

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

## **DIPLOMOVÁ PRÁCE**

Klára Nováková

# **Kružnice v širších souvislostech**

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martina Škorpilová, Ph.D.

Studijní program: Učitelství matematiky pro střední  
školy

Studijní obor: MDUPN

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Děkuji všem, kteří mne při psaní této práce podpořili. Mé zvláštní poděkování patří RNDr. Martině Škorpilové, Ph.D., za množství cenných a inspirativních rad, velkou trpělivost, ochotu a motivaci ke studiu.

Název práce: Kružnice v širších souvislostech

Autor: Klára Nováková

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martina Škorpilová, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Diplomová práce představuje několik zajímavých geometrických problémů týkajících se kružnic. Úvodní kapitola se věnuje konstrukcím Archimédových kružnic. Následující kapitola seznamuje čtenáře nejprve s Cèvovými větami a dále pak s Větou o sedmi kružnicích. Třetí, resp. čtvrtá kapitola představuje Fordovy kružnice a jejich využití při zavedení racionálních čísel, resp. Větu o motýlovi. Závěrečná kapitola prezentuje problematiku Malfattiho kruhů včetně jejich konstrukce.

Klíčová slova: Archimédova kružnice, Věta o sedmi kružnicích, Fordova kružnice, Věta o motýlovi, Malfattiho kruhy

Title: Circles in a broader context

Author: Klára Nováková

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Martina Škorpilová, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: The diploma thesis presents several noteworthy geometric problems relating to circles. The introductory chapter deals with constructing Archimedean circles. The following chapter first presents Ceva's theorem to the reader, and subsequently, the Seven circles theorem. The third and fourth chapters introduce Ford circles and their role in constructing rational numbers, and the Butterfly theorem, respectively. The final chapter presents the matter of Malfatti circles, including their construction.

Keywords: Archimedean circle, Seven circles theorem, Ford circle, Butterfly theorem, Malfatti circles

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Archimédovy kružnice</b>	<b>4</b>
1.1 Definice a značení	4
1.2 První konstrukce Archimédovy kružnice	5
1.3 Druhá konstrukce Archimédovy kružnice	9
1.4 Třetí konstrukce Archimédovy kružnice	10
<b>2 Věta o sedmi kružnicích</b>	<b>14</b>
2.1 Čevovy věty	14
2.2 Formulace věty a jejího důkazu	22
<b>3 Fordovy kružnice</b>	<b>26</b>
3.1 Zavedení celých čísel	26
3.2 Zavedení racionálních čísel	27
3.2.1 Odvození vzorce pro výpočet bodů dotyku	28
3.2.2 Stern-Brocotův strom	38
<b>4 Motýl vepsaný kružnici</b>	<b>40</b>
4.1 Formulace věty a příslušné značení	40
4.2 První důkaz Věty o motýlovi	41
4.3 Druhý důkaz Věty o motýlovi	44
4.4 Třetí důkaz Věty o motýlovi	47
<b>5 Malfattiho kruhy</b>	<b>51</b>
5.1 Giovanni Malfatti a jeho přístup	51
5.2 Kruhy v rovnostranném trojúhelníku	52
5.2.1 Malfattiho řešení	52
5.2.2 Jiné řešení Malfattiho problému	54
5.3 Nejlepší řešení	56
5.4 Steinerova konstrukce Malfattiho kruhů	56
5.5 Úloha týkající se Malfattiho kruhů	58
<b>Závěr</b>	<b>61</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>62</b>
<b>Seznam obrázků</b>	<b>65</b>

# Úvod

Cílem diplomové práce je seznámit čtenáře s několika zajímavými geometrickými problémy, jejichž hlavními prvky jsou kružnice. Prvotní zájem o zpracování tohoto tématu vzešel z problematik studovaných autorkou v bakalářské práci [11], v níž se vyskytly kružnice mající svá vlastní pojmenování (Archimédovy kružnice, speciálně Archimédova dvojčata) či kružnice seskupené v působivých formacích (Pappovy řetězce). Protože konstrukce Archimédových kružnic jsou stále studovány a postupně publikovány v odborných časopisech, věnujeme jim i v této diplomové práci samostatnou kapitolu, v níž jsou představeny postupy, které se v bakalářské práci nevyskytují.

Práce je záměrně psaná tak, aby jí porozuměl i středoškolský student. Opírá se o základní poznatky středoškolské matematiky jako jsou například shodnost a podobnost trojúhelníků, Pythagorova věta, vlastnosti kružnicových oblouků a goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku. Věříme, že práce přináší mnoho zajímavých témat rozšiřujících kurikulum střední školy, a je proto možné, aby je středoškolští učitelé využili k inspiraci žáků ve svých hodinách.

Práce je rozdělena do pěti kapitol následně rozčleněných na podkapitoly. První kapitola je, jak již bylo nastíněno výše, věnována *Archimédovým kružnicím* příslušným danému arbelu. Je připomenuta definice Archimédových kružnic, dále je zavedeno používané značení a poté jsou uvedeny tři jejich konstrukce.

Ve druhé kapitole se čtenář seznámí s *Cètovými větami*, které jsou následně využity v důkazu *Věty o sedmi kružnicích*, po níž je kapitola pojmenována. Uvedený teorém se týká řetězce šestice kružnic sestrojených ve vnitřní, případně ve vnější oblasti dané kružnice tak, aby se jí dotýkaly. Přesněji řečeno věta vyjadřuje vztah mezi třemi tětivami dané kružnice, jejichž krajními body jsou body dotyku šesti dvojic kružnic.

Třetí kapitola představuje překvapivé zavedení celých a především racionálních čísel pomocí postupně konstruovaných tzv. *Fordových kružnic*, které se po dvou dotýkají. Dále se každá z nich dotýká také dané přímky a právě body dotyku Fordových kružnic s touto přímkou reprezentují jednotlivá racionální čísla, čímž postupně vytvářejí ucelenou strukturu číselného oboru. Zavedení množiny racionálních čísel ilustrujeme také na přehledném diagramu, který nazýváme *Stern-Brocotův strom*.

Předposlední kapitola se věnuje tzv. *Věť o motýlovi*, jež popisuje vlastnosti tětiv kružnice. Rovinný útvar, který tětivy ohraničují, připomíná svým tvarem motýla, z čehož byl odvozen název tvrzení. V práci představíme několik zajímavých, relativně odlišných důkazů tohoto poznatku.

V poslední kapitole je přiblížen více než dvě století starý pojem *Malfattiho kruhy*. Kapitola je doplněna o jejich elegantní konstrukci, jejímž autorem je geometr *Jakob Steiner*, a také o výpočty spjaté s Malfattiho kruhy, které lze zvládnout se znalostmi středoškolské geometrie.

Práce je vysázena pomocí systému  $\text{\LaTeX}$ . S výjimkou jediného přejatého obrázku znázorňujícího Stern-Brocotův strom jsou ostatní obrázky vytvořeny pomocí grafických softwarů, a to takřka všechny pomocí grafického softwaru AutoCad.

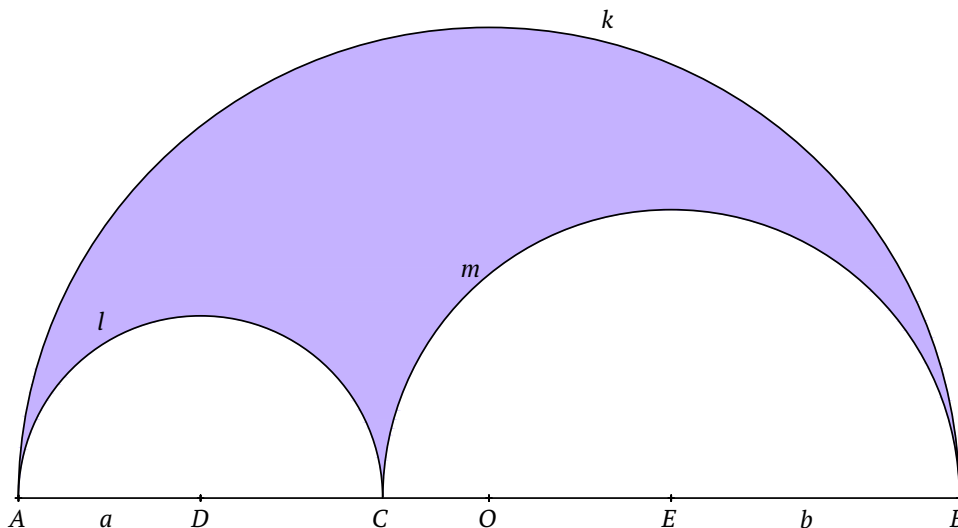
# 1. Archimédovy kružnice

První kapitola je věnována tzv. *Archimédovým kružnicím*, které jsou definovány pomocí *arbélu*. Tomuto rovinnému útvaru ohraničenému třemi půlkružnicemi byla věnována celá má bakalářská práce [11], v níž byly některé Archimédovy kružnice představeny. Protože problematika těchto kružnic je velmi rozsáhlá a stále studovaná, existuje mnoho jejich konstrukcí, které v práci [11] zmíněny nebyly. Níže jsou představeny některé z nich.

Kapitola je zpracována na základě článků [9], [12], [18].

## 1.1 Definice a značení

**Definice 1.** *Nechť je dána úsečka  $AB$  a  $C$  je její vnitřní bod (viz obrázek 1.1). Dále nechť  $O$  je střed úsečky  $AB$ ,  $D$  střed úsečky  $AC$  a  $E$  střed úsečky  $CB$ . Sestrojme půlkružnici  $l$  se středem  $D$  a poloměrem  $a = |AD|$ , půlkružnici  $m$  se středem  $E$  a poloměrem  $b = |CE|$  a půlkružnici  $k$  se středem  $O$  a poloměrem  $|AO|$  tak, aby půlkružnice  $k, l, m$  ležely ve stejné polorovině s hraniční přímkou  $AB$ . Rovinný útvar, který je vymezený půlkružnicemi  $k, l, m$ , budeme nazývat **arbélos** a budeme ho značit  $\mathcal{A}_{ABC}$ .*



Obrázek 1.1: Arbélos a příslušné značení

Značení, které je zavedeno v Definicí 1, bude jednotně využíváno v celé této kapitole.



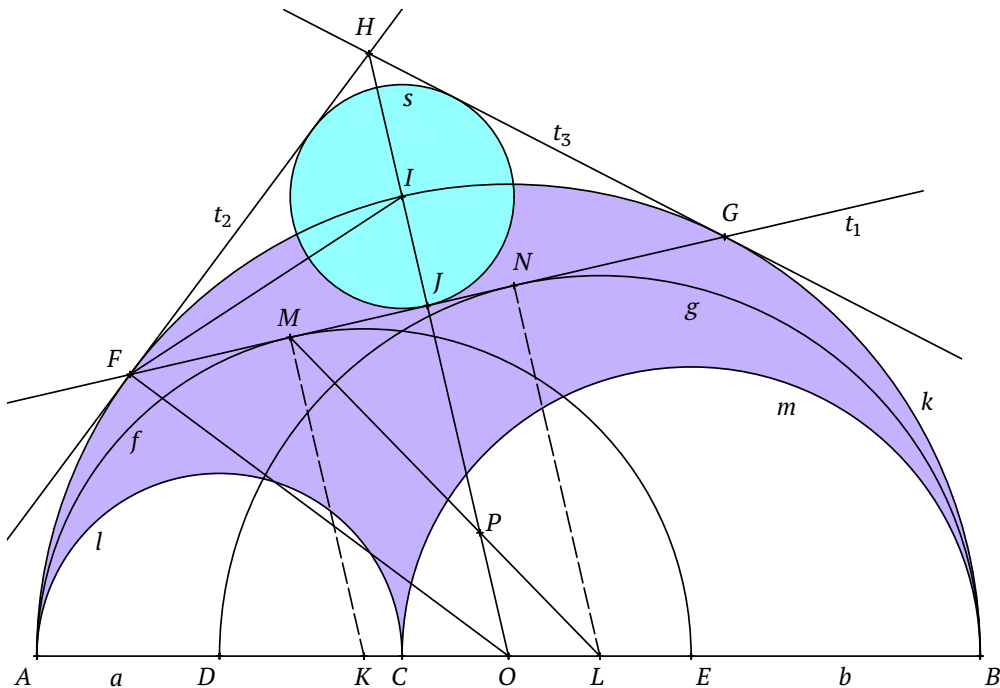
**Definice 2.** Mějme dán arbélos  $\mathcal{A}_{ABC}$ . Kružnici, jejíž poloměr je roven  $\frac{ab}{a+b}$ , nazýváme **Archimédovou kružnicí příslušnou arbélu  $\mathcal{A}_{ABC}$** .

Jelikož je často zřejmé, ke kterému arbélu Archimédova kružnice přísluší, nazýváme právě zavedený pojem rovněž zjednodušeně *Archimédovou kružnicí*.

V následujících podkapitolách představíme několik konstrukcí Archimédových kružnic.

## 1.2 První konstrukce Archimédovy kružnice

**Věta 1.** Mějme dán arbélos  $\mathcal{A}_{ABC}$  (viz obrázek [1.2](#)). Sestrojme půlkružnici  $f$ , resp.  $g$  nad průměrem  $AE$ , resp.  $DB$ . Dále sestrojme společnou tečnu  $t_1$  půlkružnic  $f$ ,  $g$ . Označme  $F$ ,  $G$  průsečíky tečny  $t_1$  s půlkružnicí  $k$ . Zkonstruuujeme-li tečny  $t_2$ ,  $t_3$  půlkružnice  $k$  v bodech  $F$ ,  $G$  a označíme-li  $H$  průsečík těchto tečen, pak kružnice s vepsaná trojúhelníku  $FGH$  je Archimédova, tj. její poloměr je roven  $\frac{ab}{a+b}$ .



Obrázek 1.2: Ilustrace Věty [1](#) a jejího důkazu

*Důkaz.* Označme  $I$ , resp.  $J$  průsečík spojnice  $OH$  s půlkružnicí  $k$ , resp. s přímkou  $FG$ . Nejprve ukažme, že bod  $I$  je střed kružnice  $s$  a bod  $J$  je bod dotyku kružnice  $s$  a strany  $FG$  trojúhelníku  $FGH$ .

Trojúhelník  $FOI$  je rovnoramenný, neboť  $|FO| = |OI| = a + b$ , a tedy

$$|\sphericalangle OFI| = \frac{1}{2}(180^\circ - |\sphericalangle IOF|). \quad (1.1)$$

Z vlastnosti tečny  $t_2$  půlkružnice  $k$  plyne

$$|\sphericalangle IFH| = 90^\circ - |\sphericalangle OFI|. \quad (1.2)$$

Dosazením vztahu (1.1) do rovnosti (1.2) dostáváme

$$\begin{aligned} |\sphericalangle IFH| &= 90^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - |\sphericalangle IOF|), \\ |\sphericalangle IFH| &= \frac{1}{2}|\sphericalangle IOF|, \end{aligned}$$

a tudíž rovněž

$$|\sphericalangle IFH| = \frac{1}{2}|\sphericalangle JOF|. \quad (1.3)$$

Platí  $|OF| = |OG|$  a rovněž  $|FH| = |GH|$ , neboť body  $F, G$  jsou body dotyku tečen  $t_2, t_3$  půlkružnice  $k$  vedené tímž bodem  $H$ . Čtyřúhelník  $OGHF$  je proto deltoid, z čehož plyne, že jeho úhlopříčky  $FG, OH$  jsou na sebe kolmé a trojúhelník  $FOJ$  je pravoúhlý. Trojúhelníky  $FOJ$  a  $HFJ$  jsou podobné, neboť trojúhelník  $FOH$  je také pravoúhlý a úsečka  $FJ$  je výškou tohoto trojúhelníku vedenou na jeho přeponu  $OH$ . Z podobnosti uvedených trojúhelníků plyne

$$\frac{1}{2}|\sphericalangle JOF| = \frac{1}{2}|\sphericalangle JFH|. \quad (1.4)$$

Po dosazení rovnosti (1.4) do vztahu (1.3) tedy získáváme

$$|\sphericalangle IFH| = \frac{1}{2}|\sphericalangle JFH|.$$

Bod  $I$  tudíž leží na ose vnitřního úhlu  $JFH$  trojúhelníku  $FGH$ . Jelikož bod  $I$  leží také na ose  $HO$  jeho vnitřního úhlu  $GHF$  (plyne ze symetrie konstrukce tečen  $t_2, t_3$  půlkružnice  $k$ ), je středem kružnice  $s$ . Bod  $J$  je patou výšky vedené vrcholem  $H$  na základnu rovnoramenného trojúhelníku  $FGH$ , proto je bodem dotyku této kružnice a strany  $FG$ . Chceme tedy dokázat, že poloměr  $|IJ|$  kružnice  $s$  je roven  $\frac{ab}{a+b}$ .

Nyní vyjádříme velikosti úseček  $OL$  a  $KO$ , kde  $K$  je střed půlkružnice  $f$  a  $L$  je střed půlkružnice  $g$ :

$$|OL| = |OB| - |LB|,$$

$$\begin{aligned}
|OL| &= a + b - \frac{|DB|}{2}, \\
|OL| &= a + b - \frac{a + 2b}{2}, \\
|OL| &= a + b - \frac{a}{2} - b, \\
|OL| &= \frac{a}{2}.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Analogickým výpočtem získáváme

$$\begin{aligned}
|KO| &= |AO| - |AK|, \\
|KO| &= a + b - \frac{2a + b}{2}, \\
|KO| &= \frac{b}{2}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

S využitím vztahů (1.5) a (1.6) vyjádříme velikost úsečky  $KL$ :

$$|KL| = |OL| + |KO| = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a + b}{2}. \tag{1.7}$$

Označme  $M$ , resp.  $N$  bod dotyku tečny  $t_1$  a půlkružnice  $f$ , resp.  $g$ . Je-li  $P$  průsečík úseček  $ML$ ,  $OH$ , potom

$$|OJ| = |OP| + |PJ|. \tag{1.8}$$

Jelikož jsou úsečky  $KM$ ,  $LN$  a  $OJ$  kolmé na tečnu  $t_1$ , je úsečka  $OJ$  rovnoběžná se stranami  $KM$ ,  $LN$  lichoběžníku  $KLNM$ . Tudíž

$$\frac{|KO|}{|KL|} = \frac{|MJ|}{|MN|}. \tag{1.9}$$

Z podobnosti trojúhelníků  $PJM$  a  $LNK$  vyplývá

$$\frac{|MJ|}{|MN|} = \frac{|PJ|}{|LN|}. \tag{1.10}$$

Z rovností (1.9), (1.10) získáváme

$$\begin{aligned}
\frac{|KO|}{|KL|} &= \frac{|PJ|}{|LN|}, \\
|PJ| &= \frac{|KO|}{|KL|} \cdot |LN|.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Trojúhelníky  $KLM$  a  $OLP$  jsou též podobné, a proto

$$\frac{|OL|}{|KL|} = \frac{|OP|}{|KM|},$$

$$|OP| = \frac{|OL|}{|KL|} \cdot |KM|. \quad (1.12)$$

Dále dosazením rovností (1.12), (1.11) do vztahu (1.8) dostáváme

$$|OJ| = \frac{|OL|}{|KL|} \cdot |KM| + \frac{|KO|}{|KL|} \cdot |LN|.$$

Nyní vyjádříme velikosti úseček  $KM$ ,  $LN$  a dosadíme je (spolu se vztahy (1.5), (1.6), (1.7)) do předchozí rovnosti:

$$|KM| = |AK| = \frac{1}{2}|AE| = \frac{1}{2}(2a + b) = a + \frac{b}{2},$$

$$|LN| = |DL| = \frac{1}{2}|DB| = \frac{1}{2}(a + 2b) = b + \frac{a}{2}.$$

$$|OJ| = \frac{a}{a+b} \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) + \frac{b}{a+b} \cdot \left(b + \frac{a}{2}\right),$$

$$|OJ| = \frac{a^2 + ab + b^2}{a+b}. \quad (1.13)$$

Pro poloměr  $|IJ|$  kružnice  $s$  platí

$$|IJ| = |OI| - |OJ|,$$

a tedy s využitím vztahu (1.13) dostáváme

$$|IJ| = (a+b) - \frac{a^2 + ab + b^2}{a+b},$$

$$|IJ| = \frac{ab}{a+b}.$$

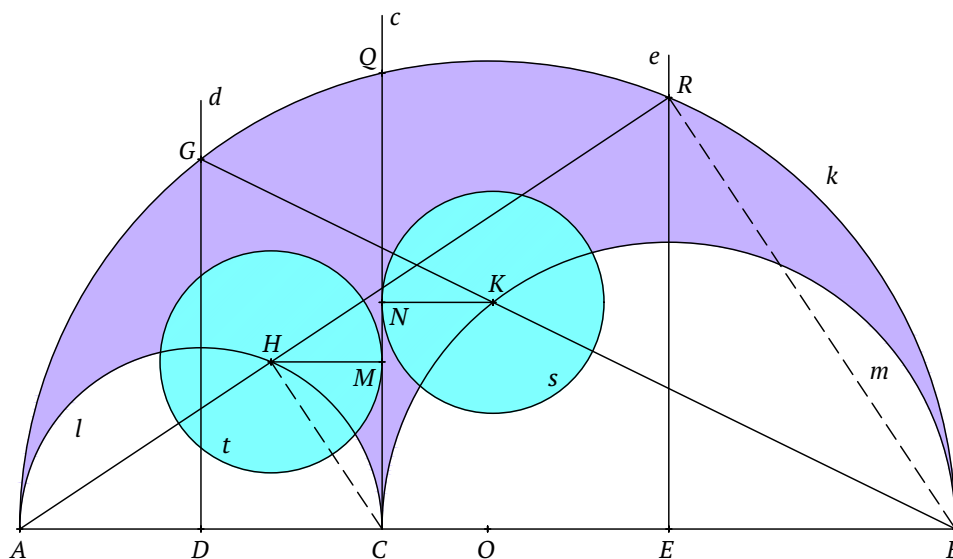
Poloměr kružnice  $s$  je proto roven  $\frac{ab}{a+b}$ , a kružnice  $s$  je tudíž Archimédova.  $\square$

### 1.3 Druhá konstrukce Archimédovy kružnice

**Věta 2.** Mějme dán arbélos  $\mathcal{A}_{ABC}$  (viz obrázek 1.3). Bodem  $D$ , resp.  $C$ , resp.  $E$  vztýčíme kolmici  $d$ , resp.  $c$ , resp.  $e$  na úsečku  $AB$ , průsečík kolmice  $d$ , resp.  $c$ , resp.  $e$  s půlkružnicí  $k$  označíme  $G$ , resp.  $Q$ , resp.  $R$ . Průsečík úsečky  $AR$  s půlkružnicí  $l$  označíme  $H$ , analogicky průsečík úsečky  $BG$  s půlkružnicí  $m$  označíme  $K$ . Sestrojíme-li kružnice  $s$  a  $t$  se středy po řadě v bodech  $K$  a  $H$  dotýkající se přímkou  $c$ , pak jsou tyto kružnice Archimédovy.

*Důkaz.* Označme  $M$ , resp.  $N$  bod dotyku kružnice  $t$ , resp.  $s$  a přímkou  $c$ . Úsečka  $CH$  je kolmá na úsečku  $AR$ , neboť půlkružnice  $l$  leží na kružnici, která je Thalétovou kružnicí sestavenou nad průměrem  $AC$  a která prochází bodem  $H$ . Z obdobného důvodu je na úsečku  $AR$  kolmá též úsečka  $BR$ . Úsečky  $CH$  a  $BR$  jsou proto rovnoběžné a trojúhelníky  $ACH$  a  $ABR$  jsou podobné. Odtud plyne

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|CH|}{|BR|}. \quad (1.14)$$



Obrázek 1.3: Ilustrace Věty 2 a jejího důkazu

Úsečka  $HM$  je zřejmě rovnoběžná s úsečkou  $EB$ , dále úsečka  $CM$  je rovnoběžná s úsečkou  $ER$ . Již víme, že úsečky  $CH$  a  $BR$  jsou též rovnoběžné. Platí tedy, že trojúhelníky  $HCM$  a  $BRE$  jsou podobné, a proto

$$\frac{|HM|}{|BE|} = \frac{|CH|}{|RB|}. \quad (1.15)$$

S využitím vztahů (1.14) a (1.15) získáváme

$$\begin{aligned}\frac{|HM|}{|BE|} &= \frac{|AC|}{|AB|}, \\ |HM| &= |BE| \cdot \frac{|AC|}{|AB|}, \\ |HM| &= b \cdot \frac{2a}{2a + 2b}, \\ |HM| &= \frac{ab}{a + b}.\end{aligned}$$

Kružnice  $t$  je tedy Archimédova.

Pro kružnici  $s$  je důkaz analogický, tentokrát však místo podobných trojúhelníků  $BER$  a  $HMC$  využíváme podobných trojúhelníků  $ADG$  a  $KNC$ .  $\square$

## 1.4 Třetí konstrukce Archimédovy kružnice

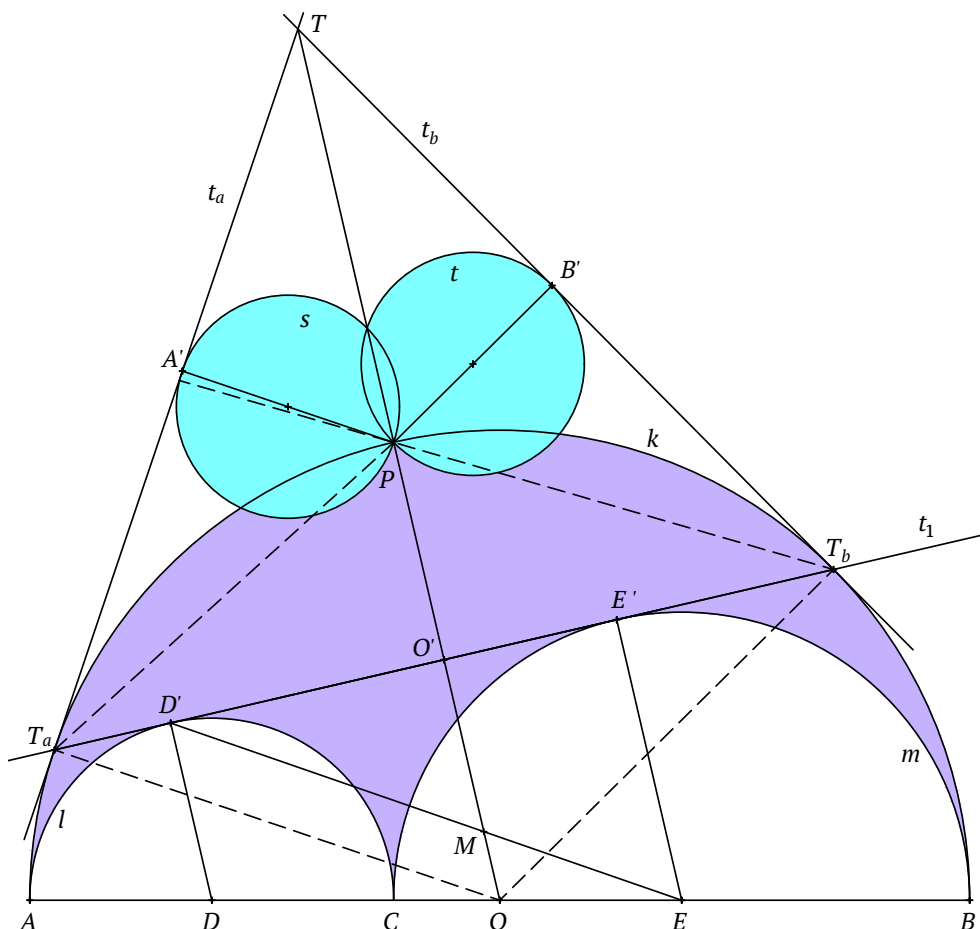
**Věta 3.** *Mějme dán arbélos  $\mathcal{A}_{ABC}$  (viz obrázek 1.4). Sestrojme společnou tečnu  $t_1$  půlkružnic  $l, m$ . Označme  $T_a, T_b$  průsečíky tečny  $t_1$  s půlkružnicí  $k$ . V bodech  $T_a, T_b$  sestrojme tečny  $t_a, t_b$  půlkružnice  $k$  a průsečík těchto tečen označme  $T$ . Dále sestrojme úsečku  $OT$  a její průsečík s půlkružnicí  $k$  označme  $P$ . Ortogonální projekce bodu  $P$  na tečny  $t_a, t_b$  označme  $A', B'$ . Zkonstruuujeme-li kružnici  $s$ , resp.  $t$  nad průměrem  $A'P$ , resp.  $B'P$ , pak je tato kružnice Archimédova.*

*Důkaz.* Platí  $|OT_a| = |OT_b| = a + b$ . Dále také platí  $|TT_a| = |TT_b|$ , neboť vzdálenosti bodů dotyku dvou tečen téže kružnice od bodu, kterým jsou tečny vedeny, jsou pro oba dva body stejné. Z předchozích vztahů plyne, že čtyřúhelník  $T_aOT_bT$  je deltoidem, a tedy úsečky  $OT, T_aT_b$  jsou na sebe kolmé.

Označme  $D', O', E'$  po řadě ortogonální projekce bodů  $D, O, E$  na tečnu  $t_1$ . Body  $D', E'$  jsou tudíž body dotyku tečny  $t_1$  s půlkružnicemi  $l, m$  a bod  $O'$  je průsečíkem přímkou  $OT$  a  $t_1$ . Úsečky  $DD', EE', OT$  jsou vzájemně rovnoběžné. Dále platí:

$$|OE| = |OB| - |EB| = a + b - b = a, \quad (1.16)$$

$$|DO| = |AO| - |AD| = a + b - a = b. \quad (1.17)$$



Obrázek 1.4: Ilustrace Věty 3 a jejího důkazu

S využitím vztahů (1.16), (1.17) získáváme

$$|DD'| = |OE| = a, \quad (1.18)$$

$$|EE'| = |DO| = b. \quad (1.19)$$

Označíme-li  $\alpha = |\angle TT_aP|$ , potom  $|\angle PT_aO| = 90^\circ - \alpha$ . Trojúhelník  $T_aOP$  je rovnoramenný, a proto  $|\angle T_aPO| = |\angle PT_aO| = 90^\circ - \alpha$ . Trojúhelník  $T_aO'P$  je pravoúhlý, a tedy  $|\angle PT_aO'| = \alpha$ . Jelikož  $|\angle TT_aP| = |\angle PT_aO'|$ , je přímka  $T_aP$  osou vnitřního úhlu  $TT_aT_b$  trojúhelníku  $T_aT_bT$ . Analogicky lze ukázat, že  $T_bP$  je osou vnitřního úhlu  $T_aT_bT$  trojúhelníku  $T_aT_bT$ . (Rovněž  $TP$  je osou vnitřního úhlu  $T_bTT_a$  téhož trojúhelníku.) Odtud plyne, že bod  $P$  je středem kružnice vepsané trojúhelníku  $T_aT_bT$  a platí  $|A'P| = |B'P| = |PO'|$ .

K ověření skutečnosti, že kružnice  $s$ ,  $t$  jsou Archimédovy, proto stačí dokázat, že polovina velikosti úsečky  $PO'$  je rovna poloměru Archimédovy kružnice.

Označíme-li  $M$  průsečík úseček  $D'E$  a  $OT$ , pak

$$|OO'| = |OM| + |MO'|. \quad (1.20)$$

Trojúhelníky  $OEM$  a  $DED'$  jsou podobné, a tedy platí

$$\frac{|OM|}{|OE|} = \frac{|DD'|}{|DE|}$$

a následně (s využitím vztahu (1.16))

$$|OM| = |OE| \cdot \frac{|DD'|}{|DE|},$$

$$|OM| = a \cdot \frac{a}{a+b}. \quad (1.21)$$

Z rovnoběžnosti úseček  $DD'$ ,  $OO'$ ,  $EE'$  plyne podobnost trojúhelníků  $MO'D'$  a  $EE'D'$ . Tudíž

$$\frac{|MO'|}{|EE'|} = \frac{|O'D'|}{|E'D'|} = \frac{|OD|}{|ED|},$$

což implikuje rovnost

$$|MO'| = |EE'| \cdot \frac{|OD|}{|ED|}.$$

S využitím vztahu (1.17) odtud plyne

$$|MO'| = b \cdot \frac{b}{a+b}. \quad (1.22)$$

Dosazením vztahů (1.21) a (1.22) do rovnosti (1.20) dostáváme

$$|OO'| = a \cdot \frac{a}{a+b} + b \cdot \frac{b}{a+b},$$

$$|OO'| = \frac{a^2 + b^2}{a+b}. \quad (1.23)$$

Nyní snadno vyjádříme velikost úsečky  $PO'$  :

$$|PO'| = |PO| - |OO'|. \quad (1.24)$$



Dosazením rovnosti (1.23) do vztahu (1.24) získáváme

$$|PO'| = |PO| - \frac{a^2 + b^2}{a + b}$$

a následně

$$\begin{aligned} |PO'| &= a + b - \frac{a^2 + b^2}{a + b}, \\ |PO'| &= \frac{(a + b)^2}{a + b} - \frac{a^2 + b^2}{a + b}, \\ |PO'| &= \frac{2ab}{a + b}. \end{aligned}$$

Tudíž

$$\frac{|PO'|}{2} = \frac{|PA'|}{2} = \frac{|PB'|}{2} = \frac{ab}{a + b}.$$

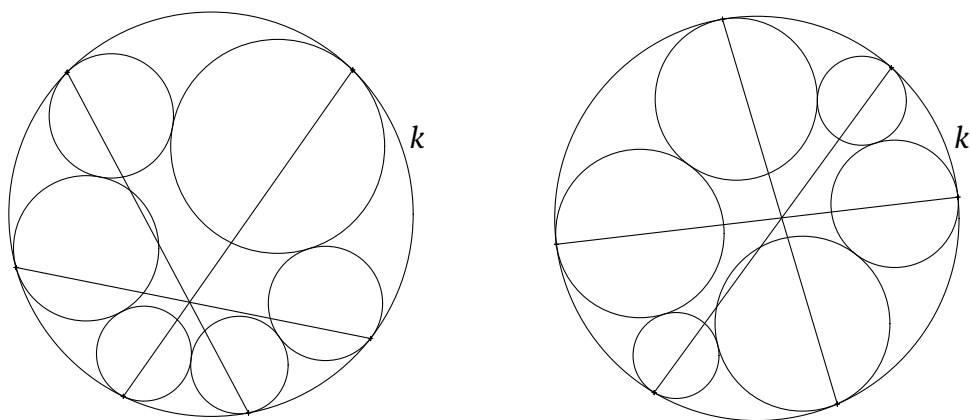
Poloměr kružnice  $s$ , resp.  $t$  je tedy roven  $\frac{ab}{a+b}$ , a kružnice  $S$ , resp.  $t$  je proto Archimédova.  $\square$

## 2. Věta o sedmi kružnicích

Pozoruhodnou, níže zapsanou *Větu o sedmi kružnicích* popisující vztahy mezi kružnicemi a jejími tětivami poprvé publikovali *Cecil John Alvin Evelyn, G. B. Money-Coutts a John Alfred Tyrrell* v roce 1974 v knize [6]. Během následujícího půlstoletí bylo představeno několik důkazů, které využívají různé matematické disciplíny (viz např. článek [4]). V této kapitole ukážeme ověření, které využívá pouze základní geometrické vztahy na úrovni středoškolské matematiky.

Tato kapitola je zpracována na základě textů [4], [19], [27].

Mějme danou libovolnou kružnici  $k$ , ke které sestrojíme řetězec šesti kružnic tak, aby každá z nich měla vnitřní dotyk s kružnicí  $k$  a zároveň měla vnější dotyk se dvěma dalšími kružnicemi řetězce. *Věta o sedmi kružnicích* tvrdí, že jisté tětivy kružnice  $k$ , jejichž krajními body jsou body dotyku dané kružnice  $k$  s kružnicemi řetězce, se protnou v jednom bodě (viz obrázek 2.1).



Obrázek 2.1: Věta o sedmi kružnicích

### 2.1 Čèvovy věty

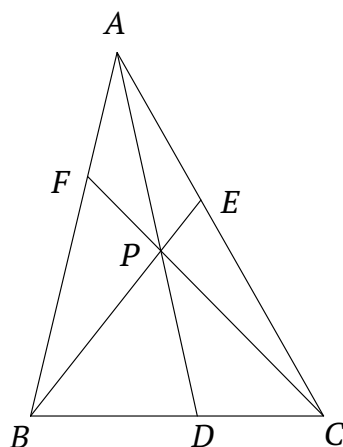
Než se podíváme na přesné znění věty a její důkaz, zaměříme se na vlastnosti tří konkurentních přímek, tj. přímek procházejících jedním bodem. Zajímavými vlastnostmi třech konkurentních přímek v trojúhelníku se zabývali

již známí geometři jako např. *Hérón z Alexandrie* (10–70) a *Archimédés* (asi 287 př. Kr.–212 př. Kr.).

Zajímavé poznatky o těchto přímkách doplněné důkazy představil italský matematik *Giovanni Cèva* (1647–1734). Na jeho počest se dnes úsečka spojující vrchol trojúhelníku s nějakým vnitřním bodem protější strany v anglicky psané literatuře nazývá *cevian*. Nyní představíme a dokážeme *Cèvovu větu*, která se takových spojnic týká a je pro důkaz *Věty o sedmi kružnicích* stěžejní.<sup>1</sup>

**Věta 4** (Cèvova). *Je dán trojúhelník  $ABC$ . Necht  $D$ ,  $E$  a  $F$  jsou po řadě libovolné vnitřní body stran  $BC$ ,  $CA$  a  $AB$  (viz obrázek 2.2). Úsečky  $AD$ ,  $BE$  a  $CF$  jsou konkuretní právě tehdy, když platí*

$$|AF| \cdot |BD| \cdot |CE| = |FB| \cdot |DC| \cdot |EA|.$$

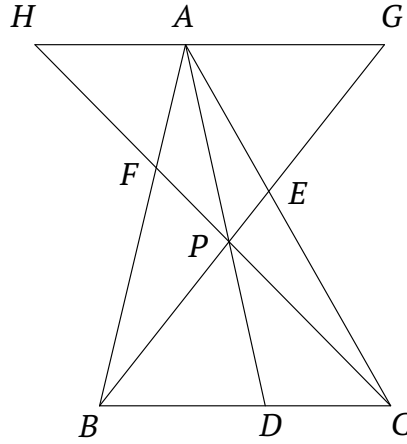


Obrázek 2.2: Ilustrace Cèvovy věty

*Důkaz.* Tvrzení je ve formě ekvivalence. Dokážeme ho tak, že ověříme obě implikace.

1. Předpokládejme, že se úsečky  $AD$ ,  $BE$  a  $CF$  protnou v jediném bodě, který označíme  $P$  (viz obrázek 2.3). Bodem  $A$  vedme přímkou rovnoběžnou s úsečkou  $BC$  a poté sestrojme průsečíky  $H$  a  $G$  této rovnoběžné přímky po řadě s přímkami  $CF$  a  $BE$ .

<sup>1</sup>V některých literaturách je Cèvovou větou myšleno obecnější tvrzení (viz např. [24]).



Obrázek 2.3: Ilustrace důkazu 1. implikace Cèvovy věty

Trojúhelníky  $DCP$ ,  $AHP$  jsou podobné, neboť úhly  $AHP$ ,  $DCP$  jsou dvojicí střídavých úhlů a úhly  $HPA$ ,  $CPD$  jsou vrcholové. Z analogických důvodů jsou podobné i dvojice trojúhelníků  $BDP$  a  $GAP$ ,  $BCF$  a  $AHF$ ,  $BCE$  a  $GAE$ ,  $BCP$  a  $GHP$ . Z podobnosti trojúhelníků získáváme vztahy:

$$\frac{|DC|}{|AH|} = \frac{|PD|}{|PA|}, \quad (2.1)$$

$$\frac{|AG|}{|DB|} = \frac{|AP|}{|DP|}, \quad (2.2)$$

$$\frac{|AE|}{|CE|} = \frac{|AG|}{|CB|}, \quad (2.3)$$

$$\frac{|BF|}{|AF|} = \frac{|BC|}{|AH|}. \quad (2.4)$$

Vynásobením pravých a levých stran rovností (2.1) až (2.4) dojdeme k následující rovnosti:

$$\frac{|DC|}{|AH|} \cdot \frac{|AG|}{|DB|} \cdot \frac{|AE|}{|CE|} \cdot \frac{|BF|}{|AF|} = \frac{|PD|}{|PA|} \cdot \frac{|AP|}{|DP|} \cdot \frac{|AG|}{|CB|} \cdot \frac{|BC|}{|AH|}.$$

Úpravami získáme vztahy

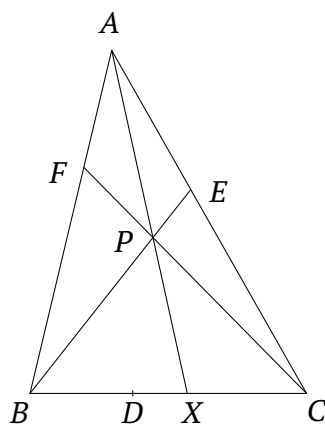
$$\frac{|DC|}{|AH|} \cdot \frac{|AG|}{|DB|} \cdot \frac{|AE|}{|CE|} \cdot \frac{|BF|}{|AF|} = \frac{|AG|}{|AH|},$$

$$\frac{|DC|}{|BD|} \cdot \frac{|AE|}{|EC|} \cdot \frac{|BF|}{|FA|} = 1,$$

z čehož plyne

$$|DC| \cdot |AE| \cdot |BF| = |BD| \cdot |EC| \cdot |FA|. \quad (2.5)$$

Tím je první implikace dokázána.



Obrázek 2.4: Ilustrace důkazu 2. implikace Cèvovy věty

2. Předpokládejme, že

$$|AF| \cdot |BD| \cdot |CE| = |FB| \cdot |DC| \cdot |EA| \quad (2.6)$$

a zároveň že se úsečky  $BE$ ,  $CF$  protínají v bodě  $P$ , kterým však neprochází úsečka  $AD$  (viz obrázek 2.4). Přímka  $AP$  tudíž protíná stranu  $BC$  v bodě  $X$ , který je různý od bodu  $D$ . Z první části důkazu tedy dostáváme

$$|AF| \cdot |BX| \cdot |CE| = |FB| \cdot |XC| \cdot |EA|. \quad (2.7)$$

Vydělením levých a pravých stran rovností (2.6), (2.7) získáváme

$$\frac{|BD|}{|BX|} = \frac{|DC|}{|XC|},$$

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|BX|}{|XC|}. \quad (2.8)$$

Jestliže jsou body  $X$  a  $D$  různé a zároveň předpokládáme, že  $X$  je vnitřním bodem úsečky  $DC$  (viz obrázek 2.4), pak platí  $|BD| < |BX|$

a zároveň  $|DC| > |XC|$ . Obdobně, pokud je bod  $X$  vnitřním bodem úsečky  $BD$ , je  $|BD| > |BX|$  a zároveň  $|DC| < |XC|$ . Proto v prvním případě dostáváme nerovnost

$$\frac{|BD|}{|DC|} < \frac{|BX|}{|XC|}$$

a ve druhém případě nerovnost

$$\frac{|BD|}{|DC|} > \frac{|BX|}{|XC|}.$$

V obou případech se jedná o spor (viz rovnost (2.8)) a bod  $X$  nemůže být různý od bodu  $D$ , jak jsme předpokládali.

Tím jsme dokázali i druhou implikaci, a tudíž i Cèvovu větu.

□

Nyní dokážeme obdobnou větu týkající se kružnice a jejích tětiv, které se budou též protínat v jednom bodě. Věta i důkaz jsou velmi podobné předchozí části. I přesto je dobré, z důvodu snazšího pochopení *Věty o sedmi kružnicích* a jejího důkazu, se na ně zaměřit.

Pokud bude v následující sekci využíván kružnicový oblouk a nebude uvedeno, který ze dvou možností myslíme, bude uvažován kratší z nich.

**Věta 5** (Cèvova věta o kružnici). *Nechť jsou dány body  $A, B, C, D, E, F$  ležící v uvedeném pořadí na kružnici  $k$  (viz obrázek 2.5). Tětivy  $AD, BE, CF$  se protínají v jediném bodě právě tehdy, když platí*

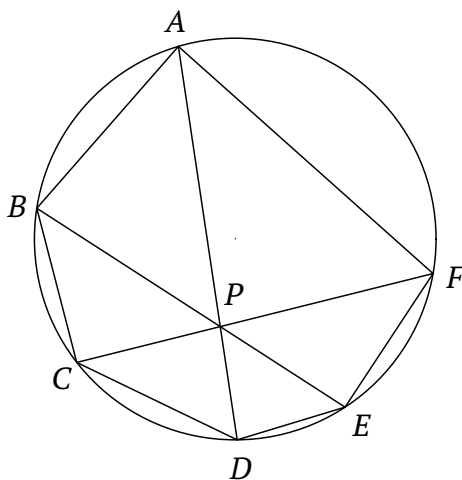
$$|AB| \cdot |CD| \cdot |EF| = |BC| \cdot |DE| \cdot |FA|.$$

*Důkaz.* Věta je opět ve formě ekvivalence, a proto ověříme obě implikace.

1. Předpokládejme, že tětivy  $AD, BE, CF$  mají společný právě jeden průsečík  $P$ . Potom na základě vlastností vrcholových a obvodových úhlů nalezneme několik dvojic podobných trojúhelníků. Z podobnosti dvojic trojúhelníků  $ABP$  a  $EDP$ ,  $AFP$  a  $CDP$ ,  $BCP$  a  $FEP$  vyplývá

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|PA|}{|PE|},$$

$$\frac{|EF|}{|BC|} = \frac{|PF|}{|PB|},$$



Obrázek 2.5: Ilustrace Cèvovy věty o kružnici

$$\frac{|CD|}{|FA|} = \frac{|PC|}{|PA|},$$

$$\frac{|PC|}{|PE|} = \frac{|PB|}{|PF|}.$$

Vynásobením levých a pravých stran těchto čtyř rovností získáváme rovnost

$$\frac{|AB|}{|DE|} \cdot \frac{|EF|}{|BC|} \cdot \frac{|CD|}{|FA|} \cdot \frac{|PC|}{|PE|} = \frac{|PA|}{|PE|} \cdot \frac{|PF|}{|PB|} \cdot \frac{|PC|}{|PA|} \cdot \frac{|PB|}{|PF|}$$

a následnými úpravami vztahy

$$\frac{|AB|}{|DE|} \cdot \frac{|EF|}{|BC|} \cdot \frac{|CD|}{|FA|} \cdot \frac{|PC|}{|PE|} = \frac{|PC|}{|PE|},$$

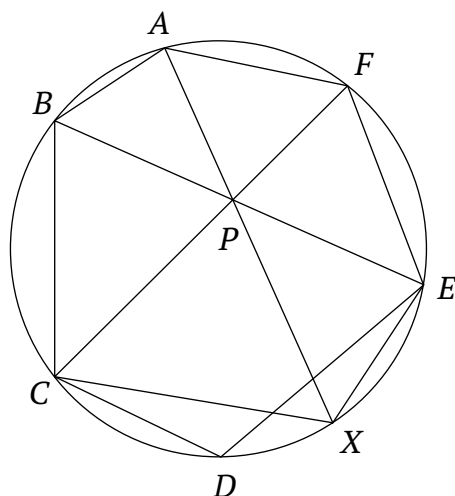
$$\frac{|AB|}{|DE|} \cdot \frac{|EF|}{|BC|} \cdot \frac{|CD|}{|FA|} = 1,$$

$$|AB| \cdot |EF| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DE| \cdot |FA|,$$

čímž jsme dokázali první implikaci.

2. Předpokládejme, že pro libovolnou šestici navzájem různých bodů  $A, B, C, D, E, F$  ležících v uvedeném pořadí na kružnici platí rovnost

$$|AB| \cdot |CD| \cdot |EF| = |BC| \cdot |DE| \cdot |FA|. \quad (2.9)$$



Obrázek 2.6: Ilustrace důkazu Cèvovy věty o kružnici

Uvažujme kruhové oblouky  $AC$ ,  $CE$ ,  $EA$  obsahující po řadě body  $B$ ,  $D$ ,  $F$  (viz obrázek 2.6). Alespoň jeden z oblouků musí být kratší než půlkružnice. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že takovým obloukem je oblouk  $CE$ . Nechť  $P$  je průsečík tětiv  $BE$ ,  $CF$  a necht' přímka  $AP$  protíná kružnici v bodě  $X$ , který je vnitřním bodem oblouku  $CE$  a je různý od bodu  $D$ , tj. předpokládejme, že se úsečky  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  neprotínají v jediném bodě. Z předpokladu získáváme

$$|AB| \cdot |CX| \cdot |EF| = |BC| \cdot |XE| \cdot |FA|. \quad (2.10)$$

Následným vydělením levých a pravých stran vztahů (2.9), (2.10) získáváme

$$\begin{aligned} \frac{|AB|}{|AB|} \cdot \frac{|CD|}{|CX|} \cdot \frac{|EF|}{|EF|} &= \frac{|BC|}{|BC|} \cdot \frac{|DE|}{|XE|} \cdot \frac{|FA|}{|FA|}, \\ \frac{|CD|}{|CX|} &= \frac{|DE|}{|XE|}, \\ \frac{|CD|}{|DE|} &= \frac{|CX|}{|XE|}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Předpokládáme-li, že jsou body  $X$  a  $D$  různé a že bod  $X$  náleží kruhovému oblouku  $DE$  (viz obrázek 2.6), pak platí  $|CD| < |CX|$  a zároveň  $|DE| > |XE|$ . Tedy

$$\frac{|CD|}{|DE|} < \frac{|CX|}{|XE|}. \quad (2.12)$$



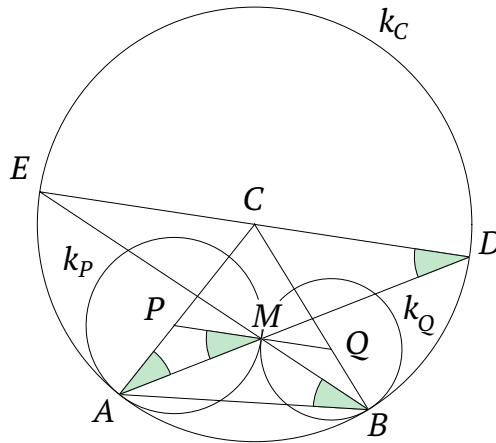
Pokud by bod  $X$  náležel kruhovému oblouku  $CD$ , dostali bychom obdobně nerovnost

$$\frac{|CD|}{|DE|} > \frac{|CX|}{|XE|}. \quad (2.13)$$

Vztahy (2.11), (2.12), resp. (2.11), (2.13) jsou nyní ve sporu, a proto bod  $X$  musí být totožný s bodem  $D$ . Tím je dokázána i druhá implikace, a tedy také věta ve formě ekvivalence. □

**Lemma 6.** *Mějme danou kružnici  $k_C$  se středem  $C$  a dvě kružnice  $k_P, k_Q$  po řadě se středy  $P, Q$ , které se vzájemně dotýkají vně a současně mají vnitřní dotyk s danou kružnicí  $k_C$  (viz obrázek 2.7). Nechť  $A$ , resp.  $B$  je bod dotyku kružnice  $k_C$  a kružnice  $k_P$ , resp.  $k_Q$ . Označíme-li  $c, p, q$  po řadě poloměry kružnic  $k_C, k_P, k_Q$ , pak platí*

$$\frac{|AB|^2}{4c^2} = \frac{p}{c-p} \cdot \frac{q}{c-q}.$$



Obrázek 2.7: Ilustrace Lemmatu 6

*Důkaz.* Nechť se kružnice  $k_P, k_Q$  dotýkají v bodě  $M$ . Sestrojíme průsečíky  $D, E$  kružnice  $k_C$  a po řadě přímk  $AM, BM$ . Dále sestrojíme úsečky  $CD, CE$  a  $PQ$  (úsečka  $PQ$  musí procházet bodem  $M$ ).

Úsečky  $CA, CD$  jsou shodné, a tedy  $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CDA|$ . Totéž platí pro úsečky  $PA, PM$ , a proto  $|\sphericalangle PAM| = |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle PMA|$ . Ze zmíněných rovností vyplývá  $|\sphericalangle PMA| = |\sphericalangle CDA|$ , a tedy úsečka  $CD$  je rovnoběžná s úsečkou  $PM$ . Analogicky lze ukázat, že úsečka  $CE$  je rovnoběžná

s úsečkou  $QM$ . Protože jsou body  $P, M, Q$  kolineární, jsou kolineární i body  $D, C, E$ . Obvodové úhly  $EBA, EDA$  příslušné oblouku  $AE$  jsou shodné. Získáváme tedy tři páry podobných trojúhelníků:  $MDE$  a  $MBA, BMQ$  a  $BEC, AMP$  a  $ADC$ .

Z podobnosti trojúhelníků vyplývají rovnosti

$$\frac{|AB|}{|ED|} = \frac{|MA|}{|ME|} = \frac{|MB|}{|MD|}, \quad (2.14)$$

$$\frac{|MA|}{|MD|} = \frac{|PA|}{|PC|}, \quad (2.15)$$

$$\frac{|MB|}{|ME|} = \frac{|QB|}{|QC|}. \quad (2.16)$$

Úsečka  $DE$  je průměrem kružnice  $k_C$  o velikosti  $2c$ , a tedy s využitím rovnosti (2.14) získáváme

$$\frac{|AB|^2}{4c^2} = \frac{|AB|}{2c} \cdot \frac{|AB|}{2c} = \frac{|AB|}{|DE|} \cdot \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|MA|}{|ME|} \cdot \frac{|MB|}{|MD|}.$$

Dosazením rovností (2.15), (2.16) dostáváme požadovaný vztah

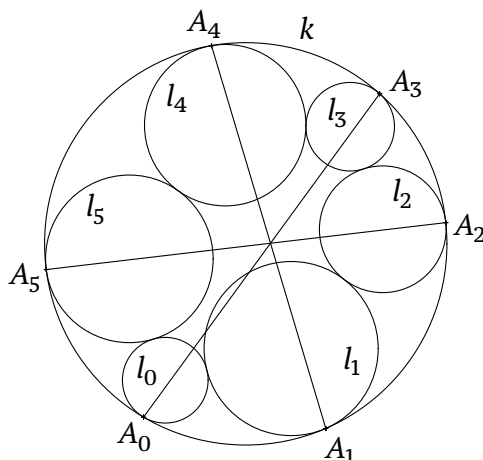
$$\frac{|AB|^2}{4c^2} = \frac{|MA|}{|MD|} \cdot \frac{|MB|}{|ME|} = \frac{|PA|}{|PC|} \cdot \frac{|QB|}{|QC|} = \frac{p}{c-p} \cdot \frac{q}{c-q}.$$

□

## 2.2 Formulace věty a jejího důkazu

Nyní se věnujme stěžejní větě této kapitoly a jejímu důkazu. V textu budeme znakem  $\mathbb{Z}_n$  značit množinu  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ .

**Věta 7** (Věta o sedmi kružnicích). *Nechť je dána kružnice  $k$  a jejích šest navzájem různých bodů  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  (viz obrázek 2.8). Existuje-li šest kružnic  $l_i, i \in \mathbb{Z}_6$ , které mají s kružnicí  $k$  vnitřní dotyk v bodech  $A_i, i \in \mathbb{Z}_6$ , kde každá z kružnic  $l_i, i = 1, 2, 3, 4$ , se dotýká vně kružnic  $l_{i-1}, l_{i+1}$  a kružnice  $l_0$  se vně dotýká kružnic  $l_1$  a  $l_5$ , pak jsou přímky  $A_0A_3, A_1A_4, A_2A_5$  konkurentní.*



Obrázek 2.8: Ilustrace Věty 7

*Důkaz.* Zavedme (kvůli snazšímu vyjadřování) označení  $A_6 = A_0$ ,  $r_6 = r_0$ . Označme  $R$  poloměr kružnice  $k$  a  $r_i$  poloměr kružnice  $l_i$ , kde  $i \in \mathbb{Z}_6$ . Vyjádříme-li  $|A_i A_{i+1}|$  pomocí poloměrů  $r_i$ ,  $r_{i+1}$ , s využitím Lemmatu 6 získáváme

$$\frac{|A_i A_{i+1}|^2}{4R^2} = \frac{r_i}{R - r_i} \cdot \frac{r_{i+1}}{R - r_{i+1}},$$

tj.

$$|A_i A_{i+1}| = 2R f(r_i) f(r_{i+1}),$$

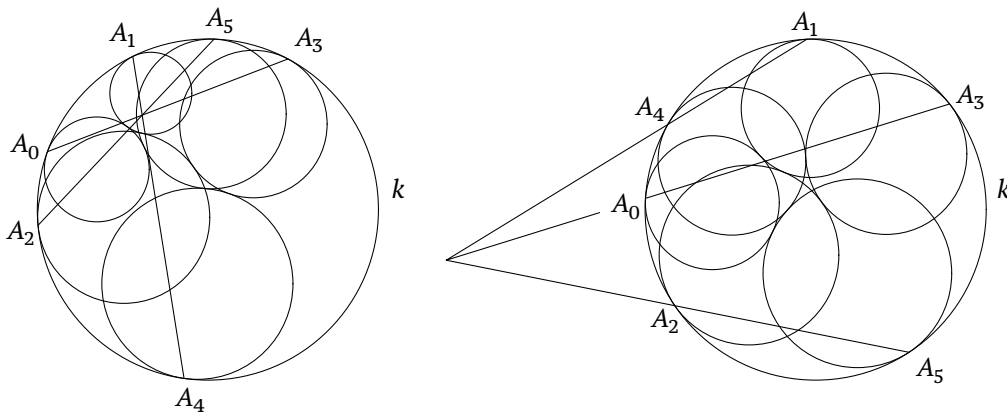
kde  $f(r_i) = \sqrt{\frac{r_i}{R - r_i}}$ . Odtud vyplývá

$$\begin{aligned} |A_0 A_1| \cdot |A_2 A_3| \cdot |A_4 A_5| &= 8R^3 f(r_0) f(r_1) f(r_2) f(r_3) f(r_4) f(r_5) = \\ &= 2R f(r_1) f(r_2) \cdot 2R f(r_3) f(r_4) \cdot 2R f(r_5) f(r_0) = \\ &= |A_1 A_2| \cdot |A_3 A_4| \cdot |A_5 A_0|. \end{aligned}$$

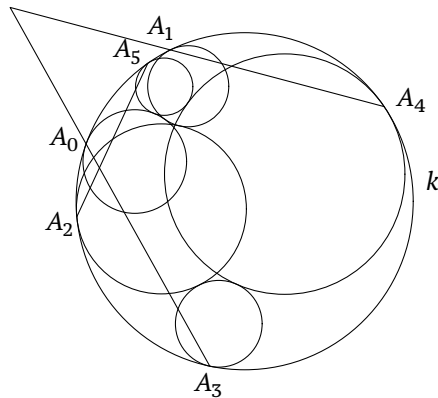
Dle Cèvovy věty o kružnici (Věta 5) se úsečky  $A_0 A_3$ ,  $A_1 A_4$ ,  $A_2 A_5$  protínají v jednom bodě, tj. jsou konkurentní.  $\square$

*Poznámka.* Věta o sedmi kružnicích je ilustrována na obrázku 2.8, kde jsou body  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  uspořádány tak, že body  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , leží mezi body  $A_{i-1}$ ,  $A_{i+1}$  a zároveň bod  $A_0 = A_6$  leží mezi body  $A_5, A_1$ . Uspořádání bodů  $A_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}_6$ , může být i jiné a platnost věty zůstane zachována, jak znázorňuje obrázek 2.9. V pravé části obrázku vidíme, že průsečík přímků  $A_0 A_3$ ,  $A_1 A_4$ ,  $A_2 A_5$  může ležet ve vnější oblasti kružnice  $k$ .

Z obrázku 2.10 je však naopak zřejmé, že pořadí bodů není zcela libovolné.



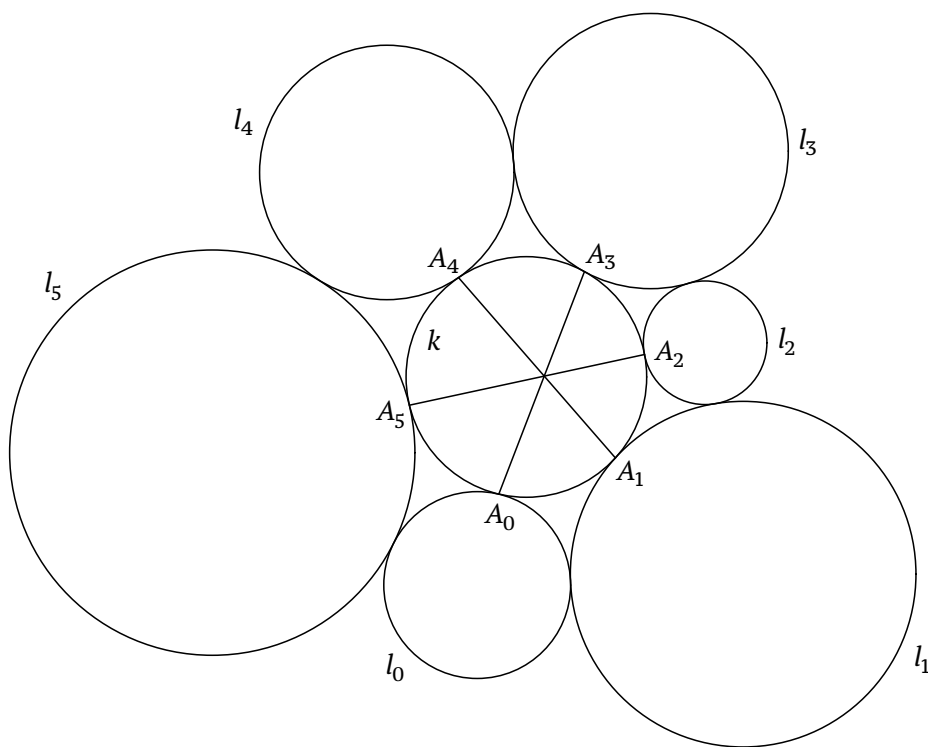
Obrázek 2.9: Jiné umístění bodů - 1. způsob



Obrázek 2.10: Jiné umístění bodů - 2. způsob

Obdoba *Věty o sedmi kružnicích* platí i pro analogické pozice kružnic. Nyní se podíváme na jednu z nich. Následující větu uvedeme bez důkazu, neboť je obdobný důkazu *Věty 7*.

**Věta 8.** *Nechť je dána kružnice  $k$  a jejích šest různých bodů  $A_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}_6$  (viz obrázek [2.11](#)). Předpokládejme, že lze sestavit šest kružnic  $l_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}_6$ , které se kružnice  $k$  dotýkají vně v bodech  $A_i$  a zároveň se každá z kružnic  $l_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , dotýká vně kružnic  $l_{i-1}$ ,  $l_{i+1}$ , přičemž kružnice  $l_0$  se vně dotýká kružnic  $l_1$  a  $l_5$ . Pak jsou úsečky  $A_0A_3$ ,  $A_1A_4$ ,  $A_2A_5$  konkurentní.*



Obrázek 2.11: Obdoba Věty o sedmi kružnicích

# 3. Fordovy kružnice

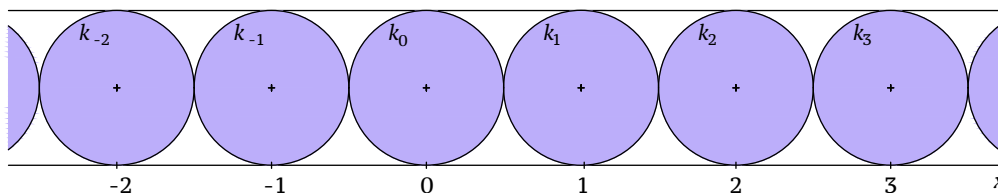
Třetí kapitola je věnována tzv. *Fordovým kružnicím*, které díky svým zajímavým vlastnostem slouží k zavedení racionálních čísel. Nejprve se však podíváme na sestrojení struktury čísel celých, následně celou situaci zobecníme a sestrojíme strukturu čísel racionálních. Existuje mnoho způsobů, jak taková čísla zavést, avšak jak již název kapitoly napovídá, základním stavebním prvkem našeho přístupu budou právě kružnice.

V celé kapitole budeme uvažovat souřadnicový systém v rovině, jehož osy jsou na sebe kolmé a na obou osách jsou jednotky stejně velké.

Tato kapitola je zpracována na základě textů [8], [20].

## 3.1 Zavedení celých čísel

Mějme vodorovnou přímku, kterou budeme považovat za osu  $x$  souřadnicového systému, a na ní bod 0 (viz obrázek 3.1). Dále uvažujme pouze jednu z polorovin s hraniční přímkou  $x$ , a to například tu nad přímkou  $x$ . U dotyku dvou kružnic budeme uvažovat pouze dotyk vnější.



Obrázek 3.1: Zavedení celých čísel

Sestrojme kružnici  $k_0$  o průměru 1, která se dané osy  $x$  dotýká právě v bodě 0. Dále sestrojme dvě kružnice  $k_1, k_{-1}$  s průměrem 1, které se dotýkají již sestrojené kružnice  $k_0$  a osy  $x$ . V následujícím kroku sestrojme kružnici  $k_2$ , resp.  $k_{-2}$ , s průměrem 1, která se dotýká osy  $x$  a kružnice  $k_1$ , resp.  $k_{-1}$ . Takto postupujeme dále, sestrojujeme kružnice  $k_3$  a  $k_{-3}$ ,  $k_4$  a  $k_{-4}$  atd. Získáváme jakýsi nekonečný „pás“ kružnic, jejichž body dotyku s danou přímkou  $x$  mají vzdálenost 1. Dotykové body označme čísly, jejichž absolutní hodnoty se rovnají vzdálenostem jednotlivých bodů dotyku od bodu 0. Vpravo od bodu 0

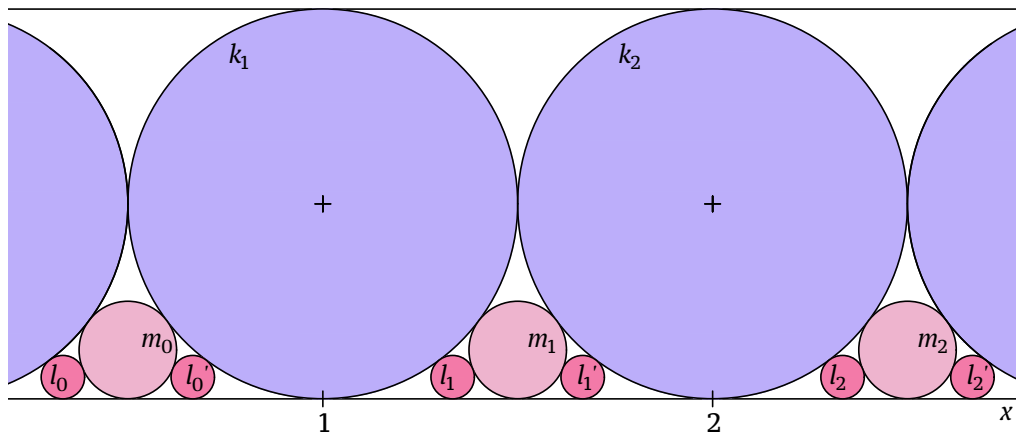
ponecháme kladné hodnoty, avšak vlevo od 0 jim přidáme znaménko mínus, čímž dostaneme záporné hodnoty. Veškerá takto vytvořená čísla nazýváme čísla celá a značíme je  $\mathbb{Z}$ .

Kružnice jsou tedy pojmenovány  $k_z$ ,  $z \in \mathbb{Z}$ , kde  $z$  je označení bodu dotyku kružnice  $k_z$  s osou  $x$ .

### 3.2 Zavedení racionálních čísel

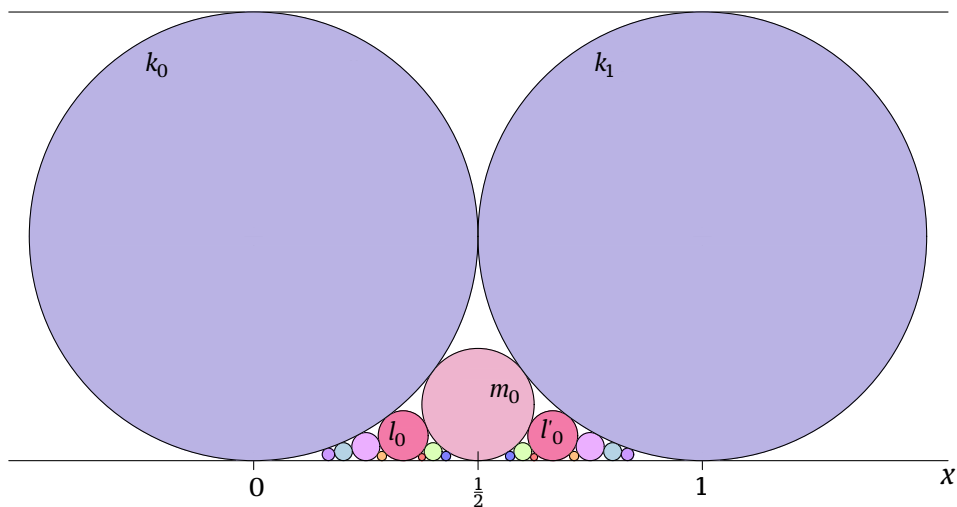
Nyní se zamysleme, jak obdobným způsobem získat alespoň některá z čísel, která nejsou čísla celými. Hledejme taková čísla  $u$ , pro která platí  $z < u < z + 1$ ,  $z \in \mathbb{Z}$ , a lze je opět reprezentovat body dotyku nějakých kružnic s přímkou  $x$ , přičemž konstrukce kružnic je pevně daná. Začneme vepisovat kružnice  $m_z$  tak, aby se každá nově sestavená kružnice dotýkala přímky  $x$  a kružnic  $k_z$  a  $k_{z+1}$  (viz obrázek 3.2). Takovým postupem získáme další systém kružnic o stejném poloměru. Analogicky postupujeme dále a sestavujeme kružnice  $l_z$  a  $l'_z$  dotýkající se přímky  $x$ , přičemž kružnice  $l_z$  se navíc dotýká kružnic  $k_z$ ,  $m_z$  a kružnice  $l'_z$  se dotýká kružnic  $k_{z+1}$ ,  $m_z$ .

Tento postup lze opakovat „donekonečna“ a lze si jej lépe představit pomocí grafického znázornění na obrázku 3.2. Takto zkonstruované kružnice se nazývají *Fordovy*.



Obrázek 3.2: Zavedení racionálních čísel

Zavedení množiny čísel vysvětlíme pouze pro čísla na intervalu  $(0, 1)$ , neboť na intervalech  $(z, z + 1)$ , kde  $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , je zavedení analogické (viz obrázek 3.3). Kružnice  $k_0$  a  $k_1$  se přímkou  $x$ , jak jsme již uvedli, dotýkají v bodech 0 a 1. Nyní musíme určit, v jakých bodech se přímkou  $x$  dotýkají



Obrázek 3.3: Zavedení racionálních čísel na intervalu  $(0, 1)$

kružnice, které jsou podle výše uvedeného postupu vepsané mezi tyto dvě kružnice. Je zřejmé, že mezi čísly 0 a 1 neexistuje žádné další celé číslo  $z$ . Musíme proto zavést jinou strukturu čísel, tzv. racionální čísla, mezi něž budou patřit čísla  $r$ , pro která platí  $0 < r < 1$ .

Podívejme se na kružnici  $m_0$ . Bod dotyku kružnice  $m_0$  a přímky  $x$  je zřejmě stejně vzdálený od bodů 0 a 1. Vzdálenost čísel 0 a 1 je rovna jedné, a tedy získáváme první racionální číslo  $\frac{1}{2}$ .

Pro další kružnice je výpočet složitější, ale přesto lze odvodit. Nyní se tedy zaměříme na to, jakým způsobem lze vypočítat vzdálenost bodu dotyku jakékoliv ze sestavených kružnic od 0, tedy jak získat další racionální čísla.

### 3.2.1 Odvození vzorce pro výpočet bodů dotyku

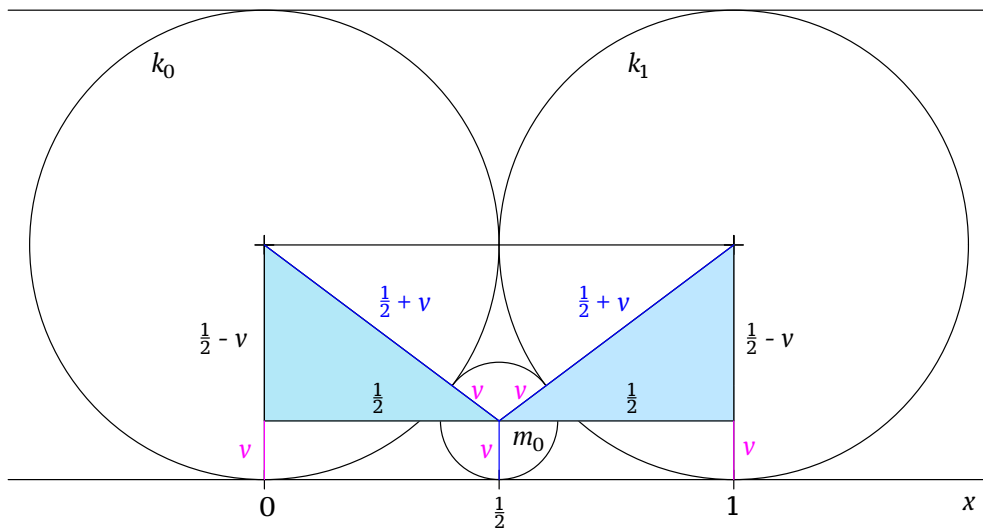
Zavedeme-li souřadnicový systém tak, že vodorovná přímka  $x$  je osou souřadnicového systému a osa  $y$  prochází číslem 0 a je kolmá na osu  $x$ , pak  $x$ -ové souřadnice všech středů Fordových kružnic jsou rovny  $x$ -ovým souřadnicím bodů dotyku těchto kružnic s osou  $x$ . Pro zavedení racionálních čísel je proto dostačující počítat souřadnice středů Fordových kružnic.

První, tj.  $x$ -ová souřadnice středu je libovolné číslo zapsané jako podíl dvou celých čísel  $a$  a  $b$ ,  $b \neq 0$ . Pro kružnice s dotykovými body 0, 1 je zřejmé, že druhá,  $y$ -ová souřadnice jejich středů musí být  $\frac{1}{2}$ . Souřadnice středů kruž-



nic  $k_0, k_1$  lze tedy obecně označit  $\left[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}\right]$ . Pro střed  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  kružnice  $k_0$  je  $a = 0, b = 1$  a pro střed  $\left[1, \frac{1}{2}\right]$  kružnice  $k_1$  je  $a = b = 1$ .

Je přirozené se ptát, zda je toto označení správné i pro středy zbývajících kružnic. Druhá souřadnice středu odpovídá poloměru dané kružnice, neboť se jedná o vzdálenost středu od osy  $x$ , která se kružnice dotýká. Středy kružnic  $k_0, k_1$  mají  $y$ -ové souřadnice rovné číslu  $\frac{1}{2}$ . Pro každou další kružnici musí platit, že její poloměr je ostře menší než číslo  $\frac{1}{2}$ . Lze tedy tvrdit, že  $y$ -ové souřadnice středů Fordových kružnic s body dotyku v intervalu  $(0, 1)$  jsou rovné  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{g}, g \geq 1$ .



Obrázek 3.4: Výpočet souřadnic středu kružnice  $m_0$

Podívejme se nyní na výpočet souřadnic středu kružnice  $m_0$  (viz obrázek [3.4](#)). Pro výpočet využijeme jeden ze světle modrých pravoúhlých trojúhelníků.

Poloměr kružnice  $m_0$  označme  $v$ . Pak délka přepony uvažovaného trojúhelníku je rovna  $\frac{1}{2} + v$  a odvěsny mají délky  $\frac{1}{2} - v, \frac{1}{2}$ . Pro takto sestrojený trojúhelník platí podle Pýthagorovy věty rovnost

$$\left(\frac{1}{2} + v\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - v\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

a tedy

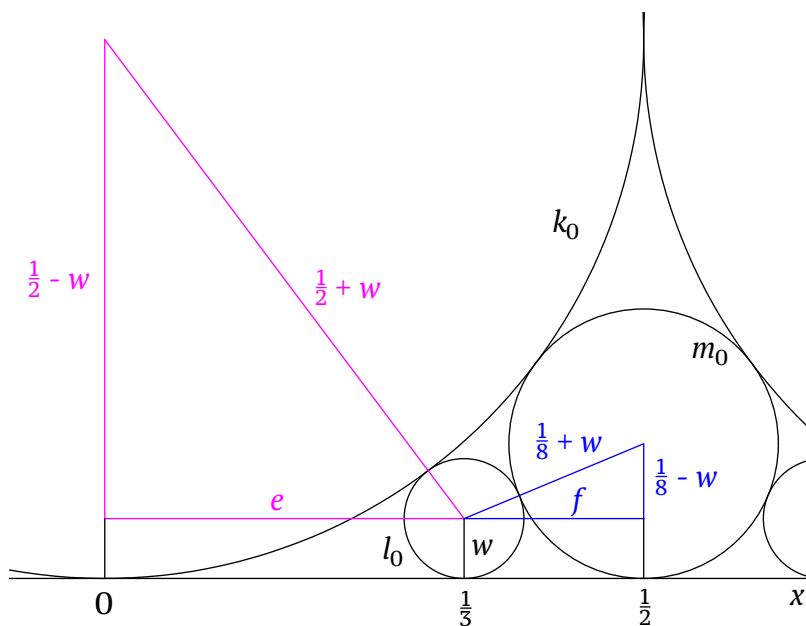
$$\frac{1}{4} + v + v^2 = \frac{1}{4} - v + v^2 + \frac{1}{4},$$

$$2v = \frac{1}{4},$$

$$v = \frac{1}{8}.$$

Souřadnice středu kružnice  $m_0$  jsou tedy  $[\frac{1}{2}; \frac{1}{8}]$ , což podporuje hypotézu, že souřadnice středů Fordových kružnic lze napsat ve tvaru  $[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}]$ . Pro kružnici  $m_0$  je  $a = 1$ ,  $b = 2$  (a  $g = 4$ ). Výpočty byly ovšem triviální, neboť kružnice  $k_0$ ,  $k_1$  jsou shodné.

Dále vypočítejme souřadnice středu kružnice  $l_0$  (viz obrázek 3.5). Výpočet je obdobný předchozímu s tím rozdílem, že využijeme dva odlišné pravoúhlé trojúhelníky. Poloměr kružnice  $l_0$  označme  $w$ . Délka přepony prvního trojúhelníku je rovna  $\frac{1}{2} + w$  a délka jedné jeho odvěsny je  $\frac{1}{2} - w$ . Délku druhé odvěsny označme  $e$ . Délka přepony druhého uvažovaného trojúhelníku je rovna  $\frac{1}{8} + w$  a délka jedné jeho odvěsny  $\frac{1}{8} - w$ . Délku druhé odvěsny označme  $f$ . Dále platí, že součet délek  $e$ ,  $f$  je roven  $\frac{1}{2}$ , a proto platí  $e = \frac{1}{2} - f$ . Získáváme tedy následující soustavu dvou rovnic:



Obrázek 3.5: Výpočet souřadnic středu kružnice  $l_0$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2} + w\right)^2 &= \left(\frac{1}{2} - w\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - f\right)^2, \\ \left(\frac{1}{8} + w\right)^2 &= \left(\frac{1}{8} - w\right)^2 + f^2.\end{aligned}$$

Postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} + w + w^2 &= \frac{1}{4} - w + w^2 + \frac{1}{4} - f + f^2, \\ \frac{1}{64} + \frac{1}{4}w + w^2 &= \frac{1}{64} - \frac{1}{4}w + w^2 + f^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2w &= \frac{1}{4} - f + f^2, \\ \frac{1}{2}w &= f^2,\end{aligned}$$

$$2w = \frac{1}{4} - f + f^2, \tag{3.1}$$

$$2w = 4f^2. \tag{3.2}$$

Dosazením vztahu (3.2) do rovnice (3.1) získáváme kvadratickou rovnici

$$4f^2 = \frac{1}{4} - f + f^2$$

neboli

$$3f^2 + f - \frac{1}{4} = 0,$$

jejímiž kořeny jsou čísla

$$f_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4}}}{6},$$

$$f_{1,2} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Získáváme sice dvě možná řešení kvadratické rovnice, avšak hodnotu  $-\frac{1}{2}$  nepřipouštíme, neboť délka úsečky nemůže být záporné číslo. Tudíž

$$f = \frac{1}{6}. \quad (3.3)$$

Tudíž se  $x$ -ové souřadnice středů kružnic  $l_0$  a  $m_0$  liší o hodnotu  $\frac{1}{6}$  a  $x$ -ová souřadnice kružnice  $l_0$  je  $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ .

Dosazením hodnoty (3.3) do rovnice (3.2) získáváme

$$2w = 4\left(\frac{1}{6}\right)^2,$$

a proto poloměr (a také  $y$ -ová souřadnice středu) kružnice  $l_0$  je

$$w = \frac{1}{18}.$$

Souřadnice středu kružnice  $l_0$  jsou tedy  $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{18}\right]$ . Rovněž pro kružnici  $l_0$  tudíž platí hypotéza, že její střed má souřadnice ve tvaru  $\left[\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}\right]$ . Pro tuto kružnici  $l_0$  je  $a = 1$ ,  $b = 3$  (a  $g = 9$ ).

Prozradme, že uvedená hypotéza je skutečně správná pro jakýkoliv střed Fordovy kružnice. To nám umožňuje studovat bod dotyku osy  $x$  a obecné Fordovy kružnice.

Pro středy  $F_1$  a  $F_2$  dvou libovolných dotýkajících se Fordových kružnic  $f_1$  a  $f_2$  označme

$$F_1 = \left[ \frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2} \right], \quad (3.4)$$

$$F_2 = \left[ \frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2} \right]. \quad (3.5)$$

Protože se kružnice  $f_1$ ,  $f_2$  dotýkají, je vzdálenost jejich středů rovna součtu velikostí jejich poloměrů (viz obrázek 3.6), a tedy platí:

$$\sqrt{\left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{2d^2} - \frac{1}{2b^2}\right)^2} = \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2d^2},$$

$$\left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{2d^2} - \frac{1}{2b^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2d^2}\right)^2,$$

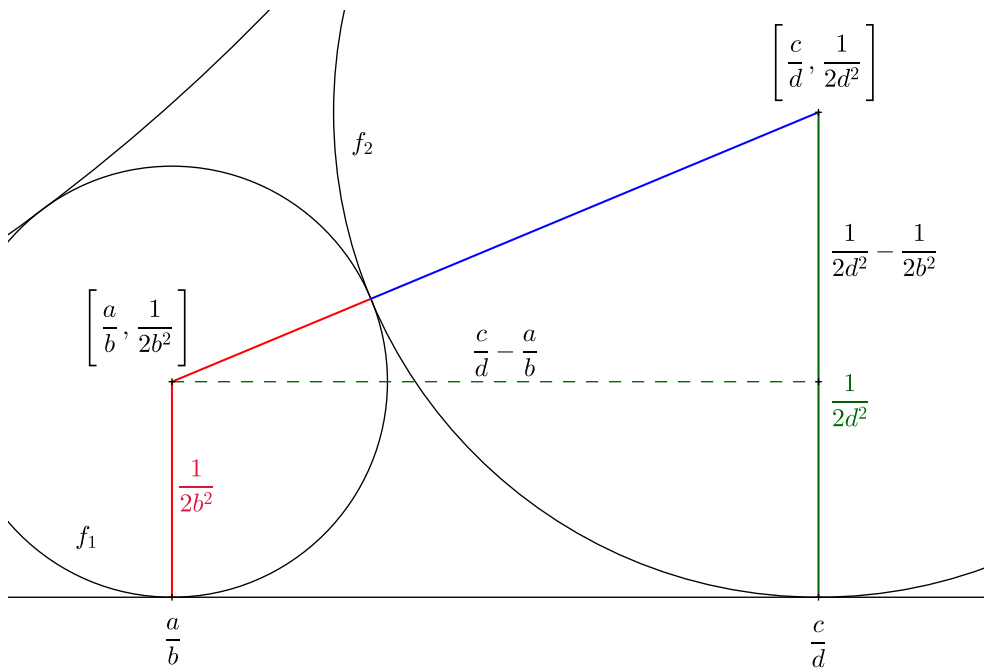
$$\left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right)^2 + \frac{1}{4d^4} - \frac{2}{4b^2d^2} + \frac{1}{4b^4} = \frac{1}{4b^4} + \frac{2}{4b^2d^2} + \frac{1}{4d^4},$$

$$\left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right)^2 = \frac{4}{4b^2d^2},$$

$$\frac{(bc - ad)^2}{d^2b^2} = \frac{1}{b^2d^2}.$$

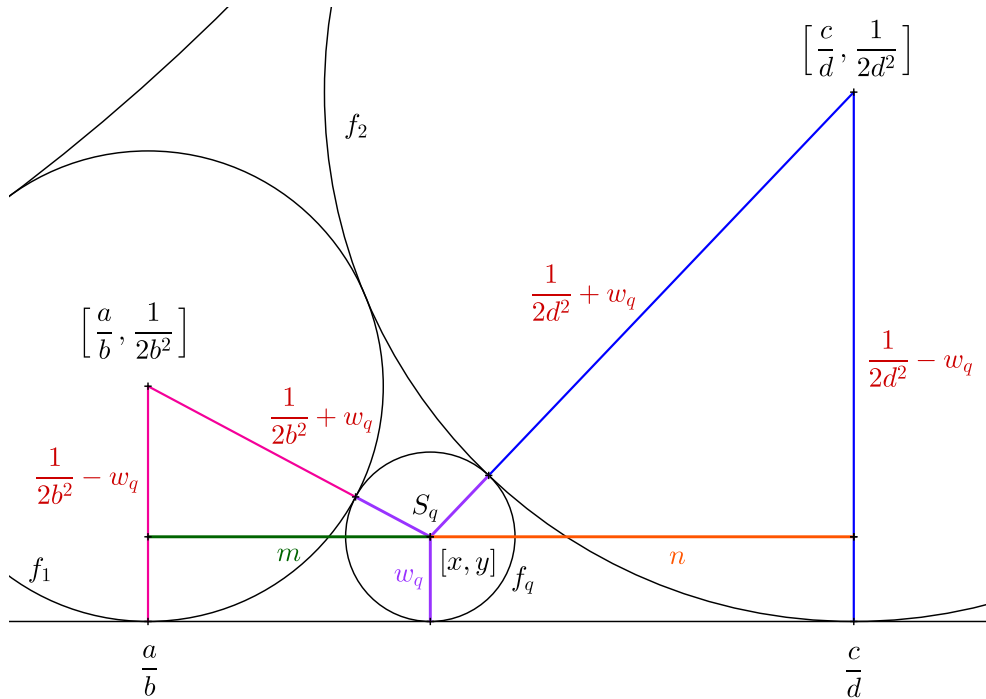
Pro  $x$ -ové souřadnice  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{c}{d}$  středů dvou dotýkajících se Fordových kružnic proto platí vztah

$$(bc - ad)^2 = 1. \quad (3.6)$$



Obrázek 3.6: Dotýkající se Fordovy kružnice

Označme  $[x, y]$  souřadnice středu  $S_q$  Fordovy kružnice  $f_q$  (viz obrázek [3.7](#)), která se dotýká dvou Fordových kružnic  $f_1, f_2$ .



Obrázek 3.7: Výpočet středu dotýkající se kružnice

Dále využijeme dvou pravoúhlých trojúhelníků (viz obrázek [3.7](#)), jejichž přepony jsou spojnice středů kružnic  $f_1$  a  $f_q$ , resp.  $f_2$  a  $f_q$  a jejichž odvěsny jsou buď rovnoběžné s osou  $x$ , nebo kolmé na osu  $x$ . Označme  $w_q$  poloměr kružnice  $f_q$ . Potom jsou délky přepon trojúhelníků rovny  $\frac{1}{2b^2} + w_q$  a  $\frac{1}{2d^2} + w_q$ , délka jedné odvěsny prvního z trojúhelníků je  $\frac{1}{2b^2} - w_q$  a délka jedné odvěsny druhého z trojúhelníků je  $\frac{1}{2d^2} - w_q$ . Délky zbývajících odvěsen označme  $m$  a  $n$ .

Podle Pýthagorovy věty platí vztahy

$$\left(\frac{1}{2b^2} + w_q\right)^2 = \left(\frac{1}{2b^2} - w_q\right)^2 + m^2, \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{1}{2d^2} + w_q\right)^2 = \left(\frac{1}{2d^2} - w_q\right)^2 + n^2, \quad (3.8)$$

přičemž pro souřadnice  $[x, y]$  středu  $S_q$  platí

$$x = \frac{a}{b} + m, \quad (3.9)$$

$$y = w_q. \quad (3.10)$$

Dále platí

$$m + n = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}. \quad (3.11)$$

Z rovnosti (3.9) vyjádříme délku  $m$ , kterou dosadíme do rovnosti (3.11), ze které vyjádříme délku  $n$ . Získáváme tedy vztahy

$$m = x - \frac{a}{b}, \quad (3.12)$$

$$n = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} - m,$$

$$n = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} - x + \frac{a}{b},$$

$$n = \frac{c}{d} - x. \quad (3.13)$$

Vztahy (3.12) a (3.13) následně, společně s rovností (3.10), dosadíme do vztahů (3.7), (3.8). Získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých  $x$ ,  $y$  a parametrech  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2b^2} + y\right)^2 &= \left(\frac{1}{2b^2} - y\right)^2 + \left(x - \frac{a}{b}\right)^2, \\ \left(\frac{1}{2d^2} + y\right)^2 &= \left(\frac{1}{2d^2} - y\right)^2 + \left(\frac{c}{d} - x\right)^2. \end{aligned}$$

Rovnice dále upravíme:

$$\frac{1}{4b^4} + \frac{2y}{2b^2} + y^2 = \frac{1}{4b^4} - \frac{2y}{2b^2} + y^2 + x^2 - \frac{2ax}{b} + \frac{a^2}{b^2},$$

$$\frac{1}{4d^4} + \frac{2y}{2d^2} + y^2 = \frac{1}{4d^4} - \frac{2y}{2d^2} + y^2 + x^2 - \frac{2cx}{d} + \frac{c^2}{d^2},$$

$$\frac{2y}{b^2} = x^2 - \frac{2ax}{b} + \frac{a^2}{b^2},$$

$$\frac{2y}{d^2} = x^2 - \frac{2cx}{d} + \frac{c^2}{d^2},$$

$$2y = x^2b^2 - 2abx + a^2,$$

$$2y = x^2d^2 - 2cdx + c^2,$$

$$2y = (xb - a)^2, \quad (3.14)$$

$$2y = (xd - c)^2. \quad (3.15)$$

Odečtením druhé rovnice od první a následnými úpravami dostáváme rovnici

$$(xb - a)^2 - (xd - c)^2 = 0,$$

$$\left[ (xb - a) - (xd - c) \right] \cdot \left[ (xb - a) + (xd - c) \right] = 0,$$

$$(xb - a - xd + c) \cdot (xb - a + xd - c) = 0.$$

Levá strana rovnice je rovna 0, pokud

$$xb - a - xd + c = 0$$

nebo

$$xb - a + xd - c = 0.$$

Tedy pokud

$$x = \frac{a - c}{b - d}$$

nebo

$$x = \frac{a + c}{b + d}.$$

Pro  $x$ -ovou souřadnici středu kružnice  $f_q$  tudíž získáváme dvě možná řešení

$$x_1 = \frac{a - c}{b - d}, \quad x_2 = \frac{a + c}{b + d}.$$

Dosadíme  $x_1$  do rovnice (3.14) (případně do rovnice (3.15)) a dostaneme

$$2y_1 = \left( \frac{a - c}{b - d} \cdot b - a \right)^2,$$



$$\begin{aligned}
2y_1 &= \left( \frac{ab - bc - a(b - d)}{b - d} \right)^2, \\
2y_1 &= \left( \frac{ad - bc}{b - d} \right)^2, \\
y_1 &= \frac{(ad - bc)^2}{2(b - d)^2}. \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Dosazením  $x_2$  do rovnice (3.14) (případně (3.15)) a analogickými úpravami máme

$$y_2 = \frac{(bc - ad)^2}{2(b + d)^2}. \tag{3.17}$$

Dosazením rovnosti (3.6) do vztahů (3.16), (3.17) získáváme

$$y_1 = \frac{1}{2(b - d)^2}, \quad y_2 = \frac{1}{2(b + d)^2}.$$

Pro souřadnice středu  $S_q$  kružnice  $f_q$  tedy máme dvě řešení

$$\begin{aligned}
S_{q1} &= \left[ \frac{a - c}{b - d}, \frac{1}{2(b - d)^2} \right], \\
S_{q2} &= \left[ \frac{a + c}{b + d}, \frac{1}{2(b + d)^2} \right],
\end{aligned}$$

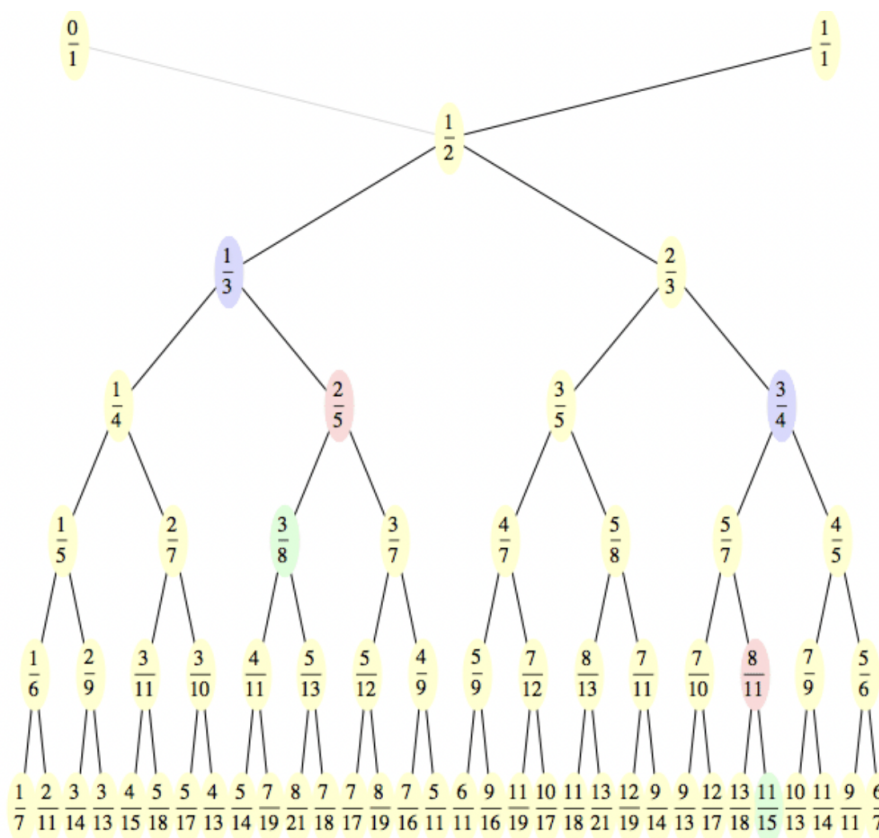
ale pouze souřadnice středu  $S_{q2}$  odpovídají kružnici, která má menší poloměr než každá z výchozích Fordových kružnic  $f_1, f_2$ , tj. vznikla při postupném vepisování Fordových kružnic později než kružnice  $f_1, f_2$ . (Bod  $S_{q1}$  je také středem Fordovy kružnice dotýkající se kružnic  $f_1, f_2$ , avšak má větší poloměr než alespoň jedna z nich, tj. je při postupném vepisování Fordových kružnic jakýmsi předchůdcem jedné z nich.)

Dospěli jsme tedy k překvapivému a působivému poznatku. Jsou-li  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  racionální čísla, která odpovídají bodům dotyku osy  $x$  a dvou navzájem se dotýkajících Fordových kružnic  $f_1, f_2$ , je čísel, resp. jmenovatel nově zkonstruovaného racionálního čísla  $\frac{a+c}{b+d}$ , které odpovídá bodu dotyku osy  $x$  a Fordovy kružnice  $f_q$  dotýkající se kružnic  $f_1, f_2$ , roven součtu čísel  $a, c$ , resp. součtu jmenovatelů  $b, d$  racionálních čísel  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ .

Sledujme toto pravidlo na obrázku 3.3. Například kružnice  $l_0$  se dotýká kružnic  $k_0, m_0$  s body dotyku  $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}$ , proto se osy  $x$  dotýká v bodě  $\frac{0+1}{1+2} = \frac{1}{3}$ . Zelená kružnice, která se dotýká kružnic  $l_0, m_0$  s odpovídajícími body dotyku  $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ , se osy  $x$  dotýká v bodě  $\frac{1+1}{3+2} = \frac{2}{5}$  atd.

### 3.2.2 Stern-Brocotův strom

Postupným vepisováním kružnic získáváme kružnice s čím dál menším poloměrem a obrázek zachycující kružnice s relativně malými poloměry spolu s jejich body dotyku s osou  $x$  je nenázorný.



Obrázek 3.8: Stern-Brocotův strom

Z tohoto důvodu se nyní podíváme na tzv. *Stern-Brocotův strom*, který je zobrazen na obrázku 3.8<sup>1</sup> a který je schematickým diagramem znázorňujícím

<sup>1</sup>Obrázek je přejat z internetové stránky <https://www.matfyz.cz/clanky/matykani-ix-maji-zlomky-rodice>

postupně vznikající racionální čísla neboli  $x$ -ové souřadnice dotykových bodů Fordových kružnic a osy  $x$  na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ .

V první horizontální linii Stern-Brocotova stromu jsou čísla  $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$  odpovídající výchozím Fordovým kružnicím  $k_0, k_1$  (viz obrázek [3.3](#)). Ve druhé linii je jediné racionální číslo  $\frac{1}{2} = \frac{0+1}{1+1}$  příslušející jediné Fordově kružnici  $m_0$ , která se dotýká kružnic  $k_0, k_1$ . Po sestrojení kružnice  $m_0$  vzniknou dvě oblasti, do nichž se vepíše další dvě Fordovy kružnice. Ve třetí linii jsou proto dvě racionální čísla  $\frac{1}{3} = \frac{0+1}{1+2}$  a  $\frac{2}{3} = \frac{1+1}{2+1}$  příslušející Fordovým kružnicím  $l_0, l'_0$ , které se dotýkají dvou dvojic kružnic:  $k_0$  a  $m_0$ ,  $m_0$  a  $k_1$ . Po vepsání kružnic  $l_0, l'_0$  vzniknou čtyři oblasti a každé z nich se opět vepíše další kružnice. V další linii Stern-Brocotova stromu je tudíž čtveřice racionálních čísel  $\frac{1}{4} = \frac{0+1}{1+3}$ ,  $\frac{2}{5} = \frac{1+1}{3+2}$ ,  $\frac{3}{5} = \frac{1+2}{2+3}$  a  $\frac{3}{4} = \frac{2+1}{3+1}$ , která odpovídá čtyřem Fordovým kružnicím, které se dotýkají čtyř dvojic Fordových kružnic:  $k_0$  a  $l_0$ ,  $l_0$  a  $m_0$ ,  $m_0$  a  $l'_0$ ,  $l'_0$  a  $k_1$ .

Obecně je v  $n$ -té linii,  $n \geq 2$ , Stern-Brocotova stromu právě  $2^{n-2}$  racionálních čísel. S výjimkou čísel v prvních dvou liniích stromu je každé racionální číslo  $r$  odpovídající Fordově kružnici  $f_r$  spojené úsečkou s jedním číslem z předchozí linie stromu. Jedná se o číslo odpovídající jedné z dvojice Fordových kružnic, která byla při postupné vepisování kružnic sestrojena v kroku předcházejícím konstrukci kružnice  $f_r$ .

## 4. Motýl vepsaný kružnici

Ve čtvrté kapitole se podíváme na další zajímavou vlastnost kružnice, která se týká jejích tětiv, a to – v českém překladu – na tzv. *Větu o motýlovi*. Název věty se zrodil na základě útvaru vzniklého ve vnitřní oblasti kružnice, jenž svým tvarem motýla připomíná.

Tato kapitola je zpracována na základě textů [2], [5], [13], [23], [25].

Existuje více syntetických důkazů *Věty o motýlovi*, my se nyní zaměříme pouze na některé z nich. Pro důkazy budeme potřebovat pojem *tětivový čtyřúhelník*<sup>[1]</sup>. Připomeňme, že čtyřúhelník  $ABCD$  je tětivový právě tehdy, když:

- Existuje kružnice tomuto čtyřúhelníku opsaná.
- Součet velikostí protějších vnitřních úhlů čtyřúhelníku  $ABCD$  je roven  $180^\circ$ .
- Jedna ze stran čtyřúhelníku  $ABCD$  je ze dvou jeho vrcholů, které nejsou krajními body uvažované strany, vidět pod stejným úhlem.

Dále využijeme i Cèvovu větu, který byla zformulována a dokázána ve druhé kapitole. Zopakujeme, že pro daný trojúhelník  $ABC$  a body  $D, E, F$ , které leží na stranách daného trojúhelníku tak, že  $D$  je vnitřním bodem strany  $BC$ ,  $E$  je vnitřním bodem strany  $AC$  a  $F$  je vnitřním bodem strany  $AB$ , platí, že přímky  $AD, BE, CF$  se protínají v jediném bodě právě tehdy, když

$$|AF| \cdot |BD| \cdot |CE| = |FB| \cdot |DC| \cdot |EA|,$$

tj. když

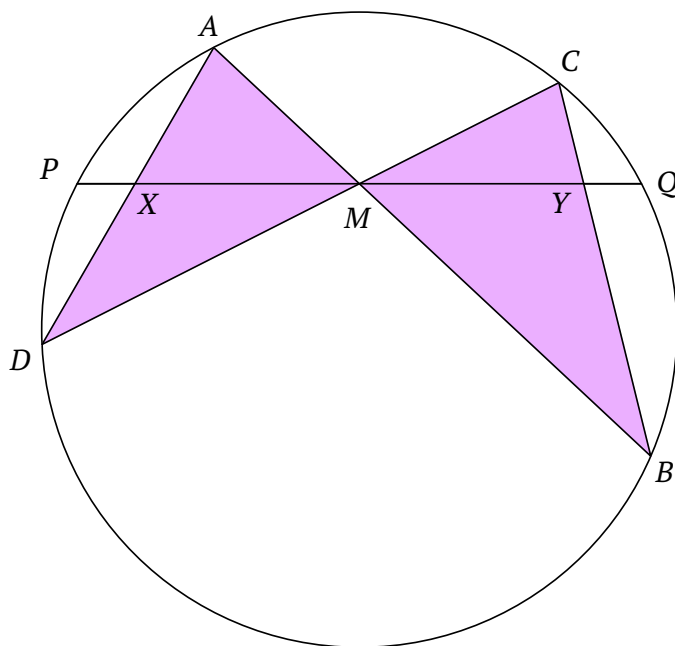
$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1. \quad (4.1)$$

### 4.1 Formulace věty a příslušné značení

**Věta 9** (Věta o motýlovi). *Mějme danou kružnici  $k$  a dva různé body  $P, Q$ , které na ní leží (viz obrázek 4.1). Sestrojme střed  $M$  úsečky  $PQ$  a dále dvě libovolné, navzájem různé sečny kružnice procházející bodem  $M$  tak, aby nebyly incidentní s přímkou  $PQ$ . Průsečíky jedné z těchto sečen s kružnicí  $k$  označme  $A, B$ , průsečíky druhé sečny s kružnicí  $k$  označme  $C, D$ . Body  $A, C$  přitom*

<sup>1</sup>Více informací o tětivovém čtyřúhelníku viz např. [15].

leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou  $PQ$ . Označíme-li  $X$ , resp.  $Y$  průsečík úsečky  $AD$ , resp.  $CB$  s úsečkou  $PQ$ , pak je bod  $M$  též středem úsečky  $XY$ , tj.  $|XM| = |MY|$ .



Obrázek 4.1: Ilustrace Věty 9

## 4.2 První důkaz Věty o motýlovi

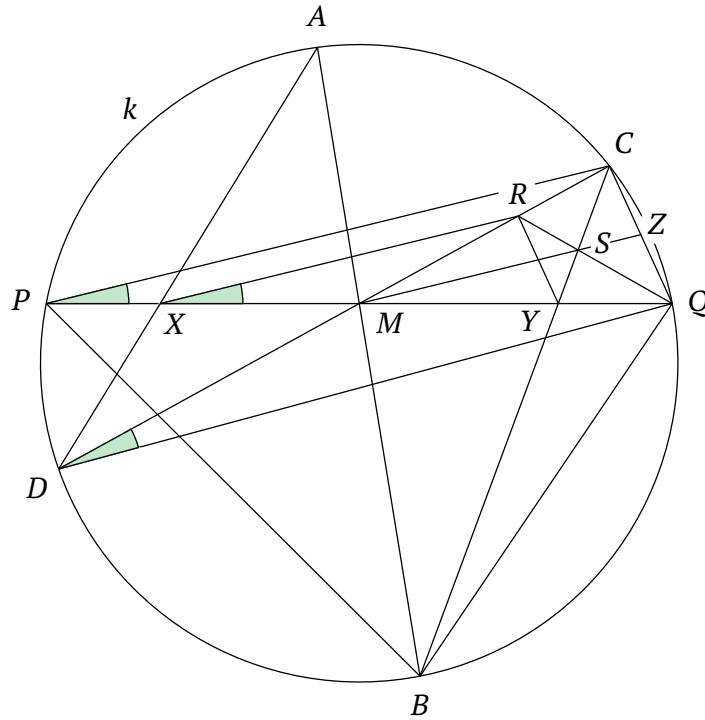
*Důkaz.* Bodem  $X$  vedeme rovnoběžku s úsečkou  $PC$  (viz obrázek 4.2). Průsečík této rovnoběžky s úsečkou  $CD$  označme  $R$  a dále průsečík úseček  $CB$ ,  $RQ$  označme  $S$ . Následující rovnosti jsou zřejmé:

$$|\sphericalangle RXQ| = |\sphericalangle CPQ|, \quad (4.2)$$

$$|\sphericalangle CDQ| = |\sphericalangle RDQ|. \quad (4.3)$$

Úhly  $CPQ$  a  $CDQ$  jsou shodné, neboť jsou obvodovými úhly příslušnými témuž kružnicovému oblouku  $CQ$ , a tedy z rovností (4.2), (4.3) získáváme

$$|\sphericalangle RXQ| = |\sphericalangle RDQ|. \quad (4.4)$$



Obrázek 4.2: Ilustrace první části prvního důkazu Věty 9

Z rovnosti (4.4) vyplývá, že čtyřúhelník  $DQRX$  je tětiový, a lze mu tedy opsat kružnici  $m$  (viz obrázek 4.3). Z vlastností obvodových úhlů a triviálních geometrických vlastností dále získáváme

$$|\sphericalangle SQM| = |\sphericalangle RQX| = |\sphericalangle RDX| = |\sphericalangle CDA| = |\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle SBM|.$$

Čtyřúhelník  $BQSM$  je proto též tětiový a lze mu opsat kružnici  $l$ . Tudíž

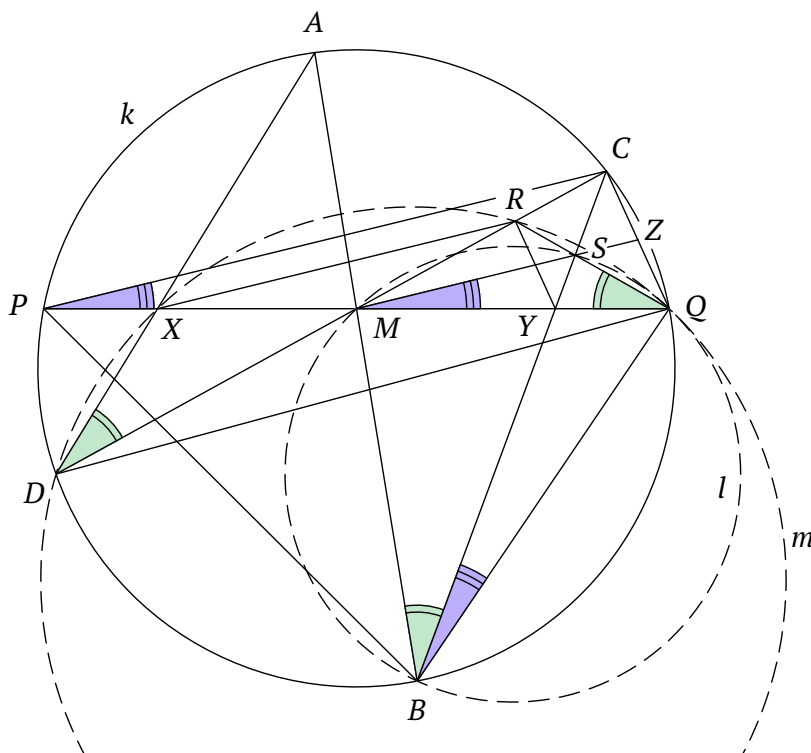
$$|\sphericalangle SMQ| = |\sphericalangle SBQ|.$$

Dále je zřejmé, že

$$|\sphericalangle SBQ| = |\sphericalangle CBQ| = |\sphericalangle CPQ|,$$

neboť  $CBQ$  a  $CPQ$  jsou obvodové úhly příslušné témuž kružnicovému oblouku  $CQ$ .

Platí tedy  $|\sphericalangle SMQ| = |\sphericalangle CPQ|$ , z čehož plyne, že úsečka  $PC$  je rovnoběžná s úsečkou  $MS$ . Úsečka  $MZ$ , kde  $Z$  je průsečík přímek  $MS$  a  $CQ$ , je proto střední příčkou trojúhelníku  $PQC$ .



Obrázek 4.3: Ilustrace druhé části prvního důkazu Věty 9

Bodem  $S$  procházejí úsečky  $QR$ ,  $CY$  a  $MZ$ , proto lze pro trojúhelník  $MQC$  vyjádřit rovnosti analogické vztahům (4.1):

$$\frac{|MY|}{|YQ|} \cdot \frac{|QZ|}{|ZC|} \cdot \frac{|CR|}{|RM|} = 1. \quad (4.5)$$

Z vlastností středních příček dále plyne

$$\frac{|QZ|}{|ZC|} = 1. \quad (4.6)$$

Dosazením rovnosti (4.6) do rovnosti (4.5) získáváme

$$\frac{|MY|}{|YQ|} \cdot \frac{|CR|}{|RM|} = 1.$$

Tudíž

$$\frac{|MY|}{|MR|} = \frac{|YQ|}{|RC|}$$

a trojúhelníky  $MYR$ ,  $MQC$  jsou podobné. Z toho plyne, že rovněž

$$\frac{|MQ|}{|MY|} = \frac{|MC|}{|MR|}. \quad (4.7)$$

Z podobnosti trojúhelníků  $PMC$  a  $XMR$  dostáváme

$$\frac{|MC|}{|MR|} = \frac{|MP|}{|MX|}. \quad (4.8)$$

Ze vztahů (4.7), (4.8) získáváme rovnost

$$\frac{|MQ|}{|MY|} = \frac{|MP|}{|MX|}.$$

Protože  $|MP| = |MQ|$ , platí  $|MY| = |MX|$ , tj. bod  $M$  je skutečně středem úsečky  $XY$ .  $\square$

### 4.3 Druhý důkaz Věty o motýlovi

*Důkaz.* Bodem  $Y$  vedme rovnoběžku s přímkou  $AD$  a její průsečíky s přímkami  $MC$  a  $MB$  označme po řadě  $F$  a  $E$  (viz obrázek 4.4). Z rovnoběžnosti přímek  $AD$ ,  $EF$  vyplývá shodnost úhlů  $CFE$  a  $CDA$ . Úhly  $CDA$  a  $CBA$  jsou též shodné, neboť jsou to obvodové úhly příslušné témuž kružnicovému oblouku  $AC$ . Tedy i úhly  $CFE$  a  $CBE$  jsou shodné, a proto body  $F$ ,  $C$ ,  $E$ ,  $B$  leží na jedné kružnici, kterou budeme značit  $l$ . Protože jsou úhly  $EYB$ ,  $CYF$  vrcholové, jsou shodné. Trojúhelníky  $EBY$ ,  $CFY$  jsou tudíž podobné, a proto

$$\frac{|EY|}{|BY|} = \frac{|CY|}{|FY|}.$$

Odtud plyne

$$|EY| \cdot |FY| = |BY| \cdot |CY|. \quad (4.9)$$

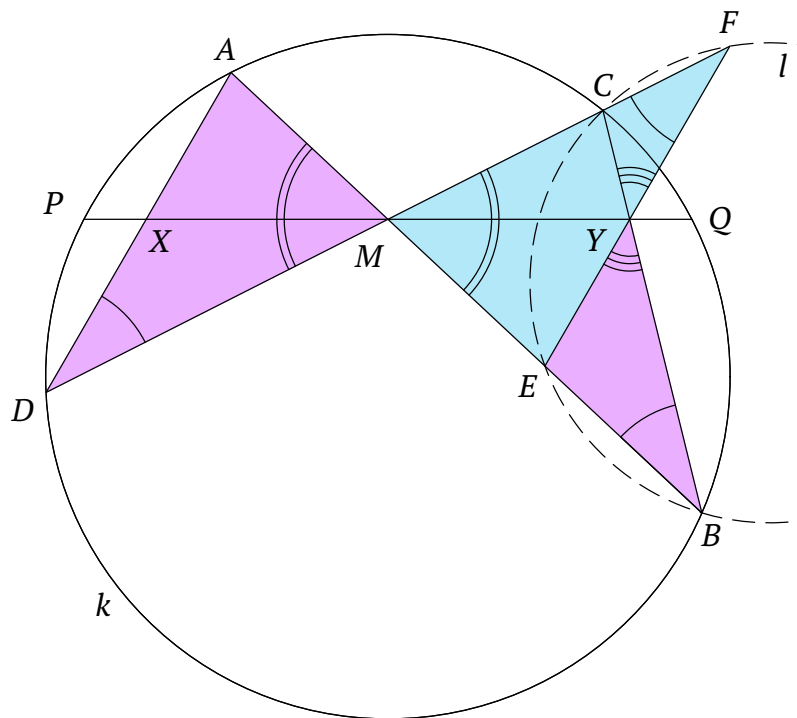
Vztah platí obecně pro libovolnou kružnici a její tětivy  $EF$ ,  $BC$  protínající se v bodě  $Y$ . Tuto vlastnost tětiv použijeme v důkazu i dále. $\square$

Trojúhelníky  $MAD$  a  $MEF$  jsou podobné, neboť vrcholové úhly  $DMA$  a  $FME$  jsou shodné. Strany  $AD$  a  $EF$  uvedených trojúhelníků jsou body  $X$

---

<sup>2</sup>Vztah zůstává v platnosti i v případě, že se sečny  $EF$ ,  $BC$  protínají v bodě  $Y$ , který leží ve vnější oblasti kružnice. Konstantní součin  $|EY| \cdot |FY| = |BY| \cdot |CY|$  úseků na tětivách (sečnách) je roven tzv. *mocnosti bodu  $Y$  ke kružnici*.





Obrázek 4.4: Ilustrace druhého důkazu Věty 9

a  $Y$  rozděleny ve stejném poměru. Proto jsou podobné i trojúhelníky  $MAX$  a  $MEY$  a také trojúhelníky  $MXD$  a  $MYF$ . Získáváme tedy vztahy

$$\frac{|XM|}{|AX|} = \frac{|YM|}{|EY|},$$

$$\frac{|XM|}{|DX|} = \frac{|YM|}{|FY|},$$

a tudíž

$$\frac{|XM|^2}{|AX| \cdot |DX|} = \frac{|YM|^2}{|EY| \cdot |FY|}. \quad (4.10)$$

Z vlastností dvojic tětiv  $BC$ ,  $PQ$ , resp.  $AD$ ,  $PQ$  kružnice  $k$  procházející týmž bodem  $Y$ , resp.  $X$  dále vyplývá, že

$$|BY| \cdot |CY| = |PY| \cdot |QY|, \quad (4.11)$$

$$|AX| \cdot |DX| = |PX| \cdot |QX|. \quad (4.12)$$

Z rovností (4.9) a (4.11) plyne

$$|EY| \cdot |YF| = |PY| \cdot |YQ|. \quad (4.13)$$

Dosazením vztahů (4.12), (4.13) do rovnosti (4.10) dostáváme rovnost

$$\frac{|XM|^2}{|PX| \cdot |QX|} = \frac{|YM|^2}{|PY| \cdot |YQ|},$$

kterou dále upravíme:

$$|XM|^2 \cdot |PY| \cdot |YQ| = |YM|^2 \cdot |PX| \cdot |QX|,$$

$$|XM|^2 \cdot |YM|^2 + |XM|^2 \cdot |PY| \cdot |YQ| = |XM|^2 \cdot |YM|^2 + |YM|^2 \cdot |PX| \cdot |QX|,$$

$$|XM|^2 \cdot (|YM|^2 + |PY| \cdot |YQ|) = |YM|^2 \cdot (|XM|^2 + |PX| \cdot |QX|),$$

$$\frac{|XM|^2}{|XM|^2 + |PX| \cdot |QX|} = \frac{|YM|^2}{|YM|^2 + |PY| \cdot |YQ|}. \quad (4.14)$$

Z obrázku 4.4 je zřejmá platnost vztahu

$$|PX| + |XM| = |PM|. \quad (4.15)$$

Protože  $|PM| = |MQ|$ , platí zároveň

$$|PX|^2 + |PX| \cdot |XM| = |PX| \cdot |MQ|.$$

Úpravami získáváme

$$|PX|^2 + 2|PX| \cdot |XM| = |PX| \cdot |MQ| + |PX| \cdot |XM|,$$

$$|PX|^2 + 2|PX| \cdot |XM| = |PX| \cdot (|MQ| + |XM|),$$

$$|PX|^2 + 2|PX| \cdot |XM| = |PX| \cdot |QX|. \quad (4.16)$$

Dále umocněním obou stran rovnosti (4.15) dostáváme

$$|PM|^2 = (|PX| + |XM|)^2,$$

$$|PM|^2 = |PX|^2 + 2|PX| \cdot |XM| + |XM|^2,$$

$$|PX|^2 + 2|PX| \cdot |XM| = |PM|^2 - |XM|^2. \quad (4.17)$$

Ze vztahů (4.16) a (4.17) vyplývá rovnost

$$|PM|^2 - |XM|^2 = |PX| \cdot |QX|$$

a následně

$$|PM|^2 = |XM|^2 + |PX| \cdot |QX|. \quad (4.18)$$

Analogickým způsobem lze získat vztah

$$|QM|^2 = |YM|^2 + |PY| \cdot |YQ|. \quad (4.19)$$

Dosazením vztahů (4.18), (4.19) do rovnosti (4.14) dostáváme

$$\frac{|XM|^2}{|PM|^2} = \frac{|YM|^2}{|QM|^2}.$$

Délky úseček jsou pouze nezáporná čísla, rovnost proto můžeme přepsat bez druhých mocnin:

$$\frac{|XM|}{|PM|} = \frac{|YM|}{|QM|}.$$

Je tedy zřejmé, že úsečka  $PM$  je bodem  $X$  rozdělena ve stejném poměru jako úsečka  $QM$  bodem  $Y$ , a tedy také platí

$$\frac{|XM|}{|YM|} = \frac{|PM|}{|QM|}.$$

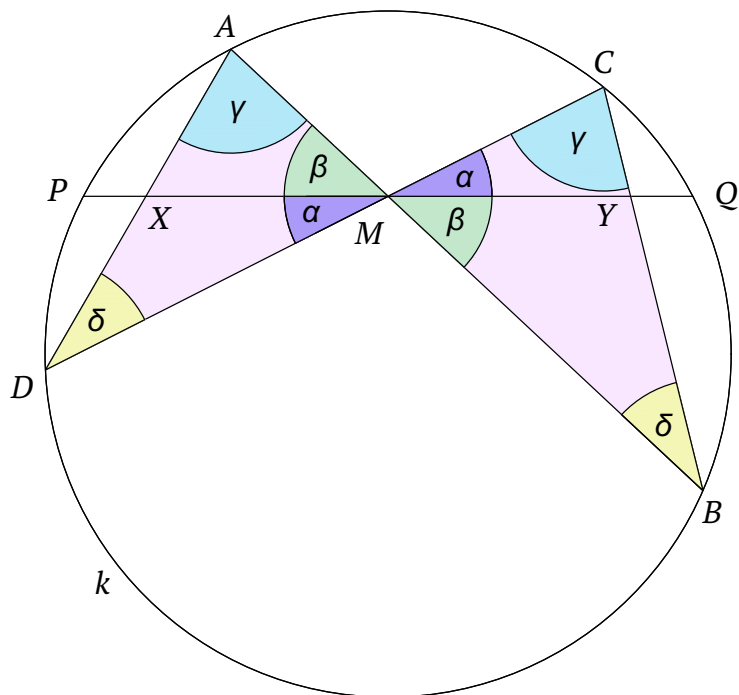
Protože jsou stejně dlouhé úsečky  $PM$  a  $QM$ , jsou stejně dlouhé i úsečky  $XM$  a  $MY$ . Bod  $M$  je tudíž středem úsečky  $XY$ .  $\square$

## 4.4 Třetí důkaz Věty o motýlovi

*Důkaz.* Ověření věty je založeno na vlastnostech vnitřních úhlů trojúhelníků. Pro zjednodušení zápisu nejprve označíme velikosti vnitřních úhlů jistých trojúhelníků následujícím způsobem (viz obrázek 4.5):

$$\alpha = |\sphericalangle XMD|,$$

$$\beta = |\sphericalangle AMX|,$$



Obrázek 4.5: Ilustrace třetího důkazu Věty 9

$$\gamma = |\sphericalangle DAM|,$$

$$\delta = |\sphericalangle MDX|.$$

Vzhledem k vlastnostem vrcholových a obvodových úhlů je současně

$$\alpha = |\sphericalangle YMC|,$$

$$\beta = |\sphericalangle BMY|,$$

$$\gamma = |\sphericalangle MCB|,$$

$$\delta = |\sphericalangle YBM|.$$

Označme  $a = |PM| = |MQ|$  a uvědomme si, že velikost  $\delta$  vnitřního úhlu trojúhelníku  $DMA$  je  $180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)$ .

Pomocí sinové věty pro trojúhelník  $DMX$  získáme vztah

$$\frac{|DX|}{\sin \alpha} = \frac{|XM|}{\sin \delta}$$

a následně vyjádříme délku úsečky  $DX$ :

$$|DX| = \frac{|XM| \cdot \sin \alpha}{\sin \delta} = \frac{|XM| \cdot \sin \alpha}{\sin(180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma))} = \frac{|XM| \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}. \quad (4.20)$$

Využitím téže věty pro trojúhelník  $AXM$  dostáváme vztah

$$\frac{|AX|}{\sin \beta} = \frac{|XM|}{\sin \gamma},$$

tj.

$$|AX| = \frac{|XM| \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}. \quad (4.21)$$

Z vlastností tětiv  $PQ$ ,  $AD$  kružnice  $k$  protínajících se v bodě  $X$  získáme rovnost

$$|AX| \cdot |DX| = |PX| \cdot |XQ| = (a - |XM|) \cdot (a + |XM|) = a^2 - |XM|^2,$$

a tudíž

$$|AX| \cdot |DX| = a^2 - |XM|^2. \quad (4.22)$$

Dosazením za  $|AX|$ ,  $|DX|$  ze vztahů (4.20), (4.21) do rovnosti (4.22) dostáváme vztah

$$\frac{|XM| \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} \cdot \frac{|XM| \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)} = a^2 - |XM|^2,$$

$$|XM|^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta = (a^2 - |XM|^2) \cdot \sin \gamma \cdot \sin(\alpha + \beta + \gamma),$$

$$|XM|^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta = a^2 \cdot \sin \gamma \cdot \sin(\alpha + \beta + \gamma) - |XM|^2 \cdot \sin \gamma \cdot \sin(\alpha + \beta + \gamma),$$

$$|XM|^2(\sin \alpha \cdot \sin \beta + \sin \gamma \cdot \sin(\alpha + \beta + \gamma)) = a^2 \cdot \sin \gamma \cdot \sin(\alpha + \beta + \gamma),$$

$$|XM|^2 = \frac{a^2 \cdot \sin \gamma \cdot \sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta + \sin \gamma \cdot \sin(\alpha + \beta + \gamma)}.$$

Pomocí sinové věty pro trojúhelníky  $BM Y$ ,  $CY M$  a využitím vlastností tětiv  $PQ$ ,  $CB$  protínajících se v bodě  $Y$  získáme analogickými úpravami vztah

$$|YM|^2 = \frac{a^2 \cdot \sin \gamma \cdot \sin (\alpha + \beta + \gamma)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta + \sin \gamma \cdot \sin (\alpha + \beta + \gamma)}.$$

Tedy  $|XM|^2 = |YM|^2$  a protože  $|XM|$ ,  $|YM|$  jsou čísla kladná, je rovněž  $|XM| = |YM|$ . Bod  $M$  je tedy středem úsečky  $XY$ .

□

## 5. Malfattiho kruhy

Poslední kapitola čtenáře seznamuje se snahami vyřešit tzv. *Malfattiho problém*, který se týká tří kruhů jistých vlastností umístěných do daného trojúhelníku. Giovanni Francesco Malfatti problém předložil roku 1803 v textu [17]. Navrhl rovněž řešení, které nazýváme *Malfattiho kruhy* a o němž však dnes víme, že není správné, neboť nesplňuje požadavek kladený na tři vepsané kruhy. V následujícím textu představíme toto Malfattiho řešení a zaměříme se na speciální případ, v němž je daný trojúhelník rovnostranný. Ukážeme ale i jiný přístup k řešení Malfattiho problému. Dále Malfattiho kruhy zkonstruujeme a představíme řešení úlohy, která se jich týká a lze ji zadat v hodinách středoškolské matematiky.

Kapitola je zpracována na základě textů [3], [7], [16], [17], [21], [26].

### 5.1 Giovanni Malfatti a jeho přístup

*Giovanni Francesco Malfatti* (1731–1807), též známý jako *Gian Francesco Malfatti* nebo také *Gianfrancesco Malfatti*, byl italský matematik, který se na počátku 19. století pokoušel o minimalizaci odpadu při tesání mramorových sloupů. Konkrétně uvažoval mramorový trojboký kolmý hranol, z nějž měly být vytvořeny tři válcové sloupy, jejichž osy jsou rovnoběžné s hranami hranolu. Tyto sloupy měly mít co největší součet objemů, tj. odpad po tesání měl být co nejmenší.

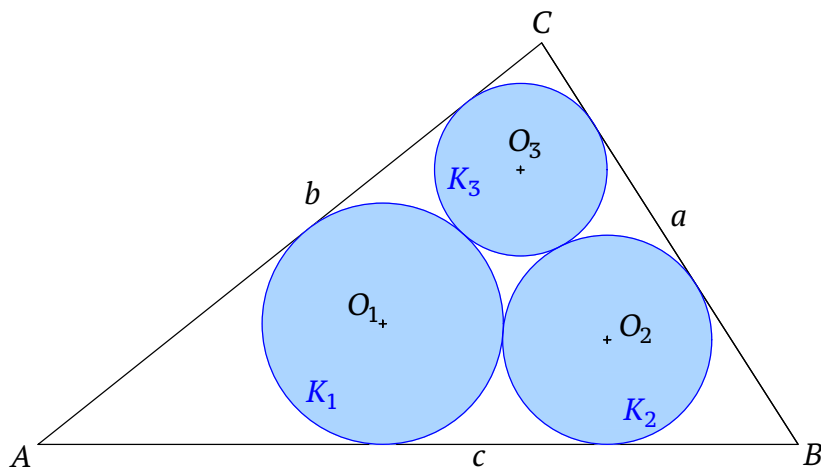
Představíme-li si podstavu tohoto hranolu a též podstavy jednotlivých sloupů, získáváme trojúhelník a tři kruhy (viz obrázek 5.1). Problém se tedy transformuje v otázku, jak do daného trojúhelníku umístit tři kruhy, aby součet jejich obsahů byl co největší. Gian Francesco Malfatti se domníval, že kruhové podstavy těchto sloupů je nutné umístit tak, aby se každá z nich dotýkala zbývajících dvou podstav a dále dvou stran uvažovaného trojúhelníku. Tato hypotéza se však později ukázala jako nesprávná.

Ve snaze zjistit, které řešení je tím ideálním, tj. při které konstrukci vzniknou kruhy s největším součtem obsahů (a tedy i součtem poloměrů), vznikl geometrický problém dnes známý jako *Malfattiho problém*.

**Definice 3.** *Nechť je dán trojúhelník  $ABC$  (viz obrázek 5.1). Kruhy  $K_i$ , kde  $i = 1, 2, 3$ , nazýváme **Malfattiho kruhy**, pokud se každý z nich dotýká zbývajících dvou kruhů a zároveň dvou stran daného trojúhelníku.*

Strany trojúhelníku  $ABC$  budeme v této kapitole dále značit obvyklým

způsobem  $a$ ,  $b$ ,  $c$  a středy kruhů po řadě  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  (viz obrázek 5.1).



Obrázek 5.1: Malfattiho kruhy

## 5.2 Kruhy v rovnostranném trojúhelníku

Pro jednoduchost nejprve studujeme speciální případ kruhů, a to kruhů umístěných do rovnostranného trojúhelníku. Vypočítáme, jak velkou část plochy rovnostranného trojúhelníku vyplní Malfattiho kruhy, a poté totéž uděláme pro jiný přístup k řešení Malfattiho problému, v němž kruhy nejsou Malfattiho.

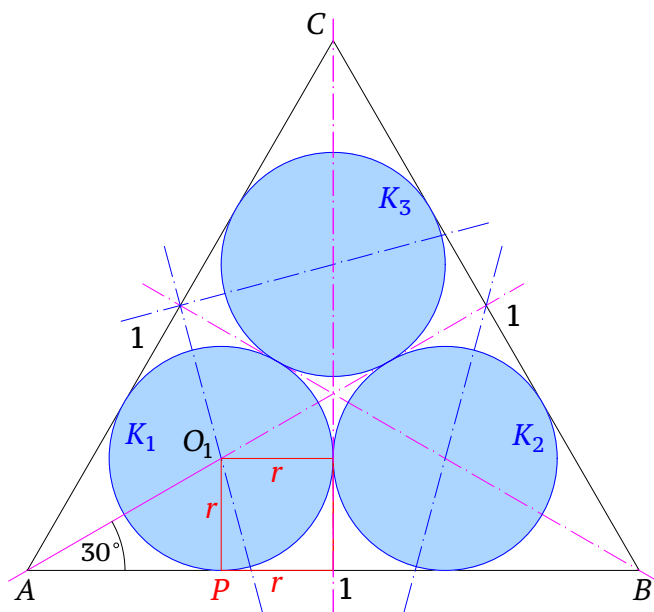
Uvažujme tedy, že je dán rovnostranný trojúhelník  $ABC$ . Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že délka jeho strany je rovna jednotce  $j$ . Obsah kruhu  $K_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , označme  $S_i$ .

### 5.2.1 Malfattiho řešení

Malfattiho kruhy  $K_1, K_2, K_3$  pro rovnostranný trojúhelník jsou zřejmě navzájem shodné (viz obrázek 5.2).

Vypočítejme obsah jednoho Malfattiho kruhu, jehož poloměr označme  $r$ . Dále označme  $P$  patu kolmice vedené středem  $O_1$  kruhu  $K_1$  na stranu trojúhelníku  $AB$ . Získáváme pravoúhlý trojúhelník  $APO_1$  s vnitřním úhlem při





Obrázek 5.2: Malfattiho kruhy v rovnostranném trojúhelníku

vrcholu  $A$  o velikosti  $30^\circ$ , neboť střed  $O_1$  leží na ose úhlu  $BAC$ , který má velikost  $60^\circ$ . Z vlastností uvedeného pravoúhlého trojúhelníku získáváme

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{|O_1P|}{|AP|}.$$

Délka strany  $AP$  trojúhelníku  $APO_1$  je zřejmě rovna  $\frac{1}{2} - r$  a délka jeho strany  $O_1P$  je rovna poloměru  $r$ . Proto

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{r}{\frac{1}{2} - r},$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{r}{\frac{1-2r}{2}},$$

$$\sqrt{3}(1 - 2r) = 6r,$$

$$6r + 2r\sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

Proto

$$r = \frac{\sqrt{3}}{6 + 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6 + 2\sqrt{3}} \cdot \frac{6 - 2\sqrt{3}}{6 - 2\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3} - 6}{24} = \frac{\sqrt{3} - 1}{4} \text{ j.}$$

Obsah  $S_1$  kruhu  $K_1$  je tedy

$$S_1 = \pi r^2 = \pi \left( \frac{\sqrt{3} - 1}{4} \right)^2 = \frac{\pi(4 - 2\sqrt{3})}{16} = \frac{\pi(2 - \sqrt{3})}{8} \doteq 0,1052234018 \text{ j}^2$$

a součet  $S$  tří obsahů  $S_1$  kruhů  $K_1, K_2, K_3$  je přibližně roven  $0,3156702054 \text{ j}^2$ .

Označíme-li  $S_{AB}$  střed úsečky  $AB$ , je obsah  $S_{\Delta}$  trojúhelníku  $ABC$  roven

$$S_{\Delta} = \frac{|AB| \cdot |S_{ABC}|}{2} = \frac{1 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4}}}{2} \doteq 0,4330127019 \text{ j}^2.$$

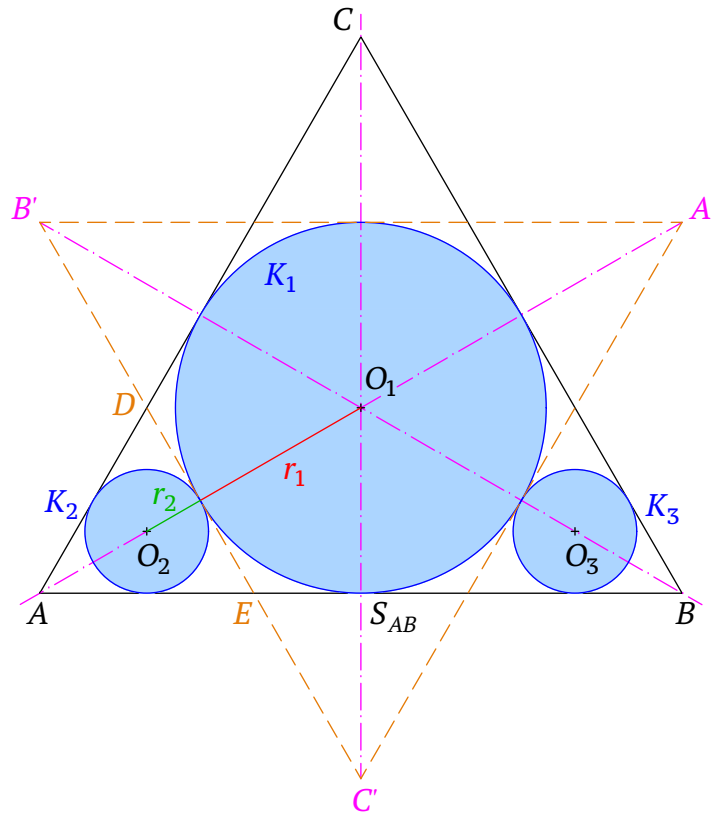
Protože  $\frac{S}{S_{\Delta}} \doteq \frac{0,3156702054}{0,4330127019} = 0,7290091122$ , vyplní Malfattiho kruhy plochu rovnostranného trojúhelníku přibližně ze 72,9%.

## 5.2.2 Jiné řešení Malfattiho problému

Studujme nyní přístup, v němž kruhy umístěné do trojúhelníku nejsou Malfattiho, neboť se jeden z kruhů dotýká třech stran trojúhelníku. Avšak i kruhy sestavené níže popsaným způsobem vedou k velmi zajímavému výsledku.

Nejprve sestrojíme kruh  $K_1$  se středem  $O_1$  s největším možným obsahem, tj. kruh  $K_1$  vepsaný trojúhelníku  $ABC$  (viz obrázek 5.3). Dále sestrojíme kruh  $K_2$  se středem  $O_2$  vepsaný do některé z dosud nepokrytých oblastí trojúhelníku  $ABC$  tak, aby jeho obsah byl co největší. Trojúhelník  $ABC$  zobrazíme ve středové souměrnosti se středem  $O_1$ . Obraz trojúhelníku  $ABC$  označme  $A'B'C'$ . Dále označme  $D$ , resp.  $E$  průsečík strany  $B'C'$  se stranou  $AC$ , resp.  $AB$ . Kruh  $K_2$  musí být zřejmě vepsaný trojúhelníku  $AED$ , který je v případě rovnostranného výchozího trojúhelníku  $ABC$  též rovnostranný. Kruh  $K_3$ , který je opět vepsaný do některé ze zbývajících nepokrytých oblastí a má co největší obsah, sestrojme analogickým způsobem v oblasti u vrcholu  $B$  (případně u vrcholu  $C$ ).

Poznamenejme nyní, že v matematice se uvedený způsob, v němž v každém kroku volíme prvek mající lokální maximum (případně minimum), nazývá *hladový algoritmus*. Ne ve všech matematických úlohách však vede k nalezení maxima (případně minima) globálního. Pro Malfattiho problém navrhli popsaný postup roku 1930 H. Lob a H. W. Richmond v příspěvku [16].



Obrázek 5.3: Malfattiho kruhy v rovnostranném trojúhelníku

Střed  $O_1$  kruhu  $K_1$  je současně těžištěm i ortocentrem rovnostranných trojúhelníků  $ABC$  a  $A'B'C'$ , a dělí proto výšky trojúhelníku  $ABC$  v poměru  $1 : 2$ . Poloměr  $r_1$  kruhu  $K_1$  je tedy roven jedné třetině výšky trojúhelníku  $ABC$ . Ze stejného důvodu je poloměr  $r_2$  kruhu  $K_2$  roven jedné třetině výšky trojúhelníku  $AED$ , přičemž výška trojúhelníku  $AED$  je rovna jedné třetině výšky trojúhelníku  $ABC$  (trojúhelník  $AED$  je obrazem trojúhelníku  $ABC$  ve stejnolehlosti se středem  $A$  a koeficientem  $\frac{1}{3}$ ).

Vypočtěme nyní obsahy  $S_{K_1}$ ,  $S_{K_2} = S_{K_3}$  kruhů  $K_1$ ,  $K_2$  a  $K_3$ :

$$S_{K_1} = \pi r_1^2 = \pi \left( \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}}{3} \right)^2 \doteq 0,2617993878 \text{ j}^2,$$

$$S_{K_2} = S_{K_3} = \pi r_2^2 = \pi \left( \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}}{9} \right)^2 \doteq 0,02908882087 \text{ j}^2.$$

Součet  $\bar{S}$  obsahů kruhů  $K_1, K_2, K_3$  je přibližně roven  $0,3199770295 j^2$ , a tudíž  $\frac{\bar{S}}{S_\Delta} \doteq \frac{0,3199770295}{0,4330127019} = 0,7389552965$ .

Takto sestrojené kruhy proto vyplní trojúhelník přibližně ze 73,9%, což je přibližně o jedno procento více než v prvním případě. Je tedy zřejmé, že první, tj. Malfattiho řešení (tedy řešení v podobě Malfattiho kruhů) není pro rovnostranný trojúhelník nejoptimálnější.

### 5.3 Nejlepší řešení

Dokonce platí, že neexistuje trojúhelník, pro který by Malfattiho kruhy byly nejlepším řešením Malfattiho problému. Pro speciální případy trojúhelníku je výhoda druhého prezentovaného řešení zřejmá již od pohledu. Jako příklad uveďme rovnoramenný trojúhelník, jehož vnitřní úhel při hlavním vrcholu, neboli při vrcholu proti základně, je velmi malý (jedná se tedy o rovnoramenný trojúhelník, pro nějž je poměr délky ramene k délce základny relativně velký). Malfattiho kruhy vyplní velmi malou oblast, při postupném vpisování kruhů s největším obsahem je součet obsahů kruhů značně větší (viz například text [7]).

Až v šedesátých letech 20. století bylo ukázáno, že algoritmus představený dvojicí matematiků Lob, Richmond je při hledání nejoptimálnějšího řešení lepší než Malfattiho řešení pro všechny trojúhelníky. V devadesátých letech poté bylo dokázáno, že tento algoritmus je pro libovolný trojúhelník dokonce nejlepší ze všech možných postupů.

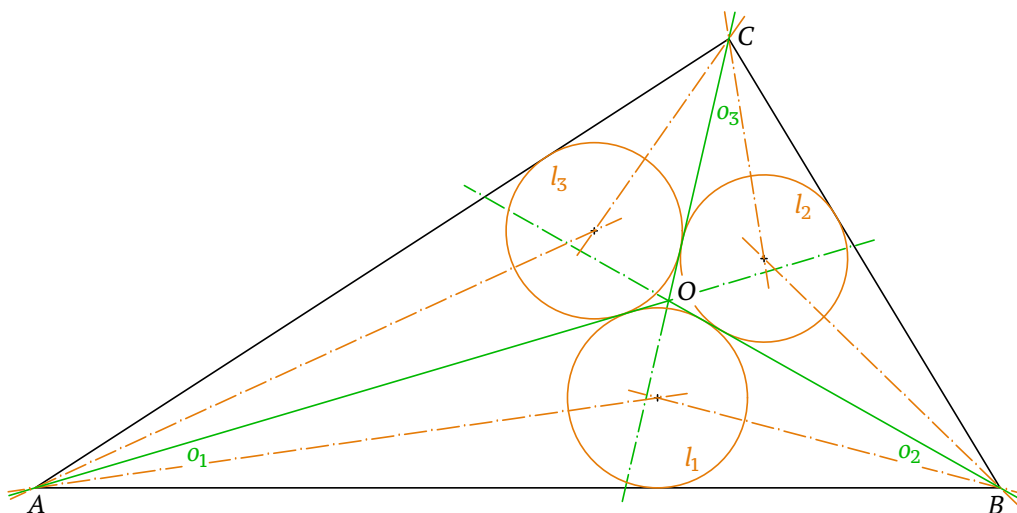
### 5.4 Steinerova konstrukce Malfattiho kruhů

Nyní se zaměříme na geometrickou konstrukci Malfattiho kruhů v obecném trojúhelníku  $ABC$  a poté zmíníme zajímavosti této problematiky.

Jednou ze známých konstrukcí Malfattiho kruhů je konstrukce švýcarského matematika a geometra *Jakoba Steinera* (1796–1863).

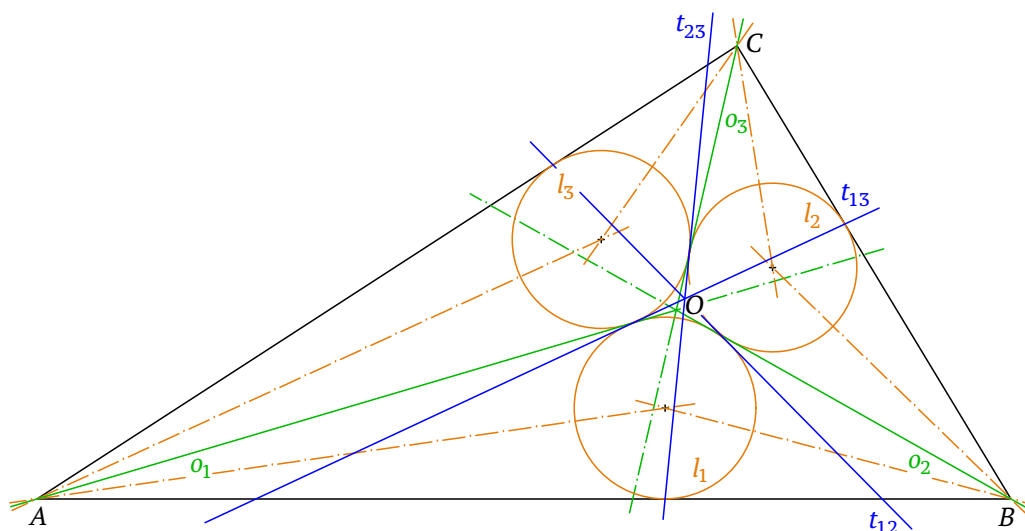
Nechť je dán trojúhelník  $ABC$  s vnitřními úhly  $\alpha = \sphericalangle BAC$ ,  $\beta = \sphericalangle CBA$ ,  $\gamma = \sphericalangle BCA$ . Sestrojme osy  $o_1, o_2, o_3$  vnitřních úhlů  $\alpha, \beta, \gamma$  trojúhelníku  $ABC$  (viz obrázek [5.4]). Průsečík os označme  $O$  a spojme ho se všemi vrcholy trojúhelníku. Tím se trojúhelník  $ABC$  rozdělí na tři trojúhelníky  $ABO, BCO, CAO$ , kterým v daném pořadí vepíšeme kružnice  $l_1, l_2, l_3$ .

Ke každé dvojici vepsaných kružnic lze sestrojít čtyři společné tečny.



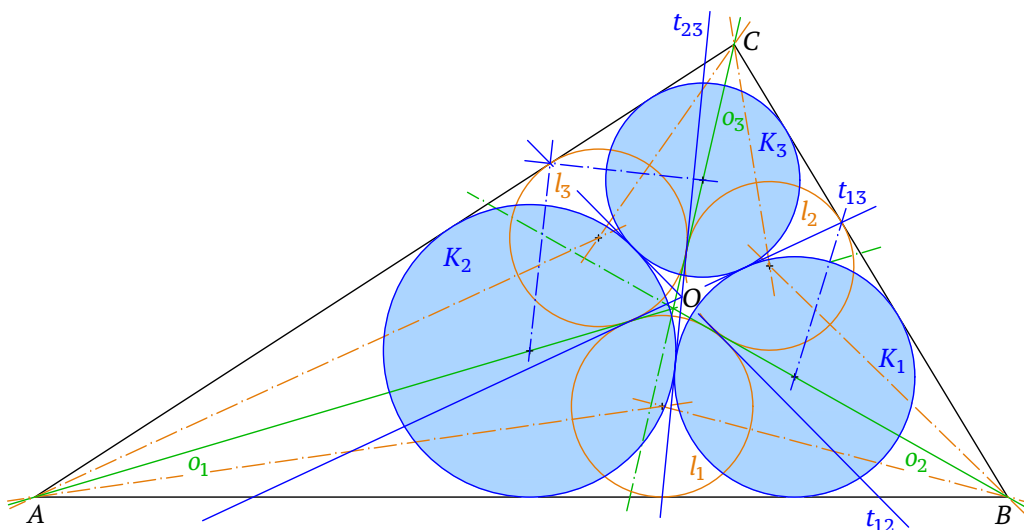
Obrázek 5.4: Steinerova konstrukce Malfattiho kruhů - 1. krok

Dvě z nich jsou „vnější“ (neprotínají úsečku spojující středy kružnic) a dvě „vnitřní“ (protínají úsečku spojující středy kružnic; tyto dvě tečny mohou pro speciální případy splynout). Jednou z „vnitřních“ tečen je již sestrojena osa vnitřního úhlu trojúhelníku  $ABC$ . Pro každou dvojici kružnic sestrojíme druhou z „vnitřních“ tečen a označíme je  $t_{12}, t_{13}, t_{23}$ , přičemž dolní index  $ij$  reprezentuje dvojici kružnic  $l_i, l_j$ , k níž tečna přísluší (viz obrázek 5.5). „Vnější“ tečny konstruovat nemusíme.



Obrázek 5.5: Steinerova konstrukce Malfattiho kruhů - 2. krok

Uvažujme tři čtyřúhelníky, z nichž každý má jeden vrchol splývající s jedním z vrcholů trojúhelníku  $ABC$ . Strany čtyřúhelníku s vrcholem  $A$  leží na stranách  $b, c$  trojúhelníku  $ABC$  a dále na přímkách  $t_{12}, t_{23}$ . Strany čtyřúhelníku s vrcholem  $B$  leží na stranách  $a, c$  trojúhelníku  $ABC$  a dále na přímkách  $t_{23}, t_{13}$ . A konečně strany čtyřúhelníku s vrcholem  $C$  leží na stranách  $a, b$  trojúhelníku  $ABC$  a dále na přímkách  $t_{13}, t_{12}$ . Sestrojíme-li kruhy vepsané těmto čtyřúhelníkům, získáme Malfattiho kruhy (viz obrázek 5.6).



Obrázek 5.6: Steinerova konstrukce Malfattiho kruhů - 3. krok

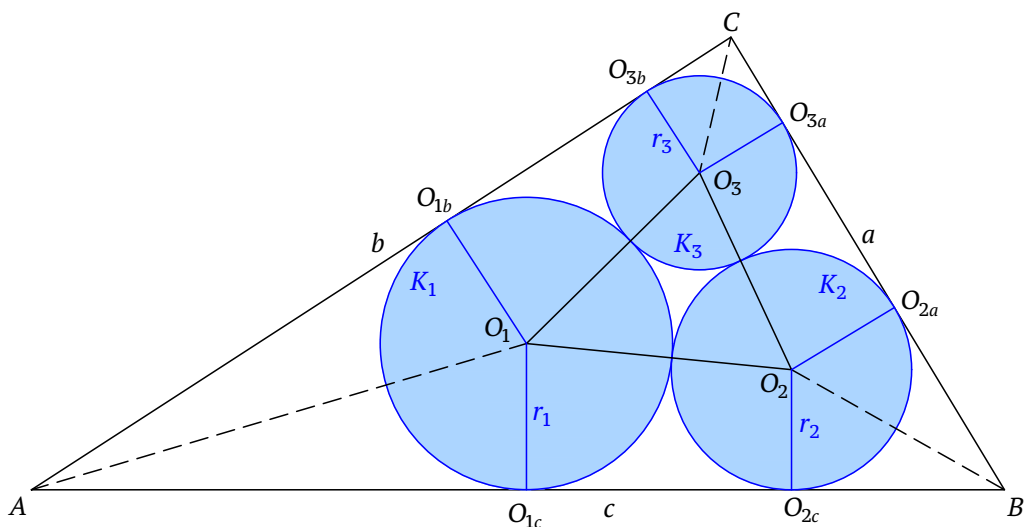
## 5.5 Úloha týkající se Malfattiho kruhů

Již na střední škole můžeme řešit následující úlohu o trojúhelníku, ve kterém jsou umístěny Malfattiho kruhy.

**Příklad.** *Určete délky úseček, které leží na stranách daného trojúhelníku a jejichž krajními body jsou body dotyků Malfattiho kruhů s těmito stranami.*

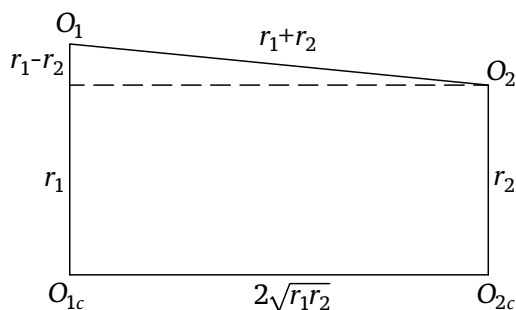
Uvažujme trojúhelník  $ABC$  se stranami  $a, b, c$  a jemu příslušné tři Malfattiho kruhy se středy  $O_1, O_2, O_3$  (viz obrázek 5.7). Dále značme  $r_i$  poloměr kruhu  $K_i$  se středem v bodě  $O_i$ , kde  $i = 1, 2, 3$ . Sestrojme pravoúhlé průměty středů  $O_i$  na strany trojúhelníku  $a, b, c$  a označme je  $O_{il}$ , kde  $l$  je strana trojúhelníku, na kterou je střed promítnut (tj.  $l = a$  nebo  $l = b$  nebo  $l = c$ ). Úkolem je tedy určit vzdálenosti  $|O_{1c}O_{2c}|$ ,  $|O_{2a}O_{3a}|$  a  $|O_{1b}O_{3b}|$ .

Uvažujme lichoběžník  $O_{1c}O_{2c}O_2O_1$  (viz obrázek 5.8) a rozdělme ho úsečkou, která je rovnoběžná s úsečkou  $O_{1c}O_{2c}$  a prochází bodem  $O_2$ , na obdélník



Obrázek 5.7: Body dotyku Malfattiho kruhů

a trojúhelník. Pomocí Pýthagorovy věty pro tento trojúhelník, jehož přepona má délku  $r_1 + r_2$  a jedna z jeho odvěsen má délku  $|r_1 - r_2|$ , určíme vzdálenost bodů  $O_{1c}$ ,  $O_{2c}$  následovně:



Obrázek 5.8: Lichoběžník  $O_{1c}O_{2c}O_2O_1$

$$\begin{aligned}
 |O_{1c}O_{2c}| &= \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2}, \\
 |O_{1c}O_{2c}| &= \sqrt{r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 - r_1^2 + 2r_1r_2 - r_2^2}, \\
 |O_{1c}O_{2c}| &= \sqrt{4r_1r_2}, \\
 |O_{1c}O_{2c}| &= 2\sqrt{r_1r_2}. \tag{5.1}
 \end{aligned}$$

Analogickými výpočty získáme délky úseků, které jsou vymezeny body dotyku Malfattiho kruhů na stranách  $a$ ,  $b$  trojúhelníku  $ABC$ :

$$|O_{2a}O_{3a}| = 2\sqrt{r_2r_3}, \quad (5.2)$$

$$|O_{1b}O_{3b}| = 2\sqrt{r_1r_3}. \quad (5.3)$$



# Závěr

V diplomové práci jsme studovali několik překvapivých, na pohled působivých matematických problémů, které se týkají jednoho ze základních geometrických útvarů, a to kružnice. Kružnicím jsme se věnovali podrobně, avšak na takové úrovni, aby práce byla srozumitelná i pro středoškolské čtenáře. V každé kapitole jsme představili daný problém a příbuzné pojmy či otázky. Problematika jednotlivých témat však není zdaleka vyčerpána. Existuje například mnoho dalších konstrukcí Archimédových kružnic. Některé byly představeny v práci [11], další lze nalézt v odborných časopisech (viz například článek [14]). Pro *Větu o sedmi kružnicích* lze dále studovat, zda její platnost zůstává zachována v závislosti na očíslování bodů dotyku dané kružnice a jednotlivých kružnic řetězce. Pro Fordovy kružnice bychom mohli studovat jejich souvislost s tzv. *Fareyovými posloupnostmi* (viz např. text [1]) a u *Věty o motýlovi* její rozmanitá zobecnění (viz např. článek [22]). Zkušenému počtáři můžeme doporučit zabírat se výpočtem poloměrů Malfattiho kruhů nebo blíže zkoumat Steinerovu konstrukci (viz například článek [10]).

# Seznam použité literatury

- [1] Amen Julane: *Farey Sequences, Ford Circles and Pick' Theorem*. Dostupné online: <https://digitalcommons.unl.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1001&context=mathmidexppap>
- [2] Bogomolny Alexander: *The Butterfly Theorem*. Cut the Knot. Dostupné online: <https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Butterfly.shtml#VP1>
- [3] Bottema Oene: *The Malfatti Problem*. Forum Geometricorum 1 (2001), 43–50.
- [4] Cundy Martyn H.: *The Seven-Circles theorem*. The Mathematical Gazette 62 (1978), 200–203.
- [5] Dung Nguyen Tien: *Three Synthetic Proofs of the Butterfly Theorem*. Forum Geometricorum 17 (2017), 355–358.
- [6] Evelyn Cecil John Alvin, Money-Coutts G. B., Tyrrell John Alfred: *The Seven Circles Theorem and Other New Theorems*. Stacey International, London, 1974.
- [7] Eves Howard: *Malfatti Problem (problem 4145)*. Problems and Solutions, American Mathematical Monthly 53 (1946), 285–286.
- [8] Ford Lester Randolph: *Fractions*. The American Mathematical Monthly 45 (1938), 586–601.
- [9] García Emmanuel Antonio José: *Another Archimedean Circle in an Arbelos*. Forum Geometricorum 15 (2015), 127–128.
- [10] Grozdev Sava, Dekov Deko: *The Computer Improves the Steiner's Construction of the Malfatti Circles*. Mathematics and Informatics 58 (2015), 45–48.
- [11] Horčíčková Klára: *Arbelos*. Bakalářská práce, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova, Praha, 2021.
- [12] Hung Tran Quang: *Two More Pairs of Archimedean Circles in the Arbelos*. Forum Geometricorum 14 (2014), 249–251.
- [13] Hung Tran Quang: *Another Synthetic Proof of the Butterfly Theorem Using the Midline in Triangle*. Forum Geometricorum 16 (2016), 345–346.

- [14] Lamoen Floor van: *A Special Point in the Arbelos Leading to a Pair of Archimedean Circles*. Forum Geometricorum 14 (2014), 253–254.
- [15] Leischner Pavel: *Kritéria tětívového čtyřúhelníku*. In Sborník 25. konference Geometrie a počítačová grafika, JČMF, Praha, 2005, 143–148.
- [16] Lob H., Richmond H. W.: *On the Solutions of Malfatti's Problem for a Triangle*. Proceedings of the London Mathematical Society 30 (1930), 287–304.
- [17] Malfatti Gianfrancesco: *Memoria sopra un problema stereotomico*. Memorie di Matematica e di Fisica della Societ? Italiana delle Scienze 10 (1803), 235–244.
- [18] Oai Dao Thanh: *Two Pairs of Archimedean Circles in the Arbelos*. Forum Geometricorum 14 (2014), 201–202.
- [19] Rabinowitz Stanley: *The Seven Circles Theorem*. Pi Mu Epsilon Journal 8 (1987), 441–449.
- [20] Řeháček Jan: *Matykání IX: Mají zlomky rodiče?* Dostupné online: <https://www.matfyz.cz/clanky/matykani-ix-maji-zlomky-rodice>
- [21] Steiner Jacob: *Einige geometrische Betrachtungen*. Journal für die reine und angewandte Mathematik 1 (1826), 161–184, 252–288.
- [22] Štěpánová Martina: *Lepidoptera mathematica aneb rozličná zobecnění věty o motýlovi*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 63 (2018), 263–281.
- [23] Štěpánová Martina: *Věta o motýlech*. In Hromadová J., Slavík A. (eds.): Cesty k matematice III, Matfyzpress, Praha, 2018, 103–124.
- [24] Švrček Jaroslav: *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka*. Karolinum, Praha, 2004.
- [25] Wallace William: *William Wallace Proof of Butterfly Theorem*. Dostupné online: [www.cut-the-knot.org/pythagoras/WilliamWallaceButterfly.shtml](http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/WilliamWallaceButterfly.shtml)
- [26] Weisstein Eric W.: *Malfatti Circles*. Wolfram MathWorld. Dostupné online: <https://mathworld.wolfram.com/MalfattiCircles.html>

- [27] Weisstein Eric W.: *Seven Circles Theorem*. Wolfram MathWorld. Dostupné online:  
<https://mathworld.wolfram.com/SevenCirclesTheorem.html>

# Seznam obrázků

1.1 Arbélos a příslušné značení	4
1.2 Ilustrace Věty 1 a jejího důkazu	5
1.3 Ilustrace Věty 2 a jejího důkazu	9
1.4 Ilustrace Věty 3 a jejího důkazu	11
2.1 Věta o sedmi kružnicích	14
2.2 Ilustrace Cèvovy věty	15
2.3 Ilustrace důkazu 1. implikace Cèvovy věty	16
2.4 Ilustrace důkazu 2. implikace Cèvovy věty	17
2.5 Ilustrace Cèvovy věty o kružnici	19
2.6 Ilustrace důkazu Cèvovy věty o kružnici	20
2.7 Ilustrace Lemmatu 6	21
2.8 Ilustrace Věty 7	23
2.9 Jiné umístění bodů - 1. způsob	24
2.10 Jiné umístění bodů - 2. způsob	24
2.11 Obdoba Věty o sedmi kružnicích	25
3.1 Zavedení celých čísel	26
3.2 Zavedení racionálních čísel	27
3.3 Zavedení racionálních čísel na intervalu $(0, 1)$	28
3.4 Výpočet souřadnic středu kružnice $m_0$	29
3.5 Výpočet souřadnic středu kružnice $l_0$	30
3.6 Dotýkající se Fordovy kružnice	33
3.7 Výpočet středu dotýkající se kružnice	34
3.8 Stern-Brocotův strom	38
4.1 Ilustrace Věty 9	41
4.2 Ilustrace první části prvního důkazu Věty 9	42
4.3 Ilustrace druhé části prvního důkazu Věty 9	43
4.4 Ilustrace druhého důkazu Věty 9	45
4.5 Ilustrace třetího důkazu Věty 9	48
5.1 Malfattiho kruhy	52
5.2 Malfattiho kruhy v rovnostranném trojúhelníku	53
5.3 Malfattiho kruhy v rovnostranném trojúhelníku	55
5.4 Steinerova konstrukce Malfattiho kruhů - 1. krok	57
5.5 Steinerova konstrukce Malfattiho kruhů - 2. krok	57
5.6 Steinerova konstrukce Malfattiho kruhů - 3. krok	58

5.7	Body dotyku Malfattiho kruhů . . . . .	59
5.8	Lichoběžník $O_{1c}O_{2c}O_2O_1$ . . . . .	59