Posudek oponenta diplomové práce

Název: Mean variance optimalizace pro minimální entropickou míru
Autor: Bc. Zdeněk Pustějovský

Shrnutí obsahu práce Práce se zabývá hledáním optimálního portfolia, které maximalizuje očekávanou logaritmickou užitkovou funkci. Je ukázáno, že optimální užitek odpovídá relativní entropii martingalové míry reflktující naše tržní očekávání a martingalové míry podkladového aktiva a je dosažen, pokud martingalová míra portfolia odpovídá našemu očekávání. To však nemusí být dosažitelné na neúplném trhu. Hlavním předmětem práce je právě optimalizace na neúplném trhu prostřednictvím minimalizace relativní entropie námi očekávané martingalové míry a martingalové míry portfolia Studovány jsou 3 přístupy: (i) přímá maximalizace užitku pomocí numerické optimalizace, (ii) aproximace pomocí mean variance optimalizace (ozn. Markowitzova aprox.) a (iii) aproximace pomocí variance optimalizace (ozn. jako Fischerova aprox.). Podrobně je zpracována numerická studie a porovnání výsledků těchto přístupů na modelu cen aktiv založeném na geometrickém Brownově pohybu.

Celkové hodnocení práce

Téma práce. Téma práce kombinuje vybrané partie stochastické analýzy, financí a optimalizace a je proto spíše náročnější. Zadání považuji za splněné.

Vlastní příspěvek. Vlastní příspěvek autora není v práci jasně vymezen. Domnívám se, že obecná teoretická část (kap. 1 a 2) je kompilačního charekteru, zatímco detailní (numerická) studie konkrétního modelu založeného na geometrickém Brownově pohybu (kap. 3 a 4) je vlastním příspěvkem autora. Ten spočívá v explicitním vyjádření a numerickém řešení třech přístupů k optimalizaci portfolia a jejich následném porovnání.

Matematická úroveň. Matematická úroveň překládané práce je poměrně nízká a považuji ji za nejslabší aspekt celé práce. Jako příklad bych zmínil nejasné definice některých pojmů a následnou práci s nimi (např. pojem aktiva), chronickou absenci ověřování předpokladů při používání různých tvrzení (např. absolutní spojitost měr při použití Věty 1), ignorování potřeby měřitelnosti některých veličin atp. Více detailů v sekci Připomínky a otázky.

Práce se zdroji. Jednotlivé používané a běžně známé výsleky (jako např. Itôova formule, obecná formule pro maximalizaci očekávaného užitku, Black-Scholesova formule atp.) jsou v práci řádně citovány. Zcela však postrádám odkaz na zdroj, ze kterého je čerpán celkový koncept kapitol 1 a 2, což považuji za závažný nedostatek, neboť to působí (mylným) dojmem, že jde o původní výsledek autora.

Formální úprava. Formální úpravu považuji za docela zdařilou, práce přiměřené množství překlepů, je přehledně členěna do kapitol, výsledky jsou ilustrovány na různých grafech. Grafy by mohly být lépe popsány (detaily viz níže).

Vybrané připomínky a otázky

1. Důkaz Věty 1 na str. 4 obsahuje symboly $X(0), Y(0), V(0)$. Dle kontextu by se mělo jednat o aktiva, ale aktiva (jak je zmíněno v Poznámce 1) nemají přesný matematický význam, není jasné, co znamená jejich rovnost a jak je reprezentovat jako funkci času. Celý důkaz tak postrádá matematický význam. Bylo by možné přepsat důkaz pomocí cen aktiv?

2. Definice 3 (portfolio) není matematicky korektní, neboť staví na pojmu aktivum, které samo o sobě nemá matematický význam. Např. není vůbec jasné, co znamená (matematicky) lineární kombinace aktiv.

3. Předpoklad absolutní spojitosti $\mathbb{P}^X \ll \mathbb{P}^Y$ ve Větě 1 (str. 4) je často opomíjen při jejím použití. Např. v důkazu Corollary 1 (str. 5) není zajištěno $\mathbb{P}^{X^i} \ll \mathbb{P}^Y$, v důkazu Věty 4 (str. 8) není garantována ekvivalence martingalových měr obou referenčních aktiv atp.

4. Podle definice na str. 3 je $\mathbb{P}^X$ (martingalová) míra na celé σ-algebře $\mathcal{F}$ a není nijak explicitně navázána na konkrétní časový okamžik T. Oproti tomu v Definici 2 (str. 4) označujeme její hustotu jako "state price density“ v čase T. Její následné použití (např. ve Větě 1) také vyžaduje, aby tato hustota závisela na čase T a aby byla $\mathcal{F}_T$-měřitelná.

5. Při formulaci úlohy maximalizace očekávaného užitku (str. 7, ř. 15) chybí předpoklad na $\mathcal{F}_T$-měřitelnost náhodné veličiny $P_Y(T)$.

6. Poznámka 7: Špatně spočítáno $I(x)$ a λ_Y. Má být $I(x) = x$ a $\lambda_Y = P_Y(0)$.

7. Zakončení důkazu Proposition 1 na str. 12 je chybné. Aby existovalo jediné n_0 takové, že následující nerovnost platí skoro jistě, musela by výše zmíněná konvergence průměrů platit stejnoměrně v ω. Nic takového však, pokud vím, silný zákon velkých čísel negarantuje. Jak by šlo opravit argument na konci důkazu?

8. str. 13, formule (2.3): Ve druhém kroku odvození je v prvním členu patrně použito Corollary 1 pro vyjádření martingalové hustoty portfolia pomocí hustot jednotlivých aktiv. Potom by zde ale místo vah w_i měly být váhy $w_i X^i_P(0)$. Podobně hned ve druhém členu by mělo být použito $\frac{P_Y(T)}{P_Y(0)} = \frac{\sum_i w_i X^i(T)}{\sum_i w_i X^i(0)}$ místo nesprávného $\frac{P_Y(T)}{P_Y(0)} = \sum_i w_i \frac{X^i(T)}{X^i(0)}$. Uvedené odvození tedy, zdá se, funguje jen pokud $X^i(0) = 1$. Tento (skrytý) předpoklad je v numerické studii splněn.

9. V grafu Figure 3.1 chybí popis horizontální osy, který by usnadnil porozumění. V tomtéž grafu není jasný význam legendy “Tuned payoff”, neboť toto označní není nikde jinde v práci použito - jedná se o výplatu v případě Fischerovy aproximace? Navíc by bylo dobré sjednotit barvy u grafů 3.1 a 3.2 (stejné barvy pro stejné přístupy).

10. Proč je v sekci 3, formule (3.1), volena tržní martingalová míra $\mathbb{P}^M$ jako míra rozdělení $\mathcal{N}(\mu T, \sigma_2^2 T)$? Konkrétně bych prosil o vysvětlení, proč je $\mathbb{P}^M$ voleno jako míra na $\mathbb{R}$ (a ne jako míra na Ω, potažmo míra na prostoru spojitých trajektorií)? A proč jsou voleny právě tyto paramtery normálního rozdělení (tedy jak souvisí s GBM modelem)?

Závěr

Přes nízkou formálně-matematickou úroveň je obsah práce zajímavý a numerická studie je zpracována v rozumné kvalitě. Práci proto doporučuji uznat jako diplomovou práci.

Jméno oponenta: Pavel Kříž
Pracoviště: KPMS, MFF UK
Datum: 31.5.2024