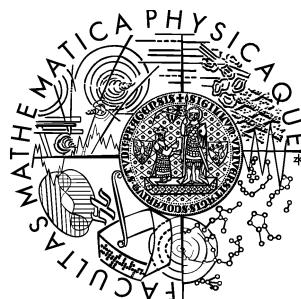


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Petr Koronthály

### Sobolevovy prostory v jedné dimenzi

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Stanislav Hencl, Ph.D.

Studijní program: Matematika, Obecná matematika

2008

Na tomto místě bych chtěl poděkovat RNDr. Stanislavu Henclovi Ph.D. za to, že byl trpělivým vedoucím této práce a že mi byl ochoten přispěchat na pomoc vždy, když jsem si s něčím nevěděl rady.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 25.11.2008

Petr Koronthály

# Contents

1	Úvod a základní definice	5
2	Základní vlastnosti Sobolevových prostorů jedné dimenze	8
3	Lipschitzovské funkce	14
4	Absolutně spojité funkce	19
5	Věty o vnoření	26
6	Prostory funkcí s neceločíselnými derivacemi	31

Název práce: Sobolevovy prostory v jedné dimenzi

Autor: Petr Koronthály

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Stanislav Hencl. Ph.D.

e-mail vedoucího: Hencl@karlin.mff.cuni.cz

**Abstrakt:** Obsahem této práce je popis základních vlastností Sobolevových prostorů v jedné dimenzi. Je koncipována především jako rozšíření obzorů pro studenty třetího ročníku Matematicko-Fyzikální fakulty Univerzity Karlovy a jako ucelený soupis vět a definic, které se Sobolevovými prostory souvisí. Práce mimo jiné obsahuje definici Sobolevova prostoru, větu o úplnosti tohoto prostoru, větu o ztotožnění Sobolevova prostoru prvního řádu s prostorem absolutně spojitých funkcí a dále některé věty o vnoření Sobolevových prostorů. V práci je dále obsažena i definice prostorů funkcí s neceločíselnými derivacemi a jejich podobnost se Sobolevovými prostory.

**Klíčová slova:** Sobolevovy prostory v jedné dimenzi, absolutně spojité funkce, věta o vnoření, prostory funkcí s neceločíselnými derivacemi

Title: Sobolev spaces in one dimension

Author: Petr Koronthály

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: RNDr. Stanislav Hencl. Ph.D.

Supervisor's e-mail address: Hencl@karlin.mff.cuni.cz

**Abstract:** This work contains description and basic properties of Sobolev spaces in one dimension. We define Sobolev spaces, show their completeness and prove that first order Sobolev spaces can be identified with absolutely continuous functions. We also introduce and study Sobolev spaces with non-integer derivative.

**Keywords:** Sobolev spaces in one dimension, absolutely continuous functions, embedding theorem, spaces of functions with non-integer derivation

# Chapter 1

## Úvod a základní definice

V této kapitole vyslovíme základní definice a jednoduchá Lemmata. Většinou se budeme odkazovat na látku probíranou v přednášce Teorie míry a integrálu a uvedená tvrzení - až na definici Sobolevových prostorů - budou spíše přehledem již známého.

**Úmluva 1.1.** Symbolem  $(a, b)$  rozumíme vždy omezený otevřený interval  $(a, b)$ . Symbolem  $\int f(x) dx$  budeme v textu vždy myslet Lebesgueův integrál funkce  $f$  a symbolem  $\lambda E$  lebesgueovu míru množiny  $E$  tak, jak jsou uvedeny například v [1].

**Definice 1.2.** Nechť  $p \in [1, \infty)$ . Funkce  $f$  je prvkem prostoru  $L^p(a, b)$  právě tehdy, když  $f$  je měřitelná a platí:

$$\int_a^b |f|^p < \infty.$$

Na tomto prostoru definujeme normu

$$\|f\|_p := \sqrt[p]{\int_a^b |f|^p}.$$

Funkce  $f$  je prvkem prostoru  $L^\infty(a, b)$  právě tehdy, když  $f$  je měřitelná a existuje konstanta  $M \in \mathbb{R}$ , že pro skoro všechna  $x \in (a, b)$  platí:

$$|f(x)| \leq M.$$

Norma na tomto prostoru:

$$\|f\|_\infty := \min\{M : |f(x)| \leq M, \text{ pro skoro všechna } x \in \mathbb{R}\}.$$

**Věta 1.3** (Úplnost  $L^p$ ). *Nechť  $p \in [1, \infty)$ . Prostor  $L^p(a, b)$  je úplný vzhledem k normě  $\|\cdot\|_p$ .*

*Důkaz.* Důkaz je znám z přednášky Teorie míry a integrálu a navíc je přehledně popsán na straně 33 v [1].  $\square$

**Definice 1.4.** Říkáme, že funkce  $f$  leží v  $C^1((a, b))$  (respektive  $C^\infty((a, b))$ ), pokud existuje derivace (respektive všechny derivace)  $f$  na  $(a, b)$  a  $f$  je spojitá. Navíc požadujeme, aby existovalo spojité rozšíření  $f$  a příslušných derivací do bodů  $a$  a  $b$ .

**Definice 1.5.** Říkáme, že funkce  $f$  je *hladká s nulou na kraji* na intervalu  $(a, b)$ , pokud všechny derivace  $f$  existují a jsou spojité na  $(a, b)$  a navíc existuje interval  $[c, d] \subset (a, b)$  tak, že  $f(x) = 0$  pro každé  $x \in (a, b) \setminus [c, d]$ .

Značení:  $f \in C_0^\infty(a, b)$ .

Po ujasnění si pojmu můžeme nyní vyslovit definici Sobolevova prostoru.

**Definice 1.6.** Nechť  $(a, b)$  je interval a  $p \in [1, \infty)$ . Funkce  $f$  je prvkem *Sobolevova prostoru*  $W^{1,p}(a, b)$  právě tehdy, když  $f \in L^p(a, b)$  a existuje funkce  $g \in L^p(a, b)$  tak, že

$$\int_a^b f(t) \cdot \varphi'(t) dt = - \int_a^b g(t) \cdot \varphi(t) dt \quad (1.1)$$

pro každou  $\varphi \in C_0^\infty(a, b)$ . Tuto funkci  $g$  budeme označovat  $f'$ .

**Poznámka 1.7.** Druhá podmínka z definice znamená platnost vzorečku pro integraci per partes s kteroukoli funkcí z  $C_0^\infty(a, b)$ . Tedy  $C^1(a, b) \subset W^{1,p}(a, b)$ .

**Lemma 1.8.** Nechť  $1 \leq q < p < \infty$  a  $f \in W^{1,p}(a, b)$ . Pak  $f \in W^{1,q}(a, b)$ .

*Důkaz.* Stačí nám dokázat, že  $f \in L^p(a, b) \Rightarrow f \in L^q(a, b)$ . My ale víme:

$$\int_a^b |f|^q = \int_{\{|f|>1\}} |f|^q + \int_{\{|f|\leq 1\}} |f|^q \leq \int_a^b |f|^p + \int_a^b 1 = \int_a^b |f|^p + (b-a) < \infty.$$

□

Nyní vyslovíme ještě jednu větu, která nám velmi usnadní většinu důkazů. Díky ní budeme moci víceméně zaměnit konvergenci v prostoru  $L^p(a, b)$  s bodovou konvergencí.

**Věta 1.9.** Nechť  $1 \leq p < \infty$  a  $f_n$  je posloupnost funkcí z prostoru  $L^p(a, b)$  taková, že  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ . Pak existuje vybraná podposloupnost  $f_{n_k}$  tak, že  $f_{n_k} \rightarrow f$  skoro všude.

*Důkaz.* Budeme postupovat stejně jako v knize [1]. Volme  $\varepsilon > 0$  a označme  $E_n := \{x \in (a, b) : |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}$ . Potom víme, že

$$\varepsilon^p \lambda E_n \leq \int_{E_n} |f - f_n|^p d\lambda \leq \|f - f_n\|_p^p.$$

A tedy můžeme nalézt posloupnost  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$  tak, aby

$$\lambda \left\{ x \in (a, b) : |f(x) - f_{n_j}(x)| \geq \frac{1}{j} \right\} < \frac{1}{2^j}.$$

Položíme-li nyní

$$A_j := \bigcup_{k=j}^{\infty} \left\{ x \in (a, b) : |f(x) - f_{n_k}(x)| \geq \frac{1}{k} \right\},$$

je  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ , a přitom  $\lambda A_1 \leq \sum_k \frac{1}{2^k} < \infty$ , a tedy pro  $B := \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$  platí:

$$\lambda B = \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda A_j \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{j-1}} = 0.$$

A tedy nám stačí dokázat, že  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$  pro  $x \in (a, b) \setminus B$ . Pro každé  $\varepsilon > 0$  však existuje  $j \in \mathbb{N}$  tak, že množinu  $(a, b) \setminus A_j$  mohu psát jako:

$$(a, b) \setminus A_j = \bigcap_{k=j}^{\infty} \left\{ y \in (a, b) : |f(y) - f_{n_k}(y)| < \frac{1}{k} \right\}.$$

A je-li  $k_0 > \max(j, \frac{1}{\varepsilon})$ , pak už pro všechna  $k \geq k_0$  dostáváme

$$|f(x) - f_{n_k}(x)| < \frac{1}{k} \leq \varepsilon.$$

□

Na závěr kapitoly přidáme definici approximativní spojitosti, která nahradí v šesté kapitole bodovou spojitost.

**Definice 1.10.** Nechť  $z \in \mathbb{R}$ . Označme  $U_{z,r} := (z - r, z + r) \setminus \{z\}$  okolí bodu  $z$ . Funkce  $f$  definovaná na  $U_{z,r}$  se nazve *approximativně spojitá* v  $z$ , existuje-li měřitelná množina  $M \subset \mathbb{R}$  tak, že

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(M \cap U_{z,r})}{\lambda(U_{z,r})} = 1,$$

a navíc

$$\lim_{x \rightarrow z, x \in M} f(x) = f(z).$$

Je-li  $f$  approximativně spojitá v každém  $z \in (a, b)$ , říkáme, že  $f$  je *approximativně spojitá* v  $(a, b)$ .

Ještě budeme potřebovat hustotu spojitéch funkcí v  $L^p$  (viz [1]). Pro pohodlí čtenáře stručně naznačíme i důkaz.

**Věta 1.11.** Nechť  $1 \leq p < \infty$  a  $f \in L^p(a, b)$ . Pak existuje posloupnost spojitéch funkcí taková, že  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ .

*Důkaz.* Tvrzení stačí dokázat pouze pro jednoduché funkce, a tedy pouze pro charakteristické funkce množiny. Libovolnou charakteristickou funkci měřitelné množiny můžeme approximovat charakteristickou funkcí otevřené množiny a tu můžeme velmi snadno approximovat spojitu funkcí. □

# Chapter 2

## Základní vlastnosti Sobolevových prostorů jedné dimenze

Na konci této kapitoly vyslovíme velmi důležitou větu o úplnosti Sobolevových prostorů. Napřed však bude nutné sestrojit potřebný aparát. Začneme definicí konvoluce a zhlazovacího konvolučního jádra a popisem základních vlastností.

**Definice 2.1.** Nechť  $f, g$  jsou měřitelné funkce na  $\mathbb{R}$ . Má-li pro skoro všechna  $x \in \mathbb{R}$  smysl výraz

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy,$$

nazývá se funkce  $f * g$  *konvolucí* funkcí  $f$  a  $g$ .

**Věta 2.2** (zobecněná Youngova nerovnost). *Nechť  $1 \leq p, q, r < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ . Je-li  $f \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $g \in L^q(\mathbb{R})$ , je  $f * g = g * f$  definována skoro všude, je prvkem  $L^r(\mathbb{R})$  a  $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ .*

*Důkaz.* Označme  $\tilde{f} = |f|^p$ ,  $\tilde{g} = |g|^q$ . Potom funkce  $\tilde{f}$  a  $\tilde{g}$  leží v  $L^1$ . S použitím Fubiniové věty je zřejmě konvoluce  $\tilde{f} * \tilde{g}$  definována skoro všude a náleží do  $L^1$ . Pro pevné  $x$  pak použitím Hölderovy nerovnosti dostaneme:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy \right| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^{\frac{r-p}{r}} |g(y)|^{\frac{r-q}{r}} \left( |f(x-y)|^{\frac{p}{r}} |g(y)|^{\frac{q}{r}} \right) dy \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^p dy \right)^{\frac{r-p}{pr}} \left( \int_{\mathbb{R}} |g(y)|^q dy \right)^{\frac{r-q}{qr}}. \\ &\quad \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \|f\|_p^{\frac{r-p}{r}} \|g\|_q^{\frac{r-q}{r}} ((\tilde{f} * \tilde{g})(x))^{\frac{1}{r}}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Předposlední nerovnost plyne z faktu, že

$$\frac{r-p}{pr} + \frac{r-q}{qr} + \frac{1}{r} = 1.$$

Tedy  $f * g$  je definována skoro všude a Fubiniova věta dává:

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{f} * \tilde{g} = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x-y) \tilde{g}(y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x-y) dx \right) \tilde{g}(y) dy = \|f\|_p^p \|g\|_q^q.$$

Tedy s použitím (2.1)

$$\begin{aligned} \|f * g\|_r^r &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy \right|^r dx \leq \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \int_{\mathbb{R}} ((\tilde{f} * \tilde{g})(x)) dx \leq \\ &\leq \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \|f\|_p^p \|g\|_q^q = \|f\|_p^r \|g\|_q^r. \end{aligned}$$

□

**Definice 2.3.** Nechť funkce  $\psi$  je zadefinována následujícím předpisem:

$$\psi(x) := \begin{cases} \alpha \cdot \exp(\frac{1}{|x|^2-1}) & , |x| < 1 \\ 0 & , |x| \geq 1 \end{cases}$$

kde  $\alpha$  je taková konstanta, že  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 1$ . Zadefinujeme-li dále funkci  $\psi_j := j \cdot \psi(j \cdot x)$ , nazveme tuto funkci *zhlavovací konvoluční jádro*.

**Poznámka 2.4.**

- (1) Substitucí dostaneme, že  $\int_{\mathbb{R}} \psi_j(x) dx = 1$  pro každé  $j \in \mathbb{N}$ .
- (2) Každá z funkcí  $\psi_j$  je nekonečně diferencovatelná.

**Lemma 2.5.** Nechť  $p \in [1, \infty)$ ,  $f \in L^p(\mathbb{R})$  a  $k \in \mathbb{N}$ . Potom pro  $\psi_k$  zhlavovací konvoluční jádro platí:  $\psi_k * f \in L^p(\mathbb{R})$  a

$$\|\psi_k * f\|_p \leq \|f\|_p.$$

*Důkaz.* Podle Věty 2.2 pro  $r = p$  a  $q = 1$  máme:

$$\|\psi_k * f\|_p \leq \|f\|_p \|\psi_k\|_1 \leq \|f\|_p,$$

neboť  $\|\psi_k\|_1 = 1$ .

□

Druhá velká věta předcházející větě o vnoření popisuje konverenci konvoluce funkcí a je stěžejní pro provedení důkazu této věty. I zde se necháme při dokazování inspirovat [1].

**Věta 2.6.** Nechť  $p \in [1, \infty)$  a  $f \in L^p(a, b)$ ,  $a \leq b$ . (Pro účely definice konvoluce uvažujme  $f = 0$  mimo  $(a, b)$ ). Nechť dále  $\psi_k$  je zhlavovací konvoluční jádro. Pak

$$\|f - \psi_k * f\|_p \longrightarrow 0 \text{ pro } k \text{ jdoucí do nekonečna.}$$

*Důkaz.* Zvolme  $\varepsilon > 0$ . Díky Větě 1.11 můžeme nalézt spojitou funkci  $f_0$  tak, že  $\|f - f_0\|_p < \varepsilon$ . Tuto funkci můžeme nalézt tak, že navíc  $f_0(x) = f(a)$  pro  $x < a$  a  $f_0(x) = f(b)$  pro  $x > b$  (kvůli definici konvoluce).

Protože funkce  $f_0$  je spojitá na kompaktu, je stejnoměrně spojitá. Můžeme pro zvolené  $\varepsilon$  volit  $k_0 \in \mathbb{N}$  tak, že pro každé  $k > k_0$  a pro všechna  $y$  taková, že  $|x - y| < \frac{1}{k}$ , platí  $|f_0(x) - f_0(y)| \leq \varepsilon$ . Pro  $k > k_0$ ,  $a < x - \frac{1}{k}$  a  $x + \frac{1}{k} < b$  tedy máme

$$\begin{aligned} |\psi_k * f_0(x) - f_0(x)| &= \left| \int_{x-\frac{1}{k}}^{x+\frac{1}{k}} f_0(y) \cdot \psi_k(x-y) dy - f_0(x) \cdot 1 \right| \\ &= \left| \int_{x-\frac{1}{k}}^{x+\frac{1}{k}} f_0(y) \cdot \psi_k(x-y) dy - f_0(x) \cdot \int_{x-\frac{1}{k}}^{x+\frac{1}{k}} \psi_k(x-y) dy \right| \\ &= \left| \int_{x-\frac{1}{k}}^{x+\frac{1}{k}} f_0(y) \cdot \psi_k(x-y) dy - \int_{x-\frac{1}{k}}^{x+\frac{1}{k}} f_0(x) \cdot \psi_k(x-y) dy \right| \\ &\leq \int_{x-\frac{1}{k}}^{x+\frac{1}{k}} \psi_k(x-y) \cdot |f_0(y) - f_0(x)| dy \leq \varepsilon \cdot \int_{x-\frac{1}{k}}^{x+\frac{1}{k}} \psi_k(x-y) dy \leq \varepsilon \cdot 1, \end{aligned}$$

a tedy funkce  $\psi_k * f_0$  konverguje pro  $k \rightarrow \infty$  skoro všude k funkci  $f_0$ . Podle Lebesgueovy věty (s majorantou  $2 \max |f_0|$ ) máme

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_0 - \psi_k * f_0\|_p = 0.$$

Pro dostatečně velká  $k$  tedy podle Lemmatu 2.5 dostáváme:

$$\begin{aligned} \|f - \psi_k * f\|_p &\leq \|f - f_0\|_p + \|f_0 - \psi_k * f_0\|_p + \|\psi_k * f_0 - \psi_k * f\|_p \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \|f - f_0\|_p < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

□

Nyní již pomocí předcházející věty můžeme dokázat větu o vnoření prostoru  $C_0^\infty$  do  $L^p$ , kterou budeme potřebovat v dalších kapitolách. Důkaz je veden stejným způsobem jako v [1].

**Věta 2.7.** Nechť  $p \in [1, \infty)$ . Potom  $C_0^\infty(a, b)$  je hustá podmnožina  $L^p(a, b)$ .

*Důkaz.* Označme si

$$I_j = (a + \frac{1}{j}, b - \frac{1}{j}) \text{ a } g_j(x) = f(x) \cdot \chi_{I_j}(x).$$

Podle Lebesgueovy věty (majorantou je  $|f|^p$ ) i  $\|f - g_j\|_p \rightarrow 0$ . Dále z předchozí věty víme, že  $\|g_j - \psi_k * g_j\|_p \rightarrow 0$ . Pro všechna  $k > j$  navíc vidíme, že  $\psi_k * g_j \in C_0^\infty(a, b)$  podle v2tz o derivaci podle parametru, a protože

$$\|f - \psi_k * g_j\|_p \leq \|f - g_j\|_p + \|g_j - \psi_k * g_j\|_p,$$

je tvrzení dokázáno. □

Ještě vyslovíme lemma, které je zobecněním Věty 1.9 a velmi zpřehlední další důkazy.

**Lemma 2.8.** *Nechť  $1 \leq p < \infty$  a nechť  $f_n$  je konvergentní posloupnost funkcí z  $L^p(a, b)$ . Pak z ní lze vybrat podposloupnost  $f_{n_k}$  tak, že  $f_{n_k}$  konverguje bodově skoro všude, a navíc pro ni*

$$g(x) := \sup\{|f_{n_k}(x)|, k \in \mathbb{N}\}$$

patří do  $L^p(a, b)$ .

*Důkaz.* Bez újmy na obecnosti  $f \geq 0$ . První část tvrzení plyne z Věty 1.9. Protože  $f_n \rightarrow f$  v normě  $L^p$ , mohu navíc najít  $f_{n_0}$  tak, že  $\int_a^b |f - f_{n_0}|^p < 1$ . Dále mohu najít  $f_{n_1}$  tak, že  $\int_a^b |f - f_{n_1}|^p < \frac{1}{2}$  a obdobně  $f_{n_k}$ , že

$$\int_a^b |f - f_{n_k}|^p < \frac{1}{2^k}.$$

Pak platí, že

$$\begin{aligned} \int_a^b |g - f|^p &= \int_a^b |f - g|^p = \int_a^b |f - \sup_{k \in \mathbb{N}_0} (|f_{n_k}|)|^p \\ &< \int_a^b |f - |f_{n_0}||^p + \int_a^b |f - |f_{n_1}||^p + \int_a^b |f - |f_{n_2}||^p + \dots \\ &= \int_a^b |f - f_{n_0}|^p + \int_a^b |f - f_{n_1}|^p + \int_a^b |f - f_{n_2}|^p + \dots \\ &< 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots < \infty, \end{aligned}$$

a protože  $L^p(a, b)$  je lineární prostor,  $g = (g - f) + f$  patří do  $L^p(a, b)$ .  $\square$

Nyní vyslovíme kýženou větu o zúplnění prostoru  $W^{1,p}(a, b)$ .

**Věta 2.9.** *Prostor  $W^{1,p}(a, b)$  je zúplnění prostoru  $C^\infty(a, b)$  vzhledem k normě*

$$\|f\|_{1,p} := \sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p dt + \int_a^b |f'(t)|^p dt}.$$

*Důkaz.* Důkaz sestává ze tří kroků. V prvním kroku dokážeme, že  $f \in C^\infty(a, b) \Rightarrow f \in W^{1,p}(a, b)$ .

Tedy protože  $f \in C^\infty(a, b)$ , víme, že  $f$  je omezená na  $(a, b)$ , tedy  $f \in L^p$ . Zbývá ověřit platnost vzorce (1.1). Ale víme, že  $f \in C^\infty(a, b) \Rightarrow$  speciálně  $f \in C^1(a, b) \Rightarrow$  pro každé  $\varphi \in C^1(a, b)$  platí vzorec pro integraci per partes, a tedy i pro  $\varphi \in C_0^\infty(a, b)$  platí

$$\int_a^b f \cdot \varphi' = [f \cdot \varphi]_a^b - \int_a^b f' \cdot \varphi.$$

Ale my víme, že  $[f \cdot \varphi]_a^b = 0$ , z čehož již plyne

$$\int_b^a f(t) \cdot \varphi'(t) dt = - \int_b^a g(t) \cdot \varphi(t) dt, \text{ pro každou } \varphi \in C_0^\infty(a, b).$$

Ve druhém kroku potřebujeme dokázat, že pokud  $f_n \in C^\infty(a, b)$  je Cauchyovská vzhledem k normě  $\|\cdot\|_{1,p}$ , pak existuje její limita  $f$  a  $f \in W^{1,p}(a, b)$ . Je-li  $f_n$  Cauchyovská, platí, že pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_0$  tak, že pro každé  $m, n > n_0$  platí  $\|f_n - f_m\|_{1,p} < \varepsilon$ . Zvolme tedy pevné  $\varepsilon$  a počítejme:

$$\|f_n - f_m\|_{1,p}^p = \int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|^p dt + \int_a^b |(f_n(t) - f_m(t))'|^p dt < \varepsilon^p.$$

Zároveň zřejmě

$$\int_a^b |(f_n(t) - f_m(t))'|^p dt \geq 0.$$

Tedy posloupnost  $f_n$  je Cauchyovská i v  $L^p$  a protože prostor  $L^p$  je podle Věty 1.3 úplný, existuje  $f$ , že  $f \in L^p$  a  $f_n \xrightarrow{L^p} f$ .

Z Lemmatu 2.8 víme, že z posloupnosti  $f_n$  lze vybrat podposloupnost  $f_{n_k}$ , pro kterou je funkce  $g(x) := \sup\{|f_{n_k}(x)|, k \in \mathbb{N}\}$  integrabilní majorantou, a navíc je posloupnost  $f_{n_k}$  konvergentní bodově pro skoro všechna  $x \in (a, b)$ . Zároveň víme, že i  $f'_{n_k} \in L^p(a, b)$  je Cauchyovská, a tedy z nich lze podle stejného Lemmatu 2.8 vybrat podposloupnost  $f'_{n_{k_l}}$ , která má skoro všude limitu  $g$ , a která má integrabilní majorantu. S využitím faktu, že  $f_{n_k} \in C^\infty(a, b)$ , a tudíž pro ně platí vzoreček pro integraci per partes, a díky jednoznačnosti limity můžeme podle Lebesgueovy věty psát:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \cdot \varphi'(t) dt &= \int_a^b \lim_{l \rightarrow \infty} f_{n_{k_l}}(t) \cdot \varphi'(t) dt = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_a^b f_{n_{k_l}}(t) \cdot \varphi'(t) dt \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left( - \int_a^b f'_{n_{k_l}}(t) \cdot \varphi(t) dt \right) = - \int_a^b \lim_{l \rightarrow \infty} f'_{n_{k_l}}(t) \cdot \varphi(t) dt \\ &= - \int_a^b g \cdot \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

A tedy vidíme, že  $g = f'$ , což nám dává požadovaný vzorec.

Ve třetím kroku zbývá dokázat, že máme-li libovolnou  $f \in W^{1,p}(a, b)$ , existuje k ní posloupnost funkcí  $f_j$  z  $C^\infty(a, b)$  tak, že  $f_j$  konvergují k  $f$  podle normy  $\|\cdot\|_{1,p}$ . Zvolme tedy pevnou  $f \in W^{1,p}(a, b)$ , a nechť  $\psi_j$  je zhlazovací konvoluční jádro. Nyní zadefinujme posloupnost funkcí  $f_j := \psi_j * f$  a chci dokázat, že to je mnou hledaná posloupnost. Čili, že pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $j_0$  tak, že pro každé  $j \geq j_0$  platí:

$$\int_a^b |f(t) - f_j(t)|^p dt + \int_a^b |f' - f'_j|^p dt < \varepsilon.$$

Z definice  $f$  jako prvku  $W^{1,p}(a, b)$  plyne, že  $f \in L^p(a, b)$ , a tedy lze použít Větu 2.6, že  $\|f - \psi_j * f\|_p \rightarrow 0$ , neboli pro dostatečně velká  $j$  platí, že

$$\int_a^b |f(t) - f_j(t)|^p dt < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Jelikož  $f \in L^p(a, b)$  a  $\psi_j$  je omezená konstantou  $j$  na intervalu  $(a, b)$ , lze použít větu o derivaci podle parametru s majorantou  $j \cdot |f(x)|$  a podle (1.1) dostaneme

$$\begin{aligned} f'_j(x) &= (f * \psi_j)'(x) = \left( \int_a^b f(y) \cdot \psi_j(x-y) dy \right)' \\ &= \int_a^b \frac{d}{dx} (f(y) \cdot \psi_j(x-y)) dy = \int_a^b f(y) \cdot \frac{d}{dx} (\psi_j(x-y)) dy \\ &= \int_a^b f'(y) \cdot \psi_j(x-y) dy = f' * \psi_j(x), \end{aligned}$$

neboť

$$\frac{d}{dy} (\psi_j(x-y)) = -\frac{d}{dx} (\psi_j(x-y)).$$

Tedy Věta 2.6 se dá použít i na  $\int_a^b |f' - f'_j|^p$ , a tedy platí:

$$\int_a^b |f(t) - f_j(t)|^p dt + \int_a^b |f' - f'_j|^p dt < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

□

Jako jednoduchý důsledek můžeme nyní vyslovit větu o úplnosti Sobolevova prostoru.

**Věta 2.10** (Úplnost  $W^{1,p}(a, b)$ ). *Prostor  $W^{1,p}(a, b)$  je úplný vzhledem k normě  $\|\cdot\|_{1,p}$ .*

*Důkaz.* Vezměme libovolnou Cauchyovskou posloupnost funkcí  $f_n$  z  $W^{1,p}(a, b)$  vzhledem k normě  $\|\cdot\|_{1,p}$ . Z Věty 2.9 víme, že existuje posloupnost funkcí  $g_n$  z  $C^\infty(a, b)$ , že

$$\|f_n - g_n\|_p < \frac{1}{n} \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Tedy  $g_n$  je Cauchyovská i v prostoru  $W^{1,p}(a, b)$  a tedy (podle Věty 2.9) existuje  $f \in W^{1,p}(a, b)$ , že  $f$  je limitou funkcí  $g_n$ , a navíc pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $n$ , že

$$\|f' - f'_n\|_p \leq \|f' - g'_n\|_p + \|g'_n - f'_n\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \leq \varepsilon.$$

A tedy  $f$  lze zároveň napsat jako limitu funkcí  $f_n$ . □

# Chapter 3

## Lipschitzovské funkce

V této kapitole vyslovíme několik definic a vět, které nám připraví půdu pro důkazy obsažené v kapitole příští.

**Definice 3.1.** Nechť  $K$  je reálné kladné číslo. Řekneme, že funkce  $f$  je  $K$ -lipschitzovská na množině  $E \subset \mathbb{R}$ , jestliže pro všechna  $x, y \in E$  platí:

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Pokud je funkce  $f$   $K$ -lipschitzovská na  $E$  pro nějaké  $K$ , říkáme, že je *lipschitzovská* na  $E$ .

**Lemma 3.2.** *Funkce  $f \in C_0^\infty(a, b)$  je lipschitzovská na  $(a, b)$ .*

*Důkaz.* Protože  $f$  má na intervalu  $(a, b)$  spojitou a omezenou první derivaci, víme, že  $\max |f'(x)| = K < \infty$  a tedy můžeme pro každé  $x, y \in (a, b)$  psát:

$$|f(x) - f(y)| \leq \left| \frac{f(x) - f(y)}{(x - y)} \right| \cdot |x - y| \leq \max_{\xi \in (x, y)} |f'(\xi)| \cdot |x - y| = K \cdot |x - y|.$$

□

**Definice 3.3.** Pro libovolnou  $A \subset \mathbb{R}$  nazveme *Lebesgueovou vnější mírou* množiny  $A$  číslo  $\lambda^* A$ :

$$\lambda^* A := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) : \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \supset A \right\}.$$

**Lemma 3.4.** *Nechť  $f$  je  $K$ -lipschitzovská funkce na množině  $E \subset \mathbb{R}$ . Potom*

$$\lambda^* f(E) \leq K \lambda^* E.$$

*Důkaz.* Pokud  $\lambda^* E = \infty$ , je tvrzení zřejmé. Pokud  $\lambda^* E < \infty$ , volme  $\varepsilon > 0$  a nalezněme posloupnost otevřených intervalů  $(a_j, b_j)$  tak, že  $E \subset \bigcup_j (a_j, b_j)$  a

$$\sum_j (b_j - a_j) \leq \lambda^* E + \varepsilon.$$

Díky  $K$ -lipschitzovskosti  $f$  najdeme intervaly  $[\alpha_j, \beta_j]$  tak, že  $f(E \cap (a_j, b_j)) \subset [\alpha_j, \beta_j]$ , a přitom  $\beta_j - \alpha_j \leq K(b_j - a_j)$ . Tedy  $f(E) \subset \bigcup_j [\alpha_j, \beta_j]$  a

$$\lambda^* f(E) \leq \sum_j (\beta_j - \alpha_j) \leq K \sum_j (b_j - a_j) \leq K(\lambda^* E + \varepsilon).$$

Limitním přechodem pro  $\varepsilon \rightarrow 0$  dostaneme požadované.  $\square$

**Lemma 3.5.** *Nechť  $f$  je reálná funkce na intervalu  $(a, b)$  a  $E \subset (a, b)$ . Jestliže existuje  $K > 0$  tak, že  $|f'| \leq K$  na  $E$ , pak*

$$\lambda^* f(E) \leq K \lambda^* E.$$

*Důkaz.* Zvolme  $K' > K$  a označme

$$E_k := \{x \in E : |f(y) - f(x)| \leq K' \text{ pro všechna } y \in E \cap (x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k})\}.$$

Potom  $E_1 \subset E_2 \subset \dots$  a  $E = \bigcup_k E_k$ . Buď dále  $J$  interval délky menší než  $\frac{1}{k}$ . Pak díky omezenosti své derivace je funkce  $f$  na množině  $J \cap E_k$   $K'$ -lipschitzovská, a tedy podle Lemmatu 3.4 je

$$\lambda^* f(J \cap E_k) \leq K' \lambda^*(J \cap E_k).$$

Protože toto platí pro jakýkoli  $J \subset (a, b)$ , můžeme celý interval  $(a, b)$  takovými podintervaly pokrýt a dostaneme  $\lambda^* f(E_k) \leq K' \lambda^*(E_k)$  pro všechna  $k$  a tedy i  $\lambda^* f(E) \leq K' \lambda^*(E)$ . Limitním přechodem pro  $K' \rightarrow K$  dostaneme požadované.  $\square$

**Lemma 3.6.** *Nechť  $f$  je měřitelná funkce na intervalu  $(a, b)$  a  $E \subset (a, b)$  je měřitelná množina. Nechť v každém bodě  $x \in E$  existuje vlastní derivace  $f'(x)$ . Potom platí:*

$$\lambda^* f(E) \leq \int_E |f'|.$$

*Důkaz.* Můžeme předpokládat, že  $E$  je omezená. Zvolme si  $\varepsilon > 0$  a zadefinujme:

$$E_k := \{x \in E : (k-1)\varepsilon \leq |f'(x)| < k\varepsilon\}.$$

Pak  $E_k$  jsou měřitelné po dvou disjunktní množiny,  $E = \bigcup_k E_k$  a z Lemmatu 3.5 víme, že

$$\lambda^* f(E_k) \leq k\varepsilon \lambda^* E_k = k\varepsilon \lambda(E_k).$$

A můžeme tedy počítat:

$$\begin{aligned} \lambda^* f(E) &\leq \sum_k \lambda^* f(E_k) \leq \sum_k k\varepsilon \lambda(E_k) \leq \sum_k ((k-1)\varepsilon \lambda(E_k) + \varepsilon \lambda(E_k)) \leq \\ &\leq \sum_k \left( \int_{E_k} |f'| + \varepsilon \lambda(E_k) \right) = \int_E |f'| + \varepsilon \lambda(E). \end{aligned}$$

Limitním přechodem pro  $\varepsilon \rightarrow 0$  dostaneme požadované.  $\square$

**Lemma 3.7** (Riesz). *Budě  $h$  spojitá funkce na intervalu  $[a, b]$ . Označme*

$$E := \{x \in (a, b) : \text{existuje } \xi \in (x, b) \text{ tak, že } h(\xi) > h(x)\}.$$

*Potom  $E$  je sjednocením posloupnosti po dvou disjunktních intervalů  $(a_j, b_j)$ , splňujících*

$$h(a_j) \leq h(b_j).$$

*Důkaz.* Zřejmě  $E$  je otevřená množina, tudíž ji lze napsat jako sjednocení posloupnosti po dvou disjunktních maximálních otevřených intervalů  $(\alpha_j, \beta_j)$  obsažených v  $E$ . Budě  $x \in (\alpha_j, \beta_j)$ . Označme

$$M := \{\xi \in (x, b) : h(\xi) \geq h(x)\}.$$

Protože  $x \in E$ , je  $M \neq \emptyset$ . Z definice  $E$  plyne, že  $\beta_j \notin E$ , a tedy  $h(\beta_j) \geq h(y)$  pro  $y \in [\beta_j, b)$ . Tedy víme, že  $\sup\{h(\xi) : \xi \in M\} = h(\beta_j)$ . Tedy  $h(x) \leq h(\beta_j)$  a limitní přechod  $x \rightarrow \alpha_j^+$  dává tvrzení pro  $(\alpha_j, \beta_j)$ .  $\square$

**Poznámka 3.8.** *V Lemmatu 3.7 platí i zrcadlová verze, tj. množinu*

$$E := \{x \in (a, b) : \text{existuje } \xi \in (a, x) \text{ tak, že } h(\xi) > h(x)\}$$

*lze napsat jako sjednocení posloupností intervalů  $(a_j, b_j)$ , že  $h(a_j) \geq h(b_j)$ .*

Jediná Věta této kapitoly je zdánlivě triviální, přesto však klíčová pro další kapitolu.

**Věta 3.9.** *Každá  $K$ -lipschitzovská funkce  $f$  na intervalu  $[a, b]$  má konečnou derivaci ve skoro všech bodech tohoto intervalu.*

*Důkaz.* Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že  $f$  je neklesající funkce (jinak totiž můžeme zadefinovat funkci

$$\tilde{f}(x) := f(x) + 2Kx,$$

která je rostoucí a přitom  $\tilde{f}'(x)$  existuje a je konečná, právě když  $f'(x)$  existuje a je konečná). Bez újmy na obecnosti můžeme také předpokládat, že  $f$  je 1-lipschitzovská. Zadefinujme si dále funkce:

$$\begin{aligned} D^+f(x) &:= \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \\ D^-f(x) &:= \liminf_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \end{aligned}$$

a pro  $0 < p < q < 1$  uvažujme množinu

$$M_{p,q} := \{x \in (a, b) : D^-f(x) < p < q < D^+f(x)\}.$$

Pak podle Poznámky 3.8 najdeme posloupnost po dvou disjunktních intervalů  $(a_j, b_j)$  tak, že

$$\{x \in (a, b) : D_- f(x) < p\} \subset$$

$$\subset \{x \in (a, b) : \text{existuje } \xi \in (a, x) \text{ tak, že } f(\xi) - p\xi > f(x) - px\} = \bigcup_j (a_j, b_j),$$

a navíc platí

$$f(b_j) - pb_j \leq f(a_j) - pa_j.$$

Nyní aplikujeme Rieszovo lemma 3.7 na funkci  $f(x) - qx$  v každém intervalu  $[a_k, b_k]$ . Najdeme po dvou disjunktní intervaly  $(a_{k,j}, b_{k,j}) \subset (a_k, b_k)$  tak, že

$$\{x \in (a, b) : D^+ f(x) > q\} \subset$$

$$\subset \bigcup_k \{x \in (a_k, b_k) : \text{existuje } \xi \in (a_k, x) \text{ tak, že } f(\xi) - q\xi < f(x) - qx\} = \bigcup_{k,j} (a_{k,j}, b_{k,j}),$$

a přitom

$$f(b_{k,j}) - qb_{k,j} \geq f(a_{k,j}) - qa_{k,j}.$$

Odtud, protože  $f$  je neklesající funkce, můžeme počítat:

$$\begin{aligned} \sum_{k,j} (b_{k,j} - a_{k,j}) &\leq \frac{1}{q} \sum_{k,j} (f(b_{k,j}) - f(a_{k,j})) \leq \frac{1}{q} \sum_k (f(b_k) - f(a_k)) \\ &\leq \frac{p}{q} \sum_k (b_k - a_k) \leq \frac{p}{q} (b - a) \end{aligned}$$

Stejným způsobem můžeme vytvořit posloupnosti intervalů  $(a_{k,j,l}, b_{k,j,l}) \subset (a_{k,j}, b_{k,j})$  a  $(a_{k,j,l,m}, b_{k,j,l,m}) \subset (a_{k,j,l}, b_{k,j,l})$  a počítat:

$$\begin{aligned} \sum_{k,j,l,m} (b_{k,j,l,m} - a_{k,j,l,m}) &\leq \frac{1}{q} \sum_{k,j,l,m} (f(b_{k,j,l,m}) - f(a_{k,j,l,m})) \leq \frac{1}{q} \sum_{k,j,l} (f(b_{k,j,l}) - f(a_{k,j,l})) \\ &\leq \frac{p}{q} \sum_{k,j,l} (b_{k,j,l} - a_{k,j,l}) \leq \frac{p}{q} \sum_{k,j} (b_{k,j} - a_{k,j}) \leq \frac{p}{q^2} \sum_{k,j} (f(b_{k,j}) - f(a_{k,j})) \\ &\leq \frac{p}{q^2} \sum_k (f(b_k) - f(a_k)) \leq \left(\frac{p}{q}\right)^2 \sum_k (b_k - a_k) \leq \left(\frac{p}{q}\right)^2 (b - a) \end{aligned}$$

A tedy induktivně dostáváme posloupnosti do sebe zařazených systémů intervalů; v  $2n$ -tém kroku dostaneme systém intervalů  $\{(A_s, B_s)\}$  tak, že

$$\bigcup_s (A_s, B_s) \supset M_{p,q} \quad \text{a} \quad \sum_s (B_s - A_s) \leq \left(\frac{p}{q}\right)^n (b - a).$$

Z toho vyplývá (protože  $\frac{p}{q} < 1$ ), že  $M_{p,q}$  je míry nula. A protože

$$\{x \in (a, b) : D_- f(x) < D^+ f(x)\} \subset \bigcup_{p,q \in (0,1) \cap \mathbb{Q}} M_{p,q},$$

víme, že  $D^+f \leq D_-f$  skoro všude. Snadno si můžeme rozmyslet, že pokud funkce není diferencovatelná v bodě  $x$ , pak bud'

$$D^+f(x) = \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} > D_-f(x) = \liminf_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x+t) - f(x)}{t},$$

nebo

$$\liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} < \limsup_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}.$$

První možnost nemůže nastat skoro nikde díky  $D^+f \leq D_-f$  skoro všude a analogicky lze ukázat, že druhá možnost nemůže nastat skoro nikde.  $\square$

# Chapter 4

## Absolutně spojité funkce

V této kapitole zavedeme pojem absolutně spojitých funkcí, zmíníme některé základní vlastnosti, abychom se nakonec dostali k velmi důležitému tvrzení, že prostor absolutně spojitých funkcí na intervalu  $(a, b)$  je totožný s prostorem  $W^{1,1}(a, b)$ .

**Definice 4.1.** Řekneme, že reálná funkce  $f$  je *absolutně spojitá* na intervalu  $(a, b)$ , jestliže ke každému  $\varepsilon > 0$  lze nalézt  $\delta$  tak, že kdykoliv  $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_m < b_m$  jsou body intervalu  $(a, b)$  splňující

$$\sum_{j=1}^m (b_j - a_j) < \delta, \text{ pak platí: } \sum_{j=1}^m |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon.$$

Značení:  $f \in AC(a, b)$

**Definice 4.2.** Množina  $D := \{x_1, \dots, x_{n_D}\}$  je *dělení intervalu*  $(a, b)$ , pokud:

$$a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n_D} = b.$$

**Lemma 4.3.** Každá funkce absolutně spojitá na intervalu  $(a, b)$  je rozdílem dvou monotónních funkcí absolutně spojitých na intervalu  $(a, b)$ .

*Důkaz.* Zadefinujme si funkci  $v$  tak, že pro každý interval  $[c, d] \subset (a, b)$  platí:

$$v(d) - v(c) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n_D} |f(x_j) - f(x_{j-1})| : D \text{ dělení intervalu } (c, d) \right\}.$$

Taková funkce  $v$  je neklesající.

Zvolme pevné  $\varepsilon > 0$  a k němu příslušné  $\delta > 0$  z definice absolutní spojitosti.

Nechť  $A_1 < B_1 \leq A_2 < \dots < B_p$  jsou body intervalu  $(a, b)$  splňující

$$\sum_{j=1}^p (B_j - A_j) < \delta.$$

Najděme dělení

$$A_j = a_j^0 < b_j^0 = a_j^1 < \dots < b_j^{m_j} = B_j$$

intervalů  $[A_j, B_j]$  tak, že

$$v(B_j) - v(A_j) < \sum_{i=1}^{m_j} |f(b_j^i) - f(a_j^i)| + \frac{1}{p}\varepsilon.$$

Jelikož

$$\sum_{j,i} (b_j^i - a_j^i) < \sum_j (B_j - A_j) < \delta,$$

dostáváme z definice absolutní spojitosti pro  $f$ :

$$\sum_j |v(B_j) - v(A_j)| < \sum_{j,i} |f(b_j^i) - f(a_j^i)| + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Tedy funkce  $v$  je absolutně spojitá. Navíc platí, že i funkce  $(v - f)$  je absolutně spojitá (neboť rozdíl dvou absolutně spojitých funkcí je absolutně spojitá funkce). Zbývá nám dokázat, že  $v - f$  je neklesající, potom  $f$  můžeme napsat jako rozdíl dvou neklesajících absolutně spojitých funkcí  $f = v - (v - f)$ .

Tedy potřebujeme, že

$$(v - f)(d) - (v - f)(c) \geq 0 \text{ pro každé } c, d \in (a, b), c < d.$$

Zvolme tedy  $c, d$  pevně. Pak  $D := \{c, d\}$  je jedno z dělení intervalu  $(c, d)$ , a tedy

$$v(d) - v(c) \geq |f(d) - f(c)|,$$

neboli

$$(v - f)(d) - (v - f)(c) = v(d) - v(c) + f(c) - f(d) \geq |f(d) - f(c)| - (f(d) - f(c)) \geq 0.$$

□

Vyslovíme speciální verzi Lebesgueovy věty z [1].

**Věta 4.4.** Nechť  $f$  je rostoucí funkce na intervalu  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ . Pak derivace  $f'$  existuje ve skoro všech bodech intervalu  $(a, b)$ .

*Důkaz.* Nechť  $\varepsilon > 0$ . Pak  $f$  je rostoucí na intervalu  $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ . Nalezněme dále interval  $[A, B]$  tak, že  $[A, B]$  je obor hodnot funkce  $x + f(x)$  na intervalu  $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ , a funkci  $g$  takovou, že  $g(x + f(x)) := x$ . Pak funkce  $g$  je na intervalu  $[A, B]$  lipschitzovská s konstantou 1 a neklesající. Navíc pro množiny

$$E := \{y \in (A, B) : g'(x) \text{ neexistuje}\}, \quad N := \{y \in (A, B) : g'(x) = 0\}$$

platí

$$\{x \in (a, b) : f'(x) \text{ neexistuje}\} \subset g(E) \cup g(N).$$

My ale díky Větě 3.9 víme, že  $\lambda E = 0$ , a tedy podle Lemmatu 3.4 je i  $\lambda g(E) = 0$ . Navíc podle Lemmatu 3.5 (pro  $K = 0$ ) je i  $\lambda g(N) = 0$ . Limitním přechodem pro  $\varepsilon \rightarrow 0$  dostaneme tvrzení. □

Nyní je na řadě pro nás asi nejdůležitější vlastnost absolutně spojitých funkcí. Vyslovíme jí ve formě Věty, jejíž důkaz je opět inspirován knihou [1].

**Věta 4.5.** *Nechť  $f$  je absolutně spojitá funkce na intervalu  $[a, b]$ . Potom  $f'$  existuje skoro všude,  $f' \in L^1(a, b)$  a*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'. \quad (4.1)$$

*Důkaz.* Jelikož díky Lemmatu 4.3 víme, že každá absolutně spojitá funkce je rozdílem dvou monotónních absolutně spojitých funkcí, stačí uvažovat případ, kdy  $f$  je neklesající. Dále, protože nás zajímá pouze chování na intervalu  $(a, b)$ , můžeme dodefinovat  $f(x) := f(b)$  pro  $x > b$ . Tedy můžeme definovat posloupnost funkcí

$$f_k(x) := k \left( f(x + \frac{1}{k}) - f(x) \right).$$

Potom  $\{f_k\}$  je posloupnost nezáporných mřížitelných funkcí na  $(a, b)$  a  $\lim f_k = f'$  skoro všude (díky Větě 4.4 limita existuje). Navíc protože  $f$  je neklesající, je  $f' \geq 0$  skoro všude, a tedy z Fatouova lemmatu vyplývá:

$$\begin{aligned} \int_a^b f' &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} k \left( \int_{a+\frac{1}{k}}^{b+\frac{1}{k}} f - \int_a^b f \right) = \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} k \left( \int_b^{b+\frac{1}{k}} f - \int_a^{a+\frac{1}{k}} f \right) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} k \left( \frac{1}{k} f(b) - \frac{1}{k} f(a) \right) = f(b) - f(a). \end{aligned}$$

Zbývá dokázat opačnou nerovnost, neboli  $\int_a^b f' \geq f(b) - f(a)$ . Zvolme  $\varepsilon > 0$  a najděme příslušné  $\delta$  z definice absolutně spojité funkce. Existuje otevřená množina  $G$  míry menší než  $\delta$  obsahující všechny body neexistence derivace  $f'$ . Napišeme  $G$  ve tvaru sjednocení po dvou disjunktních intervalích  $(a_j, b_j)$ . Potom pro všechna  $k \in N$  máme z definice absolutní spojitosti

$$\sum_{j=1}^k (f(b_j) - f(a_j)) < \varepsilon,$$

tedy míra  $\lambda f(G) \leq \varepsilon$  a můžeme díky Lemmatu 3.6 psát:

$$\lambda^* f(I \setminus G) \leq \int_{(I \setminus G)} f' \leq \int_I f'.$$

A tedy

$$f(b) - f(a) = \lambda f(I) \leq \lambda^* f(I \setminus G) + \lambda f(G) \leq \int_I f' + \varepsilon.$$

□

Doplňíme ještě jednu intuitivně zřejmou vlastnost absolutně spojitých funkcí.

**Lemma 4.6.** *Nechť  $f \in AC(a, b)$  a  $g \in C_0^\infty(a, b)$  pak  $(f \cdot g) \in AC(a, b)$ .*

*Důkaz.* Protože  $g \in C_0^\infty(a, b)$ , víme z Lemmatu 3.2, že  $g$  je na intervalu  $(a, b)$  lipschitzovská. Tedy existuje  $\alpha > 0$ , že pro každé  $x, y \in (a, b)$  platí:

$$|g(x) - g(y)| \leq \alpha \cdot |x - y|.$$

Tedy volme  $\varepsilon > 0$ . Pro  $\delta = \frac{\varepsilon}{2\alpha}$  víme, že:

$$\sum_{j=1}^m |g(a_j) - g(b_j)| \leq \sum_{j=1}^m \alpha \cdot (a_j - b_j) \leq \alpha \cdot \delta = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Tedy  $g \in AC(a, b)$  a můžeme počítat pro pevné  $\varepsilon > 0$  a pro vhodně zvolená  $\delta$  z definice absolutní spojitosti pro  $f$  i  $g$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1}) \\ &= \sum_{j=1}^m f(x_i) \cdot (g(x_i) - g(x_{i-1})) - \sum_{j=1}^m g(x_i) \cdot (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &\leq \sup |f| \cdot \sum_{j=1}^m |g(x_i) - g(x_{i-1})| + \sup |g| \cdot \sum_{j=1}^m |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &< \varepsilon \cdot (\sup |f| + \sup |g|). \end{aligned}$$

□

Nyní se budeme zabývat vlastnostmi prostoru  $W^{1,1}(a, b)$  a  $L^1(a, b)$ , které již přímo povedou k očekávané Větě.

**Věta 4.7.** *Nechť  $p \in [1, \infty)$  a  $f$  je prvkem prostoru  $W^{1,p}(a, b)$ . Pak existuje spojitý reprezentant a pro něj platí, že*

$$\int_c^d f' = f(d) - f(c) \text{ pro všechna } [c, d] \subset [a, b]. \quad (4.2)$$

*Důkaz.* Vezměme si pomocnou posloupnost  $f_n$  funkcí z prostoru  $C^\infty(a, b)$ , která je Cauchyovská podle normy  $\|\cdot\|_{1,p}$ , a jejíž limitou je funkce  $f$ . Takovou posloupnost umíme nalézt díky Větě 2.9. Pro funkce z prostoru  $C^\infty(a, b)$  vzorec (4.2) platí, neboť  $f'$  je spojitá na  $(a, b)$ . Tedy víme, že

$$\int_d^d f'_n = f_n(d) - f_n(c). \quad (4.3)$$

Z cauchyovskosti posloupnosti  $f_n$  víme, že existuje podposloupnost  $f_{n_k}$  tak, že  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$  pro všechna  $x \in M$ , kde  $\lambda((a, b) \setminus M) = 0$ . Protože vztah (4.3) platí pro každé  $n \in \mathbb{N}$ , platí i pro limitu podle  $n$ , a tedy můžeme psát:

$$f(d) - f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(d) - f_n(c)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d f'_n = \int_c^d \tilde{f}',$$

pro všechna  $c, d \in M$ . Nechť  $c \in M$  je pevné a definujme

$$\tilde{f}(x) := \int_c^x f'.$$

Pak  $\tilde{f}$  je spojitá funkce, platí pro ni (4.2) a  $f = \tilde{f}$  skoro všude.  $\square$

**Věta 4.8.** *Nechť  $f \in L^1(a, b)$ . Pak pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  tak, že pro každou  $A \subset (a, b)$  takovou, že míra  $\lambda(A) < \delta$  platí:*

$$\int_A |f| < \varepsilon.$$

*Důkaz.* Důkaz povedeme sporem. Nechť tedy existuje  $\varepsilon > 0$ , že pro každé  $\delta > 0$  existuje množina  $A \subset (a, b)$  tak, že

$$\lambda(A) < \delta \text{ a } \int_A |f| \geq \varepsilon.$$

Pak můžeme volit

$$\delta_n := \frac{(b-a)}{2^n}$$

a najít k němu  $A_n$  tak, že

$$\lambda(A_n) < \frac{(b-a)}{2^n} \text{ a přitom } \int_{A_n} |f| \geq \varepsilon.$$

Nechť dále

$$B_i := \bigcup_{n=i}^{\infty} A_n$$

jsou do sebe zanořené. Pak

$$\mu(A) = \int_A |f|$$

je míra, a tedy

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(B_i) = \mu\left(\bigcap_i B_i\right) = 0 = \lambda\left(\bigcap_i B_i\right).$$

Toto ale dává spor s

$$\mu(B_i) = \int_{B_i} |f| \geq \int_{A_i} |f| \geq \varepsilon \text{ pro každé } i.$$

$\square$

Nyní se již dá následující Věta poměrně snadno a elegantně dokázat.

**Věta 4.9.** *Prostor  $W^{1,1}(a, b)$  je totožný s prostorem  $AC(a, b)$ .*

*Důkaz.* Důkaz sestává ze dvou implikací. Budeme dokazovat každou zvlášť.

První implikace tvrdí, že  $f \in AC(a, b) \Rightarrow f \in L^1(a, b)$  a platí vzorec (1.1). To, že absolutně spojitá funkce je prvkem prostoru  $L^1$ , je zřejmé. Z Věty 4.5 navíc víme, že pro absolutně spojité funkce platí vzorec (4.1) a tedy podle Lemmatu 4.6 můžeme počítat pro každé  $g \in C_0^\infty$ :

$$0 = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) = \int_a^b (f \cdot g)' = \int_a^b (f' \cdot g + f \cdot g') = \int_a^b f' \cdot g + \int_a^b f \cdot g',$$

z čehož již vzorec (1.1) vyplývá a tedy  $f \in W^{1,1}(a, b)$ .

Druhá implikace je zajímavější. Chceme dokázat, že pokud  $f \in W^{1,1}(a, b)$ , pak  $f \in AC(a, b)$ . Zvolme tedy pevné  $\varepsilon > 0$ . Z Věty 4.8 víme, že k tomuto  $\varepsilon$  můžeme najít  $\delta$  tak, že pro množinu  $A$  takovou, že  $\lambda(A) < \delta$  platí:

$$\int_A |f'| \leq \varepsilon.$$

Z Věty 4.7 víme, že  $\int_{a_j}^{b_j} f' = f(b_j) - f(a_j)$  pro všechny  $[a_j, b_j] \subset [a, b]$ . Nechť tedy  $a_j, b_j$  jsou body intervalu  $(a, b)$  takové, že

$$\sum_{j=1}^m |b_j - a_j| < \delta,$$

neboli míra množiny

$$A := \bigcup_{j=1}^m (a_j, b_j) \text{ splňuje } \lambda(A) < \delta.$$

Pak protože  $f' \in L^1(a, b)$ , můžeme psát:

$$\varepsilon > \int_A |f'| = \sum_{j=1}^m \left( \int_{a_j}^{b_j} |f'| \right) \geq \sum_{j=1}^m |f(b_j) - f(a_j)|.$$

□

Jako příklad toho, jak zásadní a významnou větou je Věta 4.9, nám může posloužit následující tvrzení, které by bez možnosti použít tuto větu nebylo tak snadné dokázat.

**Věta 4.10** (skládání zobrazení). *Nechť  $f$  je funkce z prostoru  $W^{1,1}(a, b)$  a  $g$  je  $K$ -lipschitzovská funkce na intervalu  $(a, b)$ . Pak i funkce  $g \circ f$  je prvkem  $W^{1,1}(a, b)$ .*

*Důkaz.* Vzhledem k Větě 4.9 nám stačí dokázat pouze, že je-li  $f \in AC(a, b)$  a  $g$  K-lipschitzovská, pak  $(g \circ f) \in AC(a, b)$ .

Zvolme  $\varepsilon > 0$ . Nechť dále  $\varepsilon_0 := \frac{\varepsilon}{2K}$  a nechť  $a_i, b_i$  jsou body intervalu  $(a, b)$  splnující

$$\sum_{i=1}^m |a_i - b_i| < \delta,$$

kde  $\delta$  volíme z definice absolutní spojitosti funkce  $f$ , aby

$$\sum_{i=1}^m |f(a_i) - f(b_i)| \leq \varepsilon_0.$$

Z definice  $g$  jakožto K-lipschitzovské funkce víme, že pro každé  $i \in N$  platí, že

$$|(g \circ f)(a_i) - (g \circ f)(b_i)| = |g(f(a_i)) - g(f(b_i))| \leq K \cdot |f(a_i) - f(b_i)|.$$

A tedy:

$$\sum_{i=1}^m |g(f(a_i)) - g(f(b_i))| \leq K \cdot \sum_{i=1}^m |f(a_i) - f(b_i)| \leq K \cdot \varepsilon_0 = K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} < \varepsilon.$$

□

# Chapter 5

## Věty o vnoření

V této kapitole ukážeme některé vztahy, které platí mezi různými prostory funkcí. Začneme zajímavým tvrzením o Sobolevově prostoru s nulou na hranici.

**Definice 5.1.** Funkce  $f$  je prvkem *Sobolevova prostoru s nulou na hranici*  $W_0^{1,p}(a, b)$ , pokud pro funkci

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in (a, b) \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus (a, b) \end{cases}$$

platí  $\tilde{f} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ .

**Věta 5.2.** Nechť  $p \in [1, \infty)$ . Pak na prostoru  $W_0^{1,p}(a, b)$  jsou normy

$$\|f\|_\alpha := \sqrt[p]{\int_a^b |f'|^p} \quad a \quad \|f\|_{1,p} \quad \text{ekvivalentní.}$$

*Důkaz.* Z definice potřebujeme dokázat tvrzení, že pro každou  $f \in W_0^{1,p}(a, b)$ , existuje  $c, d > 0$  tak, že

$$c \cdot \|f\|_\alpha \leq \|f\|_{1,p} \leq d \cdot \|f\|_\alpha.$$

My ale víme, že  $f \in L^p(a, b)$  neboli  $\int_a^b |f|^p = K < \infty$ . Z definice integrálu navíc  $\int_a^b |f|^p \geq 0$ . Tedy můžeme odvodit první nerovnost:

$$\|f\|_{1,p}^p = \int_a^b |f|^p + \int_a^b |f'|^p = K + \int_a^b |f'|^p \geq \int_a^b |f'|^p = 1 \cdot \|f\|_\alpha^p,$$

a tedy  $\|f\|_{1,p} \geq \|f\|_\alpha$ .

Druhá nerovnost je zajímavější. Protože  $f \in W_0^{1,p}(a, b)$ , můžeme psát

$$f(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$$

podle Věty 4.7 a s pomocí vlastností integrálu a Fubiniho věty můžeme počítat:

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x)|^p dx &= \int_a^b \left| \int_a^x f'(t) dt \right|^p dx \leq \int_a^b \left( \int_a^x |f'(t)| dt \right)^p dx \\
&\leq \int_a^b \left( \int_a^b |f'(t)| dt \right)^p dx \\
&\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \int_a^b \left( \int_a^b |f'(t)|^p dt \right) \cdot \left( \int_a^b 1^{\frac{p-1}{p}} dt \right)^{p-1} dx \\
&= (b-a)^{p-1} \cdot \int_a^b \left( \int_a^b |f'(t)|^p dt \right) dx \\
&\stackrel{\text{Fubini}}{=} (b-a)^{p-1} \cdot \int_a^b \left( \int_a^b |f'(t)|^p dx \right) dt \\
&= (b-a)^{p-1} \cdot \int_a^b |f'(t)|^p dt \cdot \int_a^b 1 dx = \|f\|_{\alpha}^p \cdot (b-a)^p.
\end{aligned}$$

Neboli  $\|f\|_{1,p} \leq \sqrt[p]{((b-a)^p + 1)} \cdot \|f\|_{\alpha}$ . □

Nyní ukážeme souvislost mezi Sobolevovými prostory jedné dimenze a prostory Hölderovsky spojitých funkcí.

**Definice 5.3.** Říkáme, že  $f$  je *hölderovská s koeficientem  $\alpha$*  na intervalu  $(a, b)$ , pokud existuje  $c > 0$ , že pro každé  $x, y \in (a, b)$  platí:

$$|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|^{\alpha}.$$

Značení:  $f \in C^{0,\alpha}(a, b)$

**Věta 5.4.** Nechť  $p \in (1, \infty)$  a  $f \in W^{1,p}(a, b)$ . Pak  $f \in C^{0,1-\frac{1}{p}}(a, b)$  a existuje  $c > 0$ , že

$$\|f\|_{C^{0,1-\frac{1}{p}}} \leq c \cdot \|f\|_{1,p}.$$

*Důkaz.* Jelikož  $f \in W^{1,p}(a, b)$ , patří  $f'$  do prostoru  $L^p(a, b)$ , a tedy pro každé  $x, y \in (a, b)$ ,  $x \neq y$  platí:

$$\int_x^y |f'|^p \leq \int_a^b |f'|^p = K < \infty.$$

A tedy můžeme psát s pomocí hölderovy nerovnosti:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left| \int_y^x f' \right| \leq \int_y^x |f'| \cdot 1 \leq \left( \int_y^x |f'|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_y^x 1 \right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&\leq K^{\frac{1}{p}} \cdot (x-y)^{1-\frac{1}{p}} \leq K^{\frac{1}{p}} \cdot |x-y|^{1-\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

□

Zde vyslovíme Větu, která nám ukazuje, že intuice může být někdy zavádějící. Tato Věta i s důkazem je převzata z knihy [1].

**Věta 5.5.** *Existuje funkce  $f$  rostoucí spojitá na intervalu  $(a, b)$ , která není prvkem  $W^{1,1}(a, b)$ .*

*Důkaz.* Podle Věty 4.9 nám stačí dokázat, že  $f \notin AC(a, b)$ . Pro snadnější konstrukci zvolme interval  $(a, b) = (0, 1)$ .

Definujme Cantorovu funkci  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  následujícím způsobem: Položme  $f(0) := 0$ ,  $f(1) := 1$ . Pro  $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$  klademe  $f(x) := \frac{1}{2}$ . Dále položme  $f(x) = \frac{1}{4}$  pro  $x \in [\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$  a  $f(x) = \frac{3}{4}$  pro  $x \in [\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$ . V obecném kroku vždy každý maximální interval  $(a, b)$ , v jehož žádném bodě není  $f$  dosud definována, rozdělíme na třetiny, v prostřední třetině definujeme funkční hodnotu  $f(x) := \frac{f(a)+f(b)}{2}$  a algoritmus provedeme znova. Po skončení procedury je funkce definovaná a stejnomořně spojitá na husté podmnožině intervalu  $[0, 1]$ . Posledním krokem definice je spojité rozšíření funkce  $f$  na celý interval  $[0, 1]$ .

Cantorovu funkci lze také zadefinovat aritmeticky: Nechť číslo  $x \in [0, 1]$  je zapsané ve tvaru

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} 3^{-j} x_j,$$

kde  $x_j \in \{0, 1, 2\}$ . Potom, pokud žádné  $x_j$  není 1, definujeme

$$f(x) := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} x_j.$$

V opačném případě nechť  $m := \min\{j \in \mathbb{N} : x_j = 1\}$  a

$$f(x) := \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^m 2^{-j} x_j + 2^{-m} \right).$$

Takto zadefinovaná funkce je zřejmě funkcí neklesající a spojitou. Avšak vyjmeme-li z intervalu  $[0, 1]$  všechny otevřené intervaly, na nichž  $f$  není konstantní, dostaneme tzv. *Cantorovo diskontinuum*, což je množina míry nula. Funkce  $f$  má tedy derivaci 0 skoro všude, neboť je ve skoro všech bodech intervalu  $[0, 1]$  konstantní a

$$f(1) - f(0) = 1 \neq 0 = \int_0^1 f'$$

Tedy podle Věty 4.5 dostaneme  $f \notin AC(0, 1)$ . □

Na závěr kapitoly se však již intuicí necháme vést, a proto vyslovíme a dokážeme celkem předvídatelnou Větu.

**Věta 5.6.** *Nechť  $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$ . Pak  $f \in W^{1,p_1}(a, b)$ , pokud  $f \in W^{1,p_2}(a, b)$ , ale existuje  $g \in W^{1,p_1}(a, b)$ , že  $g \notin W^{1,p_2}(a, b)$ .*

*Neboli symbolicky zapsáno:  $W^{1,p_2}(a, b) \subsetneq W^{1,p_1}(a, b)$ .*

*Důkaz.* První část tvrzení jsme již dokázali v Lemmatu 1.8. Omezíme se tedy na hledání funkce  $g$ . Vezměme  $0 < \varepsilon < (p_2 - p_1)$ . Definujme funkci  $g$  jakožto:

$$g(x) := \int_a^x (y - a)^{-\frac{1}{p_1 + \varepsilon}} dy.$$

Pak pro ni platí:

$$\begin{aligned} \int_a^x (y - a)^{-\frac{1}{p_1 + \varepsilon}} dy &= \left[ \frac{1}{\frac{-1}{p_1 + \varepsilon} + 1} \cdot (y - a)^{-\frac{1}{p_1 + \varepsilon} + 1} \right]_a^x \\ &= \frac{p_1 + \varepsilon}{-1 + p_1 + \varepsilon} \cdot (x - a)^{\frac{-1 + p_1 + \varepsilon}{p_1 + \varepsilon}}, \end{aligned}$$

neboli

$$\int_a^b |g(x)|^{p_1} = \left( \frac{p_1 + \varepsilon}{-1 + p_1 + \varepsilon} \right)^{p_1} \cdot \int_a^b |x - a|^{\frac{-1 + p_1 + \varepsilon}{p_1 + \varepsilon} \cdot p_1}.$$

A tedy  $g \in L^{p_1}(a, b)$ , právě když

$$\frac{-1 + p_1 + \varepsilon}{p_1 + \varepsilon} \cdot p_1 > -1.$$

Ale my víme, že

$$\frac{-1 + p_1 + \varepsilon}{p_1 + \varepsilon} \cdot p_1 = ((p_1 - 1) + \varepsilon) \cdot \frac{p_1}{p_1 + \varepsilon} \geq \varepsilon \cdot \frac{p_1}{p_1 + \varepsilon} \geq 0 > -1.$$

Zároveň můžeme počítat i

$$\frac{-1 + p_1 + \varepsilon}{p_1 + \varepsilon} \cdot p_2 = ((p_1 - 1) + \varepsilon) \cdot \frac{p_2}{p_1 + \varepsilon} \geq \varepsilon \cdot \frac{p_2}{p_1 + \varepsilon} \geq \varepsilon > -1.$$

A tedy ze stejného důvodu dostáváme i  $g \in L^{p_2}(a, b)$ .

Zbývá nám ověřit platnost vzorce (1.1). Z  $\varphi \in C_0^\infty(a, b)$  víme, že existuje  $[c, d] \subset (a, b)$ , kde  $\varphi = 0$  na  $(a, b) \setminus [c, d]$ . Protože funkce  $g$  je zřejmě prvkem prostoru  $C^1(c, d)$ , můžeme použít vzorec pro integraci per partes s libovolnou funkcí  $\varphi \in C_0^\infty(a, b)$ , neboli psát:

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) \cdot \varphi'(x) dx &= \int_a^b \frac{p_1 + \varepsilon}{-1 + p_1 + \varepsilon} \cdot (x - a)^{\frac{-1 + p_1 + \varepsilon}{p_1 + \varepsilon}} \cdot \varphi'(x) dx \\ &\stackrel{\text{per partes}}{=} 0 - \int_a^b (x - a)^{\frac{-1}{p_1 + \varepsilon}} \cdot \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Označme si nyní  $g'(x) := (x - a)^{\frac{-1}{p_1 + \varepsilon}}$ . Z Definice 1.6 víme, že  $g(x) \in W^{1,p_j}(a, b)$ , pokud  $g'(x) \in L^{p_j}(a, b)$ , pro  $j = 1, 2$ . Tedy budeme počítat:

$$\int_a^b |g'(x)|^{p_1} dx = \int_a^b g'(x)^{p_1} dx = \int_a^b (x - a)^{-\frac{p_1}{p_1 + \varepsilon}} dx < \infty,$$

protože  $\frac{p_1}{p_1+\varepsilon} > 1$ . Čili  $g'(x) \in L^{p_1}(a, b)$ . Také však můžeme počítat:

$$\frac{p_2}{p_1 + \varepsilon} < \frac{p_2}{p_1 + (p_2 - p_1)} = \frac{p_2}{p_2} = 1.$$

A tedy

$$\int_a^b |g'(x)|_2^p dx = \int_a^b g'(x)^{p_2} dx = \int_a^b (x-a)^{-\frac{p_2}{p_1+\varepsilon}} dx > \int_a^b (x-a)^{-1} dx = +\infty$$

a  $g' \notin L^{p_2}(a, b)$ . □

# Chapter 6

## Prostory funkcí s neceločíselnými derivacemi

Tato kapitola se letmo dotkne problematiky prostorů funkcí s neceločíselnými derivacemi a ukáže, že se dají v jistém smyslu chápat jako rozšíření Sobolevových prostorů v jedné dimenzi, což nám říkají první dvě Věty. Celá kapitola je inspirována knihou [2].

**Definice 6.1.** Nechť  $f$  je funkce z prostoru  $L^p(a, b)$ . Pak  $L^p$ -modul spojitosti funkce  $f$  je funkce  $\omega_p$ :

$$\omega_p(t) := \left( \int_a^b |f(x+t) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Zde a v celé kapitole používáme konvenci  $f(x) = f(b)$  pro všechna  $x > b$ .

**Definice 6.2.** Pro  $\alpha \in [0, 1]$  definujeme prostor funkcií s neceločíselnou derivací  $\alpha$  na intervalu  $(a, b)$  jako prostor  $W^{\alpha, p}(a, b)$ :

$$W^{\alpha, p}(a, b) := \left\{ f \in L^p(a, b) : \frac{\omega_p(t)}{t^\alpha} \in L^\infty(0, 1) \right\}.$$

Norma tohoto prostoru je definována jako

$$\|f\|_{\alpha, p} := \|f\|_p + \left\| \frac{\omega_p(t)}{t^\alpha} \right\|_\infty.$$

**Věta 6.3.** Prostor  $W^{0, p}(a, b)$  je totožný s prostorem  $L^p(a, b)$ .

*Důkaz.* Pokud  $f$  patří do prostoru  $W^{0, p}(a, b)$ , pak  $f \in L^p(a, b)$  z definice.

Je-li  $f \in L^p(a, b)$ , víme, že  $\|f(x+t)\|_p \leq K < \infty$ , stejně tak  $\|f(x)\|_p \leq K < \infty$ , a tedy můžeme počítat:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\omega_p(t)}{t^0} \right\|_\infty &= \|\omega_p(t)\|_\infty \leq \sup_{t \in (0, 1)} \|f(x+t) - f(x)\|_p \\ &\leq \sup_{t \in (0, 1)} (\|f(x+t)\|_p + \|f(x)\|_p) \leq 2K < \infty. \end{aligned}$$

Tedy  $f \in W^{0,p}(a, b)$ . □

**Definice 6.4.** Nechť  $1 \leq p < +\infty$  a  $q = \frac{p}{p-1}$  ( $q = +\infty$ , je-li  $p = 1$ ). Nechť  $f, f_j \in L^p(a, b)$ . Řekneme, že  $f_j$  konverguje slabě k  $f$  v  $L^p(a, b)$ , jestliže pro každou  $g \in L^q(a, b)$  platí:

$$\int_a^b f_j g \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \int_a^b f g.$$

**Věta 6.5.** Nechť  $p > 1$ . Označme prostor funkcí s neceločíselnou derivací pro  $\alpha = 1$  jako  $\widetilde{W}^{1,p}(a, b)$ . Pak  $\widetilde{W}^{1,p}(a, b) = W^{1,p}(a, b)$ , kde  $W^{1,p}(a, b)$  značí Sobolevův prostor z Definice 1.5.

*Důkaz.* Nejprve dokážeme, že je-li  $f \in W^{1,p}(a, b)$ , platí i  $f \in \widetilde{W}^{1,p}(a, b)$ :

Z Věty 4.7 víme, že

$$f(x+t) - f(x) = \int_x^{x+t} f' \leq \int_x^{x+t} |f'|,$$

a tedy můžeme počítat i s pomocí Věty 5.2 (předposlední nerovnost):

$$\begin{aligned} \frac{\omega_p(t)^p}{t^p} &= \frac{\int_a^b |f(x+t) - f(x)|^p dx}{t^p} \leq \frac{\int_a^b \left( \int_x^{x+t} |f'(y)| dy \right)^p dx}{t^p} \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \frac{\int_a^b \left( \int_x^{x+t} |f'(y)|^p dy \right) \cdot \left( \int_x^{x+t} 1^{\frac{p-1}{p}} dy \right)^{p-1} dx}{t^p} \stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{t \cdot \int_a^b |f'(y)|^p dy \cdot t^{p-1}}{t^p} \\ &= \|f'\|_p^p \leq c^p \cdot \|f\|_{1,p}^p \leq c^p \cdot K^p < \infty. \end{aligned}$$

Čili  $\frac{\omega_p(t)}{t} \in L^\infty(0, 1)$  a tedy  $f \in \widetilde{W}^{1,p}(a, b)$ .

Obrácenou implikaci dostaneme také snadno. Víme, že  $f \in L^p(a, b)$ , a tedy nám stačí dokázat platnost vzorce (1.1). Protože  $\frac{\omega_p(t)}{t} \in L^\infty(0, 1)$ , víme, že posloupnost

$$\left\{ \frac{f(x + \frac{1}{m}) - f(x)}{\frac{1}{m}} \right\}_{m=1}^{\infty}$$

je omezená v  $\|\cdot\|_p$  normě, a protože  $L^p(a, b)$  je reflexivní (viz 2.35 v [3]), můžeme najít funkci  $g \in L^p(a, b)$  a podposloupnost  $m_k$  tak, že

$$\frac{f(x + \frac{1}{m_k}) - f(x)}{\frac{1}{m_k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g \text{ slabě v } L^p(a, b).$$

Pro každou  $\varphi \in C_0^\infty(a, b)$  dále můžeme počítat podle Věty o substituci

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \left( \frac{f(x + \frac{1}{m_k}) - f(x)}{\frac{1}{m_k}} \right) \cdot \varphi(x) dx \\ &= m_k \cdot \left( \int_a^b f(x) \cdot (-\varphi(x)) dx + \int_a^b f(x + \frac{1}{m_k}) \cdot \varphi(x) dx \right) \\ &= m_k \cdot \left( \int_a^b f(x) \cdot (-\varphi(x)) dx + \int_a^b f(x) \cdot \varphi(x - \frac{1}{m_k}) dx \right) \\ &= \int_a^b f(x) \cdot \left( \frac{\varphi(x - \frac{1}{m_k}) - \varphi(x)}{\frac{1}{m_k}} \right) dx = P. \end{aligned}$$

Pravá strana konverguje k  $-\int_a^b f \varphi' dx$ , protože  $\varphi \in C_0^\infty(a, b)$ . Navíc  $C_0^\infty(a, b) \subset L^{\frac{p}{p-1}}(a, b)$ , a tedy z definice slabé limity víme, že:

$$\int_a^b g \varphi dx = \lim_{k \rightarrow \infty} L = \lim_{k \rightarrow \infty} P = - \int_a^b f \varphi' dx,$$

a tedy  $f \in W^{1,p}(a, b)$  a  $f' = g$ . □

Na podobnost těchto prostorů se Sobolevovými prostory ukazuje i jejich úplnost.

**Věta 6.6.** Nechť  $0 \leq \alpha \leq 1$  a  $1 \leq p < \infty$ . Pak prostor  $W^{\alpha,p}(a, b)$  je úplný vzhledem k normě  $\|f\|_{\alpha,p}$ .

*Důkaz.* Nechť  $f_n$  je Cauchyovská ve  $W^{\alpha,p}(a, b)$ . Pak víme, že pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, že pro každé  $m, n \geq n_0$  platí:

$$\varepsilon > \|f_n - f_m\|_{\alpha,p} \geq \|f_n - f_m\|_p,$$

a tedy  $f_n$  je Cauchyovská i v  $L^p(a, b)$ . Protože  $L^p(a, b)$  je úplný (z Věty 1.3), existuje  $f \in L^p(a, b)$ , že  $f_n \xrightarrow{L^p} f$ . A tedy víme z Lemmatu 2.8, že existuje vybraná podposloupnost  $f_{n_k}$ , že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x) \text{ pro skoro všechna } x \in (a, b),$$

a navíc existuje funkce  $g(x) \in L^p(a, b)$ , která je pro ni majorantou. Pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  dále víme, že platí  $f_n \in W^{\alpha,p}(a, b)$  je omezená posloupnost, a tedy pro pevné  $t \in (0, 1)$  existuje  $c > 0$ , že

$$\int_a^b |f_n(x + t) - f_n(x)|^p dx \leq c \cdot t^\alpha \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Tedy pomocí Lebesgueovy věty můžeme psát:

$$\begin{aligned} c \cdot t^\alpha &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x+t) - f_n(x)|^p dx \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_a^b |f_{n_k}(x+t) - f_{n_k}(x)|^p dx \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b |f_{n_k}(x+t) - f_{n_k}(x)|^p dx = \int_a^b \lim_{k \rightarrow \infty} |f_{n_k}(x+t) - f_{n_k}(x)|^p dx \\ &= \int_a^b |f(x+t) - f(x)|^p dx. \end{aligned}$$

A tedy  $f \in W^{\alpha,p}(a, b)$ .

Zbývá dokázat, že  $f_n \xrightarrow{W^{\alpha,p}} f$ . Tedy volme  $\varepsilon > 0$ . Pak vezměme  $m, n \geq n_0$  z definice Cauchyovské posloupnosti. Už víme, že  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{m_k} = f$  skoro všude, a tedy můžeme opět s pomocí Lemmatu 2.8 a Lebesgueovy věty počítat:

$$\varepsilon > \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|_{\alpha,p} = \|f_n - \lim_{m \rightarrow \infty} f_m\|_{\alpha,p} = \|f_n - f\|_{\alpha,p}.$$

A tedy  $f_n \xrightarrow{W^{\alpha,p}(a,b)} f$ . □

A dokonc se dá vyslovit tvrzení, které je velmi podobné Větě 2.9.

**Definice 6.7.** Funkce  $f$  definovaná na okolí bodu  $x_0 \in (a, b)$  se nazve *aproximativně  $\delta$ -hölderovsky spojitá* v  $x_0$ , pokud  $\delta > 0$  a:

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(A_{h,x_0})}{h} = 0.$$

kde  $A_{h,x_0} := \{x \in [x_0 - h, x_0 + h] : |f(x) - f(x_0)| \geq |x - x_0|^\delta\}$ .

**Věta 6.8.** Nechť  $\alpha \in [0, 1]$  a  $p \in [1, \infty)$  tak, že  $\alpha \cdot p > 1$ , a nechť  $0 < \delta < \alpha - \frac{1}{p}$ . Nechť  $f \in W^{\alpha,p}(a, b)$ . Pak je  $f$  *aproximativně  $\delta$ -hölderovsky spojitá* pro skoro všechna  $x \in (a, b)$ .

*Důkaz.* Protože  $f \in W^{\alpha,p}(a, b)$ , víme, že

$$\int_a^b \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t^\alpha} \right|^p dx < \infty,$$

a tedy i

$$\int_0^1 \left( \int_a^b \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t^\alpha} \right|^p dx \right) dt < \infty,$$

neboli pro skoro všechna  $x \in (a, b)$  platí, že

$$\int_0^1 \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t^\alpha} \right|^p dt < \infty. \tag{6.1}$$

Tedy zafixujme pevně jedno takové  $x_0$ .

Nechť  $f$  není v  $x_0$  approximativně  $\delta$ -hölderovsky spojitá. Pak existuje  $\frac{1}{10} > \varepsilon > 0$ , že:

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(A_{h,x_0})}{h} \geq \varepsilon.$$

A tedy pro toto  $\varepsilon$  existuje posloupnost  $h_n \rightarrow 0$  tak, že  $\frac{\lambda(A_{h_n,x_0})}{h_n} \geq \frac{\varepsilon}{2}$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ , a navíc  $h_{n+1} \leq \frac{\varepsilon}{5} \cdot h_n$ . Označme si dále množinu

$$B_{n,x_0} := [x_0 - h_n, x_0 - \frac{\varepsilon}{5}h_n] \cup [x_0 + \frac{\varepsilon}{5}h_n, x_0 + h_n].$$

Rozmysleme si, že

$$\lambda(B_{n,x_0} \cap A_{h_n,x_0}) \geq \frac{\varepsilon}{2}h_n - 2\frac{\varepsilon}{5}h_n = \frac{\varepsilon}{10}h_n.$$

Pak můžeme díky  $1 + \delta p - \alpha p < 0$  počítat:

$$\begin{aligned} \int_{A_{h_n,x_0}} \left| \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t^\alpha} \right|^p dt &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{h_n,x_0} \cap B_{n,x_0}} \left| \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t^\alpha} \right|^p dt \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{A_{h_n,x_0} \cap B_{n,x_0}} \frac{|t|^{\delta p}}{|h_n|^{\alpha p}} dt \right) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n^{-\alpha p} \cdot \left( \int_{A_{h_n,x_0} \cap B_{n,x_0}} |t|^{\delta p} dt \right) \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} h_n^{-\alpha p} \cdot \left( \frac{\varepsilon}{10}h_n \cdot \left( \frac{\varepsilon}{5}h_n \right)^{\delta p} \right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{10} \left( \frac{\varepsilon}{5} \right)^{\delta p} \cdot (h_n)^{1+\delta p-\alpha p} \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{10} \left( \frac{\varepsilon}{5} \right)^{\delta p} \cdot 1 = +\infty, \end{aligned}$$

což nám dává spor se vzorcem (6.1). □

# Bibliography

- [1] J. Lukeš a J. Malý: *Míra a integrál*, Praha, 1993.
- [2] E.M. Stein: *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970
- [3] J. Lukeš: *Zápisky z Funkcionální analýzy*, Karolinum, Praha, 1998.