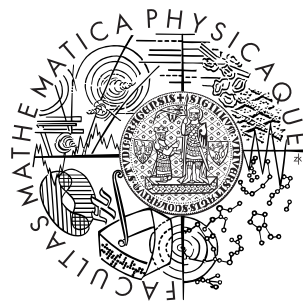


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Dana Staníková

Modely úrokových měr a jejich citlivost na vstupní data

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martin Janeček, Ph.D.
Studijní program: Matematika, Finanční a pojistná matematika

Na tomto místě bych chtěla poděkovat RNDr. Martinu Janečkovi, Ph.D. za řadu podnětných rad a připomínek a také za ochotu a trpělivost se kterou vedl tuto diplomovou práci.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 12. prosince 2008

Dana Staníková

Obsah

Úvod	5
1 Výnosová křivka	7
1.1 Zdroje tržních úrokových měr	7
1.2 Státní dluhopisy versus úrokové swapy	7
1.3 Spotové a forwardové úrokové míry	11
1.4 Konstrukce bezrizikové výnosové křivky	13
1.4.1 Bootstrap	14
1.4.2 Nelson-Sieglowa formule	16
1.5 Číselné porovnání výnosových křivek	19
1.6 Shrnutí	26
2 Black-Scholesův model	27
2.1 Swapce	27
2.2 Blackův model pro ocenění swapcí	28
2.2.1 Odvození obecné Black-Scholesovy formule	28
2.2.2 Odvození Blackova modelu pro cenu swapce	35
2.3 Číselné výsledky ocenění swapcí	36
3 Modely úrokových měr	43
3.1 Přehled modelů okamžité úrokové intenzity	43
3.2 Hull-Whiteův model	44
3.2.1 Pravděpodobnost záporných sazeb	47
3.2.2 Ocenění opcí na dluhopis v Hull-Whiteově modelu	48
3.2.3 Ocenění swapcí v Hull-Whiteově modelu	50
3.3 Kalibrace Hull-Whiteova modelu	51
4 Modelace tržní ceny	58
4.1 Ocenění závazků z pojištění pro případ dožití	58
4.2 Závěr	62

Název práce: Modely úrokových měr a jejich citlivost na vstupní data

Autor: Dana Staníková

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martin Janeček, Ph.D.

e-mail vedoucího: Martin.Janecek@csobpoj.cz

Abstrakt: Při ocenění finančních instrumentů je využívána bezriziková výnosová křivka. Ta může být v praxi konstruovaná z různých podkladových dat a navíc odlišnými metodami. Zaměříme se na rozdíly, které mohou v ocenění vzniknout při jejich použití. Ukážeme, že například ceny dluhopisů stanovené metodou diskontovaných peněžních toků jsou významně ovlivněny použitou výnosovou křivkou. Dále budeme kvantifikovat rozdíly v ocenění finančního derivátu (swapce) v závislosti na volbě výnosové křivky a použité tržní volatilitě. K určení ceny přitom využijeme Black-Scholesův model. V závěru pak s využitím Hull-Whiteova modelu shrneme dopad volby výnosové křivky a tržní volatility swapců na ocenění instrumentu, který není standardně obchodovaný na finančních trzích.

Klíčová slova: výnosová křivka, Nelson-Siegelova metoda, swapce, Black-Scholesův model, Hull-Whiteův model

Title: Models of interest rates and their sensitivity with respect to input data

Author: Dana Staníková

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Martin Janeček, Ph.D.

Supervisor's e-mail address: Martin.Janecek@csobpoj.cz

Abstract: Pricing of financial instruments makes use of risk free yield curve. It can be constructed from different input data using variant methods of construction. We will investigate differences in prices of securities based on this curves. It will be shown that prices of bonds scheduled by using discounted cash flow method are sensitive with respect to chosen type of yield curve. We will quantify differences by pricing derivative securities (swaptions) using different yield curves and market volatility. The price will be calculated through Black-Scholes formula. At the end sensitivity of Hull-White model through the pricing of nonstandard security will be shown.

Keywords: yield curve, Nelson-Siegel method, swaption, Black-Scholes formula, Hull-White model

Úvod

Cílem této práce je mapovat odchylky, které mohou v praxi vzniknout při ocenění finančních instrumentů v závislosti na použitých tržních vstupech.

Začátek kapitoly jedna je zaměřen na data, ze kterých je možné konstruovat výnosovou křivku. Obsahuje srovnání státních dluhopisů a swapů, které vychází z [4], [5], [6] a [7]. Ve zbytku první kapitoly jsou s využitím [4], [5] a [7] popsány způsoby konstrukce výnosové křivky. Nejdříve v krátkosti zavádíme pojmy spotových a forwardových sazeb. Dále jsme se zaměřili na techniku bootstrapu a na základě [1], [12] a [13] popsali Nelson-Sieglovu formuli. V závěru kapitoly je uvedeno porovnání výnosových křivek konstruovaných z reálných dat. Jejich odchylky jsou kvantifikovány pomocí cen bezkupónových dluhopisů.

V úvodu druhé kapitoly jsou shrnuty definice a poznatky nutné k odvození Black-Scholesova modelu. Podrobněji je tato problematika rozebrána v [2], [7] a [10]. Následuje modifikace základního Black-Scholesova modelu pro swapce. Praktická modelace srovnává, do jaké míry ovlivňuje výslednou cenu odchylka ve výnosové křivce a nakolik je cena závislá na kotaci tržní volatility úrokových měr.

První část kapitoly tři stručně popisuje různé modely úrokových měr s nástinem jejich vlastností. Podrobněji je rozebraný Hull-Whiteův model. Pozornost byla zaměřena na odvození vztahu pro rovnovážnou hladinu tohoto modelu, ocenění bezkupónových a kupónových dluhopisů a také na ocenění swapcí. Část 3.2.1 se věnuje pravděpodobnosti záporných měr, která představuje nevýhodu tohoto modelu. Na závěr je Hull-Whiteův model kalibrován na tržní data prostřednictvím cen swapcí stanovených Black-Scholesovou formulí. Součástí modelace není jen porovnání parametrů Hull-Whiteova modelu v závislosti na vstupních datech, ale i dopad této kalibrace na ceny vybraných swapcí. Z uvedených grafů je patrné, že odchylky a hladkost výnosové křivky se promítají i do ocenění swapcí. Tato kapitola čerpá z poznatků uvedených v [3], [8], [9], [10], [11] a [14].

Závěr této práce tvoří ocenění instrumentu, který není standardně obchodovaný. Představuje jej pojištění pro případ dožití (spořicí produkt), který je oceněn na základě Hull-Whiteova modelu při kalibraci popsané v kapitole tři. Ocenění proběhlo ve dnech, kdy dochází k významným odchylkám ve výnosové křivce. Pro srovnání byl přidán ještě den, ve kterém jsou kotace fixních sazeb swapů téměř identické. Cílem je ukázat, do jaké míry se tyto výnosové křivky promítnou do ceny spořicího produktu. Vliv tržní volatility

swapcí na cenu pojištění pro případ dožití mapujeme pomocí paralelního posunu volatilit o 0,5%, což odpovídá největší odchylce v kotaci volatilit mezi systémy Bloomberg a Reuters, které nastaly ve sledovaném období. Závěrečné shrnutí a doporučení vyplývající z provedené modelace je uvedeno v části 4.2.

Vstupní data a veškeré modelace použité v této práci jsou přiložené na CD. Součástí přílohy je i text této práce v digitální podobě.

Kapitola 1

Výnosová křivka

VÝNOSOVÁ KŘIVKA zachycuje závislost výnosu do splatnosti na době do splatnosti. Na úvod se budeme zabývat problematikou volby tržních dat, ze kterých bude následně konstruována výnosová křivka.

1.1 Zdroje tržních úrokových měr

Pro získání tržních dat se v praxi využívají zejména dva systémy: BLOOMBERG a REUTERS, kde jsou kotovány ceny běžně obchodovaných instrumentů od různých finančních zprostředkovatelů. V obou systémech jsou přitom zvýrazněni tzv. důvěryhodní zprostředkovatelé (označováni jako kontributoři), jejichž ceny jsou stabilní a aktualizace cen probíhá v pravidelných intervalech.

Pokud srovnáme ceny jednoho instrumentu v daném časovém okamžiku zveřejněné v systému Bloomberg a Reuters, ale i u různých zprostředkovatelů v rámci jednoho systému, zjistíme, že se liší až o několik bazických bodů. Z teoretického hlediska již mluvíme o arbitráži. V praxi se ale většina těchto situací za arbitrážní nepovažuje. Cena, která je dostupná v těchto systémech, je pouze indikativní. Skutečná tržní cena platná v daném okamžiku je domlouvána individuálně s protistranou a může se od indikativní ceny lišit. Tím se podstatně eliminují arbitrážní situace na trhu, protože rozdílné indikativní ceny v obou systémech ještě neznamenají, že za tyto ceny bude možné v daném okamžiku kontrakt realizovat.

Převažují situace, kdy se jedná o malé rozdíly v tržních cenách a při kalkulaci zisku z takového obchodu je nutné uvážit objem realizovaného obchodu, který bývá v českých podmínkách poměrně malý, a také výši transakčních nákladů, která je s obchodem spojena. Proto tyto situace nejsou investory významně vyhledávány a nejsou ani považovány za arbitráž. Skutečně arbitrážní situace nastávají na českém trhu jen ojediněle.

1.2 Státní dluhopisy versus úrokové swapy

Ke konstrukci výnosových křivek lze obecně vzato použít údaje o tržní ceně jakékoliv skupiny porovnatelných cenných papírů. Jak bylo uvedeno v předchozí

části, skutečná tržní cena je na českém trhu domlouvaná individuálně, proto bychom pro konstrukci tržní výnosové křivky pro daný okamžik měli nejdříve zjistit tržní cenu daného instrumentu u protistrany platnou pro tentýž okamžik. To v praxi není možné. Proto se ke konstrukci výnosové křivky používají data uvedená v systému Bloomberg nebo Reuters. Volba systému přitom závisí na konkrétním nastavení uživatele.

Z hlediska oceňovacího má zásadní význam bezriziková výnosová křivka, která bývá konstruována ze státních dluhopisů. Tento typ cenných papírů bývá považován za bezrizikový a tedy i výnosová křivka z nich zkonstruovaná bude vytvářet nulovou hladinu rizika mezi výnosovými křivkami v dané zemi. V České republice je ale počet emisí státních dluhopisů malý a také z hlediska dob do splatnosti není emitováno mnoho typů státních dluhopisů. Převažují maturity v délce 3, 5, 10 a 15 let a je nutné si uvědomit, že doba do splatnosti každý den klesá. Při konstrukci bezrizikové výnosové křivky je tedy nutné interpolovat hodnoty dostupné na trhu.

V praxi je běžnější, že se pro konstrukci bezrizikové výnosové křivky používají úrokové swapy¹. Jedním z důvodů je, že swapy jsou na českých finančních trzích více obchodované, navíc existují údaje o větším počtu dob do splatnosti k téměř každému obchodnímu dni a tedy se nemusíme potýkat s problémem zkracující se doby do splatnosti. Další důvody vyplynou z následujícího popisu tohoto instrumentu.

Úrokový swap označovaný také jako "plain vanilla" nebo "fixed to floating" swap představuje směnu pevného a pohyblivého úroku z předem dohodnuté nominální hodnoty po daný počet období, přičemž nominální hodnoty směněny nejsou a frekvence plateb nemusí být u obou částí swapu stejná. Výši proměnného úroku je možné odvodit od jakékoli tržní sazby. V českých podmínkách to bývá často sazba PRIBOR², na světových trzích tuto roli hraje LIBOR³. Jedná se o nabídkové sazby na mezibankovním trhu, za které může jedna banka uložit peníze v druhé bance. U proměnlivé sazby dochází k její fixaci vždy na počátku daného období a k výplatě pak na jeho konci.

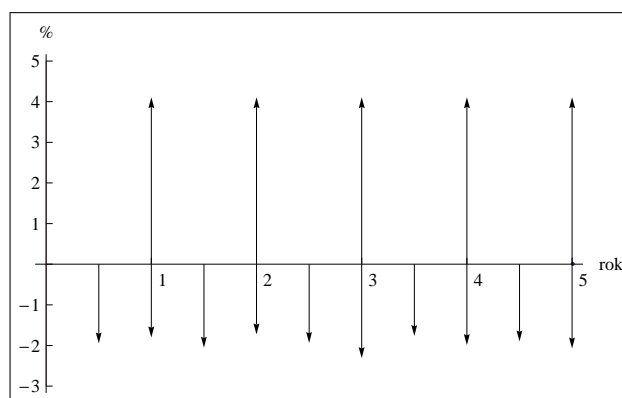
Jak v systému Bloomberg tak i Reuters jsou kotovány fixní sazby úrokových swapů tzv. at par. To znamená, že kotovaná sazba je stanovena tak, aby současná hodnota pevné a pohyblivé části swapu byla v okamžiku emise stejná. Přitom pohyblivou sazbu představuje šestiměsíční sazba PRIBOR. Toto je jeden z příkladů, kdy platby pevné části swapu nastávají s roční frekvencí, zatímco pohyblivý úrok je vyplácen půlročně. Graficky je průběh plateb swapu, kdy platíme každých šest měsíců pohyblivou sazbu a ročně inkasujeme sazbu pevnou zachycen na obrázku 1.1.

Výplaty z pevné a pohyblivé části swapu je možné chápat jako výplaty dvou dluhopisů, z nichž jeden vyplácí pevný a druhý pohyblivý kupón. Nominální hodnota těchto dluhopisů je stejná jako nominál úrokového swapu. Podle toho, kterou sazbu platíme a kterou inkasujeme, pak v jednom dluhopisu zaujímáme

¹Viz například základní principy výpočtu MCEV - market-consistent embedded value.

²Prague Interbank Offer Rate

³London Interbank Offer Rate



Obrázek 1.1: Rozložení výplat úrokového swapu.

krátkou a ve druhém dluhopisu dlouhou pozici.

Při tomto pohledu zůstává jediným rozdílem výměna nominální hodnoty v době maturity dluhopisů, zatímco v případě swapů se nominál na závěr transakce nesměňuje. Vzhledem k tomu, že v jednom dluhopisu držíme krátkou pozici - nominál vyplácíme a v druhém pak dlouhou pozici - nominál přijímáme, jedná se o transakci s nulovou hodnotou a je tedy skutečně možné nahlížet na výplaty swapu jako na výplaty dvou odpovídajících dluhopisů.

Podívejme se nyní na stanovení fixní sazby swapu. Vzhledem k tomu, že tržní sazba PRIBOR představuje nejen pohyblivou sazbu swapu, ale používá se i při diskontování, bude současná hodnota pohyblivé části úrokového swapu při emisi rovna právě nominální hodnotě. Odtud plyne, že fixní úrok je stanoven tak, aby při jeho diskontování tržní sazbou byla hodnota fixní části swapu rovna pohyblivé části, resp. nominální hodnotě swapu.

Je tedy zřejmé, že fixní úroková sazba swapu reflektuje tržní sazby podobně jako kupónová sazba dluhopisů a z tohoto úhlu pohledu jsou srovnatelné. V porovnání s kupónovou úrokovou mírou⁴ státního dluhopisu je ale fixní sazba swapu za normální situace na trhu a zejména ve vyspělých ekonomikách vyšší, protože obsahuje riziko bankovního sektoru, které bývá označováno jako kreditní spread daného sektoru. Toto riziko lze považovat za normální ekonomické situace za relativně malé, protože se jedná o riziko velkých bank, které bývají považovány za stabilní.

Tedy se dá říci, že výnosová křivka odvozená ze státních dluhopisů by měla "ležet" pod výnosovou křivkou úrokových swapů. Existují ale situace, kterými může být zvýšená poptávka po úrokových swapech z důvodu např. úrokového hedgingu, které vedou k tomu, že rizikovější swapy mají nižší fixní úrokovou sazbu, než je kupón státních dluhopisů. Pak dochází k tomu, že výnosová křivka odvozená ze swapů je "položena" pod křivkou odvozenou ze státních dluhopisů buď celá, nebo jen z části v závislosti na tom, o jaké doby do splatnosti je na trhu zvýšený

⁴Státní dluhopisy se ani v primární emisi nemusí prodávat za nominální hodnotu, proto výnosnost investice do takového dluhopisu, označovaná jako kupónová úroková míra, reflektuje nejen kupónovou sazbu, ale také zisk vzniklý nižší pořizovací cenou.

zájem. Obrázek 1.2 ilustruje tuto situaci.

V dalších kapitolách budeme z důvodů dostupnosti vstupních údajů postupovat konzistentně s trhem a tedy považovat výnosovou křivku konstruovanou z údajů o úrokových swapech za bezrizikovou a jako zdroje tržních dat budeme brát údaje dostupné v systémech Bloomberg a Reuters.

GRAB
Hit <PAGE> for graph or <MENU> for list of curves.

EquityIYC
Page 2/2

MULTIPLE HISTORICAL YIELD CURVES

	CZECH REPUBLIC 1/ 4/08		CZECH SWAP CURVE 1/ 4/08		CZECH REPUBLIC 3/28/08		CZECH SWAP CURVE 3/28/08	
	YIELD	SRC	YIELD	SRC	YIELD	SRC	YIELD	SRC
3MO	3.990		3.990		4.100		4.100	
6MO	4.100		4.100		4.200		4.200	
1YR	4.093	KOMB	4.085		4.385	KOMB	4.195	
2YR	4.079	KOMB	4.105		4.280	KOMB	4.145	
3YR	4.181	KOMB	4.130		4.323	KOMB	4.160	
4YR	4.173	KOMB	4.165		4.345	KOMB	4.175	
5YR	4.263	KOMB	4.205		4.578	KOMB	4.195	
6YR			4.245				4.240	
7YR	4.379	KOMB	4.285		4.669	KOMB	4.285	
8YR	4.377	KOMB	4.325		4.667	KOMB	4.340	
9YR	4.537	KOMB	4.370		4.764	KOMB	4.400	
10YR	4.615	KOMB	4.415		4.853	KOMB	4.455	
15YR	4.718	KOMB	4.585		4.976	KOMB	4.665	
20YR			4.645				4.700	
30YR	4.882	KOMB	4.605		5.215	KOMB	4.680	

To change price source for securities, use <FMPS>.

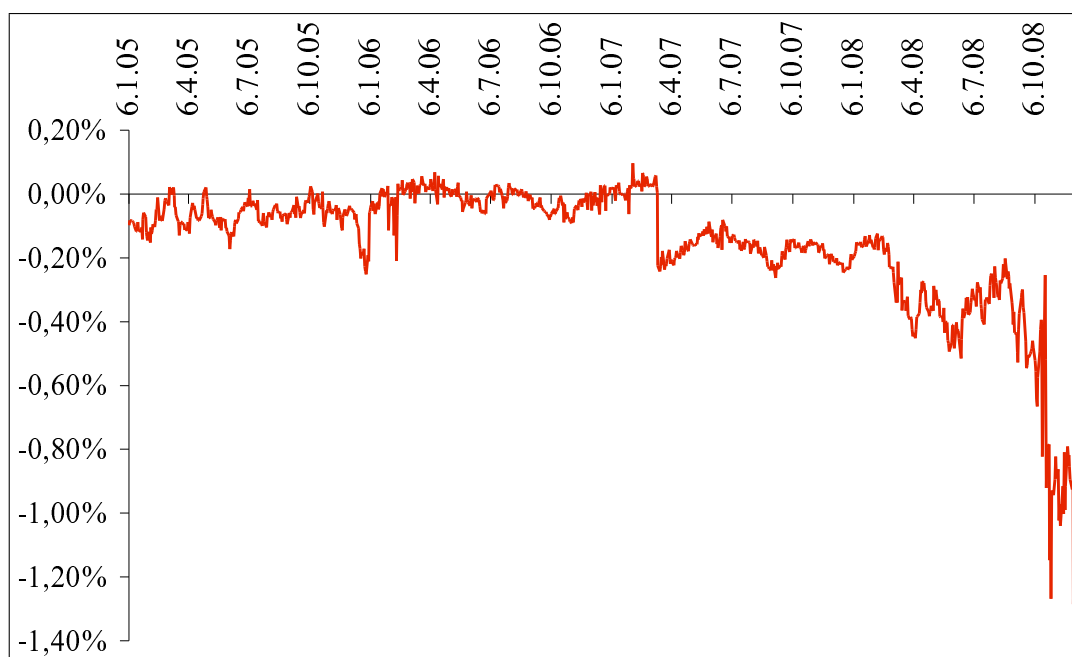
Yields are based on STANDARD settlement and are Conventional.

Australia 61 2 9777 8600 Brazil 5511 3048 4500 Europe 44 20 7330 7500 Germany 49 69 9204 1210 Hong Kong 852 2977 6000
Japan 81 3 3201 8900 Singapore 65 6212 1000 U.S. 1 212 318 2000 Copyright 2008 Bloomberg Finance L.P.
6490-1004-1 29-Jul-08 16:36:36

Obrázek 1.2: Srovnání výnosových křivek konstruovaných ze státních dluhopisů a úrokových swapů v systému Bloomberg. První dva sloupce zachycují situaci dne 4.1.2008, kdy s výjimkou dvouleté sazby nabývala výnosová křivka swapů zachycená ve druhém sloupci nižších hodnot než výnosová křivka konstruovaná ze státních dluhopisů v prvním sloupci. Zbylé dva sloupce popisují stav ke dni 28.3.2008, kdy byl rozdíl ještě výraznější a výnosová křivka konstruovaná ze swapů uvedená v posledním sloupci tabulky nabývala nižších hodnot pro všechny uvedené maturity. Podobná situace panuje na českém trhu v průběhu celého roku 2008. Tento efekt byl posílen krizí ve druhé polovině roku 2008.

Poznámka 1.2.1: Modelace uvedené v následujících kapitolách byly provedeny na tržních datech v období od 4.1.2005 do 14.4.2008. Vzhledem ke krizi, která se na finančních trzích velmi výrazně projevila zejména ve druhé polovině roku 2008, byla tato práce těsně před dokončením doplněna o graf 1.3, který znázorňuje rozdíly mezi kupónovými sazbami státních dluhopisů a fixními sazbami úrokových swapů v období od 4.1.2005 do 4.12.2008, kdy je dobře patrný vývoj obou sazeb.

Sazby státních dluhopisů jsou v tomto období pro většinu dní vyšší než sazby swapů. Výraznější výkyvy v roce 2005 se v průběhu roku 2006 stabilizovaly a zhruba do poloviny března roku 2007 byly kupónové sazby státních dluhopisů ve srovnatelné výši jako fixní sazby úrokových swapů. Ve zbylé části roku 2007 až do března roku 2008 klesly kupónové sazby swapů pod kupónové sazby dluhopisů. Rozdíl však nepřesahoval hranici 20 bazických bodů. Zbytek roku 2008 se nesl ve znamení prohlubování rozdílů mezi oběma sazbami, až na úroveň 129 bazických bodů ze dne 3.12.2008, což byl nejhorší výsledek, který nastal ve sledovaném období.



Obrázek 1.3: Srovnání rozdílů fixních sazeb úrokových swapů s maturitou za deset let a desetiletých kupónových sazeb státních dluhopisů v období od 1.1.2007 do 4.12.2008.

Dříve než přistoupíme k popisu vybraných metod konstrukce výnosové křivky z tržních dat, zavedeme pojem spotové a forwardové úrokové míry.

1.3 Spotové a forwardové úrokové míry

SPOTOVÁ ÚROKOVÁ MÍRA $R_t(T)$ je okamžitě platná úroková míra. Platí po danou dobu T od současného okamžiku t .

FORWARDOVÁ ÚROKOVÁ MÍRA $F_t(T_1, T_2)$ platí po danou dobu T_2 od sjednaného budoucího okamžiku $t + T_1$, kde t představuje současný okamžik a T_1 je doba od současného okamžiku do počátku forwardového kontraktu.

Při odvození vztahů pro spotové a forwardové úrokové míry při spojitém úročení budeme využívat jeden ze základních úrokových instrumentů, kterým je bezrizikový, bezkupónový dluhopis s jednotkovou nominální hodnotou a dobou do splatnosti T . Symbolem $P_t(T)$ označme jeho hodnotu v čase t , $P_{t+T}(0)$ je zřejmě cena tohoto instrumentu v čase maturity a platí $P_{t+T}(0) = 1$. Pokud oceníme tento dluhopis metodou diskontovaných budoucích peněžních toků při úrokové míře spojitého úročení $R_t(T)$ platné v intervalu $(t, t + T)$, obdržíme

$$P_t(T) = e^{-TR_t(T)}. \quad (1.1)$$

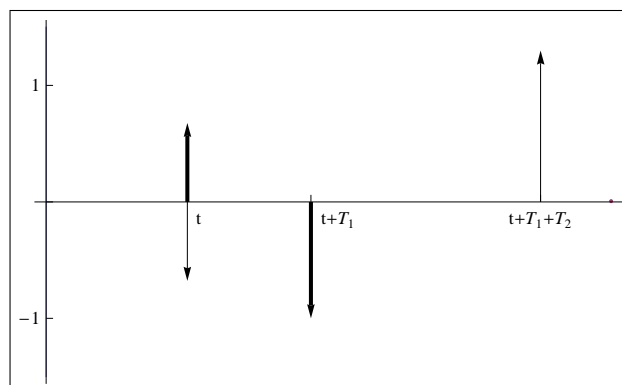
Odtud snadno získáme vztah

$$R_t(T) = -\frac{\ln P_t(T)}{T}. \quad (1.2)$$

$R_t(T)$ jako funkce proměnné t při pevně zvolené délce doby do splatnosti T představuje SPOTOVOU ÚROKOVOU MÍRU pro období délky T . Je-li čas t pevný, pak $R_t(T)$ reprezentuje VÝNOSOVOU KŘIVKU pro různé doby do splatnosti T . Limitním přechodem $T \rightarrow 0$ získáme vztah pro OKAMŽITOU ÚROKOVOU INTENZITU r_t

$$r_t = \lim_{T \rightarrow 0^+} R_t(T) = \lim_{T \rightarrow 0^+} -\frac{\ln P_t(T)}{T} = -\left. \frac{\partial}{\partial T} \ln P_t(T) \right|_{T=0}. \quad (1.3)$$

Forwardové úrokové míry $F_t(T_1, T_2)$ jsou implikované spotovými úrokovými sazbami. Forwardový kontrakt bude představovat rozhodnutí učiněné v čase t , investovat v čase $t + T_1$ peněžní jednotku do obligace s dobou do splatnosti T_2 . K ocenění tohoto instrumentu sestavíme replikační portfolio, které je graficky znázorněno na obrázku 1.4: v čase t emitujeme bezkupónový dluhopis se splatností za dobu T_1 a nominální hodnotou 1. Podle metody diskontovaných peněžních toků je cena tohoto dluhopisu v čase t rovná $e^{-T_1 R_t(T_1)}$. V časovém okamžiku t rovněž koupíme za stejnou cenu bezkupónový dluhopis s maturitou v čase $t + T_1 + T_2$. Je zřejmé, že nominální hodnota druhého dluhopisu je $e^{-T_1 R_t(T_1)} e^{(T_1+T_2)R_t(T_1+T_2)}$. Náklady na sestavení tohoto portfolia jsou při zanedbání transakčních nákladů



Obrázek 1.4: Replikační portfolio forwardového kontraktu.

nulové. Tedy peněžní jednotka investovaná na počátku intervalu $(t+T_1, t+T_1+T_2)$ se zhodnotí na částku $e^{(T_1+T_2)R_t(T_1+T_2)-T_1R_t(T_1)}$. Za předpokladu trhu bez arbitráže musí existovat forwardová úroková míra $F_t(T_1, T_2)$ dávající stejný výnos, jako investice využívající spotové kontrakty. Odtud plyne hledaný vztah mezi spotovou a forwardovou úrokovou mírou

$$e^{T_2 F_t(T_1, T_2)} = e^{(T_1+T_2)R_t(T_1+T_2)-T_1R_t(T_1)}. \quad (1.4)$$

Při využití vztahu 1.2 pro spotovou úrokovou míru dostáváme vyjádření pro forwardovou úrokovou sazbu ve tvaru

$$F_t(T_1, T_2) = -\frac{\ln P_t(T_1 + T_2) - \ln P_t(T_1)}{T_2}. \quad (1.5)$$

Volbou $T_1 = T$ a T_2 blízké hodnotě 0 dospějeme k vyjádření forwardové intenzity

$$f_t(T) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0^+} -\frac{\ln P_t(T + \Delta T) - \ln P_t(T)}{\Delta T} = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P_t(T). \quad (1.6)$$

Navíc zřejmě platí $r_t = f_t(t)$. Pokud známe $f_t(x)$ pro všechna $x \in [0, T]$, lze psát

$$P_t(T) = \exp\left(-\int_0^T f_t(x) dx\right). \quad (1.7)$$

Při diskretním úročení lze vztahy 1.2 a 1.5 vyjádřit ve tvaru

$$i_t(T) = \frac{1}{P_t(T)^{\frac{1}{T}}} - 1, \quad (1.8)$$

kde $i_t(T)$ představuje spotovou sazbu diskretního úročení stanovenou v okamžiku t platnou v intervalu $(t, t + T)$ a

$$FS_t(T_1, T_2) = \frac{1}{\left(\frac{P_t(T_1+T_2)}{P_t(T_1)}\right)^{\frac{1}{T_2}}} - 1, \quad (1.9)$$

kde $FS_t(T_1, T_2)$ označuje forwardovou sazbu diskretního úročení stanovenou v okamžiku t a platnou v období $(t + T_1, t + T_1 + T_2)$.

1.4 Konstrukce bezrizikové výnosové křivky

Základním postupem při modelování výnosové křivky z tržních dat je technika bootstrap, která umožňuje z pozorovaných fixních sazeb úrokových swapů⁵ odvodit bezkupónové spotové míry s ročním úročením. Tato metoda bude podrobněji popsána v sekci 1.4.1.

⁵Jak bylo uvedeno v závěru předchozí kapitoly, budeme pro konstrukci bezrizikové výnosové křivky používat údaje o úrokových swapech.

V praxi pozorujeme data o sazbách úrokových swapů v neekvidistantních časových okamžicích. Zpravidla v prvních deseti letech máme k dispozici kompletní pozorování⁶. Dále pak jsou kotovány swapy se splatností 12, 15, 20, 25 a 30 let, s tím, že ne každý obchodní den jsou dostupné všechny údaje. Pro techniku bootstrap ale potřebujeme znát kupónové sazby ve všech letech až po zvolenou nejvyšší maturitu, která je v tomto textu stanovena na 50 let. K proložení pozorovaných dat byly zvoleny dva přístupy

Interpolace: konstruujeme funkci, která prochází všemi uzlovými body.

Pro účely této práce byla zvolena nejjednodušší metoda interpolace, kterou je lineární interpolace. V praxi lze také použít interpolaci pomocí kubických splinů, kdy neprokládáme přímo kupónové sazby, ale z nich odvozené diskontní faktory. Důvodem je skutečnost, že kubické spliny jsou polynomy třetího stupně, které by při přímé aplikaci na kupónové sazby nezachytily například konstantní tvar výnosové křivky. Proto se aplikují na diskontní faktory, jejichž průběh zachycuje klesající a konkávní funkce. Pokud chceme využít kubické spliny, je nutná znalost tržních dat ve všech uvažovaných letech, aby bylo možné aplikovat metodu bootstrap.

Vyrovnání: hledáme funkci, která nejlépe aproximuje dané hodnoty z hlediska např. střední kvadratické chyby.

Pokud označíme písmenem N počet maturit swapů kotovaných v daný den s dobami do splatnosti T_1, T_2, \dots, T_N a kupónovými výnosy c_1, c_2, \dots, c_N , pak pro vyrovnání lze použít parametrický regresní model ve tvaru

$$c_n = g(T_n, \beta) + \epsilon_n \quad \text{pro } n = 1, 2, \dots, N, \quad (1.10)$$

kde g je funkce známého tvaru, β je vektor neznámých parametrů a ϵ_n představuje chybu vyrovnání. Odhad parametru β získáme metodou nejmenších čtverců, tedy

$$\min_{\beta} \sum_{n=1}^N (c_n - g(T_n, \beta))^2. \quad (1.11)$$

Takto získáme odhad výnosové křivky ve tvaru

$$\hat{c}_n = g(T_n, \hat{\beta}) \quad \text{pro } n = 1, 2, \dots, N. \quad (1.12)$$

Možná volba funkce g je popsána v části 1.4.2, která se zabývá popisem Nelson-Siegelovy formule.

1.4.1 Bootstrap

Technika bootstrap umožňuje odvodit z dané kupónové výnosové křivky bezkupónové spotové úrokové sazby s ročním úročením. Při popisu této techniky budeme vycházet z Doporučení č.1 ČSpA: Bootstrap a odvození forwardové

⁶V systému Reuters nejsou k dispozici data o šestiletých swapech.

křivky.

Jak bylo uvedeno v části 1.2, je současná hodnota pohyblivé části úrokového swapu rovna jeho nominální hodnotě a z předpokladu, že cena swapů je kotovaná at par plyne, že i současná hodnota fixní části musí být rovna téže hodnotě. Vzhledem k tomu, že nominální hodnota vystupuje v následujících výpočtech na obou stranách výchozích rovnic a lze tedy její hodnotou krátit, budeme pro zjednodušení zápisu předpokládat, že nominální hodnota je v jednotkové výši.

Další důležitou skutečností je, že úrokové swapy jsou kotovány na bázi Act/360 a tedy v dalších výpočtech musíme zohlednit použitou kalendářní konvenci.

Uvažujme nyní jen fixní část úrokového swapu. Jak bylo uvedeno v části 1.2, lze tuto část považovat za dluhopis s kupónem ve výši fixní sazby úrokového swapu a nominál je, jak bylo právě vysvětleno, roven jedné. Pak pro tuto část jednoletého úrokového swapu bude platit vztah

$$PV_{fix} = (1 + c_t(1) * AF_t(1)) * DF_t(1), \quad (1.13)$$

kde PV_{fix} představuje současnou hodnotu fixní části úrokového swapu, $c_t(1)$ je jednoletá fixní sazba úrokového swapu platná v okamžiku t , $AF_t(1)$ je faktor odpovídající kalendářní konvenci Act/360, tedy aktuální počet dní v prvním roce od okamžiku t dělený 360, $DF_t(1)$ představuje jednoletý diskontní faktor od okamžiku t ⁷. Navíc platí

$$PV_{fix} = 1. \quad (1.14)$$

Tedy pro diskontní faktor získáváme vyjádření

$$DF(1) = \frac{1}{1 + c(1)AF(1)}. \quad (1.15)$$

Na základě znalosti diskontního faktoru pak snadno určíme jednoletou bezkupónovou úrokovou sazbu

$$i(1) = \frac{1}{DF(1)} - 1, \quad (1.16)$$

odpovídající jednoletou sazbu spojitého úročení

$$R(1) = \ln(1 + i(1)) \quad (1.17)$$

a také zpětně vyjádříme fixní sazbu swapu

$$c(1) = \frac{1 - DF(1)}{AF(1)DF(1)}. \quad (1.18)$$

Obecně pak pro fixní část T-letého úrokového swapu dostáváme rovnost ve tvaru

$$1 = c(T)AF(1)DF(1) + c(T)AF(2)DF(2) + \dots + (1 + c(T)AF(T))DF(T), \quad (1.19)$$

⁷Pro zjednodušení značení budeme v této kapitole dále vynechávat index t , který udává závislost formule na současném okamžiku.

odkud analogicky plynou rovnosti pro diskontní faktor na T let

$$DF(T) = \frac{1 - c(T) \sum_{k=1}^{T-1} AF(k)DF(k)}{1 + c(T)AF(T)}, \quad (1.20)$$

T -letou bezkupónovou spotovou úrokovou sazbu

$$i(T) = DF^{-\frac{1}{T}} - 1, \quad (1.21)$$

odpovídající sazbu na T let při spojitém úročení

$$R(T) = \ln(1 + i(T)) \quad (1.22)$$

a vztah pro fixní sazbu úrokového swapu

$$c(T) = \frac{1 - DF(T)}{\sum_{k=1}^T AF(k)DF(k)}. \quad (1.23)$$

Jednoleté forwardové sazby při diskrétním úročení pak snadno určíme z vypočtených spotových sazeb a vzhledem ke vztahu 1.21 je můžeme vyjádřit v následujícím tvaru

$$FS(T, 1) = \frac{DF(T-1)}{DF(T)} - 1, \quad T = 2, 3, 4, \dots \quad (1.24)$$

1.4.2 Nelson-Sieglova formule

Tato formule vychází ze vztahu pro okamžitou forwardovou intenzitu. Charles R. Nelson a Andrew F. Siegel předpokládali, že okamžitou forwardovou intenzitu lze vyjádřit ve tvaru

$$f_t(T) = \beta_{t0} + \beta_{t1} \exp\left(\frac{-T}{\gamma_t}\right) + \beta_{t2} \frac{T}{\gamma_t} \exp\left(\frac{-T}{\gamma_t}\right), \quad (1.25)$$

kde $\beta_{t0}, \beta_{t1}, \beta_{t2}$ a γ_t jsou neznámé parametry⁸.

Ze vztahů 1.2 a 1.6 plyne souvislost mezi forwardovou intenzitou a spotovou úrokovou mírou

$$R(T) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx. \quad (1.26)$$

Tedy dosazením vztahu 1.25 do 1.26 získáme po integraci Nelson-Sieglovu formuli pro spotovou úrokovou míru $R(T)$

$$R(T) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{1 - e^{-T/\gamma}}{T/\gamma} - \beta_2 e^{-T/\gamma}. \quad (1.27)$$

⁸Pro zjednodušení zápisu budeme v dalším vynechávat index t , který určuje závislost výrazu na okamžiku t , ve kterém křivku konstruujeme.

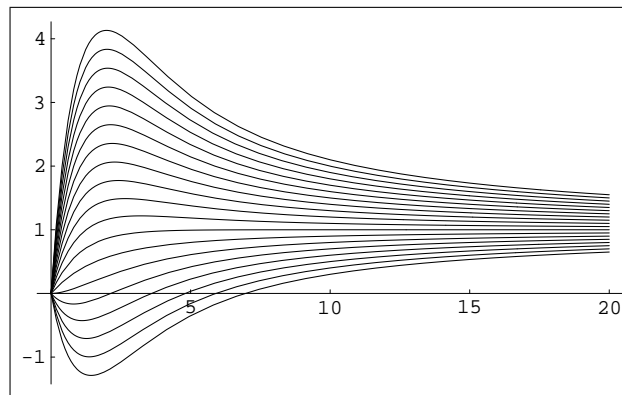
Význam parametrů Nelson-Sieglova modelu vyplývá z následující myšlenky: pokud provedeme limitní přechod vztahu 1.27 pro $T \rightarrow \infty$, dostaneme β_0 . Tedy β_0 představuje asymptotickou hladinu spotových měr. Vzhledem k tomu, že spotové sazby jsou určeny jako průměr forwardových sazeb podle vztahu 1.26, platí totéž i pro forwardové úrokové sazby. Parametr β_0 musí tudíž být kladný. Pro $T \rightarrow 0$ ve vztahu 1.27, získáváme počáteční hladinu spotové resp. forwardové křivky danou výrazem $(\beta_0 + \beta_1)$ a tedy by tento součet neměl být záporný. Jak je uvedeno v [12], tvary výnosové křivky, které jsme schopni pomocí vztahu 1.27 modelovat, závisí v podstatě na jediném parametru β_2 . Při volbě $\gamma = 1$, $\beta_0 = 1$ a počáteční hladině $(\beta_0 + \beta_1) = 0$ se rovnice 1.27 redukuje do tvaru

$$R(T) = 1 - (1 - \beta_2) \frac{1 - e^{-T}}{T} - \beta_2 e^{-T}. \quad (1.28)$$

Při volbě β_2 v intervalu $(-6, 12)$, získáme možné tvary výnosové křivky, jak ukazuje obrázek 1.5. Znaménko tohoto parametru určuje způsob vychýlení výnosové křivky a jeho absolutní hodnota udává velikost vychýlení. Je-li parametr γ záporný, pak

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \infty. \quad (1.29)$$

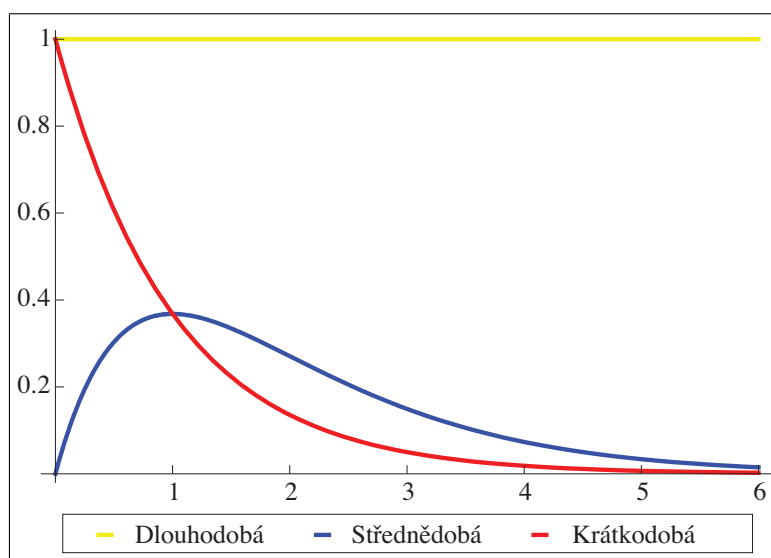
Proto parametr γ musí být nezáporný a je možné jej interpretovat jako pozici vychýlení na časové ose.



Obrázek 1.5: Tvarová variabilita Nelson-Sieglova modelu.

Druhý pohled na tvarové možnosti daného modelu je prostřednictvím koeficientů Nelson-Sieglova modelu daného rovnicí 1.25, respektive vymezením krátkodobých, střednědobých a dlouhodobých komponent forwardové (a tudíž i spotové) křivky. Jak je uvedeno v [12], první sčítanec ve vztahu 1.25 lze chápat jako konstantní jednotkovou funkci násobenou koeficientem β_0 . Tedy i při limitním přechodu k nekonečnu nemůže jeho hodnota ve vztahu 1.25 pro $\beta_0 \neq 0$ klesat k nule. Proto β_0 označuje dlouhodobou komponentu v modelu forwardové intenzity. β_2 pak představuje střednědobou komponentu vzhledem k tomu, že funkce $\frac{T}{\gamma} \exp^{-\frac{T}{\gamma}}$ je při přechodu k nule i nekonečnu nulová a tedy v krátkodobém

ani dlouhodobém měřítku výrazně neovlivní hodnotu forwardové intenzity. Zbývá poslední komponenta β_1 , která je násobená funkcí $\exp^{-\frac{T}{\gamma}}$, která nabývá svého maxima v bodě nula a minima při přechodu k nekonečnu a její průběh je monotónní. Z těchto důvodů je označována jako krátkodobá komponenta v modelu forwardové intenzity. Grafické znázornění je uvedeno na obrázku 1.6.



Obrázek 1.6: Komponenty N-S modelu.

Ve zbylé části této sekce se budeme věnovat tomu, jak aplikovat Nelson-Sieglovu formuli v praxi. Cílem je, aby výsledné tržní kupónové sazby a kupónové sazby vypočtené ze spotových sazeb pomocí Nelson-Sieglovy metody vykazovaly co nejmenší čtvercovou odchylku. Vycházet přitom budeme z odborného doporučení ČSpA č.1 pro stanovení bezrizikové výnosové křivky.

Symbolem $c(T)$ budeme opět označovat sazby úrokových swapů pozorované na trhu. Z Nelson-Sieglova modelu upraveného do tvaru 1.27 určíme spotové spojitě úročené sazby. Pro převod na sazby s ročním úročením použijeme vztah

$$i(T) = e^{R(T)} - 1. \quad (1.30)$$

Odtud odvodíme zřejmým způsobem diskontní faktor

$$DF(T) = (1 + i(T))^{-T}. \quad (1.31)$$

Využijeme vztah 1.23 k určení úrokových sazeb swapů kotovaných v kalendářní konvenci Act/360 odvozených dle Nelson-Sieglova modelu $c^{N-S}(T)$. Tyto sazby pak porovnáme s tržními a snažíme se minimalizovat jejich kvadratickou odchylku

$$\min_{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \gamma} \sum (c^{N-S}(T) - c(T))^2. \quad (1.32)$$

Hodnoty parametrů $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ a γ odhadneme numericky s počáteční volbou parametrů $\beta_0 = c(20), \beta_1 = c(1) - c(20), \beta_2 = 0$ a $\gamma = 2$.

1.5 Číselné porovnání výnosových křivek

Nyní se zaměříme na srovnání výnosových křivek v závislosti na tom, ze kterého systému bereme zdrojová data a jaký způsob konstrukce jsme k odvození výnosové křivky zvolili. Pro účely této práce byly použity údaje o úrokových swapech za období od 4.1.2005 do 14.4.2008 ze systému Bloomberg a Reuters. Každý obchodní den je pak s využitím obou systémů konstruovaná výnosová křivka pomocí Nelson-Sieglovy metody a lineární interpolace, kdy extrapolace od poslední pozorované maturity do padesáti let vychází z předpokladu, že forwardové sazby jsou rovny poslední pozorované hodnotě.

Rozdíly v jednotlivých metodách a zdrojových datech ukážeme při ocenění bezkupónového dluhopisu s nominální hodnotou 10 000 Kč a splatností za 5, 10, 20 a 50 let, přitom na podrobný popis se zaměříme u splatností 5 a 50 let, u zbylých uvedeme jen souhrnné informace v závěru této části.

Při ocenění bezkupónového dluhopisu metodou diskontovaných peněžních toků je zřejmé, že jediná hodnota, která ovlivňuje výslednou cenu, je výše diskontního faktoru v roce maturity. Jak potvrdí následující modelace, pro tento typ instrumentu je vhodnější použití metody Nelson-Siegel v případě, že k výkyvu tržních sazeb dochází přímo v roce maturity daného dluhopisu, vyrovnávací metody zohledňují okolní sazby a tím zmírňují případný jednoletý výkyv tržních sazeb. Naopak metoda lineární interpolace je vhodnější v situaci, kdy v roce maturity dluhopisu je tržní sazba stabilní, pak není potřeba zjišťovat, jak se chovaly tržní sazby do roku maturity, protože se interpolovaná hodnota bude přímo rovnat tržní sazbě bez ohledu na minulý vývoj.

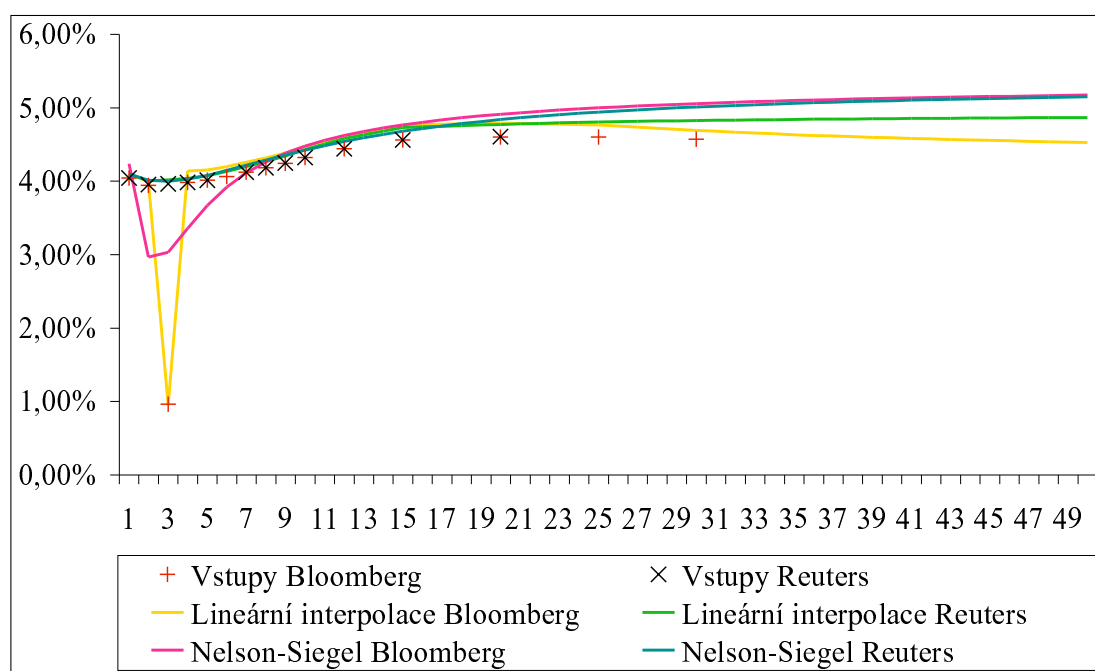
Srovnání provedeme ze dvou hledisek: prvním bude citlivost dané metody na odchylky vstupních dat a ve druhém se zaměříme na dopad zvolených vstupních hodnot do jednotlivých metod konstrukce výnosové křivky. Začneme rozbohem "kvality" pozorovaných tržních dat, které ukážeme na relativních rozdílech

5 let	Bloomberg		Reuters		Relativní rozdíly	
	PV N-S metoda	PV lin. interpolace	PV N-S metoda	PV lin. interpolace	N-S metoda	Lineární interpolace
4.1.2006	8 629	8 741	8 556	8 550	0,86%	2,24%
14.2.2006	8 696	8 700	8 613	8 603	0,96%	1,12%
27.2.2008	8 033	8 136	8 141	8 136	-1,33%	0,00%
29.2.2008	8 077	8 185	8 194	8 193	-1,43%	-0,10%
3.3.2008	8 080	8 186	8 208	8 203	-1,56%	-0,21%
5.3.2008	8 088	8 199	8 207	8 212	-1,45%	-0,17%
12.3.2008	8 036	8 130	8 137	8 133	-1,25%	-0,03%
10.4.2008	8 352	8 160	8 189	8 191	2,00%	-0,38%

Tabulka 1.1: Největší rozdíly v ocenění bezkupónového dluhopisu s nominální hodnotou 10 000 a maturitou za pět let.

mezi různými systémy zdrojových dat v rámci jedné metody⁹.

Tabulka 1.1 zachycuje přehled dnů, kdy došlo k největším rozdílům. Jak je vidět z jejích prvních dvou řádků, pouze ve dvou dnech došlo při použití metody lineární interpolace k vyšším rozdílům. Zbylé řádky mapují rozdíly větší než jedno procento při použití Nelson-Sieglovy metody. Odborník z oblasti asset managementu vysvětluje tyto rozdíly následovně: v roce 2006 vznikly tím, že v systému Bloomberg byly chybně kotovány tříleté a pětileté sazby, které byly na nižší úrovni než obvykle. Proto Nelson-Sieglova metoda, která dané kupónové sazby vyrovnává, nereagovala na chyby v kotaci tak výrazně, jako lineární interpolace. Naopak dne 10.4.2008, kdy byla v systému Bloomberg kotována chybně tříletá sazba (místo obvyklé hodnoty na hladině čtyř procent byla kotována na úrovni jednoho procenta), jsou výraznější rozdíly při použití Nelson-Sieglovy formule, protože při vyrovnání ovlivnila tříletá sazba okolní hodnoty. Zbylé rozdíly vzniklé v roce 2008 již nejsou chybou v kotaci, ale odrážejí skutečnou tržní situaci, při níž je roční sazba vyšší než dvouletá a v některých dnech i než čtyřletá sazba. Pro ilustraci uvedeme graf 1.7 shrnující tržní a modelovanou situaci ze dne 10.4.2008, kdy nastala chyba v kotaci tříleté sazby v systému Bloomberg.



Obrázek 1.7: Srovnání výnosových křivek a vstupních hodnot pro systémy Bloomberg a Reuters ze dne 10.4.2008.

V tabulce 1.2 je uvedeno, v jakém procentu dnů ve sledovaném období nepřekročila relativní odchylka v ocenění bezkupónových dluhopisů hladinu danou

⁹Rozdíl v ocenění při volbě dat ze systému Bloomberg a Reuters vztažený na cenu získanou při použití dat ze systému Reuters pro danou metodu. Záporné relativní rozdíly indikují, že cena při volbě systému Bloomberg je nižší než cena při použití systému Reuters.

Relativní rozdíl	N-S metoda	Lineární interpolace
do 0,00%	5,63%	32,63%
do 0,10%	72,42%	73,00%
do 0,50%	98,59%	99,65%
do 2,24%	100,00%	100,00%

Tabulka 1.2: Rozložení počtu dnů ve sledovaném období v závislosti na výši vzniklé relativní odchylky v ocenění mezi systémy Bloomberg a Reuters v rámci zvoleného způsobu konstrukce výnosové křivky u pětiletých bezkupónových dluhopisů.

v prvním sloupci tabulky. Z prvního řádku lze usuzovat, že existuje větší procento oceňovacích dnů, kdy rozdíly mezi tržními sazbami kotovanými v systému Bloomberg a Reuters nastávají v jiných než pětiletých sazbách. Ovšem rozdíly, které tyto odchylky způsobují, jsou velmi malé. Proto se výsledky získané pomocí dat ze systému Bloomberg a Reuters shodují ve větším procentu dní při použití metody lineární interpolace. Metoda vyrovnání reflektuje i okolní sazby a tudíž se nulový¹⁰ relativní rozdíl vyskytuje pouze v přibližně 5,6% ze sledovaných dnů.

Podobně se podíváme i na relativní rozdíly vzniklé odlišnými metodami konstrukce výnosové křivky¹¹ v rámci jednoho systému zdrojových dat. Přehled dnů, kdy došlo k největším výkyvům zachycuje tabulka 1.3. V systému Reuters nedošlo ve sledovaném období k tak výrazným chybám v kotaci jako v systému Bloomberg. To se projevilo tím, že ani největší relativní rozdíly nepřevyšují v absolutní hodnotě hladinu 0,16% a tedy se při stabilních datech nijak významně ne-

5 let	Bloomberg		Reuters		Relativní rozdíly	
	PV N-S metoda	PV lin. interpolace	PV N-S metoda	PV lin. interpolace	Bloomberg	Reuters
Datum						
29.2.2008	8077,249	8185,3043	8194,5	8193,4031	-1,32%	0,01%
5.3.2008	8087,608	8198,5988	8206,7	8212,2264	-1,35%	-0,07%
10.4.2008	8352,174	8159,8177	8188,6	8191,2607	2,36%	-0,03%
1.9.2005	8789,645	8788,4642	8769,8	8757,2386	0,01%	0,14%
31.5.2006	8408,974	8403,5425	8404	8416,4987	0,06%	-0,15%
18.1.2007	8404,025	8413,1059	8399,6	8413,4079	-0,11%	-0,16%

Tabulka 1.3: Největší relativní rozdíly mezi různými metodami konstrukce výnosových křivek při dané volbě systému tržních dat u pětiletých bezkupónových dluhopisů.

¹⁰Ve skutečnosti se jedná o rozdíl v rozmezí 0 až 0,0049%.

¹¹Rozdíl v ocenění při konstrukci výnosové křivky metodou Nelson-Siegel a lineární interpolace vztažený na cenu získanou s využitím interpolované výnosové křivky pro zvolený systém zdrojových dat. Záporné relativní rozdíly indikují, že cena získaná při použití výnosové křivky konstruované Nelson-Siegelovou metodou je nižší než cena při použití interpolované výnosové křivky.

projeví způsob konstrukce výnosové křivky na krátkém konci, zatímco při použití tržních dat ze systému Bloomberg byly nejvyšší odchylky o řád vyšší a volba způsobu konstrukce výnosové křivky sehrává v tomto případě významnější roli.

Tabulka 1.4 uvádí pro jaké množství dnů nedošlo k překročení relativního rozdílu ocenění daného prvním sloupcem tabulky.

Relativní rozdíl	Bloomberg	Reuters
do 0,00%	6,34%	7,28%
do 0,10%	89,91%	94,48%
do 0,50%	99,06%	100,00%
do 2,36%	100,00%	100,00%

Tabulka 1.4: Rozložení počtu dnů ve sledovaném období v závislosti na výši vzniklé relativní odchylky v ocenění při použití výnosové křivky konstruované metodou lineární interpolace a Nelson-Sieglovou metodou pro zvolený systém tržních dat u pětiletých bezkupónových dluhopisů.

Z předchozího popisu je patrné, že pokud chceme použít tržní data k odvození výnosové křivky, je nutné nejdříve zkoumat, zda případné odchylky od obvyklé hladiny reflektují skutečné tržní změny nebo jde o chybné kotace v systému. Ty mohou nastat například vlivem toho, že některý ze zprostředkovatelů kotuje kvůli chybě nulovou sazbu, která ovlivní výslednou hodnotu zachycenou na konci dne v systému. Tyto hodnoty je vhodné při konstrukci buď vůbec neuvažovat nebo nahradit odhadem z hodnot kotovaných v okolních dnech. Patrnější vliv chybné kotace je u bezkupónových dluhopisů s nominální hodnotou 10 000 a maturitou za 50 let.

Tabulka 1.5 shrnuje největší relativní odchylky systémů vstupních dat pro obě metody konstrukce výnosové křivky. V první části tabulky jsou uvedeny největší rozdíly, které vykazují obě metody současně. Následují pak dny s významnými odchylkami při použití metody lineární interpolace a v poslední části jsou doplněny jedny z největších rozdílů Nelson - Siegelovy metody. Relativní srovnání cen v systému Bloomberg a Reuters je definováno stejně jako u pětiletých dluhopisů.

Je zajímavé si uvědomit, že zatímco v případě metody Nelson-Siegel postihnou tyto odchylky veškeré rozdíly, které jsou větší než přibližně 20%, tak u metody lineární interpolace pokrývají zmiňované hodnoty pouze dny, kdy vznikly relativní rozdíly vyšší než 40%. Na první pohled je patrné, že v případě enormních rozdílů v roce 2008 se jedná o chybu. V tyto dny je sazba na třicet let vlivem toho, že s nimi nebylo obchodováno, chybně kotována na hladině 0,7% místo obvyklé hodnoty na úrovni 4,7%. Tedy modelované forwardové sazby byly v dlouhodobém horizontu záporné a při předpokladu konstantních forwardových sazeb pro extrapolaci se výnosová křivka dostala na dlouhém konci na nulovou hodnotu, jak je patrné z grafu konstruovaného pro den 29.2.2008 na obrázku 1.8. Diskontní faktor odvozený z této sazby je roven jedné a současná cena dluhopisu vychází v chybné výši rovné nominální hodnotě.

50 let Datum	Bloomberg		Reuters		Relativní rozdíly	
	PV N-S metoda	PV lin. interpolace	PV N-S metoda	PV lin. interpolace	N-S metoda	Lineární interpolace
7.3.2005	1 904	86	1 062	1 022	79%	-92%
7.7.2005	1 622	569	1 270	1 197	28%	-52%
27.2.2008	4 093	10 000	777	847	427%	1081%
29.2.2008	4 248	10 000	815	903	421%	1007%
3.3.2008	4 247	10 000	818	949	419%	954%
5.3.2008	4 251	10 000	783	949	443%	954%
12.3.2008	4 207	10 000	838	938	402%	966%
14.2.2006	1 310	2 020	1 317	1 255	0%	61%
13.7.2006	1 116	1 592	1 089	970	2%	64%
14.12.2007	868	1 197	775	847	12%	41%
17.1.2008	932	1 250	837	890	11%	40%
18.1.2008	948	1 293	824	865	15%	49%
31.1.2008	904	1 276	812	899	11%	42%
10.9.2007	920	1 012	746	868	23%	17%
22.11.2007	907	952	742	907	22%	5%
28.11.2007	881	1 001	725	891	21%	12%
27.3.2008	1 765	710	721	871	145%	-19%
3.4.2008	862	1 059	641	830	35%	28%
7.4.2008	875	1 088	723	912	21%	19%

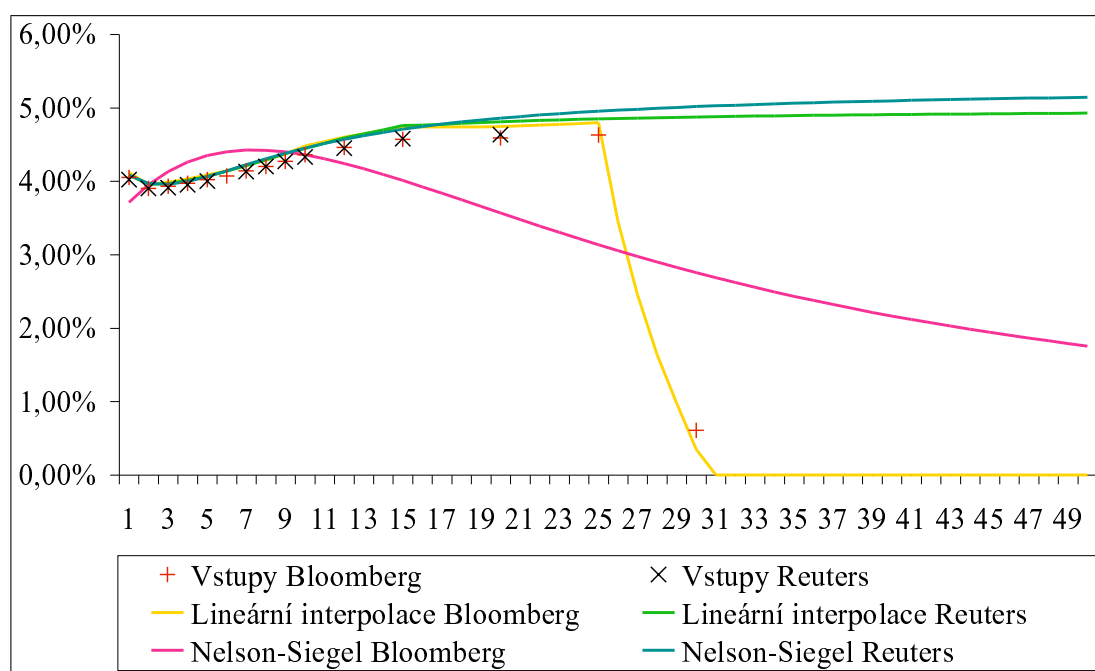
Tabulka 1.5: Největší rozdíly v ocenění bezkupónového dluhopisu s nominální hodnotou 10 000 a maturitou za padesát let.

Dne 7.3.2005 již není na první pohled zřejmé, že se opět jedná o chybu kotace v systému Bloomberg - nesprávně byla kotována dvanácti- a patnáctiletá sazba. V tomto případě je nutná konzultace s odborníkem, který odhalí, zda se jedná o tržní odchylku nebo o chybu.

Dobrou představu o citlivosti dané metody konstrukce výnosové křivky na vstupních datech v dlouhém horizontu dává tabulka 1.6. Výnosová křivka stanovená Nelson-Sieglovou metodou dává výrazně lepší výsledky než křivka konstruovaná lineární interpolací s následnou extrapolací provedenou za předpokladu konstantních forwardových sazeb. Právě nutnost extrapolovat výnosovou křivku způsobuje její vysokou závislost na posledních pozorovaných hodnotách. Vzhledem k tomu, že se jedná o sazby, se kterými se tolik neobchoduje, mohou být chyby v kotaci velmi významné.

Tabulka 1.7 potvrzuje závěry odvozené na krátkém konci výnosové křivky. Vzhledem k tomu, že systém Reuters nevykazuje ve sledovaném období významnější problémy v kotaci, jsou rozdíly v modelaci výnosové křivky při použití těchto vstupních dat daleko menší, než rozdíly vznikající při užití vstupních hodnot ze systému Bloomberg.

Pro úplnost dodejme ještě souhrnnou informaci o relativních rozdílech mezi použitím lineární interpolace a Nelson-Sieglovy metody zachycenou v ta-



Obrázek 1.8: Srovnání výnosových křivek a vstupních hodnot pro systémy Bloomberg a Reuters ze dne 29.2.2008.

bulce 1.8.

V případě maturit za 10 a 20 let zde uvedeme pouze souhrnné údaje. Nejdříve stanovíme výši relativních odchylek u všech maturit tak, aby u 99% vstupních dat vznikla relativní odchylka menší než stanovená hodnota, tedy minimální počet vyhovujících vstupů pro danou maturitu musí být 844 z 852 možných oceňovacích dnů. Tento způsob srovnání umožňuje posoudit "kvalitu" vstupních údajů s vyloučením "extrémních" chyb v kotaci (jako byla např. dne 29.2.2008 u třicetileté sazby swapu), které v tomto vzorku dat nepřevyšují jedno procento. Závěry shrnuje tabulka 1.9. Z tabulky 1.9 je patrné, že lepší výsledky, tedy nižší hladiny relativních odchylek, u splatností 5, 10 a 20 let vychází pro metodu lineární interpolace. Naopak v dlouhém horizontu dává Nelson-

Relativní rozdíl	N-S metoda	Lineární interpolace
do 1,00%	24,88%	17,25%
do 5,00%	72,89%	34,04%
do 10,00%	89,44%	56,10%
do 20,00%	98,36%	90,49%
do 52,44%	99,18%	99,06%

Tabulka 1.6: Rozložení počtu dnů ve sledovaném období v závislosti na výši vzniklé relativní odchylky v ocenění mezi systémy Bloomberg a Reuters v rámci zvoleného způsobu konstrukce výnosové křivky u padesátiletých bezkupónových dluhopisů.

50 let	Bloomberg		Reuters		Relativní rozdíly	
	PV N-S metoda	PV lin. interpolace	PV N-S metoda	PV lin. interpolace	Bloomberg	Reuters
7.3.2005	1904,12	85,770919	1062,3	1021,5681	2120,01%	3,99%
7.7.2005	1621,538	569,32119	1269,7	1196,7735	184,82%	6,10%
27.2.2008	4093,23	10000	776,57	846,66608	-59,07%	-8,28%
29.2.2008	4248,346	10000	814,82	903,01874	-57,52%	-9,77%
3.3.2008	4246,828	10000	817,89	949,01461	-57,53%	-13,82%
5.3.2008	4250,771	10000	783,47	949,0268	-57,49%	-17,45%
12.3.2008	4206,583	10000	838,44	937,90875	-57,93%	-10,61%
27.3.2008	1764,855	709,72541	720,66	871,01752	148,67%	-17,26%
16.2.2006	1299,81	1229,2934	1310,9	974,28755	5,74%	34,55%
24.5.2006	1057,02	998,96816	1066,2	849,18219	5,81%	25,55%
3.4.2008	861,7401	1058,8136	640,64	830,22109	-18,61%	-22,83%
7.4.2008	874,7551	1088,3143	723,37	911,65626	-19,62%	-20,65%

Tabulka 1.7: Největší relativní rozdíly mezi různými metodami konstrukce výnosových křivek při dané volbě systému tržních dat u padesátiletých bezkupónových dluhopisů.

Sieglova metoda výrazně lepší výsledky.

Pro detailnější popis rozložení relativních odchylek stanovíme "přípustné hladiny" těchto odchylek mezi systémem Bloomberg a Reuters. Budeme sledovat, v jak velkém procentu oceňovacích dní jsou tyto hladiny splněny a tudíž lze považovat vstupy získané ze systému Bloomberg a Reuters za srovnatelné. Při tomto přístupu nebereme v úvahu chyby v kotaci, které zpravidla způsobí větší rozdíl, než je přípustná hladina. Tabulka 1.10 shrnuje zvolené hladiny i procento vyhovujících vstupů pro obě metody konstrukce výnosové křivky. I při tomto pohledu (viz tabulka 1.10) dostáváme podobné závěry jako dříve.

relativní rozdíl	Bloomberg	Reuters
do 1,00%	3,87%	7,39%
do 5,00%	22,54%	43,54%
do 10,00%	76,17%	83,92%
do 20,00%	97,18%	99,53%
do 34,55%	99,65%	100,00%

Tabulka 1.8: Rozložení počtu dnů ve sledovaném období v závislosti na výši vzniklé relativní odchylky v ocenění při použití výnosové křivky konstruované metodou lineární interpolace a Nelson-Sieglovou metodou pro zvolený systém tržních dat u padesátiletých bezkupónových dluhopisů.

Maturita	N-S metoda	Lineární interpolace
5 let	0,63%	0,36%
10 let	0,77%	0,69%
20 let	5,25%	3,24%
50 let	34,50%	52,44%

Tabulka 1.9: Hladiny relativních odchylek v ocenění bezkupónového dluhopisu, které nejsou v 99% oceňovacích dnů překročeny.

Maturita	Odchylka	N-S metoda	Lineární interpolace
5 let	0,1%	72%	73%
10 let	0,2%	82%	74%
20 let	1%	75%	86%
50 let	5%	73%	34%

Tabulka 1.10: Procento oceňovacích dnů, ve kterých nedochází k většímu relativnímu rozdílu v ocenění bezkupónového dluhopisu, než je daná odchylka.

1.6 Shrnutí

Porovnání výsledků ukazuje, že automatizované způsoby konstrukce výnosové křivky nejsou vhodné. Zvláště pak v případě, kdy konstruuje výnosovou křivku ke dni, kdy se málo obchoduje, je nutná velká obezřetnost při volbě vstupních dat.

Pro účely této práce nebyly tržní hodnoty ani v případě chybné kotace upravovány. Cílem této kapitoly bylo ukázat, jak velké rozdíly mohou nastat bez zásahu do tržních vstupů, tedy nejhorší možný výsledek konstrukce výnosové křivky.

Z porovnávaných dat vyplývá, že systém Reuters vykazuje ve sledovaném období méně chybných kotací než systém Bloomberg. Nevýhoda systému Reuters spočívá v tom, že není kotována šestiletá sazba a sazby na dobu delší než dvacet let, které jsou v systému Bloomberg dostupné.

Z hlediska způsobu konstrukce výnosové křivky plynou následující závěry: Nelson-Sieglova metoda vyžaduje odhad parametrů pro každý obchodní den zvlášť, zatímco použití metody lineární interpolace je velmi snadné bez jakékoli kalibrace. Křivka konstruovaná metodou lineární interpolace kombinované s extrapolací při konstantních forwardových sazbách je na dlouhém konci výrazně citlivější na odchylky ve vstupních datech než výnosová křivka vyrovnaná metodou Nelson-Siegel, zatímco v části, kde máme k dispozici tržní vstupy a není potřeba extrapolovat, je citlivost na vstupní data řádově stejná, jako u Nelson-Sieglovy metody.

Kapitola 2

Black-Scholesův model

Black-Scholesův model představuje běžné užívaný nástroj pro oceňování evropských opcí. V praxi nebývají kotovány přímo ceny opcí, ale pouze volatilita na základě kterých se cena opcí v Black-Scholesově modelu počítá.

Takto vypočítané ceny derivátů se využívají také pro účely kalibrace některých modelů úrokových měr a to tím způsobem, že parametry v těchto modelech jsou nastaveny tak, aby rozdíl v ocenění derivátů pomocí Black-Scholesova modelu a při využití modelů úrokových měr byl co nejmenší. V této práci použijeme právě zmíněný postup kalibrace v kapitole 3 pro Hull-Whiteův model. Oceňovat přitom budeme z důvodu dostupnosti údajů o tržních volatilitách swapce. Proto se v této kapitole zaměříme nejenom na odvození Black-Scholesovy formule, ale také na její modifikaci pro swapce.

2.1 Swapce

Swapce je opcí, jejímž podkladovým aktivem je úrokový swap. Swapce dává držiteli právo uzavřít úrokový swap v budoucím okamžiku T za podmínek stanovených při uzavření opce v čase t . Přitom držitel opce se na základě tržních podmínek v době maturity opce T rozhodne, zda ji využije a uzavře podkladový swap s fixní sazbou R nebo opce nevyužije a uzavře nový swap za výhodnějších podmínek s aktuální kotovanou sazbou R_T .

Pro odvození výplatní funkce swapce připomeňme souvislost swapu a dluhopisu, která byla popsána v první kapitole: swap lze chápat jako výměnu dluhopisů s pevným a pohyblivým kupónem. V okamžiku sjednání swapu je ale současná hodnota dluhopisu s pohyblivým úrokem rovna nominální hodnotě dluhopisu, resp. swapu. Proto swapce de facto představuje opci na výměnu dluhopisu s pevným úrokem za nominální hodnotu swapu. V případě, že držitel swapce má právo platit pohyblivou sazbu a obdržet pevnou sazbu, jedná se o call opci na dluhopis s pevným kupónem a realizační cenou rovnou nominální hodnotě swapu, v opačném případě jde o put opci na totéž podkladové aktivum.

Výplaty v čase t_k u swapce, kde máme právo platit pohyblivou sazbu

a inkasovat pevnou (tj. call opce na dluhopis s pevným kupónem), jsou ve výši

$$NAF_{t_k} \max(R_T - R, 0), \quad (2.1)$$

kde T představuje okamžik maturity opce, N nominální hodnotu swapu, R fixní sazbu podkladového swapu, R_T pevnou sazbu swapu kotovanou na trhu v okamžiku T , t_k , pro $k \in (1, 2, \dots, n)$, označují okamžiky platby fixní sazby, kterých je během života swapu n a AF_{t_k} reprezentuje převod doby mezi jednotlivými směnami na roky podle zvolené kalendářní konvence. Jinak řečeno: jednotlivé výplaty swapce představují platby call opce na sazbu R_T s realizační cenou R .

Pro swapci, v níž máme právo platit pevnou sazbu a inkasovat pohyblivou (tj. put opci na dluhopis s pevným kupónem), jsou jednotlivé výplaty ve tvaru

$$NAF_{t_k} \max(R - R_T, 0), \quad (2.2)$$

při stejném značení jako v případě call opce na dluhopis.

2.2 Blackův model pro ocenění swapcí

V této kapitole se zaměříme na ocenění úrokových opcí pomocí Black-Scholesova modelu. V kontextu úrokových opcí bývá tento model častěji označován jako Blackův model, vzhledem k jeho podobnosti s modelem pro ocenění komoditních futures, který navrhl Fischer Black.

Nejdříve v krátkosti odvodíme Black-Scholesovu formuli a v závěru této části se zaměříme na její aplikaci na úrokové opce.

2.2.1 Odvození obecné Black-Scholesovy formule

Při oceňování finančních instrumentů využíváme informace, které jsou do času oceňování známé. Časový vývoj informace budeme reprezentovat neklesající soustavou jevových polí $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, kde \mathcal{F}_t je σ -algebra jevů, o kterých umíme v čase t rozhodnout, zda nastaly, nebo nenastaly. Množina \mathcal{F} určuje časovou dynamiku v množině náhodných jevů a bývá označována jako filtrace.

Na úvod uvedeme základní definice a závěry, které budeme v dalším textu používat, jejich přesné odvození by bylo nad rámec tohoto textu.

Definice 2.2.1: Proces $W = (W_t, t \geq 0)$ nazveme Wienerovým procesem vzhledem k pravděpodobnostní míře \mathbb{P} , právě tehdy, když

1. W má spojitě trajektorie a $W_0 = 0$.
2. Pro $t \geq 0$ a $s > 0$ mají přírůstky procesu $W_{t+s} - W_t$ normální rozdělení $N(0, s)$ při míře \mathbb{P} .

3. Pro $t \geq 0$ je hodnota W_t známá na základě \mathcal{F}_t a pro $u > t$ je přírůstek $W_u - W_t$ nezávislý na \mathcal{F}_t .

Věta 2.2.1. (Itôva formule) Nechť $f(t, x)$ taková, že $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, je spojitá funkce se spojitými derivacemi $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Nechť $\{X_t, t \in [0, T]\}$ je proces se stochastickým diferenciálem $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$. Položme $Y_t = f(t, X_t)$. Pak $\{Y_t, t \in [0, T]\}$ má stochastický diferenciál daný vztahem

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dX_t)^2, \quad (2.3)$$

kde $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}f(t, X_t)$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}f(t, X_t)$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(t, X_t)$.

Věta 2.2.2. (Cameron-Martin-Girsanov) Nechť W_t je Wienerův proces vzhledem k míře \mathbb{P} a γ_t je měřitelný proces vzhledem k σ -algebře \mathcal{F} , který splňuje podmínku $E_{\mathbb{P}} \exp(1/2 \int_0^T \gamma_t^2 dt) < \infty$, pak existuje pravděpodobnostní míra \mathbb{Q} taková, že

1. \mathbb{Q} je ekvivalentní s mírou \mathbb{P} .
2. $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\int_0^T \gamma_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt\right)$.
3. $\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$ je Wienerův proces vzhledem k míře \mathbb{Q} .

A naopak platí podle [2] následující věta.

Věta 2.2.3. Nechť W_t je Wienerův proces vzhledem k míře \mathbb{P} a \mathbb{Q} je ekvivalentní míra k míře \mathbb{P} , pak existuje \mathcal{F} měřitelný proces γ_t takový, že

$$\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$$

je Wienerovým procesem vzhledem k míře \mathbb{Q} . Navíc platí, že Radon-Nikodýmova drivace \mathbb{Q} vzhledem k \mathbb{P} se dá v čase T vyjádřit ve tvaru

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\int_0^T \gamma_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt\right).$$

Poznámka 2.2.1: Význam náhodné veličiny γ_t a pravděpodobnostní míry \mathbb{Q} uvedeme až po odvození Black-Scholesovy formule, kdy modifikací základního modelu dospějeme k interpretaci těchto veličin v praxi.

Definice 2.2.2: Náhodný proces M_t nazveme martingalem vzhledem k pravděpodobnostní míře \mathbb{P} právě tehdy, když $E_{\mathbb{P}}(|M_t|) < \infty$ a $E_{\mathbb{P}}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$ pro všechna $s \leq t$.

Příklad 2.2.1: Wienerův proces vzhledem k míře \mathbb{P} je martingalem vzhledem k téže pravděpodobnostní míře. Stačí si uvědomit, že podle definice Wienerova procesu 2.2.1 jsou přírůstky procesu $W_t - W_s$ nezávislé na \mathcal{F}_s pro všechna $t > s$ a také že tyto přírůstky mají normální rozdělení s parametry 0 a $t - s$. Tedy

$$E_{\mathbb{P}}(W_t | \mathcal{F}_s) = E_{\mathbb{P}}(W_s | \mathcal{F}_s) + E_{\mathbb{P}}(W_t - W_s | \mathcal{F}_s) = W_s + 0. \quad (2.4)$$

Poznámka 2.2.2: Martingaly jsou procesy, jejichž přírůstky mají nulovou střední hodnotou, tedy proces Z_t je martingalem vzhledem k míře \mathbb{P} , když platí

$$dZ_t = \sigma dW_t, \quad (2.5)$$

kde W_t je Wienerův proces vzhledem k míře \mathbb{P} a veličina σ může záviset na procesu Z_t nebo jiné stochastické veličině.

Důležitou vlastností Wienerova procesu, která plyne z toho, že přírůstky procesu mají v infinitezimálním časovém úseku normální rozdělení s nulovou střední hodnotou, je skutečnost, že jeho očekávaná budoucí hodnota je rovna současné hodnotě. To se dá vyjádřit ve tvaru

$$E(Z_T) = Z_0. \quad (2.6)$$

Přírůstek v intervalu $(0, T)$ je pak součtem přírůstku v nekonečně krátkých dělicích intervalech a tedy je nulový. Tuto vlastnost budeme využívat při odvozování Blackova modelu.

Příklad 2.2.2: Definujme proces $N_t = E_{\mathbb{P}}(X | \mathcal{F}_t), t < T$, kde X závisí na událostech až do času T , pak N_t je martingalem vzhledem k míře \mathbb{P} . Toto tvrzení se snadno ověří následujícím způsobem

$$E_{\mathbb{P}}(N_t | \mathcal{F}_s) = E_{\mathbb{P}}(E_{\mathbb{P}}(X | \mathcal{F}_t) | \mathcal{F}_s) = E_{\mathbb{P}}(X | \mathcal{F}_s) = N_s \quad \text{pro } t > s. \quad (2.7)$$

Věta 2.2.4. (*O reprezentaci martingalů*) Nechť M_t je martingalem vzhledem k míře \mathbb{Q} a rozptyl tohoto procesu σ_t^2 je nenulový pro $t \neq 0$ skoro jistě. Nechť dále N_t je martingal vzhledem k míře \mathbb{Q} různý od martingalu M_t . Potom existuje jednoznačně určený \mathcal{F} -měřitelný proces ϕ takový, že $\int_0^T \phi_t^2 \sigma_t^2 dt < \infty$ skoro jistě, a martingal N_t lze přepsat do tvaru

$$N_t = N_0 + \int_0^t \phi_s dM_s. \quad (2.8)$$

Na závěr tohoto výčtu ještě zavedeme pojem portfolia a uvedeme dvě strategie při konstrukci portfolia.

Označení: Portfoliem (ϕ, ψ) rozumíme \mathcal{F} -měřitelný proces ϕ_t , který závisí pouze na vývoji do času t , a proces ψ_t , které popisují množství jednotek předmětného a bezrizikového aktiva, který držíme v čase t , přitom tyto procesy mohou nabývat jak pozitivních, tak i negativních hodnot (tzn. prodeje nakrátko jsou povoleny).

Definice 2.2.3: (Samofinancující portfolio) Necht' (ϕ_t, ψ_t) je portfolio v čase t a necht' cena předmětného aktiva v čase t je S_t a cena bezrizikového aktiva B_t . Označme V_t cenu portfolio v čase t . Portfolio (ϕ_t, ψ_t) nazveme samofinancující právě tehdy, když $dV_t = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t$ (tzn. změna ceny portfolio závisí pouze na změně ceny aktiv v něm obsažených).

Definice 2.2.4: (Replikační portfolio) Předpokládejme trh s bezrizikovými aktivy B a rizikovými aktivy S s rozptylem σ_t^2 . Necht' požadavek na investiční výsledek portfolio v čase T je ve výši X . Pak replikačním portfolio nazveme samofinancující portfolio, které splňuje podmínky $\int_0^T \sigma_t^2 \phi_t^2 dt < \infty$ a $V_T = \phi_T S_T + \psi_T B_T = X$ (tzn. pomocí tohoto portfolio je možné replikovat jakoukoli hodnotu derivátu ve výši X v čase T pomocí bezrizikového a předmětného aktiva).

Poznámka 2.2.3: Pokud existuje replikační portfolio k požadovanému investičnímu výsledku X v čase T , pak hodnota tohoto požadavku v čase t , jak je ukázáno v [2], je dána hodnotou tohoto portfolio V_t v témže čase.

Zavedeme ještě pojem referenčního aktiva a pak shrneme s odvoláním na [2] odvození Black-Scholesovy formule.

Za referenční aktivum lze obecně vzato zvolit libovolné aktivum, které nevyplácí v průběhu svého trvání dividendy (např. bezkupónový dluhopis nebo peněžní jednotku zhodnocovanou bezrizikovou úrokovou mírou). Jak je uvedeno v [2] nebo [7], výsledná cena derivátu i replikační portfolio jsou stejné při jakékoli volbě referenčního aktiva. Při odvození Black-Scholesovy formule budeme za referenční aktivum považovat peněžní jednotku investovanou v čase 0, kterou v každém infinitezimálním časovém úseku zhodnocujeme bezrizikovou úrokovou mírou, tj.

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right) \quad B_0 = 1 \quad t \in [0, T] \quad (2.9)$$

a pro přírůstek tohoto aktiva platí vztah

$$dB_t = r_t B_t dt, \quad (2.10)$$

kde $\{r_t, t \in [0, T]\}$ je proces okamžité úrokové intenzity. Tedy proces B_t^{-1} představuje diskontní proces.

Pro odvození Black-Scholesovy formule budeme předpokládat, že existují konstanty μ a σ takové, že cenu podkladového aktiva lze vyjádřit ve tvaru exponenciálního Brownova pohybu

$$S_t = \exp(\mu t + \sigma W_t), \quad (2.11)$$

kde W_t je Wienerův proces vzhledem k pravděpodobnostní míře \mathbb{P} . Pak logaritmus ceny podkladového aktiva $Y_t = \log(S_t)$ splňuje rovnici Brownova pohybu $Y_t = \mu t + \sigma W_t$. Přírůstek logaritmické ceny podkladového aktiva má tedy tvar $dY_t = \mu dt + \sigma dW_t$. Pomocí Itôvy formule pak získáme vztah pro změnu ceny podkladového aktiva ve tvaru

$$dS_t = \frac{\partial e^{Y_t}}{\partial t} dt + \frac{\partial e^{Y_t}}{\partial x} dY_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 e^{Y_t}}{\partial x^2} (dY_t)^2. \quad (2.12)$$

Vzhledem k tomu, že

$$\frac{\partial e^{Y_t}}{\partial t} dt = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial e^{Y_t}}{\partial x} dY_t = e^{Y_t} dY_t = S_t dY_t \quad (2.14)$$

a

$$\frac{\partial^2 e^{Y_t}}{\partial x^2} (dY_t)^2 = e^{Y_t} (dY_t)^2 = S_t (dY_t)^2, \quad (2.15)$$

je možné přepsat rovnici 2.12 do tvaru

$$dS_t = S_t \left(dY_t + \frac{1}{2} (dY_t)^2 \right). \quad (2.16)$$

K vyjádření druhého sčítance využijeme následující početní pravidla pro stochastické diferenciály

$$(dt)^2 = 0, \quad dW_t dt = 0 \quad \text{a} \quad (dW_t)^2 = dt. \quad (2.17)$$

Vztah 2.16 bude po dosazení

$$dS_t = S_t \left(\left(\mu + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \right). \quad (2.18)$$

Dále pro účely Black-Scholesovy formule předpokládejme, že okamžitá bezriziková úroková intenzita je konstantní a proto lze referenční aktivum vyjádřit ve tvaru

$$B_t = \exp \left(\int_0^t r ds \right) = e^{rt}. \quad (2.19)$$

Navíc předpokládejme, že neexistují žádné transakční náklady a oba instrumenty jsou volně a okamžitě obchodovatelné. Pomocí právě popsaného značení zavedeme proces, který představuje diskontovanou cenu předmětného aktiva $Z_t = B_t^{-1} S_t$, a diskontovanou hodnotu sjednané výplaty derivátu v čase T ve tvaru $B_T^{-1} X$, kde $X = S_T - K$ pro danou realizační cenu K . Následující postup bude sestávat ze dvou kroků. V prvním najdeme pravděpodobnostní míru \mathbb{Q} ekvivalentní se skutečným rozdělením \mathbb{P} , při kterém bude diskontovaná cena aktiva martingalem, a ve druhém sestrojíme replikační portfolio pro sjednanou výplatu derivátu ve výši X v čase T . Potom bude hodnota derivátu v čase t rovna právě ceně replikačního portfolio v témže čase.

Pokud přepíšeme diskontovanou cenu předmětného aktiva do tvaru

$$Z_t = B_t^{-1} S_t = e^{-rt} e^{Y_t} = e^{(\mu-r)t + \sigma W_t}, \quad (2.20)$$

pak pomocí Itôvy formule dospějeme analogickým postupem, kterým jsme získali vztah 2.18, k vyjádření ve tvaru

$$dZ_t = Z_t \left(\left(\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \right). \quad (2.21)$$

Nyní využijeme Cameron-Martin-Girsanovu větu 2.2.2 pro $\gamma_t = (\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2)/\sigma$. Odtud, vzhledem k tomu, že γ_t je konstantní a tedy splňuje podmínku věty 2.2.2, plyne, že existuje pravděpodobnostní míra \mathbb{Q} ekvivalentní s mírou \mathbb{P} taková, že při ní lze Wienerův proces vyjádřit ve tvaru

$$\widetilde{W}_t = W_t + \frac{\mu - r + 1/2\sigma^2}{\sigma} t. \quad (2.22)$$

Rovnici 2.21 je tedy možné vyjádřit jako

$$dZ_t = \sigma Z_t d\widetilde{W}_t. \quad (2.23)$$

Jak je uvedeno v [2] v části věnované exponenciálním martingalům, je proces Z_t martingalem vzhledem k míře \mathbb{Q} .

Dále definujeme proces $E_t = E_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X|\mathcal{F}_t)$, který je podle příkladu 2.2.2 martingalem vzhledem k míře \mathbb{Q} . Podle věty o reprezentaci martingalů dostáváme existenci jednoznačně určeného procesu ϕ_t , pro který platí $dE_t = \phi_t dZ_t$. Vzhledem k tomu, že pro replikační portfolio musí platit $V_t = B_t E_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t$, dostáváme vztah pro množství bezrizikového aktiva v portfoliu ve tvaru $\psi_t = E_t - \phi_t Z_t$.

Proto pro každou dohodnutou výplatu derivátu X v čase T lze cenu derivátu v čase $t \in [0, T]$ vyjádřit jako

$$V_t = B_t E_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X|\mathcal{F}_t) = e^{-r(T-t)} E_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{F}_t) = e^{-r(T-t)} E_{\mathbb{Q}}((S_T - K)_+|\mathcal{F}_t). \quad (2.24)$$

Dále využijeme závěry odvozené v kapitole 13 v [7], kde je při pravděpodobnostní míře \mathbb{Q} odvozen vztah

$$S_T = S_t e^Y, \quad (2.25)$$

kde

$$Y \sim N \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t), \sigma^2 (T - t) \right). \quad (2.26)$$

S využitím této vlastnosti v rovnici 2.24 dostáváme

$$V_t = e^{-r(T-t)} E_{\mathbb{Q}}((S_t e^Y - K)_+|\mathcal{F}_t) \quad (2.27)$$

a odtud se pak dá odvodit (viz [7]) Black-Scholesova formule pro oceňování call opcí ve tvaru

$$V_t = S_t \Phi(d_1) - e^{-r(T-t)} K \Phi(d_2), \quad (2.28)$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad d_2 = \frac{\ln(S_t/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad (2.29)$$

a Φ je distribuční funkce rozdělení $N(0,1)$.

Poznámka 2.2.4: Martingalem je, jak je uvedeno v [2], možné charakterizovat obchodovatelná aktiva na trhu, kde neexistuje arbitráž. Pro dané referenční aktivum B_t a podkladové aktivum S_t je replikační portfolio V_t složené z těchto aktiv obchodovatelné právě tehdy, když diskontovaná hodnota replikačního portfolia $B_t^{-1}V_t$ je martingalem vzhledem k takové pravděpodobnostní míře \mathbb{Q} , vzhledem ke které je i diskontovaná cena podkladového aktiva $B_t^{-1}S_t$ martingal.

Poznámka 2.2.5: (Tržní cena rizika) V Black-Scholesově formuli jsme vycházeli ze vztahu pro cenu podkladového aktiva 2.11 a na jeho základě jsme odvodili diferenciální rovnici 2.18. Pro účely zavedení pojmu tržní ceny rizika budeme postupovat opačně. Budeme předpokládat, že přírůstky podkladového aktiva splňují diferenciální rovnici

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t). \quad (2.30)$$

Řešením této diferenciální rovnice je vztah

$$S_t = \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right). \quad (2.31)$$

Oba tyto přístupy jsou ekvivalentní, rozdíl lze chápat jako změnu značení při zavedení konstanty μ , ale v modifikovaném přístupu je možné jednodušeji zacházet s celou skupinou modelů, jak bude patrné z následujícího odvozování.

Uvažujme dva cenné papíry S_{1t} a S_{2t} . Oba tyto cenné papíry jsou obchodované na stejném trhu a cenu obou lze vyjádřit pomocí stejného Wienerova procesu takto

$$dS_{kt} = S_{kt}(\mu_k dt + \sigma_k dW_t), \quad k = 1, 2, \quad (2.32)$$

kde μ_k a σ_k^2 představují střední hodnotu a rozptyl k -tého aktiva a W_t je Wienerovým procesem vzhledem k pravděpodobnostní míře \mathbb{P} .

Předpokládejme, že oba cenné papíry jsou obchodovatelné, pak ale musí být jejich diskontované ceny podle poznámky 2.2.4 martingalem vzhledem ke stejné pravděpodobnostní míře \mathbb{Q} . Při použití shodného referenčního aktiva a analogického postupu jako v právě odvozeném Black-Scholesově modelu dospějeme k existenci této pravděpodobnostní míry \mathbb{Q} a vyjádření Wienerova procesu vzhledem k ní ve tvaru

$$\widetilde{W}_t = W_t + \frac{\mu_k - r}{\sigma_k} t, \quad k = 1, 2. \quad (2.33)$$

A vzhledem k předpokladu obchodovatelnosti obou cenných papírů musí platit

$$\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2}. \quad (2.34)$$

Nadvýnos rizikového aktiva nad bezrizikový výnos vztahovaný na jednotku rizika dané investice

$$\gamma_t = \frac{\mu - r}{\sigma} \quad (2.35)$$

pak představuje tržní cenu rizika. Pomocí této veličiny je možné charakterizovat obchodovatelná aktiva na trhu jako instrumenty, které mají stejnou tržní cenu rizika.

Poznámka 2.2.6: (Rizikově neutrální pravděpodobnostní míra) Pravděpodobnostní míra \mathbb{Q} bývá označována jako rizikově neutrální míra, která odpovídá skutečnému tržnímu rozdělení pravděpodobností \mathbb{P} . Při pravděpodobnostní míře \mathbb{Q} je možné diferenciální rovnici podkladového aktiva 2.30 přepsat do tvaru

$$dS_t = S_t(\tilde{\mu}dt + \sigma_t d\tilde{W}_t), \quad (2.36)$$

kde \tilde{W}_t je Wienerův proces vzhledem k míře \mathbb{Q} . Pak podkladové aktivum S_t je obchodovatelné právě tehdy, když tržní cena rizika je nulová. Odtud plyne, že všechna obchodovatelná aktiva mají při pravděpodobnostní míře \mathbb{Q} stejný růst bez ohledu na jejich rizikovost σ_t . Tedy míra \mathbb{Q} je rizikově neutrální.

2.2.2 Odvození Blackova modelu pro cenu swapce

Pro odvození Blackova modelu budeme uvažovat referenční aktivum, které bude představováno tzv. anuitním faktorem

$$A_t = \sum_{k=1}^n AF_{t_k} P_t(t_k - t), \quad (2.37)$$

tedy současnou hodnotou n plateb, které nastávají v okamžicích t_k , $k \in (1, 2, \dots, n)$, a jejich výše je rovna jedné (současná hodnota těchto plateb je reprezentována cenou bezkupónového dluhopisu zavedeného vztahem 1.1), faktor AF_{t_k} převádí dobu mezi jednotlivými výplatami na roky dle zvolené kalendářní konvence.

Pro následující odvozování uvažujme swap, který začíná v budoucím okamžiku T , má jednotkovou nominální hodnotu, směny fixní a pohyblivé sazby nastávají v okamžicích t_k a v průběhu života swapu nastane těchto směn právě n . Ztotožníme-li fixní platby s výplatou dluhopisu s pevnou kupónovou sazbou, pak při zavedeném značení je možné jejich současnou hodnotu v čase t vyjádřit ve tvaru

$$R_t A_t + P_t(t_n - t), \quad (2.38)$$

kde R_t značí forwardovou sazbu swapu stanovenou v čase t , kde $t \leq T$, platnou v čase T .

Pro vyjádření současné hodnoty pohyblivé části swapu přidáme mezi platby této strany swapu i výplatu jednotkové nominální hodnoty, pak ji bude možné ztotožnit s dluhopisem s pohyblivou kupónovou sazbou a nominálem v jednotkové výši. Jak bylo uvedeno v části 1.2, je současná hodnota dluhopisu s pohyblivým úrokem v okamžiku emise rovna jeho nominální hodnotě, v tomto případě tedy jedné. Odtud plyne, že v čase t bude jeho hodnota

$$P_t(T - t). \quad (2.39)$$

Vzhledem k tomu, že hodnota pevné a pohyblivé části se musí v okamžiku emise rovnat a diskontováním počáteční hodnoty obou stran swapu do času t stejnou

diskontní mírou se rovnost zachovává, dostáváme vztah

$$R_t A_t + P_t(t_n - t) = P_t(T - t) \quad (2.40)$$

a odtud vyjádření

$$R_t = \frac{P_t(T - t) - P_t(t_n - t)}{A_t}. \quad (2.41)$$

Za předpokladu logaritmicko-normálního rozdělení sazby R_T s rozptylem $\sigma^2 T$ dostáváme podle [7] Blackův model pro ocenění swapce, která nám dává právo platit fixní sazbu a obdržet pohyblivou sazbu, v čase 0 ve tvaru

$$\sum_{k=1}^n N A F_{t_k} P_0(t_k) [R_0 \Phi(d_1) - R \Phi(d_2)]. \quad (2.42)$$

Tento vztah je při označení $A := A_0$, kde A_0 je dáno vztahem 2.37, možné přepsat do tvaru

$$N A [R_0 \Phi(d_1) - R \Phi(d_2)], \quad (2.43)$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln(R_0/R) + \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}}, \quad (2.44)$$

$$d_2 = \frac{\ln(R_0/R) - \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}, \quad (2.45)$$

R_0 se určí ze vztahu 2.41 a Φ představuje distribuční funkci normovaného normálního rozdělení.

Pro ocenění swapce, v níž máme právo platit pohyblivou a inkasovat pevnou sazbu, v čase nula použijeme vztah

$$N A [R \Phi(-d_2) - R_0 \Phi(-d_1)], \quad (2.46)$$

kde d_1 a d_2 jsou určeny vztahy 2.44 a 2.45.

2.3 Číselné výsledky ocenění swapcí

V části 1.5 byly shrnuty rozdíly v ocenění u velmi jednoduchého instrumentu, kterým byl bezkupónový dluhopis. Tato část bude zaměřena na podobné srovnání u swapcí oceněných Blackovým modelem.

Volba systému zdrojových dat se do tohoto ocenění promítne hned dvakrát. První rozdíly v kotaci mezi systémy Bloomberg a Reuters mohou nastat u fixních sazeb swapu, které budou použity pro konstrukci výnosové křivky, a navíc bude hrát roli i tržní volatilita, která je dostupná v obou systémech. Pro účely této práce budeme uvažovat pouze situaci, kdy data o sazbách swapů i tržních volatilitách swapcí pochází ze stejného systému. Důvodem je fakt, že cílem je mapovat rozdíly v ocenění při použití tržních dat z různých systémů a při směšování vstupů by nebylo dost dobře možné vyčíslit, vlivem kterého systému k odchylce při ocenění

došlo.

Další skutečností, která ovlivní výslednou cenu bude způsob konstrukce výnosové křivky, která do Blackova modelu vstupuje prostřednictvím cen bezkupónového dluhopisu. Opět budeme uvažovat metodu lineární interpolace s následnou extrapolací za předpokladu konstantních ročních forwardových sazeb (forwardové sazby při extrapolaci jsou rovny poslední pozorované hodnotě) a Nelson-Sieglovu metodu vyrovnání.

Terminologie pro swapce, kde platíme pevnou nebo pohyblivou část, není jednotná, proto v této kapitole vyjdeme z podobnosti swapcí s dluhopisy a budeme swapci, v níž platíme pohyblivou sazbu a dostáváme pevnou sazbu, označovat vzhledem k analogii s call opcí na dluhopis s pevnou kupónovou sazbou jako call swapci a opci na swap, v němž platíme pevnou a dostáváme pohyblivou sazbu jako put swapci. Důvodem tohoto značení je snaha o zjednodušení popisů v následujících grafech a tabulkách.

Jako první se zaměříme na srovnání tržních volatilit ze systémů Bloomberg a Reuters. V porovnání se sazbami swapů jsou údaje o tržních volatilitách swapcí dostupné v obou systémech pouze jednou týdně a to v systému Bloomberg vždy v pátek a v systému Reuters v neděli.

K modelaci jsme využili data o tržních volatilitách následujících at-the-money swapcí: maturita opce nastává za dobu, která je v rozmezí jednoho roku až deseti let, a maturita swapu nastává buď za 1, 5 nebo 10 let. Jedná se o volatilitu kotované v EUR, volatilitu kotované v CZK běžně k dispozici nejsou, proto byly v této práci EUR volatilitu použity pro swapy kotované v CZK. V praxi se tento problém dá řešit odhadem volatilit kotovaných v CZK z volatilit v EUR na základě znalosti obou trhů. Volatility jsou kotované jen v některých dnech a nemusí být v daný den dostupné všechny popsány typy volatilit. Pro účely této práce bylo uvažováno stejné období jako pro výnosovou křivku, tedy od 4.1.2005 do 14.4.2008. V něm byly v systému Reuters ve 170 dnech kotovány volatility pro swapce s maturitou opce v rozmezí 2 až 5 let a maturitou swapu za 1, 5 nebo 10 let, zatímco pro ostatní typy swapcí se počet dnů, ve kterých jsou kotovány jejich volatility, pohybuje pouze kolem 70. Naproti tomu v systému Bloomberg je situace výrazně lepší, v každém týdnu jsou kotovány téměř všechny kombinace maturit opcí a swapů. Výběr typů swapcí, které budeme dále oceňovat, bude podřízena vstupům, které jsou kotovány v systému Reuters. Z těchto důvodů byly vybrány tyto typy swapcí: opce bude mít ve všech případech maturitu za pět let a podkladový swap bude v délce 1, 5 a 10 let.

Nejdříve se zaměříme na rozdíly tržních volatilit z obou systémů. Z tabulky 2.1 je patrné, že rozdíly v kotovaných volatilitách nejsou tak výrazné, jako rozdíly u pevných sazeb swapů, kdy se hodnoty vlivem chyby lišily až o několik procent. Toto srovnání navíc není tak úplně správné, protože oba systémy nekotují tržní volatility swapcí ve stejný den.

Ve zbytku této části se budeme zabývat otázkou, jak se promítne odchylka v kotaci tržních volatilit do výsledné ceny derivátu a nakolik ovlivní jeho cenu zvolená výnosová křivka. Uvažujme swapci s maturitou opce za pět let a swapu za deset let, nominální hodnota je 100 000 a pevná sazba swapu odpovídá tech-

	0,0%	0,1%	0,2%	0,3%	0,4%	0,5%
5-1	62	54	31	15	7	1
5-5	86	65	14	3	2	0
5-10	87	66	11	3	2	1

Tabulka 2.1: V prvním sloupci tabulky je uveden typ swapce, přitom první číslo odpovídá délce trvání opce a druhé maturitě swapu. Následují počty dní, v nichž rozdíl volatilit kotovaných v systému Bloomberg a Reuters nepřesahoval hodnotu v prvním řádku tabulky.

nické úrokové míře 2,4% (jedná se o maximální výši technické úrokové míry, která je stanovena prováděcí vyhláškou 303/2004 k zákonu o pojišťovnictví 363/1999 Sb. ve znění pozdějších novel a předpisů). Z důvodu dalšího využití byla zvolena fixní sazba ve výši technické úrokové míry, tržní volatilit swapcí jsou ale kotovány tzv. at-the-money, tedy pro swapce, u kterých je fixní sazba ve výši forwardové swapové sazby, jiné volatilit na trhu dostupné nejsou. Tržní forwardové sazby swapů jsou ve výši kolem 3%, tedy call swapce jsou tzv. in-the-money, tj. realizační sazba je nižší než forwardová sazba na trhu. Put swapce je v opačné situaci, která bývá označována jako out-of-the-money. Vzhledem k tomu, že pro tyto situace tržní volatilit běžně kotovány nejsou, resp. se s in-the-money a out-of-the-money swapcemi obchoduje daleko méně než s těmi, které jsou at-the-money, byly v této práci dostupné volatilit použity i pro ocenění swapcí v situaci jiné než at-the-money.

Jako den ocenění zvolíme 29.2.2008, protože v tento den je možné kvůli chybné kotaci 30-ti leté sazby swapu v systému Bloomberg pozorovat významné rozdíly ve výnosových křivkách. Z grafu 1.8 je patrné, že křivka konstruovaná Nelson-Sieglou metodou se v uvažovaném období výrazně liší od ostatních křivek. Podívejme se nyní, jak se tento rozdíl promítne do ceny swapce.

		Put swapce		Call swapce	
		$\sigma = 12,65\%$	$\sigma = 13,15\%$	$\sigma = 12,65\%$	$\sigma = 13,15\%$
Bloomberg	N-S metoda	9 667	9 690	111	134
	Lin. interpolace	16 470	16 474	10	14
		$\sigma = 12,6\%$	$\sigma = 13,1\%$	$\sigma = 12,6\%$	$\sigma = 13,1\%$
Reuters	N-S metoda	16 016	16 020	12	17
	Lin. interpolace	16 386	16 390	10	15

Tabulka 2.2: Srovnání cen call a put swapcí pro jednotlivé systémy a způsoby modelace výnosové křivky v závislosti na tržní volatilitě ke dni 29.2.2008. U put i call swapcí vždy první sloupec odpovídá volatilitě kotované na trhu a druhý posunu tržní volatilit o 0,5%.

Ve zvýrazněných sloupcích tabulky 2.2 jsou uvedeny ceny vypočítané na základě tržních volatilit dostupných v systému Bloomberg a Reuters. Ve zbylých sloupcích jsou ceny, které odpovídají volatilitě zvýšené o 0,5%

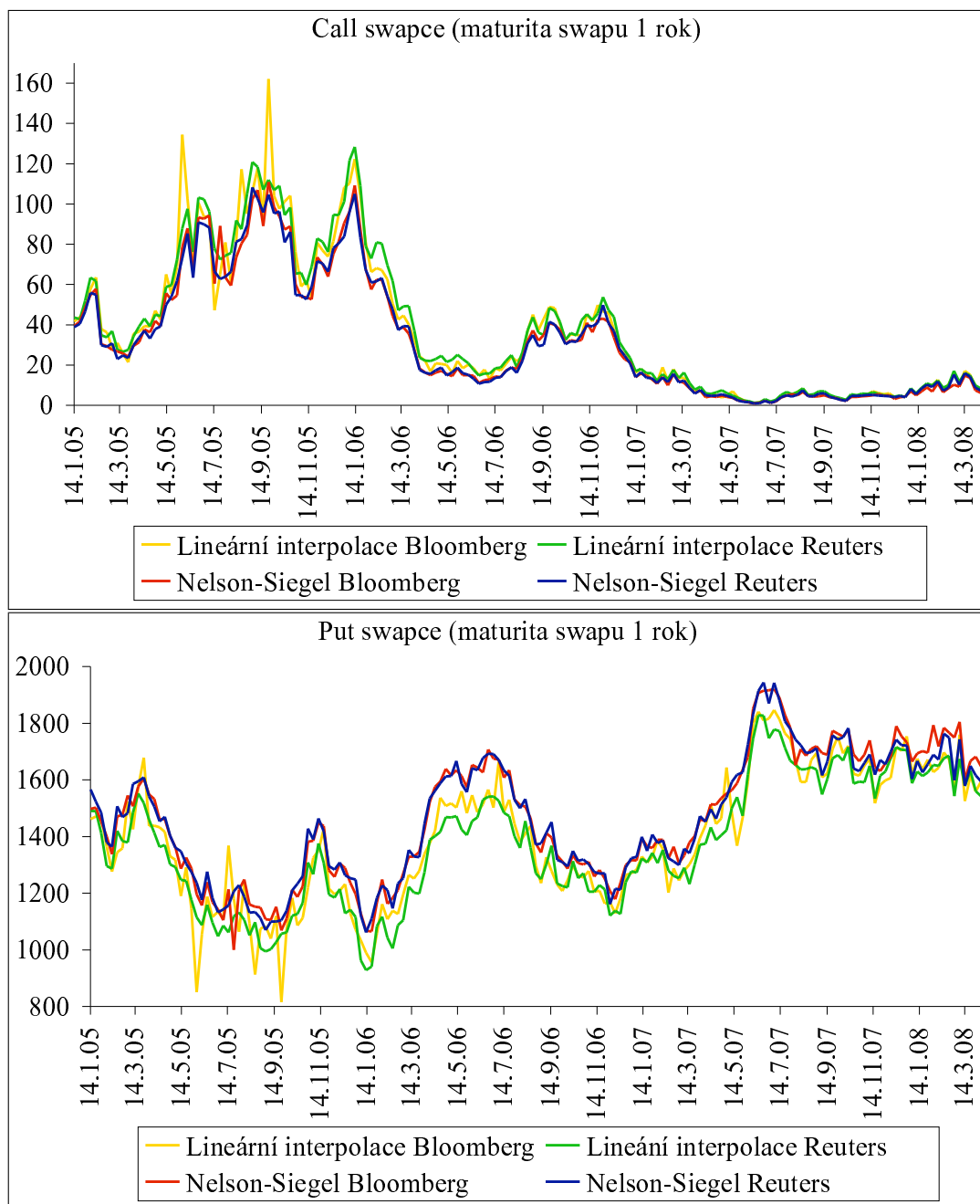
v porovnání s tržními údaji. Tento posun představuje největší odchylku, která vzniká mezi systémy Bloomberg a Reuters, jak ukazuje tabulka 2.1. Je tedy patrné, že volatilita získaná z uvedených systémů nevyvolají tak významné změny v ocenění jako rozdíly vzniklé v závislosti na použité výnosové křivce.

Pomocí série grafů v závěru této části ukážeme souhrnné výsledky modelace pro zvolené swapce (tedy swapce s maturitou opce vždy za pět let a maturitou swapu za 1, 5 a 10 let), v nichž pevná sazba swapu byla zvolena ve výši 2,4%, tedy shodná s technickou úrokovou mírou, a nominální hodnota podkladového swapu bude 100 000. Tyto grafy potvrzují předchozí závěr, že veškeré větší odchylky v ocenění jsou způsobeny odchylkami mezi vstupními výnosovými křivkami.

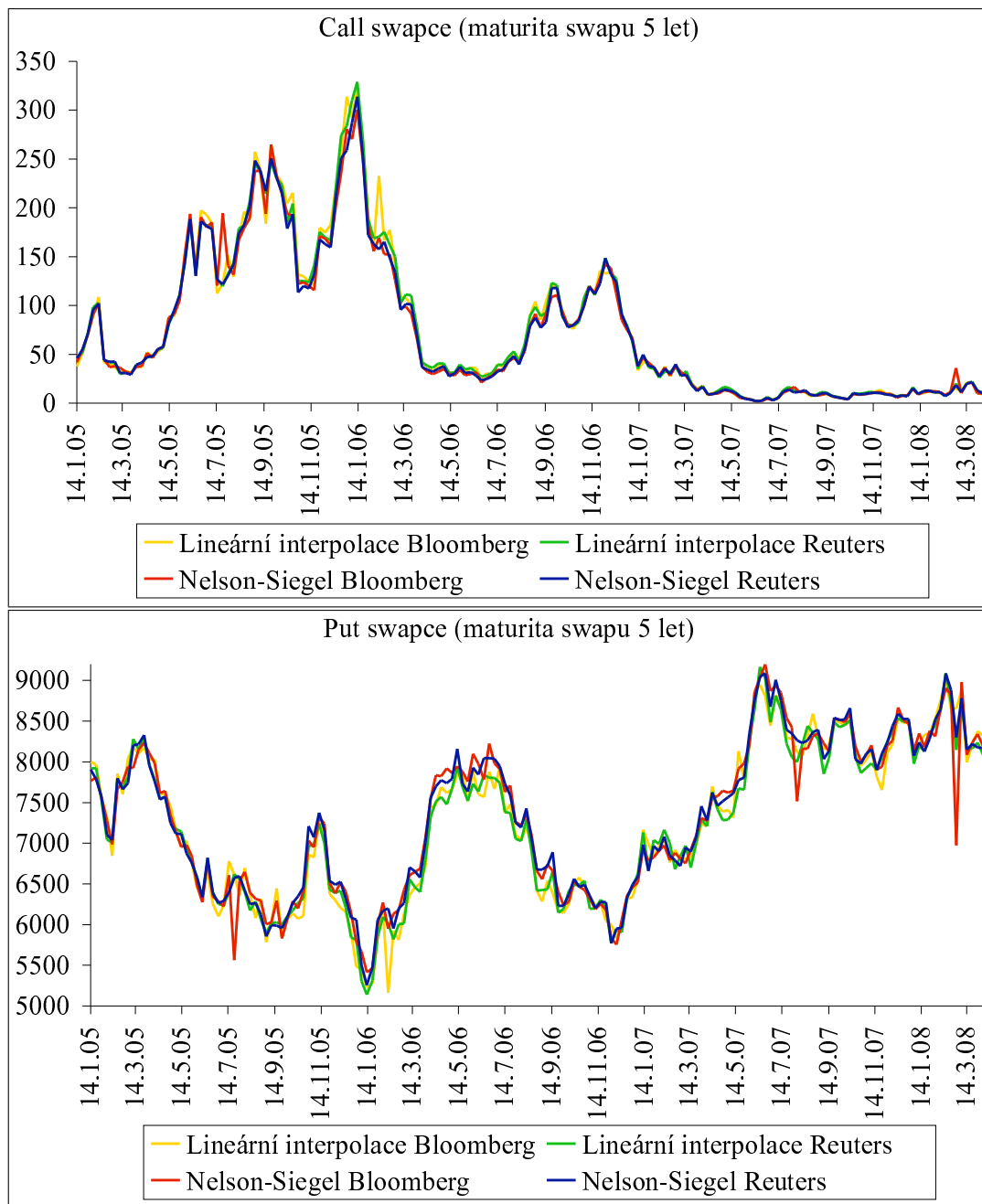
Proto je nutné pro účely oceňování velmi důkladně zvážit, zda vstupní výnosová křivka odpovídá realitě a zda není ovlivněna špatně kotovanou sazbou. Jak je vidět z grafu 1.8 u Nelson-Sieglovy metody hrají roli nejen vstupní údaje do doby do splatnosti daného instrumentu (v našem případě maximálně 15 let), ale i všechny následující hodnoty. Naproti tomu metodu lineární interpolace ovlivňují vždy jen dvě bezprostředně sousedící hodnoty, proto se výkyv ve 30-ti leté sazbě dne 29.2.2008 neprojevil v ceně instrumentu se splatností do 15 let.

Z hlediska množství vstupních hodnot, které musíme pro modelaci ověřit, je metoda lineární interpolace méně náročná. Ovšem, jak bylo uvedeno v předchozí kapitole, výsledky při nutnosti extrapolace nejsou tak uspokojivé jako při metodě Nelson-Siegel.

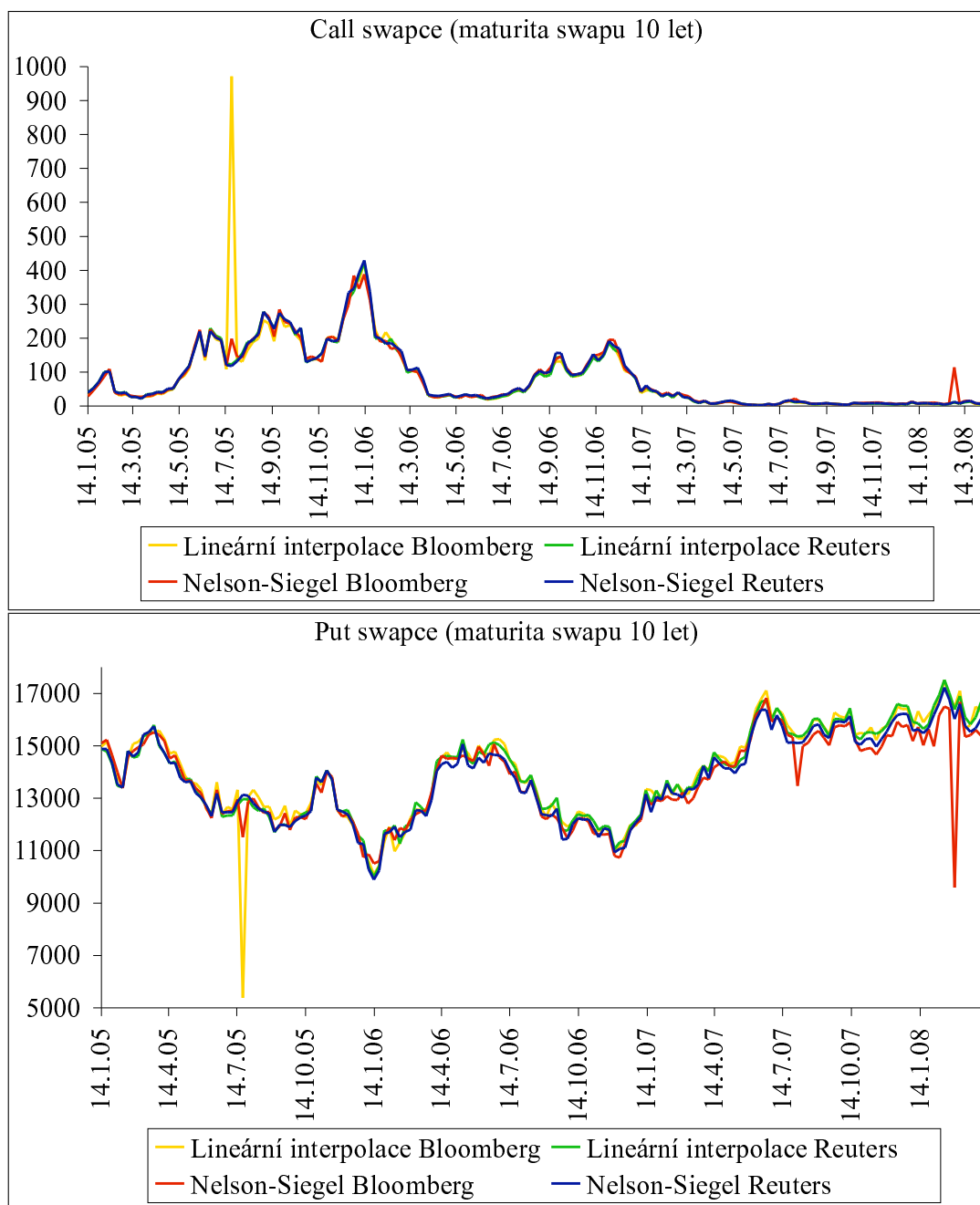
Poznámka 2.3.1: Cena swapcí hodnocených v této kapitole je nenulová vzhledem k faktu, že hodnotíme swapce, které nejsou at-the-money. V případě at-the-money swapcí se počáteční hodnota pevné a pohyblivé části úrokového swapu rovná a tedy je cena tohoto swapce nulová.



Obrázek 2.1: Srovnání cen call a put swapců s maturitou opce pět let a maturitou swapu jeden rok v závislosti na volbě vstupního systému a způsobu konstrukce výnosové křivky.



Obrázek 2.2: Srovnání cen call a put swapců s pětiletou maturitou u opce i u swapu v závislosti na volbě vstupního systému a způsobu konstrukce výnosové křivky.



Obrázek 2.3: Srovnání cen call a put swapců s maturitou opce pět let a maturitou swapu deset let v závislosti na volbě vstupního systému a způsobu konstrukce výnosové křivky.

Kapitola 3

Modely úrokových měr

Modely úrokových měr lze obecně rozdělit na jednofaktorové a mnohofaktorové modely podle toho, s kolika zdroji nejistoty pracují. V praxi se využívají převážně jedno- a dvoufaktorové modely. V této práci se budeme zabývat Hull-Whiteovým modelem, který spadá do skupiny modelů s jedním zdrojem nejistoty.

3.1 Přehled modelů okamžité úrokové intenzity

Základní formulí modelů okamžité úrokové intenzity je difúzní model

$$dr_t = \mu_t(r_t)dt + \sigma_t(r_t)dW_t, \quad (3.1)$$

kde r_t představuje úrokovou intenzitu v čase t , drift $\mu_t(r_t)$, stejně jako volatilita $\sigma_t(r_t)$ jsou funkcemi úrokové intenzity a času, člen dW_t představuje přírůstek Wienerova procesu. Na volbě driftu a volatility v základní rovnici 3.1 pak závisí vlastnosti výsledného modelu. V úvodu této kapitoly v krátkosti shrneme některé modely úrokových měr a pokusíme se alespoň stručně přiblížit jejich výhody a nevýhody.

První modifikací základní formule bude Ho-Lee model (HL), kdy volbou omezeného driftu nezávislého na hodnotě úrokové míry $\mu_t(r_t) = \vartheta_t$ a konstantní volatility $\sigma_t(r_t) = \sigma$ získáme

$$dr_t = \vartheta_t dt + \sigma dW_t. \quad (3.2)$$

Nepříjemnou skutečností je, že tento model nemá vlastnost návratu k průměru, tedy umožňuje, aby okamžitá úroková intenzita neomezeně rostla, místo aby podle našeho očekávání kolísala kolem určité hladiny. Toto očekávání vychází z předpokladu, že úrokové míry nemohou neomezeně růst, protože při jejich vysoké hladině dochází k utlumování ekonomické aktivity na trhu, které vyvolá následný pokles úrokových měr. Proto se výše úrokových měr pohybuje v limitovaném rozmezí a proto by měla vykazovat tendenci návratu k dlouhodobé hodnotě. Druhou nevýhodou HL modelu je, že připouští záporné hodnoty úrokových sazeb.

Rozšíření HL modelu představuje Vašíčkův model

$$dr_t = (\vartheta - ar_t)dt + \sigma dW_t. \quad (3.3)$$

Pokud vyjádříme drift ve tvaru $\mu(r_t, t) = a(\vartheta/a - r_t)$, pak interpretace tohoto členu bude následující: ϑ/a představuje rovnovážnou hladinu úrokové intenzity a parametr a určuje rychlost návratu úrokové intenzity r_t k rovnovážné hladině. Volatilita je opět konstantní $\sigma(r_t, t) = \sigma$. Tento model již reflektuje důležitou charakteristiku chování úrokových měr, kterou je vlastnost návratu k průměru. Stejně jako HL model připouští i Vašíčekův model záporné hodnoty úrokových sazeb.

V Cox-Ingersoll-Ross modelu (CIR) díky volatilitě definované vztahem $\sigma_t(r_t) = \sigma\sqrt{r_t}$ nemohou úrokové míry nabývat záporných hodnot. Drift $\mu_t(r_t) = \vartheta - a r_t$ podobně jako ve Vašíčkově modelu zajišťuje návrat k průměru ϑ_t/a_t

$$dr_t = (\vartheta - a r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t. \quad (3.4)$$

Poslední dva modely přitom mají ještě jeden nedostatek, nedokáží reprodukovat všechny tvary výnosové křivky. Proto se v dalším zaměříme na popis Hull-Whietova modelu, který tento nedostatek odstraňuje.

3.2 Hull-Whiteův model

Tento model v sobě spojuje jak vlastnost návratu k průměru tak i umožňuje simulování libovolné výnosové křivky. Rovnovážná hodnota není konstantní, ale je reprezentována funkcí závislou na čase ϑ_t . Hull-Whiteův model je pak možné vyjádřit ve tvaru

$$dr_t = (\vartheta_t - ar_t)dt + \sigma dW_t. \quad (3.5)$$

Pro účely této kapitoly vezmeme za referenční aktivum podobně jako při odvozování Black-Scholesova modelu peněžní jednotku investovanou v čase 0, kterou v každém infinitezimálním časovém úseku zhodnocujeme bezrizikovou úrokovou mírou, tj.

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right) \quad B_0 = 1 \quad t \in [0, T] \quad (3.6)$$

$$dB_t = r_t B_t dt, \quad (3.7)$$

kde $\{r_t, t \in [0, T]\}$ je proces okamžité úrokové intenzity. Nyní pomocí referenčního aktiva vyjádříme cenu bezkupónového dluhopisu s maturitou v čase T a nominální hodnotou v jednotkové výši, který byl definovaný na straně 12. Množství referenčního aktiva v čase t , které bude schopno replikovat výplatu dluhopisu v době jeho maturity, je ve výši B_t/B_T . Tedy pro cenu dluhopisu v čase t v závislosti na časové dynamice \mathcal{F} definované na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ platí

$$P_t(T-t) = E[B_t B_T^{-1} | \mathcal{F}_t] = E\left[\exp\left(\int_t^T r_u du\right) \middle| \mathcal{F}_t\right]. \quad (3.8)$$

Je-li řešení diferenciální rovnice 3.1 jednoznačné, je podle [10] difúzní proces zároveň Markovovým procesem, tedy

$$P_t(T-t) = E \left[\exp \left(- \int_t^T r_u du \right) \middle| r_t \right]. \quad (3.9)$$

Rovnovážná hladina pak musí být podle 3.9 a 1.7 stanovena tak, aby Hull-Whiteova modelace odpovídala ve střední hodnotě forwardové intenzitě pozorované na trhu. Proto začneme odvozením explicitního vztahu pro okamžitou úrokovou intenzitu.

Nejdříve se podívejme na diferenciál členu $r_u e^{-a(v-u)}$, kde $v > u$

$$d \left(r_u e^{-a(v-u)} \right) = dr_u e^{-a(v-u)} + a r_u e^{-a(v-u)} du. \quad (3.10)$$

Nyní vynásobíme rovnici 3.5 výrazem $e^{-a(v-u)}$ a dostaneme

$$e^{-a(v-u)} dr_u = (\vartheta_u - a r_u) e^{-a(v-u)} du + \sigma e^{-a(v-u)} dW_u. \quad (3.11)$$

Tento výraz dosadíme do vztahu 3.10 a získáme vyjádření

$$d \left(r_u e^{-a(v-u)} \right) = \vartheta_u e^{-a(v-u)} du + \sigma e^{-a(v-u)} dW_u. \quad (3.12)$$

Pak integrací v intervalu (t, v) máme

$$r_v = r_t e^{-a(v-t)} + \int_t^v \vartheta_u e^{-a(v-u)} du + \int_t^v \sigma e^{-a(v-u)} dW_u, \quad (3.13)$$

kde poslední integrál je stochastickým integrálem.

Poznámka 3.2.1: Jak je podrobně odvozeno v [10] v části věnované stochastickým diferenciálům

$$\int_0^T \varphi_u dW_u \quad (3.14)$$

je pro spojitou funkci φ_u definovaný pomocí integrálního součtu

$$I = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_{u_j} (W_{u_{j+1}} - W_{u_j}), \quad (3.15)$$

kde body u_j představují dělení intervalu $(0, T)$, tedy $0 = u_0 < u_1 < \dots < u_n = T$ a $W_{u_{j+1}} - W_{u_j}$ reprezentují přírůstky Wienerova procesu v intervalu (u_j, u_{j+1}) . Podle definice Wienerova procesu 2.2.1 mají jeho přírůstky normální rozdělení, které nezávisí na předchozím vývoji procesu. Integrální součet je tedy lineární kombinací nezávislých náhodných veličin s normálním rozdělením. Proto

$$\int_0^T \varphi_u dW_u \sim N \left(0, \int_0^T \varphi_u^2 du \right). \quad (3.16)$$

Pro stanovení ceny bezkupónového dluhopisu je nutné ještě odvodit integrál vztahu 3.13 v intervalu (t, T) . Po záměně pořadí integrace ve druhém a třetím sčítanci dostaneme vyjádření ve tvaru

$$\int_t^T r_v dv = \frac{1}{a} (1 - e^{-a(T-t)}) r_t + \frac{1}{a} \int_t^T (1 - e^{-a(T-u)}) \vartheta_u du + \frac{\sigma}{a} \int_t^T (1 - e^{-a(T-u)}) dW_u. \quad (3.17)$$

Podle poznámky 3.2.1 má výraz 3.17 pro $t = 0$ normální rozdělení se střední hodnotou

$$E \left(\int_0^T r_v dv \middle| \mathcal{F}_0 \right) = \frac{1}{a} (1 - e^{-aT}) r_0 + \frac{1}{a} \int_0^T (1 - e^{-a(T-u)}) \vartheta_u du \quad (3.18)$$

a rozptylem

$$\text{var} \left(\int_0^T r_v dv \middle| \mathcal{F}_0 \right) = \frac{\sigma^2}{a^2} \int_0^T (1 - e^{-a(T-u)})^2 du. \quad (3.19)$$

Pro cenu dluhopisu danou vztahem 3.9 využijeme toho, že v případě náhodné veličiny X s normálním rozdělením platí, že

$$E e^X = e^{EX + \frac{1}{2} \text{var} X}, \quad (3.20)$$

pak máme

$$P_0(T) = \exp \left(-E \left(\int_0^T r_v dv \middle| \mathcal{F}_0 \right) + \frac{1}{2} \text{var} \left(\int_0^T r_v dv \middle| \mathcal{F}_0 \right) \right). \quad (3.21)$$

Po dosazení za střední hodnotu a rozptyl obdržíme

$$P_0(T) = \exp \left(-\frac{1}{a} (1 - e^{-aT}) r_0 - \frac{1}{a} \int_0^T (1 - e^{-a(T-u)}) \vartheta_u du + \frac{\sigma^2}{2a^2} \int_0^T (1 - e^{-a(T-u)})^2 du \right). \quad (3.22)$$

Nyní odvodíme vztah pro rovnovážnou hladinu ϑ_T , která musí odpovídat aktuální situaci na trhu, tedy platí

$$f_t^M(s) = -\frac{\partial \ln P_t(s)}{\partial s}, \quad (3.23)$$

kde $f_t^M(s)$ označuje tržní forwardovou intenzitu v čase t na období délky s . Při využití rovnice 3.22, kde v posledním sčítanci použijeme substituci $x = T - u$, dostáváme v čase 0 rovnost

$$f_0^M(T) = e^{-aT} r_0 + \int_0^T e^{-a(T-u)} \vartheta_u du - \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-aT})^2. \quad (3.24)$$

Funkci ϑ hledáme ve tvaru

$$\vartheta_T = \frac{\partial f_0^M(T)}{\partial s} + a f_0^M(T) + \rho_T, \quad (3.25)$$

kde ρ_T označuje chybový člen. Když 3.25 dosadíme do druhého sčítance výrazu 3.24, pak získáváme

$$\int_0^T e^{-a(T-u)} \left(\frac{\partial f_0^M(u)}{\partial s} + a f_0^M(u) \right) du + \int_0^T e^{-a(T-u)} \rho_u du \quad (3.26)$$

$$= e^{-aT} (e^{aT} f_0^M(T) - f_0^M(0)) + \int_0^T e^{-a(T-u)} \rho_u du. \quad (3.27)$$

Rovnici 3.24 je následně možné přepsat do tvaru

$$f_0^M(T) = e^{-aT} (r_0 - f_0^M(0)) + f_0^M(T) + e^{-aT} \int_0^T e^{au} \rho_u du - \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-aT})^2. \quad (3.28)$$

Jak bylo uvedeno v části 1.3, platí $r_0 = f_0^M(0)$ a proto

$$e^{-aT} \int_0^T e^{au} \rho_u du = \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-aT})^2, \quad (3.29)$$

což po derivaci dává

$$\rho_T = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2aT}). \quad (3.30)$$

Výsledný vztah pro rovnovážnou hladinu daný Hull-Whiteovým modelem je

$$\vartheta_T = \frac{\partial f_0^M(T)}{\partial s} + a f_0^M(T) + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2aT}). \quad (3.31)$$

3.2.1 Pravděpodobnost záporných sazeb

Ze vztahu 3.13 a poznámky 3.2.1 plyne, že úroková intenzita v Hull-Whiteově modelu má normální rozdělení. Proto je pravděpodobnost toho, že úroková intenzita bude záporná, nenulová. Pro určení této pravděpodobnosti vypočítáme nejdřív střední hodnotu a rozptyl úrokové intenzity. Vyjdeme ze vztahu 3.13. Vzhledem k tomu, že přírůstky Wienerova procesu mají nulovou střední hodnotu, platí

$$E(r_T | r_t) = r_t e^{-a(T-t)} + \int_t^T e^{-a(T-u)} \vartheta_u du. \quad (3.32)$$

Dosazením za ϑ ze vztahu 3.25 máme vyjádření pro druhý sčítanec ve tvaru

$$\int_t^T e^{-a(T-u)} \vartheta_u du = \int_t^T e^{-a(T-u)} \left(\frac{\partial f_0^M(u)}{\partial s} + a f_0^M(u) \right) du + e^{-aT} \int_t^T e^{au} \rho_u du. \quad (3.33)$$

Po integraci, kdy k výpočtu druhého členu použijeme rovnost 3.29, dostáváme vyjádření střední hodnoty okamžité úrokové intenzity jako

$$E(r_T | r_t) = r_t e^{-a(T-t)} + f_0^M(T) - f_0^M(t) e^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-aT})^2 - \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2 e^{-a(T-t)}. \quad (3.34)$$

Při označení

$$\alpha_t = f_0^M(t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2 \quad (3.35)$$

lze zjednodušit zápis střední hodnoty na

$$E(r_T | r_t) = r_t e^{-a(T-t)} + \alpha_T - \alpha_t e^{-a(T-t)}. \quad (3.36)$$

Rozptyl je možné vzhledem k 3.16 vyjádřit ve tvaru

$$\text{var}(r_T | r_t) = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2a(T-t)}). \quad (3.37)$$

Po znormování obecného normálního rozdělení dostáváme pravděpodobnost záporných měř při pravděpodobnostní míře \mathbb{Q} vyjádřenou pomocí distribuční funkce normovaného normálního rozdělení Φ jako

$$\mathbb{Q}(r_T < 0 | \mathcal{F}_0) = \Phi \left(\frac{-\alpha_T}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2aT})}} \right). \quad (3.38)$$

Pravděpodobnost záporné úrokové intenzity v Hull-Whiteově modelu je ale na rozdíl od Vašíčkova modelu, jak je uvedeno v [11], zanedbatelná.

3.2.2 Ocenění opcí na dluhopis v Hull-Whiteově modelu

Pro odvození ceny derivátů v Hull-Whiteově modelu se využívá tzv. afinní časové struktury tohoto modelu. V úvodu této části proto začneme zavedením tohoto pojmu.

Model úrokových měř má podle [3] afinní časovou strukturu, pokud pro spojitě úročené sazby $R_t(T-t)$ v závislosti na r_t platí

$$R_t(T-t) = \alpha_t(T-t) + \beta_t(T-t)r_t, \quad (3.39)$$

kde α a β jsou deterministické funkce času a doby do splatnosti. Vzhledem ke vztahu 1.1 pak pro cenu bezkupónového dluhopisu dostáváme vztah

$$P_t(T-t) = A_t(T-t) e^{-B_t(T-t)r_t}. \quad (3.40)$$

Jako postačující podmínku pro rozhodování o tom, zda daný model okamžité úrokové intenzity má afinní časovou strukturu, je možné použít s odvoláním na [3] následující charakteristiku střední hodnoty a volatility v základním modelu 3.1

$$\mu_t(r_t) = \lambda_t r_t + \eta_t, \quad (3.41)$$

$$\sigma_t(r_t) = \sqrt{\gamma_t r_t + \delta_t}, \quad (3.42)$$

kde λ , η , γ a δ jsou deterministické funkce.

Hull-Whiteův model odpovídá volbě $\lambda_t = -a$, $\eta_t = \vartheta_t$, $\gamma_t = 0$ a $\delta_t = \sigma^2$ a tedy má afinní časovou strukturu.

Pokud zobecníme rovnici 3.22 na obecný čas t , lze pro cenu dluhopisu $P_t(T - t)$ odvodit podle [3] vztahy

$$B_t(T - t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-a(T-t)}), \quad (3.43)$$

$$A_t(T - t) = \frac{P_0^M(T)}{P_0^M(t)} \exp \left(B_t(T - t) f_0^M(t) - \frac{\sigma^2}{4a} (1 - e^{-2at}) B_t^2(T - t) \right). \quad (3.44)$$

S využitím afinní časové struktury Hull-Whiteova modelu uvedeme s odvoláním na [9] vztah pro ocenění evropské call opce na bezkupónový dluhopis.

V [9] se předpokládá, že úroková intenzita r_t je dána Gaussovým (normálním) procesem s vlastností návratu k průměru a tržní cena rizika je stejná pro všechny cenné papíry. Tyto předpoklady jsou splněny, protože Hull-Whiteův model má vlastnost návratu k průměru a rozdělení úrokové intenzity r_t za podmínky znalosti vývoje do času s , kde $s < t$, má normální rozdělení s parametry danými vztahy 3.36 a 3.37. Navíc předpokládáme, že uvažovaná aktiva jsou obchodovatelná, což podle poznámky 2.2.5 znamená, že tržní cena rizika je stejná pro všechna tato aktiva. Za předpokladu logaritmicko-normálního rozdělení tržní ceny podkladového aktiva pak podle [3] a [9] platí následující vztah pro ocenění evropské call opce v okamžiku t s maturitou v čase T na bezkupónový dluhopis s realizační cenou K a maturitou v čase S

$$ZBO^{call}(t, T, S, K) = P_t(S - t)\Phi(h) - KP_t(T - t)\Phi(h - \sigma_P), \quad (3.45)$$

kde

$$\sigma_P = \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a(T-t)}}{2a}} B_T(S - T), \quad (3.46)$$

$$h = \frac{1}{\sigma_P} \ln \frac{P_t(S - t)}{P_t(T - t)K} + \frac{\sigma_P}{2}. \quad (3.47)$$

Pro evropskou put opci na tentýž dluhopis platí při stejném značení vztah

$$ZBO^{put}(t, T, S, K) = KP_t(T - t)\Phi(-h + \sigma_P) - P_t(S - t)\Phi(-h). \quad (3.48)$$

Výsledná formule pro ocenění opcí na dluhopisy je nápadně podobná výsledku Black-Scholesova modelu. Jak je ukázáno v [9], je to důsledek stejných předpokladů obou modelů, zejména pak předpokladu logaritmicko-normálního

rozdělení tržní ceny podkladového aktiva. Výraz $P_t(T-t)$ nahrazuje diskontování výrazem $e^{-r(T-t)}$ a rozptyl logaritmu ceny podkladového aktiva v čase maturity opce σ_P^2 nahrazuje výraz $\sigma^2(T-t)$, který má Black-Scholesově modelu ten samý význam. Proto jsou výsledky ocenění stejné při použití Black-Scholesovy formule jako v právě uvedeném modelu pro ocenění opcí na dluhopisy.

Cena opce na dluhopis s kupónem c_k vypláceným po n období se pak podle [9] snadno získá z ceny bezkupónových dluhopisů jako lineární kombinace opcí na bezkupónové dluhopisy

$$CBO(t, T, \tau, c, K) = \sum_{k=1}^n c_k ZBO(t, T, t_k, K_{t_k}), \quad (3.49)$$

kde t je okamžik ocenění, T představuje čas maturity opce, $\tau = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ dává okamžiky výplaty kupónu, proto $t_k > T$ pro všechna $k \in (1, 2, \dots, n)$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ označují výše jednotlivých kupónů, K je realizační cena opce na kupónový dluhopis. Realizační ceny opcí na bezkupónové dluhopisy K_{t_k} , $k \in (1, 2, \dots, n)$, jsou ve výši $P_T(t_k - T)$ dané vztahem 1.1, při úrokové míře r^* , která je stanovena tak, aby se hodnota kupónového dluhopisu v čase maturity opce T rovnala realizační ceně K . Vztah 3.49 platí v závislosti na typu použité ceny bezkupónového dluhopisu jak pro call tak i pro put opce.

3.2.3 Ocenění swapcí v Hull-Whiteově modelu

Ocenění swapcí vychází z podobnosti swapů s kupónovým dluhopisem, která byla popsána v části 2.1. V případě, kdy držitel swapce má právo obdržet pevnou sazbu, se jedná o call opci na dluhopis s pevným kupónem, v situaci, kdy platíme pevnou sazbu, ztotožňujeme swapci s put opcí na dluhopis s pevným úrokem.

Ze vztahů 3.45, resp. 3.48, a 3.49 pak plyne způsob ocenění opcí na swapy. V případě, že máme právo inkasovat pevnou sazbu, tedy u call swapcí, je oceňovací formule s odvoláním na [3] následující

$$N \sum_{k=1}^n c_k ZBO^{call}(t, T, t_k, K_{t_k}), \quad (3.50)$$

kde N označuje nominální hodnotu swapu, t dává čas ocenění, T je okamžikem maturity opce, t_k představují okamžiky výplaty kupónů a platí pro ně, že $t_k > T$, realizační cena je daná jako

$$K_{t_k} = A_T(t_k - T) \exp(-B_T(t_k - T)r^*) \quad (3.51)$$

a označíme-li dobu mezi jednotlivými platbami kupónů převedenou na roky podle dané kalendářní konvence jako AF_{t_k} , pak pro kupóny platí vztahy $c_k = RAF_{t_k}$, kde $k \in (1, 2, \dots, n-1)$ a $c_n = 1 + RAF_{t_n}$, kde R představuje realizační sazbu podkladového swapu. Sazba r^* je stanovena tak, aby se při ní v čase T rovnala

diskontovaná cena dluhopisu realizační ceně, která je, jak bylo uvedeno v části 2.1, rovna nominální hodnotě dluhopisu, tedy v tomto případě jedné.

$$\sum_{k=1}^n c_k A_T(t_k - T) e^{-B_T(t_k - T)r^*} = 1. \quad (3.52)$$

Pro put swapci, tedy pro situaci, kdy nám podkladový swap dává právo platit pevnou sazbu, je při stejném značení oceňovací formule ve tvaru

$$N \sum_{k=1}^n c_k ZBO^{put}(t, T, t_k, K_{t_k}). \quad (3.53)$$

3.3 Kalibrace Hull-Whiteova modelu

Jak bylo v krátkosti uvedeno u úvodu kapitoly 3, bude kalibrace Hull-Whitova modelu založena na porovnání cen swapcí stanovených na základě Blackova a Hull-Whiteova modelu.

Vzhledem k tomu, že kalibrovaný Hull-Whiteův model bude v další kapitole využitý k ocenění fondu s dobou trvání 10 let, budou ke kalibraci využity právě swapce s maturitou opce v rozmezí 1 až 10 let a maturitou podkladového swapu za 1 rok. Za této situace je možné vyjádřit řešení 3.52 ve tvaru

$$r^* = \frac{\ln(c_1 A_T(t_1 - T))}{B_T(t_1 - t)}. \quad (3.54)$$

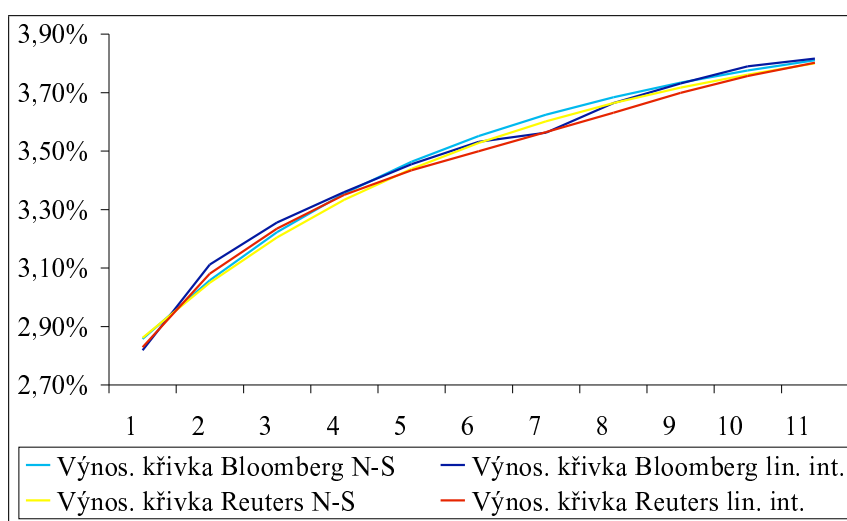
Nominální hodnota swapce bude podobně jako v předchozí kapitole ve výši 100 000 a pevnou sazbu swapu stanovíme opět ve výši technické úrokové míry, tj. 2,4%.

Výsledky kalibrace Hull-Whiteova modelu pak určíme minimalizací čtvercové odchylky ceny put swapcí stanovené na základě tržních volatilit a vztahu 2.43 a ceny určené pomocí formule 3.53. Stejných výsledků kalibrace bychom dosáhli i při použití call swapcí. V této kapitole byla použita numerická minimalizace čtvercových odchylek s prvním přiblížením parametrů $a = 0,05$ a $\sigma = 0,002$.

Parametry Hull-Whiteova modelu budeme porovnávat ve dvou situacích: v té první zvolíme den, kdy dochází k minimální odchylce v cenách bezkupónových dluhopisů, na kterých byly mapovány odchylky ve výnosových křivkách. Takovým dnem je například 19.12.2006, kdy relativní odchylky v ocenění dluhopisů nepřesáhly 0,5% pro žádnou sledovanou maturitu při všech zvolených způsobech konstrukce výnosové křivky.

Druhou situaci pro porovnání parametrů Hull-Whiteova modelu bude představovat den, kdy naopak pozorujeme velké odchylky ve vstupních datech pro konstrukci výnosové křivky. Jako reprezentanta takové situace zvolíme již několikrát zmiňovaný den - 29.2.2008.

Začneme situací, kdy jsou odchylky vstupních dat minimální. Výnosová křivka konstruovaná pro den 19.12.2006 v prvních 11 letech, které vstupují do modelace, je znázorněna na obrázku 3.1.



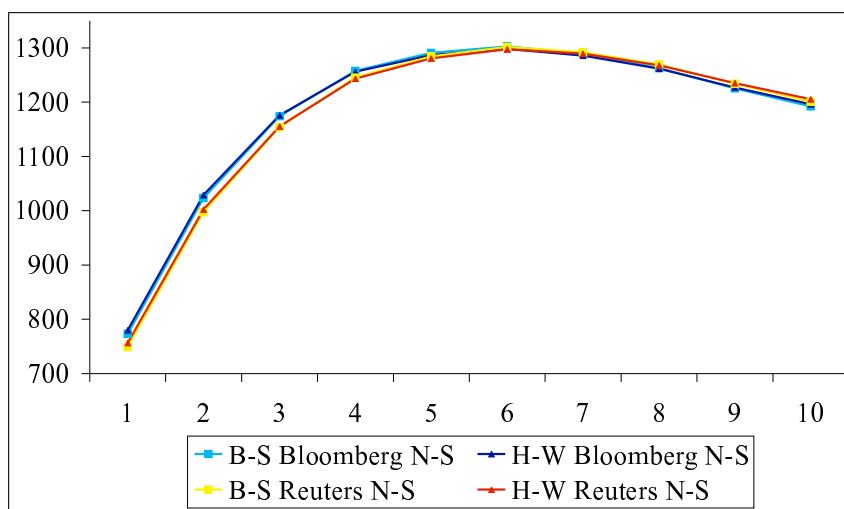
Obrázek 3.1: Výnosové křivky v prvních 11 letech konstruované dne 19.12.2006 z dat uvedených v systémech Bloomberg a Reuters pomocí metody lineární interpolace a Nelson-Sieglovy metody.

Tabulka 3.1 pak ukazuje výsledky kalibrace pro jednotlivé výnosové křivky, které se do Hull-Whiteova modelu promítnou prostřednictvím cen swapcí. Z tabulky 3.1 vyplývá, že volatilita okamžité úrokové sazby σ je stejná pro všechny použité způsoby konstrukce, zatímco parametr a , který reprezentuje rychlost návratnosti ke středu, se liší jak v závislosti na zvoleném způsobu konstrukce výnosové křivky, tak i v závislosti na volbě systému zdrojových dat. Přitom větší rozdíly vznikají při volbě různých systémů vstupních hodnot - řádově 0,008, menší pak v rámci jednoho systému při volbě odlišných způsobů konstrukce výnosové křivky - odchylka 0,0046.

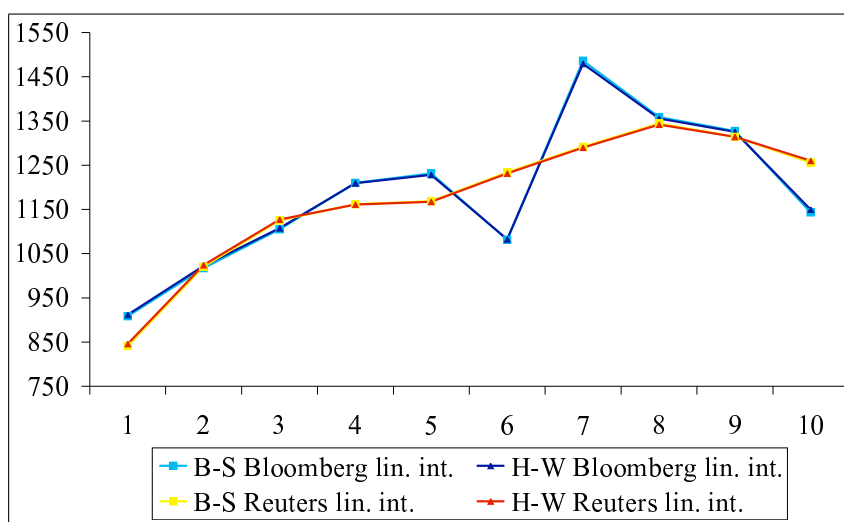
Přesnost kalibrace a ceny swapcí stanovené na základě Hull-Whiteova modelu pak znázorňují grafy 3.2 a 3.3. Metoda vyrovnání zmírnila dopad odchylek ve vstupních datech, proto jsou rozdíly v ocenění swapcí minimální, jak ukazuje graf 3.2. Zatímco v případě výnosové křivky konstruované metodou lineární interpolace se vychýlení výnosové křivky daleko zřetelněji promítlo i do výsledného průběhu ceny swapce, což můžeme pozorovat na grafu 3.3. Cena swapcí je

	Bloomberg		Reuters	
	N-S metoda	Lin. interpolace	N-S metoda	Lin. interpolace
a	0,0214	0,0204	0,0173	0,0127
σ	0,0048	0,0048	0,0048	0,0048

Tabulka 3.1: Srovnání parametrů Hull-Whiteova modelu ze dne 19.12.2006 v závislosti na volbě systému zdrojových dat a způsobu konstrukce výnosové křivky.



Obrázek 3.2: Ceny swapcí ze dne 19.12.2006 vypočtené pomocí Black-Scholesova a Hull-Whiteova modelu pro systémy Bloomberg a Reuters, přitom výnosová křivka je ve všech případech konstruovaná pomocí Nelson-Sieglovy metody. Maturita opce nastává v rozmezí 1 až 10 let a podkladový swap má splatnost za 1 rok.



Obrázek 3.3: Ceny swapcí ze dne 19.12.2006 vypočtené pomocí Black-Scholesova a Hull-Whiteova modelu pro systémy Bloomberg a Reuters, přitom výnosová křivka je ve všech případech konstruovaná pomocí metody lineární interpolace. Maturita opce nastává v rozmezí 1 až 10 let a podkladový swap má splatnost za 1 rok.

tedy mnohem citlivější na rozdíly ve vstupních výnosových křivkách než ocenění dluhopisů.

Kalibraci Hull-Whiteova modelu neovlivňuje pouze vstupní výnosová křivka, ale také volatility úrokových swapcí, které vstupují do Black-Scholesova

	Bloomberg		Reuters	
	N-S metoda	Lin. interpolace	N-S metoda	Lin. interpolace
a	0,0197	0,0186	0,0158	0,0112
změna a	-7,89%	-8,67%	-8,42%	-11,69%
σ	0,0050	0,0049	0,0050	0,0049
změna σ	2,70%	2,71%	2,74%	2,71%

Tabulka 3.2: Srovnání parametrů Hull-Whiteova modelu ze dne 19.12.2006 v závislosti na volbě systému zdrojových dat a způsobu modelace výnosové křivky při paralelním posunu tržních volatilit swapcí o 0,5%. V tabulce je zachycena i procentní změna proti situaci, kdy nebyly tržní volatilita měněny (viz tabulka 3.1).

modelu. Jak bylo uvedeno v předchozí kapitole, rozdíly ve volatilitě kotované v systému Bloomberg a Reuters nepřevyšují 0,5%. Pro určení maximálního dopadu tržní volatility na kalibraci Hull-Whiteova modelu proto navýšíme aktuální tržní volatility právě o maximální rozdíl mezi oběma systémy, tj. o 0,5%. Hodnoty parametrů Hull-Whiteova modelu pro tuto situaci nalezneme v tabulce 3.2. Při zvýšení tržní volatility swapcí se zvýší i ceny těchto instrumentů. Konkrétní procentní nárůsty cen swapcí zachycených v grafech 3.2 a 3.3 při zvýšené volatilitě obsahuje tabulka 3.3. Odtud je patrné, že v souvislosti s malou změnou v tržní volatilitě vznikl ve výsledné ceně řádově stejný rozdíl.

Maturita opce	Bloomberg				Reuters			
	N-S metoda		Lin. interpolace		N-S metoda		Lin. interpolace	
	B-S	H-W	B-S	H-W	B-S	H-W	B-S	H-W
1	0,07%	0,17%	0,03%	0,09%	0,09%	0,20%	0,05%	0,12%
2	0,15%	0,20%	0,16%	0,20%	0,18%	0,22%	0,17%	0,20%
3	0,22%	0,22%	0,26%	0,27%	0,24%	0,24%	0,25%	0,25%
4	0,27%	0,25%	0,30%	0,28%	0,29%	0,27%	0,34%	0,33%
5	0,32%	0,29%	0,36%	0,34%	0,33%	0,31%	0,42%	0,41%
6	0,36%	0,34%	0,55%	0,57%	0,37%	0,35%	0,42%	0,41%
7	0,40%	0,38%	0,29%	0,24%	0,41%	0,39%	0,41%	0,40%
8	0,44%	0,44%	0,37%	0,35%	0,45%	0,45%	0,40%	0,39%
9	0,48%	0,50%	0,41%	0,40%	0,50%	0,50%	0,43%	0,43%
10	0,52%	0,55%	0,56%	0,61%	0,52%	0,55%	0,48%	0,51%

Tabulka 3.3: Procentní nárůsty v ceně swapcí s maturitou opce v rozmezí 1 až 10 let a splatností podkladového swapu za 1 rok při zvýšení tržní volatility o 0,5% ze dne 19.12.2006.

Dne 29.2.2008 mají výnosové křivky průběh znázorněný na grafu 3.4. V tento den byla chybně kotována třicetiletá sazba v systému Bloomberg. Z grafu 3.4 je patrné, že významný vliv měla chybná kotace pouze na výnosovou křivku konstruovanou Nelson-Sieglou metodou z dat pocházejících ze systému

Bloomberg. V tabulce 3.4 je uvedeno srovnání parametrů Hull-Whiteova modelu, které byly na základě těchto křivek odvozeny. Parametr rychlosti návratu

	Bloomberg		Reuters	
	N-S metoda	Lin. interpolace	N-S metoda	Lin. interpolace
a	0,3025	0,1512	0,1225	0,1263
σ	0,0104	0,0077	0,0069	0,0069

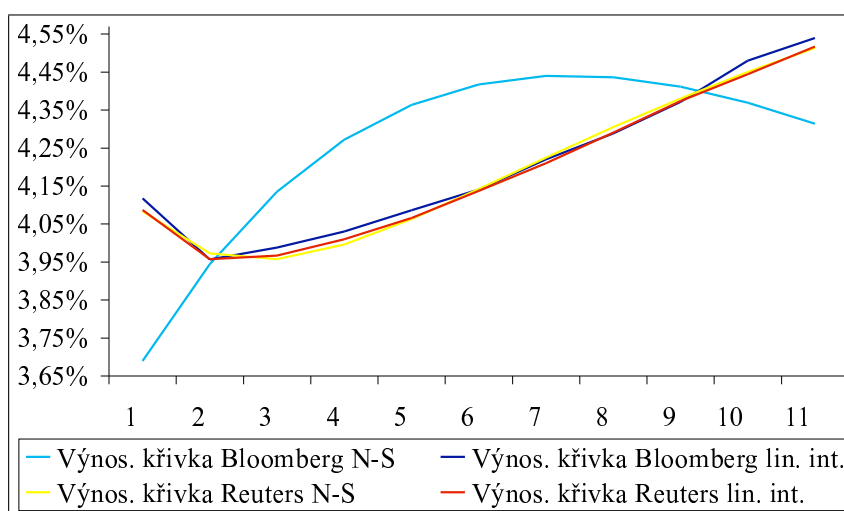
Tabulka 3.4: Srovnání parametrů Hull-Whiteova modelu ze dne 29.2.2008 v závislosti na volbě systému zdrojových dat a způsobu modelace výnosové křivky.

ke středu a reaguje výrazněji na vychýlení výnosové křivky než volatilita σ . V porovnání s metodou lineární interpolace při stejném systému vstupních dat je dvojnásobný, zatímco volatilita vzrostla o 35%.

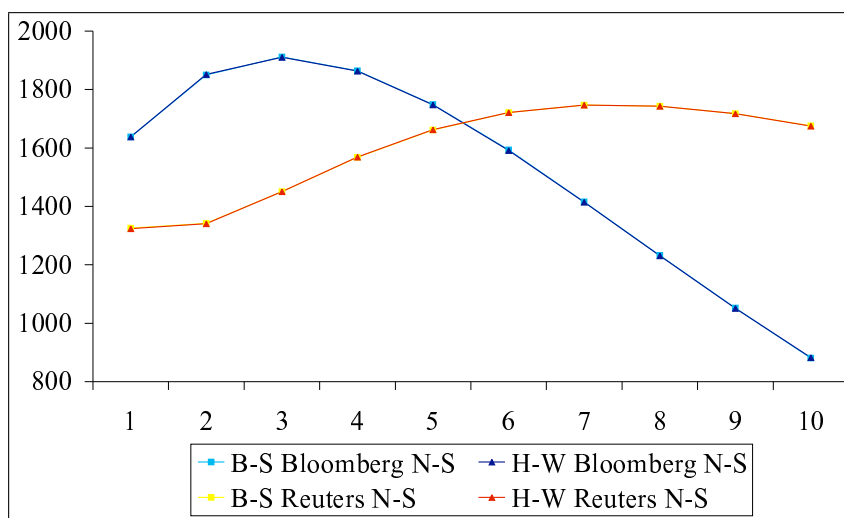
V rámci systému Reuters dává kalibrace srovnatelné výsledky při použití obou metod konstrukce výnosové křivky. Opět se ukazuje, že zásadní vliv má volba vstupních hodnot pro konstrukci výnosové křivky. Při srovnatelných tržních datech se pak způsob konstrukce křivky neprojevuje tak podstatně ve výsledné hodnotě parametrů Hull-Whiteova modelu.

Pro úplnost uvedeme podobně jako pro den 19.12.2006 grafické srovnání cen swapů z Blackova a Hull-Whiteova modelu na obrázcích 3.5 a 3.6. Tvar vychýlené výnosové křivky konstruované z dat ze systému Bloomberg při použití Nelson-Sieglvy metody se odráží i v křivce popisující cenu swapů.

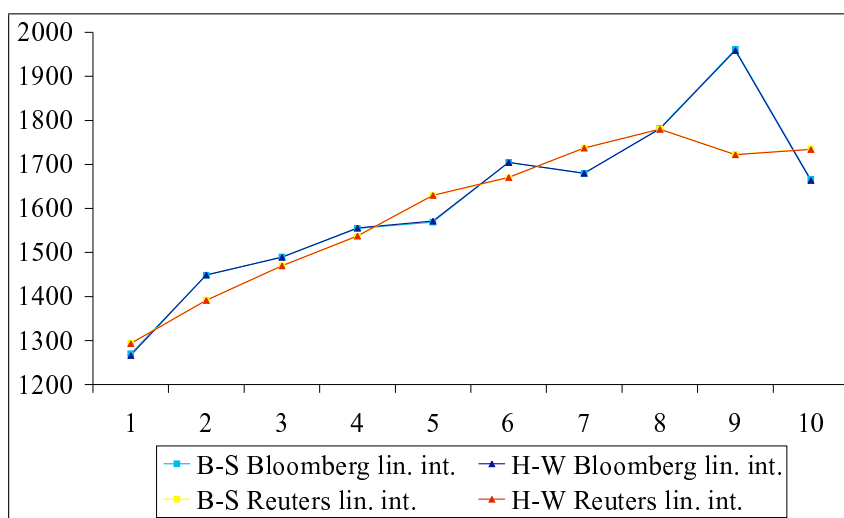
Zaměříme se ještě, podobně jako u modelace dne 19.12.2006, na dopad změny volatility do kalibrace Hull-Whiteova modelu. Zvýšení tržní volatility swapů mírně zvýšilo volatilitu okamžité úrokové sazby. Rychlost návratnosti



Obrázek 3.4: Výnosové křivky v prvních 11 letech konstruované dne 29.2.2008 z dat uvedených v systémech Bloomberg a Reuters pomocí metody lineární interpolace a Nelson-Sieglvy metody.



Obrázek 3.5: Ceny swapů z dne 29.2.2008 vypočtené pomocí Black-Scholesova a Hull-Whiteova modelu pro systémy Bloomberg a Reuters, přitom výnosová křivka je ve všech případech konstruovaná pomocí Nelson-Sieglvy metody.



Obrázek 3.6: Ceny swapů z dne 29.2.2008 vypočtené pomocí Black-Scholesova a Hull-Whiteova modelu pro systémy Bloomberg a Reuters, přitom výnosová křivka je ve všech případech konstruovaná pomocí lineární interpolace.

ke středu reprezentovaná parametrem a se v porovnání se změnou v tržní volatilitě swapů znatelně snížila. Situace je zachycena v tabulce 3.5.

Pro přiblížení změn v ocenění swapů, které byly použity ke kalibraci Hull-Whiteova modelu uvedeme ještě tabulku 3.6.

Závěry vyplývající z provedené modelace se dají shrnout následovně: pro účely stanovení parametrů lze dosáhnout srovnatelných výsledků při použití obou způsobů modelace výnosové křivky. Je ovšem nutné posoudit, zda vstupní

	Bloomberg		Reuters	
	N-S metoda	Lin. interpolace	N-S metoda	Lin. interpolace
a	0,2853	0,1384	0,1144	0,1171
změna a	-5,71%	-8,44%	-6,62%	-7,29%
σ	0,0104	0,0077	0,0070	0,0070
změna σ	0,17%	0,22%	1,27%	1,04%

Tabulka 3.5: Srovnání parametrů Hull-Whiteova modelu ze dne 29.2.2008 v závislosti na volbě systému zdrojových dat a způsobu modelace výnosové křivky při paralelním posunu tržních volatilit swapcí o 0,5%. V tabulce je zachycena i procentní změna proti situaci, kdy nebyly tržní volatilita měněny (viz tabulka 3.4).

Maturita opce	Bloomberg				Reuters			
	N-S metoda		Lin. interpolace		N-S metoda		Lin. interpolace	
	B-S	H-W	B-S	H-W	B-S	H-W	B-S	H-W
1	0,03%	0,03%	0,09%	0,04%	0,05%	0,03%	0,05%	0,03%
2	0,04%	0,05%	0,11%	0,09%	0,13%	0,12%	0,11%	0,10%
3	0,07%	0,07%	0,16%	0,15%	0,15%	0,15%	0,15%	0,14%
4	0,09%	0,09%	0,17%	0,18%	0,14%	0,15%	0,15%	0,16%
5	0,12%	0,12%	0,17%	0,20%	0,13%	0,14%	0,14%	0,15%
6	0,16%	0,16%	0,14%	0,15%	0,12%	0,13%	0,13%	0,14%
7	0,23%	0,23%	0,14%	0,16%	0,11%	0,12%	0,11%	0,12%
8	0,34%	0,34%	0,12%	0,11%	0,11%	0,11%	0,10%	0,10%
9	0,50%	0,50%	0,08%	0,06%	0,11%	0,10%	0,11%	0,10%
10	0,73%	0,73%	0,13%	0,12%	0,11%	0,10%	0,10%	0,08%

Tabulka 3.6: Procentní nárůst v ceně swapcí s maturitou opce v rozmezí 1 až 10 let a splatností podkladového swapu za 1 rok při zvýšení tržní volatilita o 0,5% ze dne 29.2.2008.

sazby úrokových swapů nevykazují chybu v jejich kotaci. Naproti tomu cena swapcí reaguje velmi citlivě na zvolený způsob modelace. Proto metoda konstrukce výnosové křivky pomocí vyrovnání tržních hodnot dává při "rozumných" odchylkách vstupních dat daleko lepší výsledky.

Malá změna tržní volatilita swapcí na hladině desetin procenta způsobila ve výsledné kalibraci rozdíl až několika procent. Rychlost návratu ke středu se snížil a volatilita úrokové intenzity vzrostla, tedy model s těmito parametry bude pomaleji konvergovat ke své rovnovážné hladině.

Kapitola 4

Modelace tržní ceny

Modelace tržní ceny hraje významnou roli v situacích, kdy potřebujeme ocenit finanční instrument, se kterým se standardně neobchoduje na aktivních trzích. V českých podmínkách by se mohlo jednat o dluhopisy s dlouhou maturitou (např. 50 let). V pojišťovnictví je častým případem použití modelované tržní ceny stanovení reálné hodnoty závazků pojišťovny.

V terminologii IFRS 4¹ hovoříme o tzv. fér hodnotě, která je definována jako částka, za niž lze vyměnit aktivum nebo vyrovnat závazek mezi znalými, souhlasícími a nezávislými stranami. V případě, že existuje aktivní trh s daným instrumentem, je za fér hodnotu považována cena transakce na referenčním trhu, pokud se s instrumentem aktivně neobchoduje, pak dochází k její modelaci. Jako příklady použití reálné hodnoty závazků pojišťovny uvedme ocenění při převodu pojistného kmene, test postačitelnosti rezerv v životním pojištění a ocenění pro účely výkazů solventnosti podle metodiky Solvency II.

Častou metodou, která se používá při stanovení ceny, je metoda diskontovaných budoucích peněžních toků. Hlavním problémem této metody je určení diskontní míry. V praxi se pro ocenění používá bezriziková výnosová křivka, která bývá odvozena z cen úrokových swapů, jak bylo uvedeno v části 1.2.

4.1 Ocenění závazků z pojištění pro případ dožití

V této části použijeme metodu diskontovaných peněžních toků pro ocenění jednoduchého spořicího produktu, kterým bude pojištění pro případ dožití.

Nejdříve si shrneme popis instrumentu a určité zjednodušující předpoklady, které budou při výpočtu ceny použity. Předpokládejme, že v daný okamžik si 1 000 klientů uzavře pojištění pro případ dožití na dobu 10 let. Pro účely následujícího výpočtu nebudeme uvažovat žádné poplatky spojené s pojištěním. Navíc se soustředíme pouze na tu část pojistného, která se kumuluje ve fondu alokovaného k dané pojistné smlouvě. Bude se tedy jednat o jednoduchý spořicí

¹International Financial Reporting Standards 4 - mezinárodní standard, který upravuje finanční výkaznictví pojišťoven.

produkt. Každý z klientů bude po dobu deseti let přispívat do fondu stejnou částkou 10 000 Kč. Ročně se budou ve fondu zhodnocovat prostředky na "úctu" každého z klientů technickou úrokovou mírou a v případě, že výnos z investic převyší technickou úrokovou míru, budou připisovány navíc i podíly na výnosech.

Obecně platí, že podíly na výnosech by měly být stanoveny tak, aby obstály v konkurenčním prostředí. Rozhodnou sazbu pro přidělování podílů na výnosech pro nás bude představovat pětiletá spojitě úročená tržní sazba. Tedy pokud tato sazba překročí výši technické úrokové míry, budou ve fondu připisovány podíly na výnosech ve výši jejich rozdílu.

Podmínkou pro výplatu prostředků alokovaných na účtu klienta je buď storno smlouvy nebo její řádné ukončení po deseti letech. Výše výplaty pak bude v obou případech rovna vkladům klienta a příslušnému zhodnocení. V této souvislosti zavedeme předpoklad, že procento storen bude pro všechny roky v konstantní výši 5%. V praxi tento předpoklad splněn není, vyšší stornovost se projevuje zejména v prvních letech pojištění. V posledních letech trvání smlouvy se procento storen snižuje, což je způsobeno poplatkem za provedení storna a krátkou dobou do uplynutí pojistné doby. Vzhledem k tomu, že nejsou uvažovány žádné počáteční a správní náklady a ani náklady spojené se stornováním smlouvy, je předpoklad o konstantním procentu storen obhajitelný. Mezi storna byly pro jednoduchost zahrnuty i výstupy z pojištění z důvodu úmrtí.

Rok	Roční sazba	Pětiletá sazba	Připsané podíly
1	4,17%	4,38%	1,98%
2	3,69%	4,12%	1,72%
3	3,46%	3,97%	1,57%
4	4,25%	4,60%	2,20%
5	3,74%	4,18%	1,78%
6	3,71%	4,14%	1,74%
7	4,50%	4,75%	2,35%
8	5,90%	5,84%	3,44%
9	5,28%	5,33%	2,93%
10	5,29%	5,33%	2,93%

Tabulka 4.1: Roční sazba spojitého úročení je použita pro odvození diskontního faktoru. Výnosnost investic bývá reprezentována pětiletou tržní sazbou. Připsané procento podílů na výnosech odpovídá nadvýnosu investic nad technickou úrokovou mírou.

Nyní se zaměříme na ocenění závazků, které plynou z tohoto typu pojištění. Pomocí Hull-Whiteova modelu nejdříve stanovíme roční sazby pro diskontování a pětileté sazby pro rozhodování o podílu na výnosech pro každý rok trvání fondu. Vycházet budeme ze vztahů 1.2 a 3.40. Požadované sazby spojitého úročení pak získáme dosazením do vztahu

$$R_t(T-t) = -\frac{\ln(A_t(T-t)) - r_t B_t(T-t)}{T-t}, \quad (4.1)$$

kde r_t je stanoveno ze vztahu 3.5.

V tabulce 4.1 je pak v jednotlivých letech zachycen výsledek pětiletých sazeb při jedné simulaci Hull-Whiteova modelu², na základě kterých jsou přidělovány podíly na výnosech.

Tabulka 4.2 pak udává vývoj prostředků alokovaných k jedné pojistné smlouvě pro tuto jednu simulaci.

Rok	Fond počátek	Vklad	Fond celkem	Zhodnocení TÚM	Podíly na výnosech	Fond konec
1	0	10 000	10 000	240	198	10 438
2	10 438	10 000	20 438	491	351	21 279
3	21 279	10 000	31 279	751	491	32 521
4	32 521	10 000	42 521	1 020	936	44 477
5	44 477	10 000	54 477	1 307	972	56 756
6	56 756	10 000	66 756	1 602	1 160	69 519
7	69 519	10 000	79 519	1 908	1 868	83 295
8	83 295	10 000	93 295	2 239	3 210	98 745
9	98 745	10 000	108 745	2 610	3 186	114 540
10	114 540	10 000	124 540	2 989	3 649	131 179

Tabulka 4.2: Výše prostředků alokovaných k jedné pojistné smlouvě v jednotlivých letech. Podíly na výnosech jsou určeny tabulkou 4.1.

Pro stanovení hodnoty tohoto fondu v čase nula je nutné určit peněžní toky v jednotlivých letech v rámci celého fondu. Tuto modelaci nalezneme v tabulce 4.3.

Pak metodou diskontovaných peněžních toků stanovíme hodnotu fondu pro jednu simulaci Hull-Whiteova modelu. Fér hodnota je následně vypočtena jako střední hodnota³ z 10 000 simulací cen s využitím Hull-Whiteova modelu s parametry stanovenými v předchozí kapitole.

Vliv výnosové křivky při ocenění spořicího produktu ukážeme v tabulce 4.4, kde jsou uvedeny dny, ve kterých došlo k největším odchylkám v ocenění bezkupónového dluhopisu se splatností za padesát let s výjimkou dnů před 10.12.2006. Do tohoto data byly v systému Reuters dostupné pouze volatilitity pro maturitu opce za 2, 3, 4 a 5 let pro všechny kotované maturity podkladového swapu, tj. maturity swapu za 1, 5 a 10 let. Proto by nebylo relevantní porovnávat výsledky modelace, v níž je kalibrace Hull-Whiteova modelu založena na čtyřech hodnotách s výsledky při použití systému Bloomberg, kde je modelace založena na deseti hodnotách. Pro srovnání doplníme ještě den 19.12.2006, kdy byl naopak rozdíl v ocenění dluhopisu minimální. Každý zvolený den provedeme pro obě metody konstrukce výnosové křivky a pro oba systémy vstupních údajů 10 000 simulací a srovnáme fér hodnoty spořicího produktu.

²Konkrétně se jedná o pětileté sazby vypočtené dne 29.2.2008 při využití výnosové křivky konstruované metodou Nelson-Siegel z dat ze systému Reuters.

³Za nestranný a konzistentní odhad střední hodnoty byl použitý aritmetický průměr.

Rok	Počet klientů	Příjmy fondu	Počet storen	Výdaje fondu	CF	DF	CF * DF
1	1 000	10 437 563	50	521 878	9 915 685	0,96	9 510 870
2	950	10 298 966	47	1 000 093	9 298 872	0,92	8 595 977
3	903	10 151 679	45	1 463 434	8 688 245	0,89	7 758 493
4	858	10 258 661	42	1 868 044	8 390 617	0,86	7 181 132
5	816	10 019 665	40	2 270 249	7 749 416	0,82	6 388 922
6	776	9 903 627	38	2 641 708	7 261 919	0,79	5 769 074
7	738	10 166 935	36	2 998 619	7 168 316	0,76	5 443 962
8	702	10 845 573	35	3 456 058	7 389 515	0,72	5 290 363
9	667	10 535 893	33	3 779 835	6 756 058	0,68	4 588 223
10	634	10 548 607	634	83 167 252	-72 618 644	0,64	-46 774 765
							13 752 251

Tabulka 4.3: Peněžní toky celého fondu v jednotlivých letech. Výsledná hodnota fondu v čase nula je uvedena v posledním řádku tabulky.

Datum	Bloomberg		Reuters	
	N-S metoda	Lin. interpolace	N-S metoda	Lin. interpolace
19.12.2006	11 946 716	11 910 037	11 775 476	12 098 375
27.2.2008	12 483 377	14 206 671	14 344 258	14 240 621
29.2.2008	12 101 511	14 020 073	13 718 195	13 913 814
3.3.2008	11 991 562	13 933 447	13 667 140	13 815 512
5.3.2008	11 951 261	14 019 843	13 636 476	13 711 187
12.3.2008	12 156 954	13 839 278	13 841 978	13 857 399
14.12.2007	14 013 761	13 861 707	13 948 162	14 023 964
17.1.2008	13 568 604	13 606 196	13 550 986	13 545 237
18.1.2008	13 429 538	13 831 687	13 597 653	13 730 959
31.1.2008	13 692 023	13 827 877	13 830 989	13 780 875
10.9.2007	13 145 290	13 433 338	13 300 753	13 413 470
22.11.2007	13 370 858	13 347 068	13 194 784	13 489 367
28.11.2007	13 487 952	13 613 031	13 532 742	13 729 905
27.3.2008	11 205 009	13 755 025	13 635 196	13 740 839
3.4.2008	13 605 772	13 959 358	13 558 004	13 758 470
7.4.2008	13 607 054	13 689 197	13 560 032	13 765 160

Tabulka 4.4: Srovnání cen spořicího produktu v závislosti na systému zdrojových dat a způsobu konstrukce výnosové křivky.

Tabulka 4.5 potvrzuje závěry formulované v předchozích kapitolách. Výnosová křivka hraje velmi podstatnou roli při ocenění finančních instrumentů a to jak v případě snadno ocenitelných dluhopisů, tak i komplikovanějších instrumentů, k jejichž ocenění využíváme modely okamžité úrokové intenzity. Jak je

Datum	Relativní rozdíly		Relativní rozdíly	
	N-S metoda	Lin. interpolace	Bloomberg	Reuters
19.12.2006	1,45%	-1,56%	0,31%	-2,67%
27.2.2008	-12,97%	-0,24%	-12,13%	0,73%
29.2.2008	-11,78%	0,76%	-13,68%	-1,41%
3.3.2008	-12,26%	0,85%	-13,94%	-1,07%
5.3.2008	-12,36%	2,25%	-14,75%	-0,54%
12.3.2008	-12,17%	-0,13%	-12,16%	-0,11%
14.12.2007	0,47%	-1,16%	1,10%	-0,54%
17.1.2008	0,13%	0,45%	-0,28%	0,04%
18.1.2008	-1,24%	0,73%	-2,91%	-0,97%
31.1.2008	-1,00%	0,34%	-0,98%	0,36%
10.9.2007	-1,17%	0,15%	-2,14%	-0,84%
22.11.2007	1,33%	-1,05%	0,18%	-2,18%
28.11.2007	-0,33%	-0,85%	-0,92%	-1,44%
27.3.2008	-17,82%	0,10%	-18,54%	-0,77%
3.4.2008	0,35%	1,46%	-2,53%	-1,46%
7.4.2008	0,35%	-0,55%	-0,60%	-1,49%

Tabulka 4.5: Srovnání relativních odchylek v ocenění pojištění pro případ dožití. V prvních dvou sloupcích jsou uvedeny relativní odchylky, které nastanou v jednom ze systémů při použití různých systémů zdrojových dat, a ve zbylé části tabulky následuje přehled relativních odchylek v ocenění při použití stejných vstupních údajů pro obě metody modelace.

patrné, největší relativní odchylky jak v rámci jednoho systému, tak i jednoho způsobu konstrukce výnosové křivky nastaly při použití Nelson-Siegelovy metody na data zatížená chybnou kotací systémem Bloomberg. Ocenění jednoduchého spořicího produktu přitom nereaguje na rozdíly ve výnosových křivkách tak výrazně jako ocenění derivátů - konkrétně swapcí, přesto i tady můžeme pozorovat významnou odchylku řádově do 20%. Přitom u ocenění v den s minimálním rozdílem vstupních hodnot vzniklé relativní rozdíly nepřesahují hladinu 3% pro oba způsoby srovnání.

Na závěr ještě zhodnotíme vliv odchylky v tržní volatilitě swapcí na výsledné ocenění spořicího produktu v tabulce 4.6. Dopad odchylky tržní volatility nevyvolá tak významnou změnu v ceně jako odlišná výnosová křivka. Relativní zvýšení či snížení ceny nepřesahují v žádném z uvedených dnů výši 2,5%.

4.2 Závěr

Cílem této práce bylo aplikovat teoretické poznatky z oblasti ocenění finančních instrumentů do praxe. V teorii je pojem bezrizikové výnosové křivky jednoznačný. Při pokusu o její praktickou realizaci ale zjistíme, že tomu tak být

Datum	Bloomberg		Reuters	
	N-S metoda	Lin. interpolace	N-S metoda	Lin. interpolace
19.12.2006	-0,40%	-0,03%	1,33%	-1,33%
27.2.2008	0,25%	-0,02%	-0,25%	-0,34%
29.2.2008	-0,33%	-1,28%	2,40%	-0,62%
3.3.2008	0,03%	-0,18%	0,30%	0,57%
5.3.2008	1,12%	0,90%	-0,07%	0,67%
12.3.2008	-0,32%	-1,43%	-0,28%	-0,08%
14.12.2007	0,40%	-0,06%	0,56%	-0,39%
17.1.2008	0,75%	-0,85%	0,18%	-0,39%
18.1.2008	0,68%	-0,97%	0,49%	-0,79%
31.1.2008	-0,99%	-0,85%	-0,25%	-0,50%
10.9.2007	1,37%	0,34%	1,08%	0,29%
22.11.2007	-0,76%	1,27%	0,75%	-0,34%
28.11.2007	0,48%	0,03%	0,70%	-0,82%
27.3.2008	1,43%	1,42%	-0,72%	0,19%
3.4.2008	0,75%	-0,21%	0,37%	1,54%
7.4.2008	-0,52%	0,56%	0,79%	0,58%

Tabulka 4.6: Přehled relativních navýšení nebo snížení ceny spořicího produktu při paralelním posunu tržních volatilit o 0,5%.

nemusí.

První komplikace nastávají u volby tržních dat. V teorii existuje na bezarbitrážním trhu pouze jedna cena a tudíž není potřeba tento problém řešit. Jak bylo uvedeno v první kapitole, v praxi není situace tak jednoznačná. Vzhledem k tomu, že není možné všechny ceny uvedené v daném systému ověřovat u protistrany, musíme se spolehnout na ty, které získáme ze systému Bloomberg nebo Reuters. Ale který z uvedených systémů zvolit? Oba jsou uznávané, používané a věrohodné. O konkrétní volbě pak mohou rozhodnout historické zvyklosti dané společnosti a snaha o konzistenci v průběhu času. Vždy ale musí být vstupy kontrolovány, protože chybná kotace se, jak jsme právě viděli, podstatným způsobem promítá do výsledné ceny. Možným přístupem je i kombinace vstupů se systému Bloomberg a Reuters.

Také volba způsobu konstrukce výnosové křivky hraje významnou roli. V této práci jsme přitom zvolili pouze dva způsoby modelace a jak se ukázalo, tak sofistikovanější způsob modelace, tady představovaný metodou Nelson-Siegel, nemusí být zrovna tím nejlepším řešením a dávat nutně lepší výsledky než jednoduchý přístup v této práci reprezentovaný metodou lineární interpolace.

Vliv odlišné kotace volatility o 0,5% mezi systémy Bloomberg a Reuters nemá u střednědobého instrumentu tak významný dopad na finální cenu. V případě ocenění dlouhodobých investic by se mohl tento vliv projevit daleko výrazněji vzhledem k tomu, že zvýšení volatility swapcí vede ke "zhoršení" vlastnosti návratu ke středu a tedy v dlouhodobém horizontu může rozkolísat mode-

lované úrokové sazby.

Otazníků kolem praktické konstrukce výnosové křivky není málo. Přitom ocenění zejména pro účely účetní závěrky je velmi důležité. Závisí na něm výše solvenčního kapitálového požadavku, hodnocení dané společnosti ratingovými agenturami i důvěra investorů a klientů. Proto Česká aktuárská společnost uveřejňuje na svých internetových stránkách výnosovou křivku ke konci daného kalendářního roku. Při jejím použití jsou hospodářské výsledky různých společností srovnatelné a nehrozí riziko chybného ocenění portfolia.

Pro stanovení ceny po zbytek roku pak nezbývá než důsledně kontrolovat všechny vstupní hodnoty a nepřebírat výnosovou křivku ze zdrojů, u kterých nevíme, jak byla konstruována.

Literatura

- [1] Bank for international settlements: BIS Papers No 25 Zero-coupon yield curves: technical documentation. www.bis.org
- [2] Baxter M., Rennie A. (1997): Financial Calculus. Cambridge University Press.
- [3] Brigo D., Mercurio F. (2001): Interest rate models. Springer Finance, Berlin.
- [4] Cipra T. (2000): Matematika cenných papírů. HZ Praha, Praha.
- [5] Cipra T. (2005): Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou. Ekopress, Praha.
- [6] Emise státních dluhopisů. www.mfcr.cz.
- [7] Hull J. C. (2003): Options, Futures and Other Derivative Securities. Prentice Hall, New Jersey.
- [8] Hull J. C., White A. (1990): Pricing Interest-Rate Derivative Securities. The Review of Financial Studies 3, 573-592.
- [9] Jamshidian F. (1989): An Exact Bond Option Formula. The Journal of Finance 44, 205-209.
- [10] Mandl P. (2003): Stochastické finanční modely. Seminář z aktuárských věd 2002/03, 80-108, Matfyzpress, Praha.
- [11] Myška P. (2008): Modely úrokových sazeb - teorie a praxe. www.actuaria.cz
- [12] Nelson Ch. R., Siegel A. F. (1987): Parsimonious Modeling of Yield Curves. The Journal of Business 60, 473-489.
- [13] Odborné doporučení ČSpA č.1: Stanovení bezrizikové výnosové křivky. www.actuaria.cz.
- [14] Rebonato R. (1998): Interest-rate Option Models. John Wiley& Sons, Chichester