Posudek na magisterskou diplomovou práci

Bc. Lucie Wintrové

Stability of stationary flows of non-Newtonian heat conducting fluid in 2D

Autorka se ve své diplomové práci věnuje konstrukci slabého řešení pro nenewtonovské tekutiny s polynomiálními růsty v tenzoru napětí (tzv. „power law fluid“) jejíž viskozita závisí na teplotě, je tedy třeba studovat i bilanci vnitřní (tepelné) energie. Výsledné řešení pak splňuje dokonce i entropickou rovnost. Tekutina je studována ve dvoudimenzionální omezené lipschitzovské oblasti. Jde vlastně o převedení výsledku dokázaného v článku [12] se seznamu literatury, přičemž se autorka v první části inspirovala technikou z článků [6] a [11]. Ve třech prostorových dimenzích samozřejmě vychází větší omezení na růst tenzoru napětí, bylo tedy třeba vše přepočítat a upravit.

Práce je psaná poměrně dobrou angličtinou, ale pár formulací by bylo třeba opravit. Nicméně tyto drobnosti neruší při čtení práce. Je napsána podrobně a pro odborníka v dané oblasti se čte velice dobře. Technicky komplikovanější je poslední sekce věnovaná důkazu entropické rovnosti. Přestože jsem při čtení této poslední sekce musel být mnohem pozornější a občas se vracet zpět, domnívám se, že i zde předvedla autorka, že problematice rozumí a dokázala ji velmi dobře podat. Asi jediný větší nedostatek v práci je chybějící stručný úvod, ve kterém by autorka popsala známé výsledky pro analogické problémy a okomentovala vztah své práce k těmto výsledkům. Jisté stručné komentáře se v průběhu textu objevují, ale tuto část by bylo vhodné rozšířit.

V první kapitole je představen problém, který se bude v práci studovat. Druhá kapitola pak připomíná základní technický aparát, který je v práci využíván. Třetí kapitola pak uvádí formulaci slabého řešení a obsahuje formulaci hlavního výsledku práce, věty o existenci slabého řešení. Těžiště práce je potom v Kapitole 4. V sekci 4.1 je formulována galerkinovská aproximace řešení a je dokázána její řešitelnost, další dvě sekce pak obsahují nezávislé odhady na galerkinovské aproximaci teploty a příslušný limitní přechod. Čtvrtá sekce obsahuje důkaz principu minima pro teplotu, který je zásadní pro důkaz entropické rovnosti později. Další dvě kapitoly pak studují odhady nezávislé na galerkinovské aproximaci rychlosti a příslušný limitní přechod; zde se na rozdíl od teploty již nevystačí s pouhou kompaktnosti na základě vět o vnoření a je třeba použít variantu Mintyho triku. Poslední sekce pak obsahuje důkaz platnosti entropické rovnosti pro dané slabé řešení a vyžaduje netriviální techniku, která není úplně standardní.

Jak napovídá název práce i její zadání, původní ambice byly poněkud vyšší, studovat i chování řešení pro časy jdoucí do nekonečna. Vzhledem k délce práce bylo celkem rozumně od nich ustoupeno, protože jinak by práce byla buď neúměrně dlouhá, nebo by musely být mnohé argumenty vysvětleny jen stručně, což by nepochybně bylo škoda. Jednou z věcí, které na práci oceňuji, je právě to, že tyto technicky náročné výpočty a úvahy jsou provedeny velmi detailně, takže lze poměrně dobře sledovat celý postup. I tak je předložená práce na úrovni, která nepochybně překračuje očekávání pro diplomovou práci a domnívám se, že po drobných úpravách (mimo jiné i jazykových), přidání úvodu popisujícího známé analogické výsledky a jistém zestručnění celého textu lze práci publikovat v mezinárodním časopise věnovaném matematické teorii termodynamiky tekutin či analýze PDR.

Práci proto doporučuji uznat jako diplomovou magisterskou práci. Mám k ní pouze několik drobných technických připomínek a jednu otázku k zamyšlení, které jsou formulovány níže.

- V rovnici (3) na straně 2 je chybné znaménku u tepelného toku

- Na straně 3 mi nepřipadá úplně šťastné značení $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*(\vartheta)$, protože to naznačuje, že $\mathbf{q}^*$ je funkcí teploty, ale ve skutečnosti jde o operátor (závisí nejen na teplotě, ale také na jejím gradientu).

- Lemma 1 na straně 6 mluví o Carathéodoryho řešení, obsahuje správně formulované podmínky tak, aby toto řešení existovalo, ale předpokládá řešení jako funkci třídy C^1, což obecně nemůže platit. Řešením má být absolutně spojitá funkce.

- V Lemmatu 5 na straně 8 jsou pro interpolační nerovnost na Lebesgueových prostorech uvedeny předpoklady na hladkost a omezenost množiny. Toto lemma ale platí pro libovolnou měřitelnou množinu a dokonce i v libovolné dimenzi.

- Prostor $L^2_0(\Omega)$ zmiňovaný na straně 10 není v práci definovaný, i když zkušený čtenář si domyslí, o jaký prostor jde, bylo by lépe definici uvést. Případně lze tento prostor i přesně charakterizovat, podobně jako prostor $L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$, to je ale jen poznámka zcela na okraj.

- Na straně 12 nahoře se u teploty spíše než o Navierových podmínkách mluví o podmínkách Neumannových.

- Na straně 17 se poprvé vyskytuje značení $d(t,x)$, které není zavedeno, ale lze si domyslet, že značí $dt\,dx$. Ovšem není používáno výlučně, občas se objevuje místo něj i klasické $dt\,dx$.

- Od strany 23 dále se pro „s.v.“ střídavě objevuje „a.a.“ či „a.e.“ Asi by bylo lépe sjednotit.

- Na straně 29 je při použití Aubin–Lionsova lemmatu nesprávná argumentace. Kompaktní vnoření pod vztahem (4.61) totiž neplatí, ale i tak při správné argumentaci silná konvergence (4.62) zůstává v platnosti pro daný interval exponentů.

- Na straně 38 je ve formuli (4.94) překlep.

Na závěr bych se rád do diskuze autorky zeptal, zda si zkusila rozmyslet, jestli skutečně platí stabilita stacionárních řešení uvedená v názvu práce, tedy zda to, co je uvedeno v posledním odstavci na straně 57, platí a případně zda by dané tvrzení přesně zformulovala.

V Praze dne 29. května 2024 Prof. Mgr. Milan Pokorný, Ph.D., DSc.