi_i\rangle \otimes |m^{(0)}\rangle \quad (3.10)$$

$$= \left(|\psi_f\rangle \langle\psi_f| \otimes \hat{\mathbf{I}}_M\right) \left(\hat{\mathbf{I}}_S \otimes \hat{\mathbf{I}}_M - \frac{i}{\hbar}\kappa t \hat{A} \otimes \hat{\pi}\right) |\psi_i\rangle \otimes |m^{(0)}\rangle \quad (3.11)$$

$$= \left(|\psi_f\rangle \langle\psi_f| \otimes \hat{\mathbf{I}}_M\right) \left(|\psi_i\rangle \otimes |m^{(0)}\rangle - \frac{i}{\hbar}\kappa t \hat{A} |\psi_i\rangle \otimes \hat{\pi} |m^{(0)}\rangle\right) \quad (3.12)$$

$$= |\psi_f\rangle \left(\langle\psi_f|\psi_i\rangle |m^{(0)}\rangle - \frac{i}{\hbar}\kappa t \langle\psi_f|\hat{A}|\psi_i\rangle \hat{\pi} |m^{(0)}\rangle\right) \quad (3.13)$$

$$= |\psi_f\rangle \cdot \langle\psi_f|\psi_i\rangle \left(|m^{(0)}\rangle - \frac{i}{\hbar}\kappa t \frac{\langle\psi_f|\hat{A}|\psi_i\rangle}{\langle\psi_f|\psi_i\rangle} \hat{\pi} |m^{(0)}\rangle\right) \quad (3.14)$$

$$= |\psi_f\rangle \langle\psi_f|\psi_i\rangle \otimes e^{-\frac{i}{\hbar}\kappa t \frac{\langle\psi_f|\hat{A}|\psi_i\rangle}{\langle\psi_f|\psi_i\rangle} \hat{\pi}} |m^{(0)}\rangle \quad (3.15)$$

$$\equiv |\Psi_1\rangle_f. \quad (3.16)$$

V posledním kroku jsme provedli přechod zpět k exponenciále s předpokladem, že ve vyšších řádech dostaneme podobné chování [3]. Výsledný stav jsme označili s indexem f, abychom zdůraznili, že po interakci jsme provedli ještě postselekcii stavu $|\psi_f\rangle$. Objektový systém se nyní nachází očividně v postselektovaném stavu. Systém M se nachází ve stavu po zapůsobení posunovacího operátoru. O jakou hodnotu se však nyní stav měřicího přístroje posunul? To nás vede k ještě jednomu přeznačení. Celý zlomek nazveme slabou hodnotou pozorovatelné \hat{A} [3]

$$\frac{\langle \psi_f | \hat{A} | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle} \equiv (A)_w. \quad (3.17)$$

Ihned vidíme, že tato slabá hodnota nezávisí jenom na vstupním (preselektovaném) stavu $|\psi_i\rangle$, ale také na postselektovaném stavu $|\psi_f\rangle$. Popsaný proces můžeme vysvětlit tak, že během interakce zkoumaného systému s měřicím přístrojem došlo k zisku nějaké informace o systému. Postselektováním vybraného stavu jsme oba systémy separovali, avšak měřicí přístroj během interakce „nashbíral“ informaci o systému a posunul svůj stav právě o tuto slabou hodnotu. Jak ukážeme dále, slabé hodnotě pozorovatelné nic nebrání nabývat hodnot ležících mimo interval vlastních hodnot, ba dokonce může nabývat i hodnot komplexních. Dostaneme se také k otázce týkající se interpretace slabých hodnot pozorovatelných, která stále zůstává ne plně zodpovězená.

V obecnější teorii slabých měření se dají slabé hodnoty odvodit i do vyšších řádů a také pro smíšené stavy. V této práci tyto výsledky však nebudeme využívat a zájemce odkazujeme na další literaturu např. na články [3, 6] nebo diplomovou práci [4].

3.3 Příklad postselekcce na diskretním systému

Vraťme se nyní opět k našemu dvoudimenzionálnímu příkladu ze sekce 1.5. Pokusíme se zde demonstrovat právě odvozené slabé měření s postselekcí. Naší pozorovatelnou zůstává projekce spinu do osy z \hat{S}_z a náš počáteční (preselektovaný) stav zůstává

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle. \quad (3.18)$$

Pro praktický výpočet operátor projekce spinu do osy z vyjádříme maticově

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_z \quad (3.19)$$

$$= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

stejně jako preselektovaný stav

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Jako postselektovaný stav si zvolíme vlastní stav projekce spinu do obecného směru daného úhly θ, φ

$$|\psi_f\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Můžeme vidět, že takový stav je automaticky normalizovaný pro libovolné úhly. Nyní už můžeme přímo dosadit do definičního vztahu pro slabou hodnotu (3.17)

$$(S_z)_w = \frac{\langle \psi_f | \hat{S}_z | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle} \quad (3.23)$$

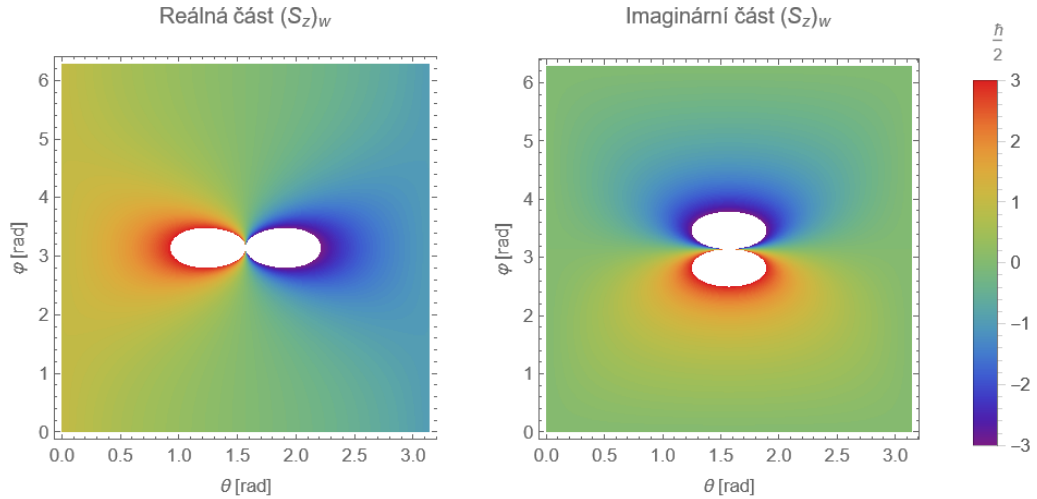
$$= \frac{\hbar e^{i\varphi} \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}}{2 e^{i\varphi} \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}} \quad (3.24)$$

$$= \frac{\hbar}{2} \left(\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta \cos \varphi} + i \frac{\sin \theta \sin \varphi}{1 + \sin \theta \cos \varphi} \right). \quad (3.25)$$

Výsledek jsme upravili tak, aby šla rozeznat reálná i imaginární část. Můžeme si všimnout, že pro hodnotu $\varphi = 0$ je imaginární část nulová.

Důležité je zmínit následující vlastnost. Pokud bychom postseletovali přímo vlastní stav operátoru \hat{S}_z (3.20), tedy stav $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nebo $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, což odpovídá hodnotám parametrů $\varphi = 0, \theta = 0$ nebo $\varphi = 0, \theta = \pi$, tak jako příslušnou slabou hodnotu bychom dostali přímo vlastní hodnotu našeho operátoru. Můžeme se o tom přesvědčit prostým dosazením. V tomto smyslu jsou slabé hodnoty jakýmsi zobecněním dobře známých vlastních hodnot.

Pro vizualizaci závislosti slabé hodnoty $(S_z)_w$ vykreslíme zvlášť do konturovaných grafů její reálnou a imaginární složku. Rozsah parametrů nastavíme tak, abychom pokryli všechny možné směry (celou sféru) $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi]$.



Obrázek 3.1 Vykreslení reálné a imaginární části slabé hodnoty projekce spinu $(S_z)_w$ (Bílé části grafů odpovídají oblastem, kde je daná část slabé hodnoty mimo rozsah škály vyznačené vpravo).

Z obrázku 3.1 je patrné, že slabá hodnota pro poměrně velkou množinu parametrů leží mimo interval vlastních hodnot $[-\frac{\hbar}{2}, +\frac{\hbar}{2}]$. Slabá hodnota (resp. její reálná i imaginární část) dokonce diverguje v případě, že je postselektovaný stav ortogonální k preselektovanému, protože ve jmenovateli (3.17) dostáváme nulu.

3.4 Příklad postselekce na spojitém systému

V této části navážeme na sekci 2.4 a vypočítáme slabou hodnotu souřadnice \hat{X} pro různé postselektované stavy. Jako preselektovaný stav ponecháme stav

$$|\psi_i\rangle = \int dx \psi(x) |x\rangle, \quad (3.26)$$

prozatím s libovolnou normalizovanou vlnovou funkcí $\psi(x)$.

3.4.1 Postselekce souřadnice

Začneme s postselektováním konkrétního stavu souřadnice $|\psi_f\rangle = |x_0\rangle$, dosadíme do definice slabé hodnoty pozorovatelné (3.17) a dostaneme

$$(X)_w = \frac{\langle x_0 | \hat{X} | \psi_i \rangle}{\langle x_0 | \psi_i \rangle} \quad (3.27)$$

$$= \frac{\int dx \psi(x) x \langle x_0 | x \rangle}{\int dx \psi(x) \langle x_0 | x \rangle} \quad (3.28)$$

$$= \frac{\psi(x_0)x_0}{\psi(x_0)} \quad (3.29)$$

$$= x_0. \quad (3.30)$$

Využili jsme normalizaci souřadnice na δ -funkci. Z jistého pohledu docházíme ke stejnému závěru jako v diskretním případě a to takovému, že postselektováním libovolného vlastního stavu operátoru, dostaneme slabou hodnotu shodnou s vlastní hodnotou připadající tomuto vlastnímu stavu. Toto zřejmě platí pro libovolnou normalizovanou vlnovou funkci $\psi(x)$.

3.4.2 Postselekce hybnostního stavu

Jako další postselektujeme hybnostní stav $|\psi_f\rangle \equiv |p_0\rangle$. Abychom mohli dopočítat výsledek, budeme muset zvolit konkrétní vlnovou funkci. Za konkrétní preselektovaný stav zvolíme gaussovské rozdělení v souřadnici

$$|\psi_i\rangle = \int dx \frac{1}{(2\pi\tilde{\Gamma}^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\tilde{\Gamma}^2}} |x\rangle. \quad (3.31)$$

Pološířku zde značíme $\tilde{\Gamma}$, abychom ji odlišili od pološířky stavu měřicího přístroje v sekci 2.1. Výhodou bude, že výsledek bude analyticky dopočitatelný. Opět

dosadíme do definice slabé hodnoty a dostaneme

$$(X)_w = \frac{\langle p_0 | \hat{X} | \psi_i \rangle}{\langle p_0 | \psi_i \rangle} \quad (3.32)$$

$$= \frac{\int dx \psi(x) x \langle p_0 | x \rangle}{\int dx \psi(x) \langle p_0 | x \rangle} \quad (3.33)$$

$$= \frac{\int \frac{1}{(2\pi\tilde{\Gamma}^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\tilde{\Gamma}^2}} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}p_0x} dx}{\int \frac{1}{(2\pi\tilde{\Gamma}^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\tilde{\Gamma}^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}p_0x} dx} \quad (3.34)$$

$$= \frac{e^{-\frac{p_0(\tilde{\Gamma}^2 p_0 + i\hbar x_0)}{\hbar^2}} (-2\frac{i}{\hbar}\tilde{\Gamma}^2 p_0 + x_0)}{e^{-\frac{p_0(\tilde{\Gamma}^2 p_0 + i\hbar x_0)}{\hbar^2}}} \quad (3.35)$$

$$= x_0 - 2\frac{i}{\hbar}\tilde{\Gamma}^2 p_0. \quad (3.36)$$

Využili jsme faktu [1]

$$\langle p_0 | x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}p_0x}. \quad (3.37)$$

Ohned vidíme, že naše slabá hodnota je v tomto případě komplexní. Reálná část je dána pouze středem gaussovského rozdělení v souřadnici. Imaginární část závisí na konkrétním hybnostním stavu a kvadraticky na pološírce v rozdělení souřadnice $\tilde{\Gamma}$. Pokud bychom zmenšovali pološírku gausiánu k nule, blížili bychom se k preselektování ostrého souřadnicového stavu $|x_0\rangle$. Tím bychom jako slabou hodnotu dostali opět přímo vlastní hodnotu souřadnice x_0 .

Odsud je zřejmé, že v i případě preselektovaného stavu s ostrou hodnotou polohy, dostaneme jako slabou hodnotu právě tuto vlastní hodnotu.

3.4.3 Postselekce gaussovského vlnového balíku

Nyní vyzkoušíme, jakou slabou hodnotu dostaneme, pokud nebudeme postselektovat stav s ostrou hodnotou hybnosti, ale stav ve tvaru gaussovského vlnového balíku s pološírkou $\tilde{\sigma}$ v hybnostním prostoru

$$|\psi_f\rangle = \int dp \tilde{\psi}(p) |p\rangle \quad (3.38)$$

$$= \int dp \frac{1}{(2\pi\tilde{\sigma}^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{(p-p_0)^2}{4\tilde{\sigma}^2}} |p\rangle. \quad (3.39)$$

Po dosazení do definice slabé hodnoty dostáváme

$$(X)_w = \frac{\langle \psi_f | \hat{X} | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle} \quad (3.40)$$

$$= \frac{\int \int dx dp \psi(x) x \tilde{\psi}(p) \langle p|x \rangle}{\int \int dx dp \psi(x) \tilde{\psi}(p) \langle p|x \rangle} \quad (3.41)$$

$$= \frac{\int \int \frac{1}{(2\pi\tilde{\Gamma}^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\tilde{\Gamma}^2}} x \frac{1}{(2\pi\tilde{\sigma}^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{(p-p_0)^2}{4\tilde{\sigma}^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}px} dp dx}{\int \int \frac{1}{(2\pi\tilde{\Gamma}^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\tilde{\Gamma}^2}} \frac{1}{(2\pi\tilde{\sigma}^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{(p-p_0)^2}{4\tilde{\sigma}^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}px} dp dx} \quad (3.42)$$

$$= \frac{\hbar^2 x_0 - 2ip_0\tilde{\Gamma}^2\hbar}{\hbar^2 + 4\tilde{\Gamma}^2\tilde{\sigma}^2}. \quad (3.43)$$

Opět je na první pohled zřejmé, že slabá hodnota je komplexní číslo. Její reálná část teď závisí nejen na středu gaussovského rozdělení v souřadnici, ale i na pološířkách rozdělení v souřadnici i hybnosti. Imaginární část závisí na středu rozdělení v hybnosti a pološířkách rozdělení v souřadnici i hybnosti. Pokud bychom pološířku vlnového balíku zmenšovali, tedy $\tilde{\sigma} \rightarrow 0^+$, blížili bychom se k výsledku z minulé sekce při postselektování hybnostního stavu. Podobně při zmenšování pološířky gaussovské vlnové funkce preselektovaného stavu $\tilde{\Gamma} \rightarrow 0^+$ bychom v limitě dostali jako slabou hodnotu přímo vlastní hodnotu x_0 . Tedy obecnější případ dle očekávání přechází v limitách na speciální případy probírané výše.

3.5 Paradox tří krabic

Tento myšlenkový experiment (angl. Three box paradox) jsme z dostupné literatury [3, 4, 7] vybrali, protože se na něm dají pěkně ukázat pozoruhodné vlastnosti slabého měření s postselekcí. Originální formulaci můžeme najít např. v [5]. Některé vlastnosti slabého měření s postselekcí jsme sice v nějaké podobě už výše rozpracovali, ale pouze na velmi abstraktních modelových systémech. Z toho důvodu zde uvádíme tento příklad, protože se rychle ukáže, jak mohou slabé hodnoty vést k těžko interpretovatelným výsledkům.

Mějme tři krabice (boxy), které označíme A, B, C a jednu částici. Tato částice se může vyskytovat v jedné z těchto krabic. Hilbertův prostor částice je tedy třídímní a můžeme ho popsat třemi ortonormálními stavy $\{|A\rangle, |B\rangle, |C\rangle\}$. Tyto stavy jsou zajisté dokonale rozeznatelné a odpovídají výskytu částice právě v jedné z krabic. Částice je kvantová, tudíž každý její stav můžeme vyjádřit jako lineární superpozici bázových stavů. Řekneme, že je připravena v čase $t = t_i$ ve stavu daném kvantovou superpozicí

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|A\rangle + |B\rangle + |C\rangle). \quad (3.44)$$

V pozdějším čase $t = t_f$ jako postselektovaný stav záměrně zvolíme

$$|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|A\rangle + |B\rangle - |C\rangle). \quad (3.45)$$

Otevření libovolné krabice v počátečním čase zapíšeme příslušným projektorem např. $\hat{P}_A = |A\rangle\langle A|$. To odpovídá ideálnímu projektivnímu měření. Projektor má

obecně vlastní čísla 0 a 1, které interpretujeme tak, že částice v dané krabici buď je, nebo není. Po otevření libovolné krabice v ní najdeme částici s pravděpodobností $\frac{1}{3}$. To není nic překvapivého, jen aplikování postulátu o měření.

Co se ale stane, když otevřeme jednu libovou krabici v čase mezi t_i a t_f ? Zvolíme si krabici A a provedeme měření pomocí projektoru \hat{P}_A . V případě, že zde částici nenajdeme, pak bude stav po tomto měření jistě dán $(\hat{P}_B + \hat{P}_C)|\psi_i\rangle$. Neboli částice se jistě nachází v krabici B nebo C. Avšak pokud nyní vypočítáme amplitudu přechodu z tohoto stavu do postselektovaného stavu (3.45), zjistíme snadným výpočtem, že je nulová

$$\langle\psi_f|(\hat{P}_B + \hat{P}_C)|\psi_i\rangle = \langle\psi_f|B\rangle\langle B|\psi_i\rangle + \langle\psi_f|C\rangle\langle C|\psi_i\rangle \quad (3.46)$$

$$= \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) \quad (3.47)$$

$$= 0. \quad (3.48)$$

Nulová tedy musí být i pravděpodobnost přechodu, která je kvadrátem velikosti amplitudy přechodu. Jinými slovy pokud bychom částici nenalezli v krabici A, tak by systém nikdy nemohl dospět do postselektovaného stavu, proto se částice musí nacházet v krabici A s pravděpodobností rovnou jedné.

Nyní bychom se však rozhodli namísto krabice A otevřít v mezičase krabici B. Úplně stejnou argumentací i výpočtem bychom dospěli k závěru, že pokud bychom nenašli částici v krabici B, tak by amplituda (tedy i pravděpodobnost) přechodu do postselektovaného stavu byla nulová. Zdá se tedy, že se částice musí nacházet v krabici B také s jednotkovou pravděpodobností. Tím jsme dospěli ke sporu a tedy zdánlivému paradoxu. Jak by mohli dva různé jevy nastat s pravděpodobností jedna? Tedy částice musí být v krabici A s jistotou i v krabici B s jistotou? Na začátku jsme si řekli, že částice je jen jedna a nalézt jde jen v jedné z krabic.

Aby toho nebylo málo, ještě dopočtíme pravděpodobnost výskytu částice v krabici C. Aplikujeme Aharanovo-Bergmanovo-Lebowitzovo pravidlo ve formě (3.7) a získáme pravděpodobnost nalezení částice v krabici C $\text{prob}(C) = \frac{1}{5}$. Nejenže tedy mohou nastat dva jevy s pravděpodobností jedna, ale i součet všech pravděpodobností převyšuje hodnotu 1.

Obratem můžeme argumentovat, že k žádnému paradoxu vůbec nedojde, protože provedení projektivního měření došlo k redukci stavu a systém už pak nikdy nedospěje do postselektovaného stavu.

Pojďme se na celý problém nyní podívat s využitím výše vybudované teorie slabých hodnot. Náš systém krabic necháme interagovat s měřicím přístrojem za vzniku provázaného stavu. Poté provedeme ideální měření jiné pozorovatelné a výsledek ponecháme pouze v případě, že jsme dosáhli zvoleného postselektovaného stavu. Stav měřicího přístroje tak bude posunut o hodnotu úměrnou právě slabé hodnotě pozorovatelné na systému, kterou je v našem případě příslušný projektor. Tím jsme získali nějakou informaci o systému v čase mezi t_i a t_f , aniž by stav systému zkolaboval do některého z vlastních stavů. Otvírání krabic nahradíme popsáním schématem slabého měření. Konkrétně slabá hodnota projektoru \hat{P}_A vychází následovně

$$(P_A)_w = \frac{\langle\psi_f|\hat{P}_A|\psi_i\rangle}{\langle\psi_f|\psi_i\rangle} \quad (3.49)$$

$$= 1. \quad (3.50)$$

Slabá hodnota „doplňkového“ jevu vychází

$$(P_B + P_C)_w = \frac{\langle \psi_f | \hat{P}_B + \hat{P}_C | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle} \quad (3.51)$$

$$= 0. \quad (3.52)$$

Tyto výsledky můžeme interpretovat tak, že měřicí přístroj v interakci s krabicí A zaznamenal nějaký posun, kdežto při interakci se zbývajícimi krabicemi k žádnému posunu nedošlo [7]. Ovšem pokud nyní vypočteme slabou hodnotu projektoru \hat{P}_B dospějeme k

$$(P_B)_w = \frac{\langle \psi_f | \hat{P}_B | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle} \quad (3.53)$$

$$= 1. \quad (3.54)$$

Také když vypočteme slabou hodnotu doplňkového jevu dostaneme

$$(P_A + P_C)_w = \frac{\langle \psi_f | \hat{P}_A + \hat{P}_C | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle} \quad (3.55)$$

$$= 0. \quad (3.56)$$

Interpretace bude analogická. Měřicí přístroj v interakci s krabicí B zaznamenal nějaký posun, kdežto při interakci se zbývajícimi krabicemi k žádnému posunu nedošlo. Na závěr vypočteme ještě slabou hodnotu projektoru \hat{P}_C

$$(P_C)_w = \frac{\langle \psi_f | \hat{P}_C | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle} \quad (3.57)$$

$$= -1. \quad (3.58)$$

Slabá hodnota projektoru \hat{P}_C leží zjevně mimo rozsah vlastních hodnot projektoru.

Zde už dochází na problém s jasnou interpretací, protože se v krabici C přece nemůže nacházet mínus jedna částice. Zdánlivý paradox se zdá nyní alespoň trochu odvrácen. Provedením slabého měření v mezičase systém nezkolaboval do vlastních hodnot a stále může dospět do postselektovaného stavu. Navíc pokud bychom slabé hodnoty ztotožnili s pravděpodobnostmi, dostáváme, že součet všech pravděpodobností je roven jedné. Tím se však nezabýváme problému s interpretací záporné pravděpodobnosti.

O možné interpretaci se zmiňuje článek [8]. Vychází z představy, že popisovaná částice, která se nachází v jedné ze tří krabic, bude kladně nabitá. Měřicí přístroj bude realizován vysláním testovací částice, konkrétně elektronu k dané krabici. Pokud se kladná částice nachází v krabici, očekáváme, že se hybnost elektronu změní směrem k dané krabici. Jinými slovy, že elektron bude přitahován elektrostaticky ke kladnému náboji. Slabé hodnoty projektorů můžeme poté ztotožnit se změnou hybnosti testovacího elektronu. U krabic A , B se elektron vychyluje směrem ke krabicím, ale v případě krabice C bude jeho výchylka opačná. Skoro jakoby se elektron odpuzoval od kladného náboje. To by mohlo naznačovat, že v krabici C už není kladně nabitá částice, ale částice nabitá záporně. V tomto smyslu můžeme tedy zápornou pravděpodobnost interpretovat jako kladnou pravděpodobnost opačného fyzikálního jevu [8].

3.6 Interpretace slabých hodnot

V celé práci jsme budovali teorii slabých měření a demostrovali ji na modelových příkladech. O tom, co vlastně představují slabé hodnoty získané pomocí slabého měření s postselekcí, jsme doposud nediskutovali. Nebyla by to totiž krátká diskuze. Každá teorie, která odvodí nějaký výsledek, potřebuje následně tento výsledek pokud možno správně interpretovat. V případě slabých hodnot se jedná o potenciálně složitý úkol. Nebudeme se zde pouštět do diskuze všech pohledů a názorů, pouze uvedeme pár postřehů a případných odkazů na články podávající podrobnější náhled.

Přestože se mohou slabé hodnoty pozorovatelných jevit jako nefyzikální, tak se v této kapitole pokusíme krátce zmínit o jejich případné interpretaci. Je nutné také zmínit, že názory na tuto problematiku nejsou napříč komunitou jednotné. Slabé hodnoty nachází své zastánce i skeptiky. Není naší ambicí tyto debaty jakkoli rozhodnout ani uzavírat. Spíše chceme namotivovat případné zájemce, aby si utvořili vlastní pohled. Vycházíme především z článků [3, 9].

Z teoretického hlediska se jedná o správně rozvinutý koncept [3]. Ke slabému měření v kombinaci s postselekcí jsme se dostali v našem přiblížení oprávněnými kroky. Není překvapivé, že se ke slabým hodnotám veličin nedostaneme pomocí projektivního měření. Výsledkem projektivního měření totiž mohou být pouze vlastní hodnoty samosdružených operátorů. Tedy i případné experimentální měření slabých hodnot musí být jiné povahy. V rozmyšlení významu slabé hodnoty je klíčové vzít v potaz to, že závisí v podstatě na třech faktorech. Všechny plynou už z její definice (3.17). Slabá hodnota závisí na preselektovaném stavu, na dané pozorovatelné a na postselektovaném stavu. Přičemž na preselektovaném stavu je závislost stejně důležitá jako na postselektovaném [3]. Není to tedy pouze vlastnost pozorovatelné fyzikální veličiny samotné a neměla by být takto chápána.

Dále ještě poznamenejme, že slabá hodnota je v jistém smyslu statistické povahy. Totiž abychom dospěli do postselektovaného stavu, potřebujeme měření provádět nejlépe na velkém souboru stejných systémů.

Pokud bychom se vrátili k představě, že stav měřicího přístroje bereme jako „ručičku“, tak můžeme říct, že přístroj během interakce s měřeným systémem nasbíral nějakou informaci a jeho „ručička“ se posunula operátorem translace o nějakou hodnotu. Přestože měřený systém je sám o sobě v postselektovaném stavu, tak jsme o něm během interakce získali nějakou informaci ve formě posunutí „ručičky“ přístroje. Toto posunutí je úměrné v prvním přiblížení právě slabé hodnotě, která může být obecně komplexní. Můžeme to chápat tak, že reálná část slabé hodnoty značí posunutí „ručičky“, kdežto imaginární část nějakou dodatečnou fází. Tedy ručička navíc má ještě nějakou hybnost, což můžeme interpretovat tak, že je v pohybu a osciluje okolo nějaké střední hodnoty.

Problematiku a realizaci experimentů v oblasti slabého měření s postselekcí přehledově rozebírají např. články [3, 8, 9]. Za dobu, co je rozvíjen koncept slabého měření a slabého měření s postselekcí, byly provedeny na toto téma různorodé experimenty. Jako jeden příklad zmíníme možné provedení nepřímého měření. Nejprve se připraví dva fotony s danou polarizací. Oba zastupují dvoudimenzionální Hilbertův prostor. Poté jsou kvantově provázány a jeden slouží jako měřicí přístroj a druhý jako měřený systém [3].

Závěr

První část této práce jsme věnovali postulátu o měření ve formě, v jaké se uvádí standardně. Jako alternativu k tomuto postulátu jsme zavedli model nepřímého měření. Tento přístup spočívá v kvantovém popisu nejen měřeného systému, ale i systému měřicího přístroje. Nepřímé měření se provádí tak, že se měřený systém a měřicí přístroj nechají spolu interagovat. Tím vzniká provázaný stav obou podsystémů. Provedením parciální stopy přes systém měřicího přístroje jsme ukázali, že systém se nachází v dekoherovaném stavu, který se shoduje se stavem po provedení projektivního měření podle postulátu. Nepřímé měření jsme ukázali na konkrétním příkladu měření spinu a také na příkladu se spojitou pozorovatelnou konkrétně souřadnicí.

K pojmu slabé měření jsme se dostali úvahou, co kdyby stavy měřicího přístroje nebyly ortogonální, ale měly mezi sebou nějaký překryv. Výpočty jsme provedli pro stavy měřicího přístroje ve tvaru gaussovského rozdělení. Ukázali jsme, že z tohoto zobecnění v limitě ideálního měření dostáváme výsledky stejné jako v případě projektivního měření. Tuto limitu zajistíme přechodem k nulové pološírce gaussiánu. V opačné limitě získané přechodem k nekonečné pološírce gaussiánu je měření natolik slabé, že se na stavu systému neprojeví. Takto popsané slabé měření jsme demostrovali opět na příkladech měření diskretního spinu a spojitě souřadnice.

Dále jsme zavedli pojem postselekce jakožto nadstavbovou podmínku na stav po měření. Právě kombinací postselekce a slabého měření jsme odvodili slabé hodnoty pozorovatelných. V příkladu s postselektováním spinu s projekcí do obecného směru jsme získali závislost slabé hodnoty na úhlech θ, φ určujících směr v prostoru. Došli jsme k závěru, že postselektováním vlastní hodnoty pozorovatelné dostaneme jako slabou hodnotu právě tuto vlastní hodnotu. Ve spojitém příkladu jsme postseletovali souřadnicový i hybnostní stav, a také gaussovský vlnový balík. Slabá hodnota v posledních dvou příkladech nabývala komplexních hodnot. Abychom poukázali na zvláštnost slabých hodnot, uvedli jsme ještě příklad převzatý z literatury známý pod jménem Paradox tři krabic. Krátce jsme také rozvedli možnou diskuzi o interpretaci slabých hodnot.

Literatura

1. CEJNAR, Pavel. *A condensed course of quantum mechanics*. Prague: Karolinum, 2013. ISBN 978-80-246-2321-4.
2. SKÁLA, Lubomír. *Úvod do kvantové mechaniky*. Prague: Karolinum, 2011. ISBN 978-80-246-2022-0.
3. SVENSSON, Bengt E. Y. Pedagogical review of Quantum Measurement Theory with an Emphasis on Weak Measurements. *Quanta* [online]. 2013 [cit. 2024-04-02]. Dostupné z: <https://doi.org/10.12743/quanta.v2i1.12>.
4. DZIEWIOR, Jan. *The Concept of Weak Values*. München, 2016. Master thesis. Ludwig-Maximilians Universität Faculty of Physics. [cit.2024-04-02]. Dostupné z: https://xqp.physik.uni-muenchen.de/publications/files/theses_master/master_dziewior.pdf.
5. AHARONOV, Yakir; VAIDMAN, Lev. *The Two-State Vector Formalism of Quantum Mechanics: an Updated Review* [online]. 2007. [cit. 2024-03-02]. Dostupné z arXiv: quant-ph/0105101 [quant-ph].
6. KOFMAN, Abraham G.; ASHHAB, Sahel; NORI, Franco. Nonperturbative Theory of weak Pre- and Post-selected Measurements. *Physics Reports* [online]. 2012, roč. 520, č. 2 [cit. 2024-04-04]. Dostupné z: <https://arxiv.org/abs/1109.6315>.
7. MATZKIN, A; PAN, A K. Three-box Paradox and ‘Cheshire cat grin’: The Case of Spin-1 Atoms. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* [online]. 2013, roč. 46, č. 31 [cit. 2024-04-02]. Dostupné z: <https://arxiv.org/abs/1305.2519>.
8. TAMIR, Boaz; COHEN, Eliahu. Introduction to Weak Measurements and Weak Values. *Quanta* [online]. 2013 [cit. 2024-04-02]. Dostupné z: <https://doi.org/10.12743/quanta.v2i1.14>.
9. SOKOLOVSKI, Dmitri; AKHMATSKAYA, Elena. An Even Simpler Understanding of Quantum Weak Values. *Annals of Physics* [online]. 2018, roč. 388 [cit. 2024-04-04]. Dostupné z: <https://arxiv.org/abs/1705.08839>.

Seznam obrázků

1.1	Grafické vykreslení matice hustoty systému před interakcí.	15
1.2	Grafické vykreslení matice hustoty systému po ideálním nepřímém měření.	16
1.3	Grafické vykreslení vlnové funkce systému před interakcí.	17
1.4	Grafické vykreslení vlnové funkce systému po ideálním nepřímém měření.	18
2.1	Závislost entropie na pološířce gaussiánu stavu přístroje pro $t = \kappa = 1$.	21
2.2	Závislost stopy kvadrátu matice hustoty na pološířce gaussiánu stavu přístroje pro $t = \kappa = 1$	22
2.3	Grafické vykreslení matice hustoty po slabém měření pro $t = \kappa = 1$ a $\Gamma = \frac{1}{2}$	22
2.4	Grafické vykreslení vlnové funkce po slabém měření.	23
3.1	Vykreslení reálné a imaginární části slabé hodnoty projekce spinu $(S_z)_w$ (Bílé části grafů odpovídají oblastem, kde je daná část slabé hodnoty mimo rozsah škály vyznačené vpravo).	28