

Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Úvod do fraktální dimenze
Introduction to the fractal dimension
Veronika Kvajsarová

Vedoucí práce: Mgr. Michal Zamboj, Ph.D.
Studijní program: Specializace v pedagogice
Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Úvod do fraktální dimenze potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 10.7.2023

Poděkování

Chtěla bych poděkovat panu Mgr. Michalovi Zambojovi, Ph.D. za odborné vedení mé bakalářské práce a za trpělivost a ochotu, kterou mi v průběhu zpracování práce věnoval.

Abstrakt

Cílem této bakalářské práce je poukázat na vztah mezi matematikou, konkrétně potom fraktální geometrií, a světem kolem nás, který nemusí být na první pohled zřetelný, ovšem když mu člověk porozumí, může se stát velmi užitečným. Práce se tedy nejprve věnuje porozumění tomu, co je vlastně podstatou fraktální geometrie, poté jsou představeny nejznámější fraktální útvary včetně jejich konstrukce. Hlavní část práce se potom zabývá historií a výpočtem fraktální dimenze útvarů, která je nejprve rozpracována na předem uvedených matematicky konstruovaných fraktálech a poté je její význam zobecněn na některé přírodní útvary. Pro výpočet této dimenze jsou pak použity různé metody, jejichž výpočet je odvozen za pomoci fraktální dimenze již známých fraktálních útvarů, jejichž konstrukce se vyznačuje jistou pravidelností a odvození je tedy názornější. Výsledky vycházející z těchto metod jsou následně interpretovány a mezi sebou porovnávány. Jedná se tedy o nový pohled na přírodní objekty, které se dlouhou dobu zdály být matematicky nepopsatelné. Až toto poměrně mladé odvětví matematiky nás přivedlo k matematizaci světa kolem nás, čemuž se také věnuje poslední část této práce – tedy využití fraktální geometrie v praxi.

Hlavním přínosem této práce je výpočet fraktální dimenze pobřeží a hranic států na kterém je ukázáno, jakým způsobem lze charakterizovat tvar či členitost pozorovaného objektu, aniž by docházelo k výrazně různým výsledkům měření. K těm dochází, měříme-li pouze délku daného útvaru a nezkoumáme-li, jakým způsobem se mění jeho členitost.

Klíčová slova: fraktální geometrie, fraktální dimenze, soběpodobnostní dimenze, obvodová dimenze, Minkowského dimenze

Abstract

The aim of this bachelor thesis is to point out the relationship between mathematics, and more specifically fractal geometry, and the world around us, which may not be obvious at first sight, but can become very useful if one understands it. Thus, the thesis is first devoted to understanding what fractal geometry is all about, then the most famous fractal formations are introduced, including their construction. The main part of the thesis then deals with the history and computation of the fractal dimension of the formations, which is first elaborated on the mathematically constructed fractals presented above, and then its meaning is generalized to some natural formations. Various methods are then used to calculate this dimension, the calculation of which is derived using the fractal dimension of already known fractal formations, whose construction is characterized by a certain regularity and the derivation is therefore more illustrative. The results based on these methods are then interpreted and compared with each other. This is thus a new view of natural objects that for a long time seemed to be mathematically indescribable. It is only this relatively young branch of mathematics that has led us to mathematize the world around us, which is also the focus of the last part of this thesis - the use of fractal geometry in practice.

The main contribution of this work is the calculation of the fractal dimension of coastlines and national boundaries, which shows how the shape or ruggedness of an observed object can be characterized without leading to significantly different measurement results. These occur if we only measure the length of a given feature and do not examine how its ruggedness changes.

Keywords: fractal geometry, fractal dimension, self-similarity dimension, divider dimension, box-counting dimension

Obsah

Úvod	8
1 Úvod do fraktální geometrie	9
1.1 Co je to fraktál	9
1.2 Základní fraktály	10
1.2.1 Cantorovo diskontinuum	10
1.2.2 Sierpiňského trojúhelník	11
1.2.3 Sierpiňského koberec	13
1.2.4 Kochova křivka	14
1.2.5 Pythagorův strom	15
1.2.6 Peanova křivka	16
1.2.7 Juliovy množiny	17
1.2.8 Mandelbrotova množina	18
2 Historie neceločíselné dimenze	19
2.1 Pojem dimenze	19
2.2 Hausdorffova-Besicovitschova dimenze	20
3 Fraktální dimenze	21
3.1 Soběpodobnostní dimenze	21
3.1.1 Cantorovo diskontinuum	23
3.1.2 Kochova křivka	24
3.1.3 Sierpiňského trojúhelník	24
3.1.4 Sierpiňského koberec	25
3.1.5 Pythagorův strom	25
3.1.6 Peanova křivka	26

3.1.7	Sierpińskiego pyramida	26
3.1.8	Fraktální pyramida	27
3.1.9	Sierpińskiego krychle	27
3.2	Obvodová dimenze (divider dimension)	27
3.2.1	Soběpříbuzné fraktály	30
3.3	Minkowského dimenze (box-counting dimension)	37
3.3.1	Kochova křivka	38
3.3.2	Sierpińskiego trojúhelník	39
3.3.3	Soběpříbuzné fraktály	39
4	Praktické využití fraktální dimenze	48
4.1	Počítačová grafika	48
4.2	Medicína	49
4.3	Fraktální anténa	49
5	Životopisné medailonky	52
5.1	Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor	52
5.2	Wacław Franciszek Sierpiński	52
5.3	Niels Fabian Helge von Koch	53
5.4	Gaston Maurice Julia	53
5.5	Benoît B. Mandelbrot	53
	Závěr	55
	Seznam literatury	56

Úvod

Již od dětství se v matematice setkáváme s geometrickými objekty, které nám ovšem samotná příroda nenabízí. V předškolním věku se učíme rozpoznávat základní geometrické útvary, jako je trojúhelník, čtverec či kruh, na základní škole nám pak k těmto útvarům přibývají nové, učíme se je používat v různých matematických úlohách a zkoumat jejich vlastnosti, na střední škole se nám poté mimo jiné dostává hlubšího vhledu k těmto útvarům z různých matematických oborů.

Naše poznávání světa z geometrického hlediska tedy z velké části spočívá ve zjednodušování toho, co vidíme kolem sebe a může se nám potom zdát, že matematika a příroda spolu nemají moc společného. Toto „zdání“ nám vyvrací poměrně mladé odvětví matematiky – fraktální geometrie. Ta se narozdíl od nám běžně známé geometrie věnuje útvarům a jevům, které se vyskytují všude kolem nás a zdají se být matematicky nepopsatelné.

Fraktální geometrie, které se věnuje tato práce, nám tedy dává nový, matematický pohled na svět. Přes základní matematicky vytvořené fraktální útvary se postupně dostaneme k přírodním útvarům a jejich popisu pomocí fraktální geometrie, konkrétně potom pomocí fraktální dimenze, která tyto útvary odlišuje od těch nám běžně známých geometrických útvarů.

Hlavním cílem této práce je tedy popsat některé matematické a přírodní útvary pomocí různých způsobů výpočtu fraktální dimenze a následně tyto výsledky porovnat. Nejprve budou na jednodušších útvarech odvozeny či předvedeny jednotlivé metody, poté budou tyto poznatky aplikovány na konkrétní přírodní útvary. Na závěr budou uvedena nejvýznamnější využití fraktální geometrie a dimenze v praxi.

1 Úvod do fraktální geometrie

1.1 Co je to fraktál

Než se pustíme do zkoumání fraktální dimenze, položme si otázku, co to vlastně fraktál je. Pomocí eukleidovské geometrie jsme schopni popsat jednoduché geometrické útvary, jako například kruh, čtverec, trojúhelník, krychle apod., což dále využíváme k popisování situací a útvarů z běžného života. Spousta běžných útvarů vyskytujících se kolem nás má ovšem tak složitý tvar, že nám zkratka eukleidovská geometrie nestačí nebo situaci značně zjednodušuje. Dlouhou dobu se zdálo, že tyto útvary jsou geometricky nepopsatelné a z matematického hlediska nezajímavé, nicméně v 19. století se v matematice začaly objevovat zvláštní geometrické útvary s neobvyklými vlastnostmi (příkladem může být neceločíselná dimenze). Vzhledem k těmto neobvyklým vlastnostem byly tyto útvary většinou matematiků přehlíženy a až ke konci 20. století se díky francouzsko-americkému matematikovi Benoît B. Mandelbrotovi dostaly do povědomí společnosti a získaly své jméno – fraktály. Ačkoliv je tedy za zakladatele fraktální geometrie považován Benoît B. Mandelbrot, byly první fraktály zkoumány již několik let před samotným vznikem pojmu fraktál. Kupříkladu Cantorovo diskontinuum, které se řadí mezi nejjednodušší fraktální útvary, bylo poprvé publikováno už v roce 1883[1, str. 13-15], kdežto Mandelbrotova množina, která stojí za vznikem fraktální geometrie, byla publikována až v druhé polovině 20. století.

S novými geometrickými objekty samozřejmě přišla otázka, jak tyto objekty charakterizovat nebo ještě lépe, jak je definovat. Definice se během vyvíjení fraktální geometrie objevilo mnoho, ne však zcela přesných. Asi nejpřesněji můžeme definovat fraktály pomocí fraktální dimenze, které se budeme věnovat v následujících kapitolách. Nicméně pro lepší představu o tom, jak takové útvary vypadají, je možné charakterizovat je následovně:

„Fraktál je objekt, jehož geometrická struktura se opakuje v něm samém.“ [1, str. 30]

To znamená, že zaměříme-li se na určitou část objektu, o němž prohlašujeme, že se jedná o fraktál, uvidíme tutéž či velmi podobnou strukturu, kterou jsme pozorovali na původním objektu. Jedná-li se o objekt čistě matematický, konstruovaný na základě daného algoritmu, při každém zvětšení konkrétní oblasti tohoto objektu vidíme strukturu shodnou, přičemž takto se můžeme přibližovat do nekonečna. V tomto případě se jedná o fraktály soběpodobné. Pokud bychom se ovšem zaměřili na objekt přírodní, jako je například strom, pobřeží, pohoří, oblaka apod., zjistíme, že i zde se po přiblížení se na konkrétní část struktura opakuje. V tomto případě se ovšem pozorovaná část od původního objektu může mírně lišit a také zde nemůžeme pokračovat do nekonečna. Tyto fraktální objekty se nazývají soběpříbuzné. Nejprve si představíme nejznámější soběpodobné fraktály, které vedly ke vzniku fraktální geometrie.

1.2 Základní fraktály

1.2.1 Cantorovo diskontinuum

Cantorovo diskontinuum, které objevil německý matematik George Cantor, spočívá ve vynechání druhé (prostřední) třetiny z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$. Zůstávají nám tedy intervaly $\langle 0; \frac{1}{3} \rangle$ a $\langle \frac{2}{3}; 1 \rangle$, přičemž na tyto intervaly aplikujeme stejný krok jako v předešlém případě. Z intervalu $\langle 0; \frac{1}{3} \rangle$ tedy zůstávají intervaly $\langle 0; \frac{1}{9} \rangle$ a $\langle \frac{2}{9}; \frac{1}{3} \rangle$, podobně z intervalu $\langle \frac{2}{3}; 1 \rangle$ zůstávají intervaly $\langle \frac{2}{3}; \frac{7}{9} \rangle$ a $\langle \frac{8}{9}; 1 \rangle$. Z nově vzniklých intervalů jsou dále znovu vynechávány druhé třetiny jich samých, až nám po nekonečně mnoha krocích (neboli iteracích) zůstává množina bodů, která tvoří Cantorovo diskontinuum.

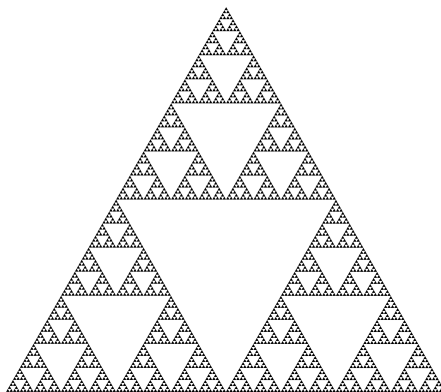


Obrázek 1.1: Náznak konstrukce Cantorova diskontinua.

1.2.2 Sierpińského trojúhelník

Dalším fraktálním útvarem, který předcházal průlomem ve fraktální geometrii je Sierpińského trojúhelník. Ten byl publikován v roce 1916 polským matematikem Wacławem Franciszkiem Sierpińskim a podstata jeho konstrukce je velmi podobná konstrukci Cantorova diskontinua.

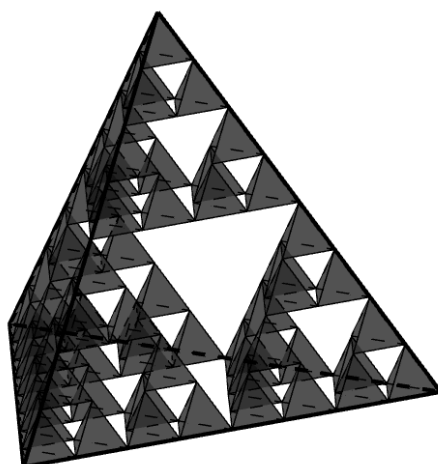
Základním objektem je obvykle rovnoramenný trojúhelník. Sestrojením všech středních příček tohoto trojúhelníku vznikají čtyři nové trojúhelníky, z nichž ten vnitřní je vynechán ze základního objektu. Tímto postupem vznikají tři nové trojúhelníky, přičemž s každým z nich znovu pracujeme jako se základním objektem, tedy v každém z nich opět vynecháváme vnitřní trojúhelník ohraničený středními příčkami daného trojúhelníku a vznikají opět nové menší trojúhelníky. Tento postup opakujeme do nekonečna a výsledkem je útvar, který neobsahuje žádnou souvislou plochu.[1, str. 86]



Obrázek 1.2: Sierpińského trojúhelník po sedmi iteracích.

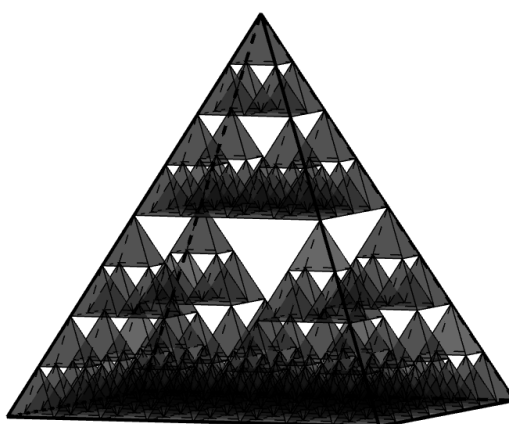
Sierpińského trojúhelník jsme konstruovali z rovinného útvaru. Mohli bychom se ale posunout do třírozměrného prostoru, jako základní útvar si vzít čtyřstěn a z něj vynechávat určité části tak, abychom dostali analogii Sierpińského trojúhelníku – Sierpińského pyramidu. Stejně jako jsme u trojúhelníku při každé iteraci strany dvakrát zmenšovali, budeme Sierpińského pyramidu konstruovat tak, že hrany původního čtyřstěnu v polovině rozdělíme a u každého z vrcholů sestrojíme menší čtyřstěny s poloviční délkou strany, které jsou tomu původnímu podobné. Zbylou část čtyřstěnu vynecháme a tak získáme objekt skládající se ze čtyř menších čtyřstěnu. Takto opět postupujeme

do nekonečna, až získáme Sierpiňského pyramidu.



Obrázek 1.3: Sierpiňského pyramidu po třech iteracích.

Sierpiňského pyramidu můžeme ještě zobecnit tak, že základním útvarem bude místo čtyřstěnu čtyřboký jehlan. Postup bude stejný jako v předchozím případě, hrany v polovině rozdělíme a u vrcholů zkonstruujeme nové menší jehlany. Těch potom bude pět a zbylou část původního jehlanu opět vynecháme. S těmito pěti jehlany pak budeme pracovat stejně jako s tím základním a dostáváme útvar, který se nazývá fraktální pyramidu.

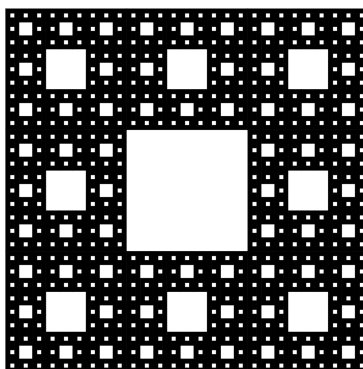


Obrázek 1.4: Fraktální pyramidu po třech iteracích.

1.2.3 Sierpiňského koberec

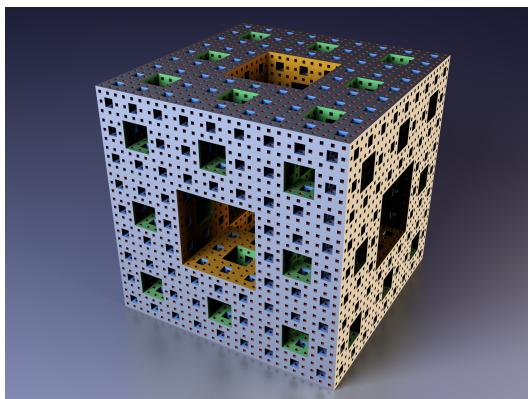
Kromě Sierpiňského trojúhelníku popsal W. F. Sierpiński v roce 1916 další fraktál, který je založen na stejném principu, jako Sierpiňského trojúhelník. Základním útvarem ovšem tentokrát není trojúhelník, ale čtverec, ze kterého jsou určitým způsobem vynechávány menší čtverce. Takto vzniká obrazec, který se podobá koberci, proto tento fraktál nese název Sierpiňského koberec.

Základním útvarem je tedy čtverec, který si pomyslně rozdělíme na devět shodných čtverců a ten prostřední z původního čtverce vynecháme. Zbyde nám útvar složený z osmi čtverců, jejichž délky stran jsou rovny jedné třetině délky strany celého čtverce, se kterým jsme začínali. S každým z těchto osmi čtverců nyní postupujeme stejně jako se základním útvarem, takže z každého z nich vynecháme prostřední čtverec, který je oproti předchozímu devětkrát zmenšený. Takto postupujeme do nekonečna. Výsledkem bude stejně jako u Sierpiňského trojúhelníku fraktál, který neobsahuje žádnou souvislou plochu.



Obrázek 1.5: Sierpiňského koberec po čtyřech iteracích.

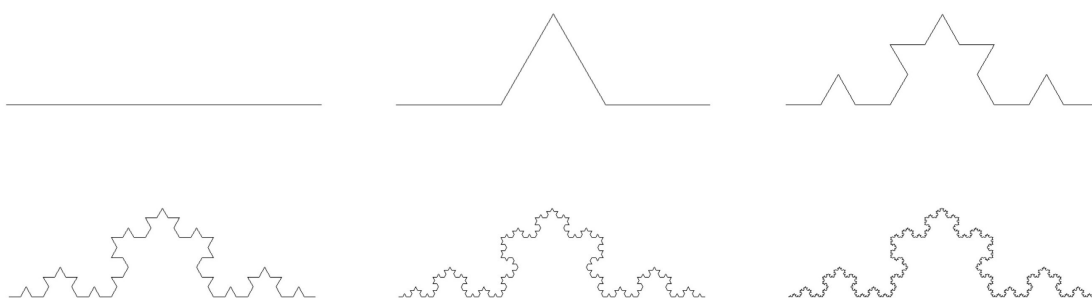
Stejně jako jsme v případě Sierpiňského trojúhelníku našli jeho analogii v trojrozměrném prostoru, i Sierpiňského koberec má svou analogii – Sierpiňského krychli. Základním útvarem je krychle, jejíž hrany rozdělíme na třetiny a podél každé hrany sestrojíme krychle s třetinovou délkou hrany. Takto po první iteraci získáváme dvacet shodných krychlí, zbylou část vynecháme. S každou z těchto krychlí nyní pracujeme jako se základním útvarem a po nekonečně mnoha iteracích získáváme Sierpiňského krychli.



Obrázek 1.6: Sierpiňského krychle po čtyřech iteracích.[2]

1.2.4 Kochova křivka

Konstrukce předešlých dvou fraktálů spočívala v práci s nějakým původním objektem, ve kterém byly pomocí daného algoritmu vynechávány jeho části. V případě Kochovy křivky, kterou v roce 1904 představil švédský matematik Niels Fabian Helge von Koch [1, str. 18], spočívá konstrukce v použití dvou útvarů - inicializátoru a generátoru. Inicializátor, kterým je zde úsečka, je nahrazen generátorem, v tomto případě rovnostranným trojúhelníkem. V takto nově vzniklém útvaru je každá strana trojúhelníku považována za inicializátor v dalším kroku.

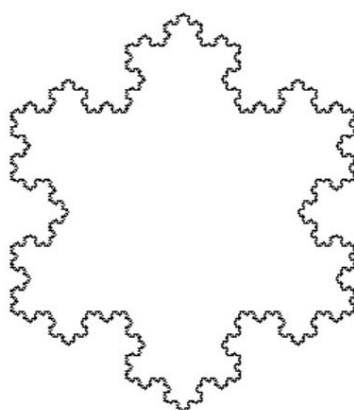


Obrázek 1.7: Prvních pět iterací Kochovy křivky.

Při konstrukci Kochovy křivky tedy pracujeme s úsečkou, nad jejíž prostřední třetinou sestrojíme rovnostranný trojúhelník, přičemž tuto třetinu z útvaru vynecháme. Takto nám vznikne lomená čára skládající se ze čtyř shodných úseček, které se nyní stávají inicializátorem a opět nad prostřední třetinou každé z nich sestrojíme rovnostranný trojúhelník jako v předchozím kroku. Tento postup opět opakujeme do nekonečna a do-

stáváme Kochovu křivku.

Nahradíme-li v postupu konstrukce Kochovy křivky úsečku rovnostranným trojúhelníkem, tedy nad prostřední třetinou každé strany rovnostranného trojúhelníku sestrojíme opět rovnostranný trojúhelník a prostřední třetinu vynecháme, dostáváme po nekonečném opakování tohoto postupu Kochovu vločku. Tento fraktální útvar je zajímavý tím, že zatímco jeho obvod je nekonečně dlouhý, obsah plochy, kterou tato křivka ohraničuje, je konečný.[3, str. 4]



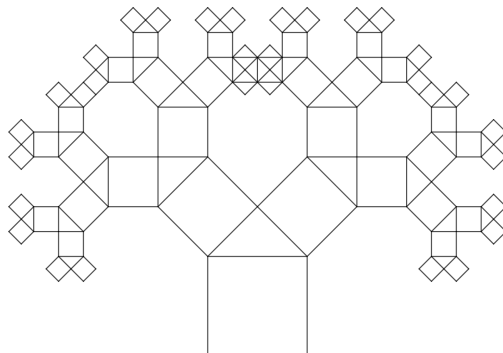
Obrázek 1.8: Kochova sněhová vločka.

1.2.5 Pythagorův strom

Stejně jako Kochova vločka připomíná svým tvarem sněhovou vločku, existují fraktály, které připomínají další přírodní útvary. Jedním z těchto fraktálů je i tzv. Pythagorův strom, který svým vzhledem připomíná nízký košatý strom. Byl objeven v roce 1942 nizozemským matematikem Albertem E. Bosmanem a jeho název je spojen s řeckým matematikem Pythagorem, jelikož konstrukce tohoto fraktálu v sobě ukrývá Pythagorovu větu.

Útvar, ze kterého vycházíme při konstrukci Pythagorova stromu, je čtverec. Nad jednou z jeho stran sestrojíme rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník a nad jeho odvěsnami poté sestrojíme nové čtverce. V této chvíli získáváme známý obrázek ilustrující Pythagorovu větu. Nad stranou každého z nově vzniklých čtverců, která leží proti odvěsně trojúhelníku, sestrojíme další rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník a nad jeho odvěsnami znovu

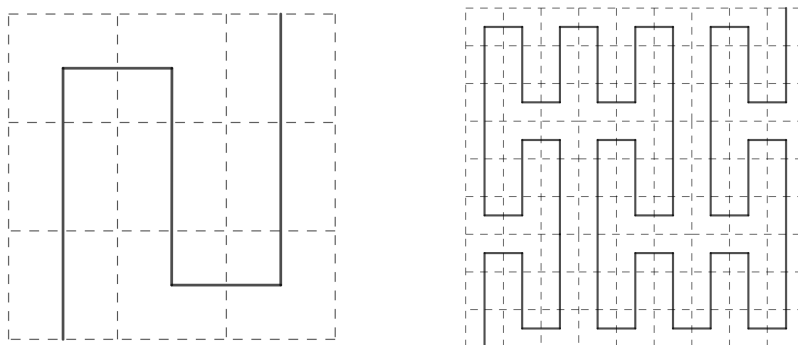
sestrojíme čtverce. Takto postupujeme dále a po nekonečně mnoha iteracích získáváme Pythagorův strom.



Obrázek 1.9: Pythagorův strom po pěti iteracích.

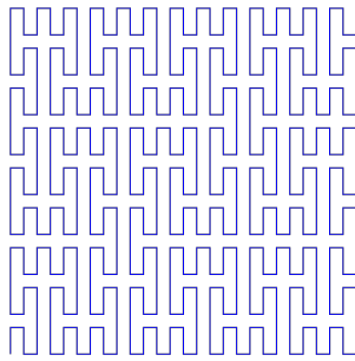
1.2.6 Peanova křivka

Zajímavým a velmi členitým fraktálním útvarem je také Peanova křivka, která je pojmenována po italském matematikovi Giuseppe Peanovi, jenž ji objevil v roce 1890. Její konstrukce je znázorněna v mřížce na následujícím obrázku.



Obrázek 1.10: Náznak konstrukce Peanovy křivky.

Původní útvar je tedy po první iteraci rozčleněn tak, že vzniká křivka složená z devíti útvarů, které se až na nepatrné odlišnosti některých z nich podobají útvaru původnímu. Všechny tyto útvary, ze kterých je křivka po první iteraci složena, mají navíc shodnou délku. Po nekonečně mnoha iteracích vzniká natolik členitá křivka, že při pohledu z dostatečné vzdálenosti se může zdát, že se jedná o rovinný útvar.



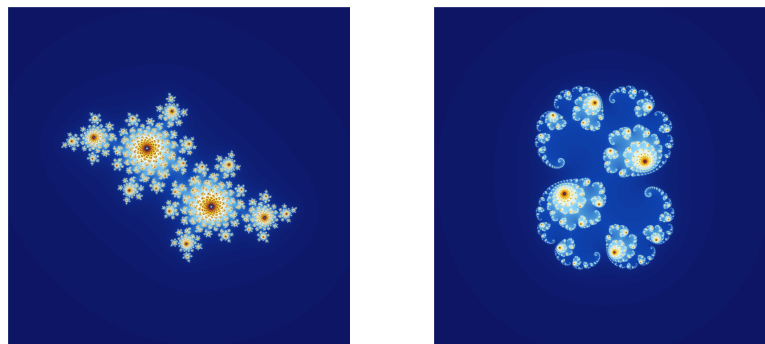
Obrázek 1.11: Peanova křivka po třech iteracích.[4]

1.2.7 Juliovy množiny

Dalšími významnými fraktály, jimiž se později inspiroval Benoit B. Mandelbrot při konstrukci Mandelbrotovy množiny, jsou tzv. Juliovy množiny pojmenované podle francouzského matematika Gastona Maurice Julii. Při jejich konstrukci se na rozdíl od předchozích fraktálů pohybujeme v komplexní rovině, přičemž tato konstrukce spočívá v iteraci polynomů, jako jsou například $z^2 + c$, $z^3 + c$, apod., kde z je komplexní proměnná a komplexní číslo c je pevně dané. Vycházíme tedy z proměnné z , kterou umocníme a k této mocnině přičteme konstantu c . Vzniká nám polynom, se kterým nyní pracujeme jako s původní proměnnou. Tento postup opakujeme s každým nově vzniklým polynomem tak, jak je to znázorněno na následujícím příkladu:

$$z \mapsto z^2 + c \mapsto (z^2 + c)^2 + c \mapsto \left((z^2 + c)^2 + c \right)^2 + c \mapsto \dots$$

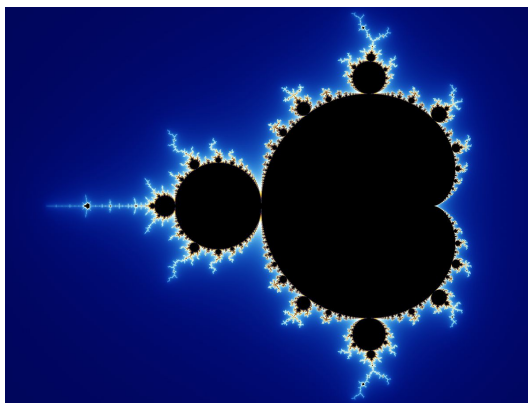
Na základě počáteční hodnoty proměnné z rozlišujeme dvě množiny, které touto iterací vznikají – ohraničená a neohraničená. Tyto množiny na sebe navazují a hranice mezi nimi tvoří Juliovu množinu.[1, str. 20]



Obrázek 1.12: Juliovy množiny (vlevo pro $c = -0,4 + 0,6i$, vpravo pro $c = 0,285 + 0,01i$).[5][6]

1.2.8 Mandelbrotova množina

„Mandelbrotova množina je matematický objekt objevený Benoit B. Mandelbrotem v roce 1980.“ [7, str. vii] Její konstrukce úzce souvisí s Juliovými množinami. V závislosti na hodnotě reálné a imaginární části komplexní konstanty c v iteraci konstruující Juliovu množinu, totiž rozlišujeme dva případy, které mohou nastat. Výsledkem je Juliova množina, která je buď spojitá, anebo se vzniklá množina „rozpadá“, tedy vzniká tzv. Fatouův prach. Mandelbrot pracoval s nápadem, jak tyto dva případy od sebe rozdělit. Každému komplexnímu číslu c tvořícímu spojitou Juliovu množinu přiřadil černou barvu v Gaussově rovině, ostatním komplexním číslům tvořícím Fatouův prach přiřadil barvu bílou. Množina, která tímto způsobem vzniká v Gaussově rovině, se nazývá Mandelbrotova množina. Její hranici tvoří taková komplexní čísla c , jež při iteraci $x \rightarrow x^2 + c$ tvoří Juliovu množinu, která neobsahuje žádný „vnitřek“.



Obrázek 1.13: Mandelbrotova množina.[8]

2 Historie neceločíselné dimenze

Se zrodem fraktální geometrie vyvstal nový problém. Jaká je vlastně délka těchto nekonečně členitých útvarů? Má vůbec měření jejich délky smysl? Existuje jiný, přesnější způsob jak délku těchto objektů charakterizovat? Touto myšlenkou se zabýval mimo jiné i Mandelbrot, který ve svých knihách popisuje, jak vznikají různé výsledky při měření stejného pobřeží. Zkoumání tohoto problému ho přivedlo k charakterizaci fraktálů pomocí fraktální dimenze, která je, narozdíl od dimenze nám běžně známých útvarů, neceločíselná.

2.1 Pojem dimenze

V matematice je dimenze široký pojem, jehož definováním se matematici zabývají řadu let. Vzhledem k velkému množství různých typů dimenzí není úplně snadné charakterizovat tento pojem obecně, jelikož ačkoli je mnohdy význam těchto různých dimenzí podobný, není tomu tak vždy. Navíc v některých případech určité typy dimenzí postrádají smysl, zatímco v jiných jsou tím nejlepším nástrojem, jak danou situaci posat.

S pojmem dimenze se nejčastěji setkáváme například v algebře a euklidovské geometrii, neméně důležitou roli potom hraje i ve fraktální geometrii. Pokud bychom se zaměřili na dimenzi útvarů euklidovské geometrie, jako je bod, úsečka, čtverec, krychle, atd., tedy na dimenzi topologickou, mohli bychom ji zjednodušeně charakterizovat jako počet parametrů potřebných k popsání pozice libovolného bodu ležícího na daném útvaru. Z toho také plyne, že tato dimenze bude vždy celočíselná. Samotný bod má dimenzi rovnou nule. K popsání libovolného bodu na úsečce je již za potřebí jeden parametr, z toho plyne, že dimenze úsečky je rovna jedné. Pomocí stejné úvahy zjistíme, že dimenze čtverce je rovna dvěma a dimenze krychle je rovna třem. S tímto pojetím si ovšem ve fraktální geometrii nevystačíme. Zde přichází na řadu dimenze neceločíselná.

2.2 Hausdorffova-Besicovitschova dimenze

Mandelbrota přivedlo k neceločíselné dimenzi zkoumání délek pobřeží. Všiml si totiž, že v různých publikacích se délky stejného pobřeží výrazně liší. Toto zjištění vedlo k závěru, že zatímco u objektů euklidovské geometrie nezáleží při měření délky na volbě měřítka, v případě délky pobřeží, a také ostatních fraktálních útvarů, tomu tak není. Kupříkladu měříme-li délku nějaké úsečky, dojdeme nezávisle na volbě měřítka vždy ke stejnému číslu. V případě pobřeží se ovšem naměřená délka zvětšuje se zmenšujícím se měřítkem, stává se tedy postupně nekonečně velkou. Z pohledu topologické dimenze se jedná o křivku s dimenzí rovnou jedné, ovšem vzhledem k tomu, že její délka se zvětšuje do nekonečna, můžeme říci, že pobřeží zabírá v rovině více místa než křivka euklidovské geometrie. Intuitivně bychom tedy řekli, že by měla mít dimenzi větší než 1. Nezabírá však celou rovinu, jejíž dimenze je rovna dvěma, mělo by tedy platit, že dimenze pobřeží bude menší než 2. Z toho přímo plyne, že je dimenze této křivky nutně neceločíselná.[1, str. 81]

S touto úvahou pracuje Hausdorffova-Besicovitschova dimenze, také nazývána jako fraktální dimenze: *„Hodnota této dimenze udává úroveň členitosti daného objektu. Udává také, s jakou rychlostí roste délka těchto útvarů do nekonečna. Jestliže se bude fraktální dimenze od topologické lišit velmi málo, bude takový objekt méně členitý. Bude-li fraktální dimenze značně větší než dimenze topologická, bude objekt naopak velmi členitý“*[1, str. 81]

3 Fraktální dimenze

Jak zde již bylo řečeno, fraktály se vyznačují tím, že jejich dimenze může být neceločíselná. Tohoto poznatku využívá Mandelbrot ve své definici fraktálu: „*Fraktál je množina, jejíž Hausdorffova-Besicovicova dimenze je ostře větší než dimenze topologická.*“ [9, str. 15]. Nestačí totiž tvrdit, že fraktál je útvar, jehož Hausdorffova-Besicovitschova dimenze je neceločíselná, jelikož existují i takové fraktály, jejichž dimenze je celočíselná. Jedním z nich je také slavná Mandelbrotova množina. Její hranice má topologickou dimenzi rovnu jedné, kdežto fraktální dimenze této křivky je rovna dvěma. Platí tedy, že je ostře větší, než dimenze topologická, není však neceločíselná, ačkoli se jedná o dimenzi fraktálu.

Existuje více způsobů, jak přistupovat k fraktální dimenzi. Rozlišujeme tedy více typů fraktální dimenze, přičemž každý z nich nachází své uplatnění v různých situacích. Některé v jistých případech postrádají smysl, avšak jinde mohou být tím nejlepším nástrojem, jak objekt charakterizovat. Mezi tyto typy se mimo jiné řadí následující dimenze, kterými se zde budeme zabývat: soběpodobnostní dimenze, Minkowského dimenze (nebo-li v angličtině box-counting dimension) a Hausdorffova dimenze.

3.1 Soběpodobnostní dimenze

Tento typ fraktální dimenze nachází největší uplatnění u již zmíněných soběpodobných fraktálů, tedy u fraktálů, které vznikají pomocí nějakého algoritmu, a tudíž při každém přiblížení vydáme strukturu naprosto shodnou s tou předchozí. Abychom pochopili princip soběpodobnostní dimenze, zaměříme se nejprve na jednoduché euklidovské útvary, jako je úsečka, čtverec a krychle, teprve poté se budeme zabývat soběpodobnostní dimenzí nejznámějších fraktálních útvarů.

Mějme nejprve úsečku jednotkové délky, o které víme, že její topologická dimenze je rovna jedné. Rozdělme nyní tuto úsečku na N shodných dílů o délce ϵ . Pro délku celé úsečky potom platí vztah $N\epsilon = 1$.

Zaměřme se nyní na čtverec se stranou délky jedna jednotka, jehož topologická dimenze je rovna dvěma a postupujme obdobným způsobem. Každou stranu čtverce rozdělme opět na N shodných dílů o délce ϵ . Následně rozdělme tento čtverec na $N \times N = N'$ shodných čtverců. Obsah čtverce složeného z těchto menších čtverců je potom vyjádřen rovností $N'\epsilon^2 = 1$.

Stejným postupem zjistíme, že pro objem krychle s jednotkovou délkou strany, jejíž stranu bychom opět rozdělili na N shodných dílů o délce ϵ a celou krychli bychom tedy rozdělili na $N \times N \times N = N''$ shodných krychlí, platí rovnost $N''\epsilon^3 = 1$.

Z uvedených rovností můžeme nyní učinit pozorování – délka příslušného dílku je vždy umocněna na číslo, které odpovídá hodnotě topologické dimenze daného objektu. Platí tedy rovnost $N\epsilon^D = 1$, kde N je počet shodných dílů a ϵ je délka jednoho dílu. Z této rovnosti vyjádříme dimenzi D :

$$\begin{aligned} N\epsilon^D &= 1 \\ \ln N\epsilon^D &= \ln 1 \\ \ln N + \ln \epsilon^D &= 0 \\ \ln N + D \ln \epsilon &= 0 \\ D \ln \epsilon &= -\ln N \\ D &= -\frac{\ln N}{\ln \epsilon} \\ D &= \frac{\ln N}{-\ln \epsilon} \\ D &= \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{\epsilon}} \end{aligned}$$

Získali jsme vztah pro výpočet soběpodobnostní dimenze, pomocí něhož nyní můžeme určit fraktální dimenzi soběpodobných fraktálních útvarů. Podstatou tohoto vztahu je, že zjišťujeme, jak se mění členitost daného útvaru se zmenšujícím se měřítkem – tedy se zmenšujícím se ϵ . Vzhledem k tomu, že tímto způsobem určujeme fraktální

dimenzi soběpodobných fraktálů, které se vyznačují určitou pravidelností, nezáleží na tom, s kolikátou iterací pracujeme a stačí nám tedy jedno konkrétní měřítko. Pokud bychom ale chtěli tento vztah aplikovat na fraktály soběpříbuzné, tento postup by nám nestačil. Museli bychom sledovat, jak se počet dílů mění pro ϵ limitně blížící se k nule. Na základě této úvahy můžeme předchozí vztah následně zobecnit:

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{\epsilon}}.$$

Pro výpočet fraktální dimenze soběpříbuzných fraktálů ovšem existují efektivnější metody, proto budeme pomocí těchto vztahů určovat pouze fraktální dimenzi soběpodobných fraktálů.

Zaměříme se na fraktální dimenzi Cantorova diskontinua, Kochovy křivky, Sierpińského trojúhelníku a koberce a jejich analogií, Pythagorova stromu a Peanovy křivky. Jelikož tvrdíme, že se jedná o fraktály, musí podle Mandelbrotovy definice fraktálu vyjít jejich fraktální dimenze ostře větší než jejich topologická dimenze.

3.1.1 Cantorovo diskontinuum

Potřebujeme určit, čemu je rovno N a ϵ . Pro ukázkou použijeme vztah s limitou, který ovšem u soběpodobných fraktálů není nutný, u dalších fraktálů budeme potom používat vztah bez limity.

Po první iteraci z celé úsečky zbydou dvě shodné úsečky, každá o délce jedné třetiny z původní úsečky. Po druhé iteraci se ze dvou úseček stávají čtyři, přičemž délka každé z nich je rovna jedné devítině původní úsečky před první iterací, až po n -té iteraci dostáváme 2^n úseček o délce $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Platí tedy, že $N = 2^n$ a $\epsilon = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, kde n je počet iterací. Nyní dosadíme do vztahu pro výpočet soběpodobnostní dimenze:

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{\epsilon}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln 2}{n \ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \doteq 0,631.$$

Zde je vidět, že by nám stačilo dosadit do vztahu $D = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{\epsilon}}$ hodnoty N a ϵ po první iteraci. Nemuseli bychom pracovat s limitou a dospěli bychom ke stejnému číslu. Toto je možné právě proto, že každá nová úsečka se stává novým základním objektem, se kterým se pracuje stejně jako s tou předchozí a tedy na každou z těchto úseček je použito stejné měřítko jako na úsečku, ze které vznikly. Tuto úvahu použijeme i u dalších

soběpodobných fraktálů, takže nás bude zajímat pouze stav po první iteraci a dimenzi pak budeme moci počítat bez použití limity.

Protože Cantorovo diskontinuum je po nekonečně mnoha iteracích množina bodů, je jeho topologická dimenze rovna nule. Fraktální dimenze tohoto objektu je ostře větší než jeho topologická dimenze, podle definice se tedy jedná o fraktál. Zároveň je hodnota D menší než jedna, z čehož je zřejmé, že Cantorovo diskontinuum neobsahuje žádnou úsečku.

3.1.2 Kochova křivka

Na rozdíl od Cantorova diskontinua u Kochovy křivky části úseček neubíráme, ale naopak přidáváme. Získáme tak čtyři shodné úsečky, přičemž každá z nich má oproti původní úsečce třetinovou délku. N je tedy v tomto případě rovno čtyřem a hodnota ϵ je rovna jedné třetině:

$$D = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{\epsilon}} = \frac{\ln 4}{\ln \frac{1}{\frac{1}{3}}} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \doteq 1,262.$$

Jelikož se jedná o křivku, je topologická dimenze Kochovy křivky rovna jedné. Fraktální dimenze je ostře větší než dimenze topologická, z definice potom plyne, že Kochova křivka je fraktál. Z toho, že je dimenze D větší než jedna a zároveň menší než dva navíc plyne, že je tato křivka členitější než například úsečka. Zabírá tedy více plochy než úsečka, nezabírá ji však celou.

3.1.3 Sierpiňského trojúhelník

Sierpiňského trojúhelník vzniká odebráním trojúhelníků z původního, přičemž tyto trojúhelníky mají vždy poloviční délku strany než je délka strany původního trojúhelníku. Hodnota ϵ je tedy rovna jedné polovině. Po první iteraci získáme z jednoho trojúhelníky tři, proto je hodnota N rovna třem:

$$D = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{\epsilon}} = \frac{\ln 3}{\ln \frac{1}{\frac{1}{2}}} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \doteq 1,585.$$

Útvar, který vzniká po nekonečně mnoha iteracích, je natolik „děravý“, že neobsahuje žádnou souvislou plochu. Obsahuje ale úsečky, jeho topologická dimenze je proto rovna jedné. [1, str. 86]. Opět z definice plyne, že se jedná o fraktál. Jeho fraktální dimenze

je o něco větší než fraktální dimenze Kochovy křivky, z čehož můžeme vyvodit, že Sierpińského trojúhelník zabírá více plochy. Stále je ale dimenze D menší než dva, z čehož je zřejmé, že skutečně nezabírá celou plochu.

3.1.4 Sierpińského koberec

Sierpińského koberec vzniká stejně jako Sierpińského trojúhelník odebráním útvarů z původního objektu. V tomto případě je původním objektem čtverec, ze kterého jsou odebrány vždy čtverce s třetinovou délkou strany. Hodnota ϵ je tedy jedna třetina. Můžeme si představit, že původní čtverec máme rozdělen na devět shodných čtverců, přičemž jestliže odebereme jeden prostřední čtverec, zbyde nám osm shodných čtverců a hodnota N bude rovna osmi. Dosazením opět zjistíme hodnotu dimenze D :

$$D = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{\epsilon}} = \frac{\ln 8}{\ln \frac{1}{3}} = \frac{\ln 8}{\ln 3} \doteq 1,893.$$

Stejně jako je tomu u Sierpińského trojúhelníku, je topologická dimenze Sierpińského koberce rovna jedné a podle definice se opět jedná o fraktál, jelikož dimenze D je ostře větší než dimenze topologická. Z faktu, že fraktální dimenze tohoto fraktálu je menší než dva plyne, že tento útvar také nezabírá souvislou část plochy, ovšem vzhledem k hodnotě dimenze D je zřejmé, že už zabírá její poměrně velkou část.

3.1.5 Pythagorův strom

Dejme tomu, že čtverec, nad kterým konstruujeme Pythagorův strom, má jednotkovou délku. Označíme-li a délku odvěsen rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku sestaveného nad stranou čtverce, můžeme z Pythagorovy věty odvodit, že velikost této odvěsny a zároveň velikost strany nově vzniklých čtverců je $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$. V tomto měřítku jsou vždy konstruovány nové čtverce nezávisle na délce jejich strany, ϵ je tedy rovno číslu a . Na začátku máme jeden čtverec a po první iteraci získáváme čtverce dva, N je tedy rovno dvěma. Tyto hodnoty dosadíme do vzorce pro výpočet dimenze D :

$$D = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{\epsilon}} = \frac{\ln 2}{\ln \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \frac{\ln 2}{\ln \frac{2}{\sqrt{2}}} = \frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln \sqrt{2}} = \frac{\ln 2}{\ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2} = \frac{\ln 2}{\frac{1}{2} \ln 2} = 2.$$

Soběpodobnostní dimenze tohoto útvaru vyšla na rozdíl od předchozích celočíselná, to ovšem neznamená, že se nejedná o fraktál. Protože Pythagorův strom neobsahuje žádnou souvislou plochu a postupně v nekonečně mnoha iteracích přechází v křivku, je jeho topologická dimenze rovna jedné. Platí tedy, že topologická dimenze Pythagorova

stromu je ostře menší než jeho fraktální dimenze, z čehož plyne, že se jedná o fraktál. Z hodnoty jeho fraktální dimenze můžeme upozorovat, že ačkoli se jedná o útvar, jehož topologická dimenze je jedna, svou členitostí se vyrovná euklidovskému objektu s dimenzí dva.

3.1.6 Peanova křivka

Z konstrukce Peanovy křivky víme, že po první iteraci vzniká z původního útvaru devět útvarů stejné délky, N je tedy rovno devíti. Délka těchto útvarů je v případě Peanovy křivky rovna jedné třetině délky útvaru před první iterací, hodnota ϵ je tedy jedna třetina. Hodnota fraktální dimenze Peanovy křivky je tedy rovna:

$$D = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{\epsilon}} = \frac{\ln 9}{\ln \frac{1}{3}} = \frac{\ln 9}{\ln 3} = 2.$$

Stejně jako v případě Pythagorova stromu vyšla fraktální dimenze Peanovy křivky rovna dvěma. Z hlediska topologické dimenze se opět jedná o křivku s dimenzí rovnou jedné, podle definice se tedy jedná o fraktál. Vzhledem k hodnotě fraktální dimenze Peanovy křivky a také Pythagorova stromu se mluví o křivkách vyplňujících dvourozměrný prostor.

3.1.7 Sierpiňského pyramida

Sierpiňského pyramida je analogií Sierpiňského trojúhelníku, ovšem základním útvarem není v tomto případě trojúhelník, ale čtyřstěn.

Při konstrukci zbydou po první iteraci z celého čtyřstěnu čtyři menší shodné čtyřstěny, přičemž délka každé hrany je nyní poloviční oproti té odpovídající původní. N je tedy rovno čtyřem a ϵ je rovno jedné polovině stejně jako u Sierpiňského trojúhelníku. Opět dosadíme:

$$D = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{\epsilon}} = \frac{\ln 4}{\ln \frac{1}{2}} = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2.$$

Fraktální dimenze vyšla přesně dva. Vzhledem k tomu, že ze čtyřstěnu odebíráme jeho části tak, že v něm nezůstává žádná souvislá plocha, je jeho topologická dimenze stejně jako v případě Sierpiňského trojúhelníku stále rovna jedné. Fraktální dimenze Sierpiňského pyramidy je tedy ostře větší než její topologická dimenze a jedná se proto o fraktál.

3.1.8 Fraktální pyramida

Zobecněním Sierpiňského pyramidy je fraktální pyramida, jejíž konstrukce je založena na stejném principu, jen místo čtyř vzniká pět nových útvarů a N je tedy rovno pěti, ϵ je opět rovno jedné polovině:

$$D = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{\epsilon}} = \frac{\ln 5}{\ln \frac{1}{\frac{1}{2}}} = \frac{\ln 5}{\ln 2} \doteq 2,3219.$$

Tentokrát nám vyšla fraktální dimenze větší než dva, tato pyramida tedy zabírá i část prostoru. Z hlediska topologické dimenze už se jedná o útvar s dimenzí rovnou dvěma, jelikož obsahuje souvislou plochu. Při konstrukci totiž odebíráme útvary tak, že podstava původního jehlanu se stále zachovává. I zde platí, že fraktální dimenze je ostře větší než ta topologická, získali jsme tedy opět fraktál.

3.1.9 Sierpiňského krychle

Stejně jako Sierpiňského pyramidu byla analogií k trojúhelníku, je Sierpiňského krychle analogií k Sierpiňského koberci. Při konstrukci se z původní krychle stává velmi „děravá krychle“, přičemž po první iteraci získáváme útvar složený z dvaceti menších krychlí, jejichž délka hrany je rovna jedné třetině délky původní hrany. N je proto rovno dvaceti a ϵ je rovno jedné třetině:

$$D = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{\epsilon}} = \frac{\ln 20}{\ln \frac{1}{\frac{1}{3}}} = \frac{\ln 20}{\ln 3} \doteq 2,7268.$$

Jedná se o útvar, jehož topologická dimenze je stejně jako v případě Sierpiňského pyramidu rovna jedné a podle definice je Sierpiňského krychle fraktál. Když ale porovnáme tuto dimenzi s dimenzí fraktální pyramidy, zjistíme, že Sierpiňského krychle zabírá více prostoru.

3.2 Obvodová dimenze (divider dimension)

Dosud jsme zkoumali pouze fraktální dimenzi útvarů soběpodobných. Zde jsme si vystačili se soběpodobnostní dimenzí, pomocí které jsme byli schopni přesně určit jejich fraktální dimenzi, nicméně příroda nám nabízí velké množství soběpříbuzných fraktálních útvarů, u kterých se musíme spokojit vzhledem k jejich velké složitosti a rozmanitosti pouze s odhadem fraktální dimenze. K tomuto účelu nám slouží jednak obvodová dimenze (přesnější je anglický název divider dimension, popřípadě compass dimension,

jelikož ne vždy se jedná o obvod útvaru) a také Minkowského dimenze. Nejprve se zaměříme na obvodovou dimenzi, na které si ukážeme, jakým způsobem funguje vztah pro výpočet fraktální dimenze soběpříbuzných fraktálů, poté si představíme Minkowského dimenzi, která oproti obvodové dimenzi nachází větší uplatnění v praxi pro její snazší využití v informačních technologiích.

Obvodová dimenze spočívá ve změně měřítka při zjišťování délky určité křivky. Zvolíme jisté měřítko a určíme délku této křivky. Poté zvolíme menší měřítko a opět určíme její délku. Tento postup aplikujeme u Kochovy křivky, jejíž fraktální dimenzi již známe a poté odvodíme obecný vztah pro její výpočet. Nejprve změříme Kochovu křivku konstruovanou z jednotkové úsečky pomocí pravítka o délce jedné jednotky. Poté toto měření provedeme s pravítkem o třetinové délce předchozího. V tomto měřítku $\epsilon_1 = \frac{1}{3}$ získáváme čtyři shodné úsečky, délka Kochovy křivky je tedy v tomto případě větší, konkrétně je rovna číslu $l_1 = \frac{4}{3}$. Pokud bychom pokračovali ve zmenšování měřítka na $\epsilon_2 = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$, získali bychom šestnáct shodných úseček a délka Kochovy křivky by potom byla $l_2 = \frac{16}{9} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$. Vzhledem k tomu, že se jedná o soběpodobný fraktál, bude obecně platit $\epsilon = \left(\frac{1}{3}\right)^k$ a $l = \left(\frac{4}{3}\right)^k$, kde $k \in \mathbb{N}$. Označme N počet shodných úseček v měřítku ϵ . Vynásobíme-li N měřítkem ϵ , získáme délku l Kochovy křivky v tomto daném měřítku:

$$l = N \cdot \epsilon.$$

Zároveň ze soběpodobnostní dimenze získáváme vztah $N \cdot \epsilon^D = 1$, kde D je hodnota této dimenze, platí tedy, že $N = \frac{1}{\epsilon^D}$. Dosadíme do předchozího vztahu a upravíme:

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{\epsilon^D} \cdot \epsilon \\ l &= \frac{1}{\epsilon^{D-1}} \\ \ln l &= \ln \frac{1}{\epsilon^{D-1}} \\ \ln l &= \ln 1 - \ln \epsilon^{D-1} \\ \ln l &= -\ln \epsilon^{D-1} \\ \ln l &= \ln \epsilon^{1-D} \\ \ln l &= (1 - D) \cdot \ln \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 - D &= \frac{\ln l}{\ln \epsilon} \\
-D &= \frac{\ln l}{\ln \epsilon - 1} \\
D &= 1 - \frac{\ln l}{\ln \epsilon} \\
D &= 1 + \frac{\ln l}{\ln \frac{1}{\epsilon}}
\end{aligned}$$

Označme $d = \frac{\ln l}{\ln \frac{1}{\epsilon}}$. Soběpodobnostní dimenze D je potom rovna:

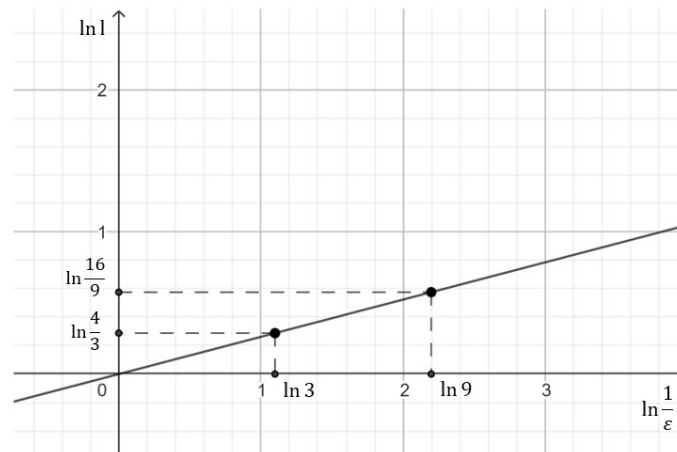
$$D = 1 + d.$$

Podle tohoto vztahu je obvodová dimenze Kochovy křivky rovna číslu

$$D = 1 + \frac{\ln \left(\frac{4}{3}\right)^k}{\ln \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^k}} = 1 + \frac{\ln \frac{4}{3}}{\ln 3} \doteq 1 + 0,26 = 1,26,$$

což odpovídá hodnotě její soběpodobnostní dimenze.

Zaměříme se nyní na hodnoty $\ln l$ a $\ln \frac{1}{\epsilon}$ z výrazu d u Kochovy křivky v měřítku $\epsilon_1 = \frac{1}{3}$ a $\epsilon_2 = \frac{1}{9}$ a znázorníme je v následujícím diagramu:



Obrázek 3.1: Diagram pro hodnoty $\ln l$ a $\ln \frac{1}{\epsilon}$.

Spojíme-li tyto dva body, dostáváme přímkou, jejíž odchylka je rovna číslu $\frac{\ln \frac{16}{9} - \ln \frac{4}{3}}{\ln \frac{1}{9} - \ln \frac{1}{3}} = \frac{\ln \frac{4}{3}}{\ln 3} \doteq 0,26$, což odpovídá hodnotě d z předchozího výpočtu. Zobecněním tohoto

vztahu získáváme vzorec pro výpočet obvodové dimenze libovolné soběpříbuzné fraktální křivky:

$$D = 1 + \frac{\ln l_2 - \ln l_1}{\ln \frac{1}{\epsilon_2} - \ln \frac{1}{\epsilon_1}},$$

kde l_1 a l_2 jsou délky dané křivky naměřené postupně v měřících ϵ_1 a ϵ_2 . Abychom nemuseli zjišťovat délku, kterou v daném měřítku naměříme, stačí si uvědomit, že platí $l = N \cdot \epsilon$, kde N udává, kolikrát musíme přiložit pravítko o délce ϵ , abychom změřili celou křivku a tedy dostali délku l . Dosadíme do vzorce a upravíme pomocí pravidel pro počítání s logaritmy:

$$\begin{aligned} D &= 1 + \frac{\ln N_2 \cdot \epsilon_2 - \ln N_1 \cdot \epsilon_1}{\ln \frac{1}{\epsilon_2} - \ln \frac{1}{\epsilon_1}} \\ D &= 1 + \frac{\ln N_2 + \ln \epsilon_2 - \ln N_1 - \ln \epsilon_1}{\ln \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \\ D &= \frac{\ln \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} + \ln \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} + \ln N_2 - \ln N_1}{\ln \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \\ D &= \frac{\ln 1 + \ln N_2 - \ln N_1}{\ln \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \\ D &= \frac{\ln N_2 - \ln N_1}{\ln \frac{1}{\epsilon_2} - \ln \frac{1}{\epsilon_1}} \end{aligned}$$

Stačí tedy určit počet úseček, pomocí kterých měříme délku soběpříbuzného fraktálu, čehož využijeme v následujících příkladech, kdy budeme chtít určit fraktální dimenzi pobřeží a hranic států. Nebudeme totiž muset zjišťovat měřítko, ve kterém je daná mapa zobrazena.

3.2.1 Soběpříbuzné fraktály

Mandelbrot svůj výzkum fraktální dimenze útvarů jako jsou pobřeží, hranice států, toky řek, apod., zakládá na empirickém zjištění Lewise F. Richardsona, že výsledná naměřená délka daného pobřeží nebo hranice státu úzce souvisí s jistou konstantou D . Všiml si, že pokud je D jen nepatrně větší než jedna, jedná se o málo členitý útvar, kdežto pokud je hodnota D výrazně větší než jedna, pobřeží či hranice je členitější. Jako příklad pak uvádí hodnoty D některých pobřeží a hranic států, které jsou shrnuty v následující tabulce.[10, str. 636-637] Tyto Richardsonovy poznatky Mandelbrot rozpracoval a odvodil nám již známý vztah pro výpočet fraktální dimenze libovolné křivky, ať už soběpodobné nebo soběpříbuzné.

Pobřeží/hranice	D
Pobřeží Velké Británie	1,25
Hranice mezi Portugalskem a Španělskem	1,14
Hranice Německa (1899)	1,15
Pobřeží Austrálie	1,13
Pobřeží Jihoafrické Republiky	1,02

Tabulka 3.1: Richardsonova empirická zjištění.

Je potřeba dodat, že v pravém sloupečku tabulky se v případě Richardsonových zjištění ještě nemluví o fraktální dimenzi, jelikož jeho práce, kterou se Mandelbrot inspiroval, předchází samotnému vzniku slova *fraktál*. Richardson pouze pozoroval, jakým způsobem se mění hodnota D v závislosti na členitosti pozorovaných útvarů, aniž by věděl, že vlastně určil jejich fraktální dimenzi.

Pokusíme se nyní určit obvodovou dimenzi některých pobřeží a hranic států, pro porovnání můžeme použít výsledky L. F. Richardsons. U každého z následujících příkladů budeme měřit délku útvarů pomocí dvou měřítek, přičemž to druhé bude mít vždy poloviční délku toho původního, tedy $\epsilon_2 = \frac{1}{2}\epsilon_1$. Vztah pro výpočet obvodové dimenze v tomto konkrétním případě můžeme pak následně upravit:

$$D = \frac{\ln N_2 - \ln N_1}{\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{\epsilon_1}} = \frac{\ln N_2 - \ln N_1}{\ln \frac{2}{\epsilon_1} - \ln \frac{1}{\epsilon_1}} = \frac{\ln N_2 - \ln N_1}{\ln \frac{2}{\frac{1}{\epsilon_1}}} = \frac{\ln N_2 - \ln N_1}{\ln 2}.$$

Velká Británie

Na prvním obrázku jsme ke změření délky pobřeží potřebovali téměř 35 úseček, přesně $N_1 = 34,9$. Z druhého obrázku s polovičním měřítkem dostáváme $N_2 = 83,8$. Nyní můžeme určit hodnotu D :

$$D = \frac{\ln 83,8 - \ln 34,9}{\ln 2} \doteq 1,2637.$$

Z Richardsonových zjištění víme, že fraktální dimenze pobřeží Velké Británie je přibližně 1,25, náš odhad pomocí obvodové dimenze se tedy výrazně neliší a v tomto případě se jedná o poměrně členité pobřeží.



Obrázek 3.2: Pobřeží Velké Británie.[11]

Norsko

Pobřeží Norska je známé svými fjordy, jedná se tedy o velice členité pobřeží. Při porovnání s Velkou Británií je zřejmé, že pobřeží Norska je mnohem členitější, jeho fraktální dimenze by proto měla být vyšší než fraktální dimenze pobřeží Velké Británie.



Obrázek 3.3: Pobřeží Norska.[12]

Nejprve jsme v prvním měřítku při měření délky pobřeží Norska potřebovali 20,5 úseček ($N_1 = 20,5$), poté jsme za použití polovičního měřítka sestrojili 57 úseček ($N_2 = 57$).

Po dosazení dostáváme:

$$D = \frac{\ln 57 - \ln 20,5}{\ln 2} \doteq 1,4753.$$

Skutečně vyšla dimenze výrazně vyšší než v případě pobřeží Velké Británie, což potvrzuje naše pozorování, že pobřeží Norska je mnohem členitější. Z obrázků Velké Británie a Norska navíc můžeme vypočítat, že zatímco u Velké Británie je na druhém obrázku výrazně lépe vystižena členitost jejího pobřeží než na prvním, v případě Norska bychom pro vytvoření přesnějšího obrysu potřebovali měřítko ještě zmenšit.

Austrálie

Pobřeží Austrálie se na první pohled zdá být méně členité než pobřeží Velké Británie. Odpovídá tomu i hodnota D z Richardsonových měření. Ta je přibližně rovna číslu 1,13. Obvodová dimenze by měla vyjít podobně.



Obrázek 3.4: Pobřeží Austrálie.[13]

Z prvního obrázku platí $N_1 = 27,8$ a z druhého, kde jsme opět použili poloviční měřítko, je $N_2 = 61$. Obvodová dimenze je tedy rovna:

$$D = \frac{\ln 61 - \ln 27,8}{\ln 2} \doteq 1,1337$$

Výsledek odpovídá Richardsonově hodnotě D , zároveň jsme pomocí obvodové dimenze ověřili, že pobřeží Austrálie je méně členité než pobřeží Velké Británie.

Jihoafrická Republika

Narozdíl od pobřeží Velké Británie, Norska či dokonce Austrálie je pobřeží Jihoafrické Republiky velmi málo členité. To potvrzuje i Richardsonem určená hodnota D , která je

v tomto případě přibližně rovna číslu 1,02. Opět spočítáme obvodovou dimenzi tohoto pobřeží.



Obrázek 3.5: Pobřeží Jihoafrické Republiky.[14]

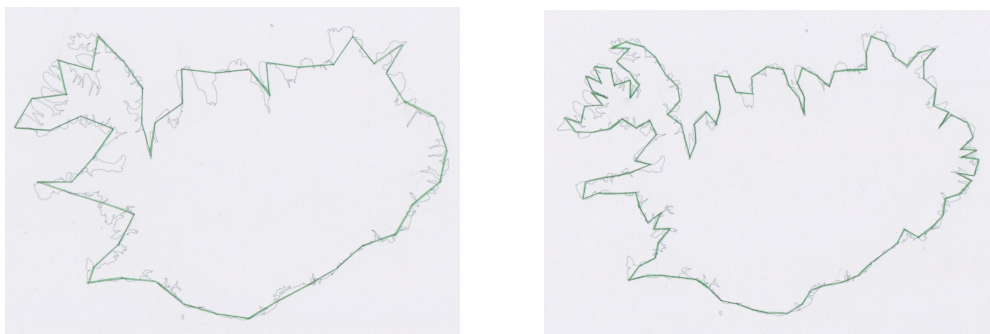
Na prvním obrázku jsme ke změření pobřeží sestrojili 18,7 úseček, poté jsme na druhém obrázku sestrojili 38 úseček poloviční délky. Nyní můžeme dosadit do vztahu pro výpočet obvodové dimenze:

$$D = \frac{\ln 38 - \ln 18,7}{\ln 2} \doteq 1,023.$$

Skutečně vyšla hodnota odpovídající výsledku, ke kterému došel Richardson. Matematicky jsme tedy ověřili, že pobřeží Jihoafrické Republiky není téměř vůbec členité. Hodnota jeho fraktální dimenze je totiž jen nepatrně vyšší, než hodnota jeho topologické dimenze – ta je rovna jedné. To znamená, že se jedná o křivku, která na ploše nezabírá skoro žádné místo. Odpovídá tomu i naše měření pomocí dvou různých měřítek, kde v obou případech úsečky z velké části splývají s měřeným pobřežím.

Island

Vrátíme se ještě k těm členitějším pobřežím. Koneckonců pobřeží, které je méně členité a tedy má menší dimenzi než pobřeží Jihoafrické Republiky bychom nejspíše ani nenalezli. Pobřeží Islandu je ovšem výrazně členitější i oproti jiným pobřežím. Podíváme-li se na mapu, mohli bychom usoudit, že fraktální dimenze tohoto útvaru se bude pohybovat někde mezi hodnotami 1,26 a 1,48, jelikož na první pohled se zdá, že pobřeží Islandu je členitější než pobřeží Velké Británie, ale zároveň určitě není členitější než pobřeží Norska. Toto pozorování můžeme ověřit pomocí obvodové dimenze.



Obrázek 3.6: Pobřeží Islandu.[15]

Na prvním obrázku jsme použili 49,5 úseček, na druhém jsme potom sestrojili 127 úseček poloviční délky. Po dosazení do vztahu pro výpočet obvodové dimenze tak dostáváme:

$$D = \frac{\ln 127 - \ln 49,5}{\ln 2} \doteq 1,3593.$$

Tento výsledek potvrzuje naše pozorování, bohužel ale zatím nemáme k dispozici jiný výsledek k porovnání.

Portugalsko

V předchozích případech jsme se věnovali výpočtu fraktální dimenze pobřeží vybraných států, nyní se zaměříme na fraktální dimenzi hranice mezi Portugalskem a Španělskem. Ta je podle Richardsona přibližně rovna číslu 1,14. Ačkoli by se mohlo zdát, že se v případě hranic mezi jednotlivými státy tak úplně nejedná o přírodní fraktální útvar, je třeba si uvědomit, že většina těchto hranic je tvořena právě přírodními útvary, jako jsou hřebeny hor, vodní toky apod. Můžeme ovšem také narazit na hranice, které jsou vytvořeny uměle, jako je tomu například v případě hranic některých států USA. Ty jsou ovšem z hlediska fraktální geometrie poměrně nezajímavé. Většinou se totiž jedná o útvary, jejichž fraktální dimenze je rovna jejich topologické dimenzi a nejedná se tedy o fraktály.

Nejprve jsme podél hranice mezi Portugalskem a Španělskem narýsovali 14,4 úseček, poté jsme za použití polovičního měřítka narýsovali 32,2 úseček. Obvodová dimenze této hranice je tedy:

$$D = \frac{\ln 32,2 - \ln 14,4}{\ln 2} \doteq 1,16.$$

Tato hodnota nám vyšla nepatrně vyšší, než je tomu u Richardsonova měření. Ačkoli



Obrázek 3.7: Hranice mezi Portugalskem a Španělskem.[16]

se jedná o rozdíl o pouhé dvě setiny, je vidět, že v případě fraktální dimenze může takováto nepřesnost hrát velkou roli. Podíváme-li se totiž například na dimenzi hranice Německa z roku 1899, podle Richardsonových výsledků by měla být tato hranice o něco členitější než hranice mezi Portugalskem a Španělskem. Z našeho výsledku obvodové dimenze ovšem plyne, že je to právě naopak.

Shrnutí

Pomocí obvodové dimenze jsme určili odhad fraktální dimenze pobřeží a hranic vybraných států. U některých z nich jsme navíc měli k dispozici výsledky empirického výzkumu L. F. Richardsona, zjištěné hodnoty jsme tedy měli možnost porovnat. Výsledky shrneme v následující tabulce (hodnoty dimenzí jsou uvedeny s přesností na dvě desetinná místa):

Pobřeží/hranice	Obvodová dimenze	Výzkum L. F. Richardsona
Pobřeží Velké Británie	1,26	1,25
Pobřeží Norska	1,48	–
Pobřeží Austrálie	1,13	1,13
Pobřeží Jihoafrické Republiky	1,02	1,02
Pobřeží Islandu	1,36	–
Hranice mezi Portugalskem a Španělskem	1,16	1,14

Tabulka 3.2: Obvodová dimenze pobřeží a hranic států.

Z tabulky je přehledně vidět, jak se naše výsledky liší v porovnání s výsledky L. F. Richardsona. Největší rozdíl je patrný v případě hranice mezi Portugalskem a Španělskem, mírně se náš výsledek také liší v případě pobřeží Velké Británie. Pro pobřeží Norska a Islandu bohužel nemáme k dispozici porovnání.

3.3 Minkowského dimenze (box-counting dimension)

Minkowského dimenze (v angličtině box-counting dimension) je dalším nástrojem, pomocí kterého můžeme určit přibližnou hodnotu fraktální dimenze soběpříbuzných útvarů. Její výhodou je, že ji můžeme použít na jakýkoli fraktální útvar, ať už soběpodobný či soběpříbuzný. Použití u soběpodobných fraktálů ovšem může vést k nepřesnému výsledku, zatímco pomocí soběpodobnostní dimenze jsme schopni toto číslo určit přesně. Proto se box-counting dimension používá především tam, kde přesnou dimenzi určit nemůžeme.

Určení dimenze útvaru pomocí Minkowského dimenze spočívá v umístění daného útvaru do mřížky a ve zjišťování, kolik čtverců mřížky je tímto útvarem pokryto. Následně je mřížka zjemněna a postup se opakuje. Uvažujme tedy obdélník obsahující daný útvar, který je mřížkou rozdělen na několik shodných čtverců s délkou strany s_1 . Počet čtverců, které obsahují libovolnou část útvaru označme n_1 . Nyní rozdělme stejný obdélník novou mřížkou na shodné čtverce s délkou strany s_2 a počet čtverců obsahujících nějakou část daného útvaru označme n_2 . Hodnota Minkowského dimenze D je potom rovna:

$$D = \frac{\ln \frac{n_2}{n_1}}{\ln \frac{s_2}{s_1}} = \frac{\ln n_2 - \ln n_1}{\ln s_2 - \ln s_1}.$$

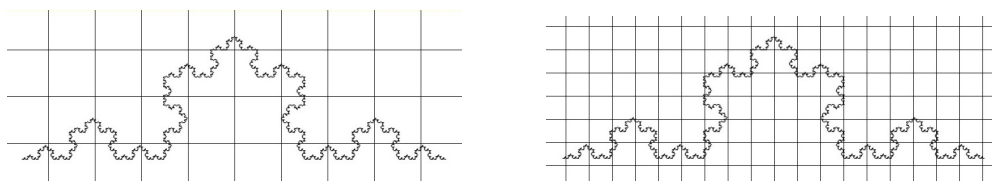
Obvykle je při určování Minkowského dimenze délka čtverce původní mřížky zmenšena dvakrát, tedy je-li rovna délce s , délka čtverce po dvojnásobném zmenšení bude rovna $\frac{1}{2}s$. V tomto konkrétním případě tedy dostáváme stejně jako u obvodové dimenze ve jmenovateli vztahu pro výpočet Minkowského dimenze výraz $\ln \frac{s}{\frac{1}{2}s} = \ln \left(s \cdot \frac{2}{s} \right) = \ln 2$. V následujících příkladech budeme používat právě toto dvojnásobné zmenšení, proto můžeme vzorec pro výpočet zjednodušit:

$$D = \frac{\ln \frac{n_2}{n_1}}{\ln 2} = \frac{\ln n_2 - \ln n_1}{\ln 2}.$$

Stejně jako u soběpodobnosti a obvodové dimenze začneme i zde jednodušším příkladem, na kterém si Minkowského dimenzi představíme. Již jsme spočítali soběpodobnostní dimenzi u vybraných nejznámějších fraktálů. Minkowského dimenze bude u těchto útvarů velmi podobná nebo dokonce shodná. Proto si nejprve ukážeme na některých fraktálech, jejichž fraktální dimenzi již známe, jakým způsobem tato dimenze funguje a teprve poté se zaměříme na odhad fraktální dimenze různých soběpříbuzných útvarů, jako jsou například pobřeží, hranice států apod.

3.3.1 Kochova křivka

Pomocí soběpodobnostní dimenze jsme přesně určili fraktální dimenzi Kochovy křivky. Ta je rovna číslu $\frac{\ln 4}{\ln 3}$, což je přibližně 1,262. Nyní se tuto dimenzi pokusíme určit pomocí Minkowského dimenze:



Obrázek 3.8: Umístění Kochovy křivky do dvou mřížek.

Na prvním obrázku je Kochova křivka vložena do mřížky, ve které dohromady pokrývá 20 čtverečků. Poté je mřížka zmenšena tak, že délka každého čtverečku je rovna polovině délky čtverečku z předchozí mřížky a v tomto případě je pokryto 48 čtverečků z celé

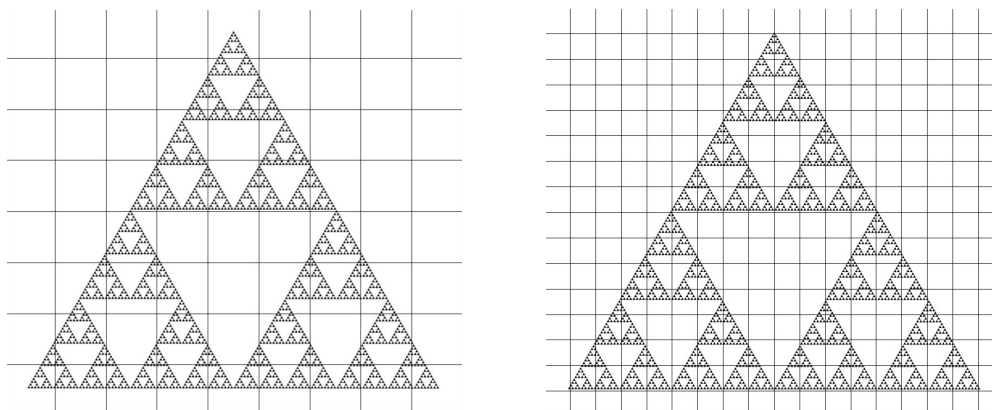
mřížky. Podle vzorce je fraktální dimenze Kochovy vložky rovna

$$d = \frac{\ln 48 - \ln 20}{\ln 2} \doteq 1,263.$$

Minkowského dimenze Kochovy křivky nám v tomto případě vyšla velmi podobně jako soběpodobnostní dimenze. Ovšem pomocí té soběpodobnostní jsme spočítali přesnou hodnotu fraktální dimenze Kochovy křivky, zatímco Minkowského dimenze nám pouze dává její přibližný odhad.

3.3.2 Sierpiňského trojúhelník

Nyní určíme Minkowského dimenzi Sierpiňského trojúhelníku, jehož přesná hodnota fraktální dimenze je $\frac{\ln 3}{\ln 2}$, přibližně potom 1,585:



Obrázek 3.9: Umístění Sierpiňského trojúhelníku do dvou mřížek.

V tomto případě je první mřížka opět zjemněna dvojnásobně, přičemž v první mřížce je celkem pokryto 42 čtverečků mřížky a v druhé mřížce pokrývá trojúhelník 126 čtverečků. Minkowského dimenze je rovna číslu

$$d = \frac{\ln 126 - \ln 42}{\ln 2} = \frac{\ln \frac{126}{42}}{\ln 2} = \frac{\ln 3}{\ln 2},$$

což je číslo shodné se soběpodobnostní dimenzí Sierpiňského trojúhelníku, v tomto případě jsme tedy spočítali přesnou hodnotu fraktální dimenze i pomocí Minkowského dimenze.

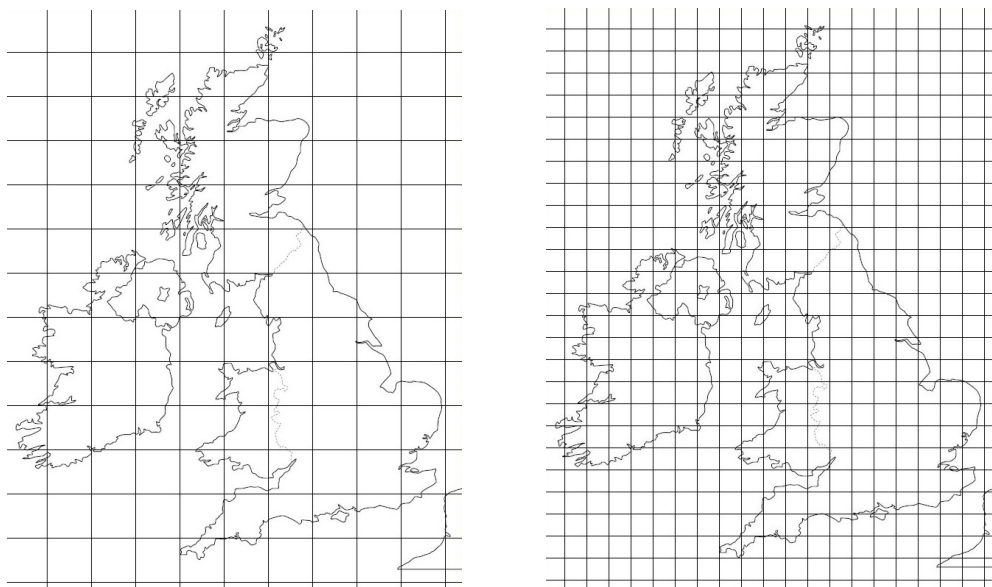
3.3.3 Soběpříbuzné fraktály

Na předchozích fraktálech jsme si ukázali, jakým způsobem se určuje Minkowského dimenze, nejednalo se však o nejlepší postup, jakým v těchto případech fraktální dimenzi

spočítat, jelikož, jak jsme viděli u Kochovy křivky, nemusí být výsledek vždy přesný. Proto se tato dimenze používá spíše u soběpříbuzných fraktálních útvarů, jejichž přesnou hodnotu fraktální dimenze spočítat neumíme a snažíme se proto určit alespoň její přibližnou hodnotu. Na následujících příkladech se pokusíme určit Minkowského dimenzi soběpříbuzných fraktálů jako jsou pobřeží či hranice států. Mapy vybraných států umístíme vždy do dvou mřížek, kde délky stran čtverečků druhé mřížky budou opět dvakrát menší než u té první a stejně jako u Kochovy vložky a Sierpiňského trojúhelníku spočítáme pokryté čtverečky a dosadíme do vzorce. Výsledky pak porovnáme s výsledky zjištěnými výše, kde jsme fraktální dimenzi těchto útvarů počítali pomocí dimenze obvodové.

Velká Británie

Nejčastěji uváděným soběpříbuzným fraktálem při výpočtu Minkowského dimenze je pobřeží Velké Británie. Fraktální dimenze tohoto pobřeží vyšla pomocí obvodové dimenze přibližně 1,2637, Minkowského dimenze by tedy měla vyjít podobně. Stejně jako u Kochovy křivky a Sierpiňského trojúhelníku, i tento fraktál umístíme do dvou mřížek, přičemž ta druhá bude opět dvojnásobně zjemněná. Ve jmenovateli vztahu pro výpočet Minkowského dimenze bude tedy opět výraz $\ln 2$.



Obrázek 3.10: Pobřeží Velké Británie.[11]

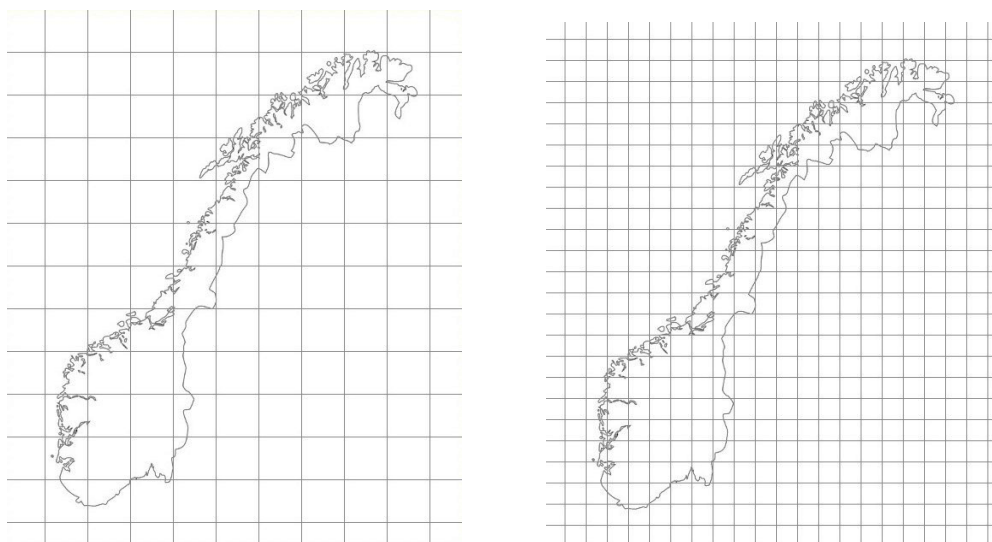
V první mřížce je obrysem pobřeží pokryto 60 čtverečků, v druhé je pokryto 144 čtverečků. Po dosazení dostáváme:

$$D = \frac{\ln 144 - \ln 60}{\ln 2} \doteq 1,263.$$

Výsledek je velmi podobný obvodové dimenzi tohoto pobřeží, v obou případech vychází fraktální dimenze pobřeží Velké Británie po zaokrouhlení na dvě desetinná místa 1,26.

Norsko

Ze členitosti pobřeží Norska víme, že oproti jiným pobřežím bude fraktální dimenze tohoto pobřeží poměrně vysoká. Pomocí obvodové dimenze jsme určili odhad fraktální dimenze – přibližně 1,4753. Nyní určíme Minkowského dimenzi, přičemž postup bude stejný jako v případě Velké Británie.



Obrázek 3.11: Pobřeží Norska.[12]

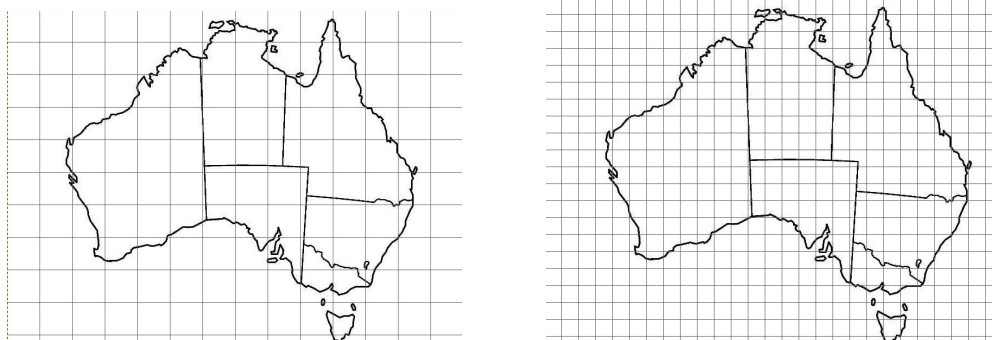
Nejprve je obrysem pobřeží pokryto 27 čtverečků, v druhé mřížce je jich pokryto 77. Minkowského dimenze pobřeží Norska je tedy rovna

$$D = \frac{\ln 77 - \ln 27}{\ln 2} \doteq 1,5119.$$

V tomto případě se obvodová a Minkowského dimenze liší již přibližně o tři setiny, je tedy vidět, že v obou případech se jedná pouze o odhad a může tedy docházet k odchylkám způsobených měřeními a také kvalitou a přesností obrysu pobřeží, pomocí kterého dimenzi určujeme. Stále je ale patrné, že pobřeží Norska je výrazně členitější než pobřeží Velké Británie.

Austrálie

Obvodová dimenze pobřeží Austrálie nám vyšla přibližně 1,1337. Nyní určíme Minkowského dimenzi tohoto pobřeží a výsledky porovnáme.



Obrázek 3.12: Pobřeží Austrálie.[13]

Nejprve je v první mřížce pokryto obrysem pobřeží Austrálie 52 čtverečků, poté je v druhé mřížce pokryto 173 čtverečků, přičemž stále zachováváme dvojnásobné zjemnění. Dimenze je tedy rovna:

$$D = \frac{\ln 173 - \ln 52}{\ln 2} \doteq 1,1424.$$

Minkowského dimenze nám tedy vyšla nepatrně vyšší než dimenze obvodová.

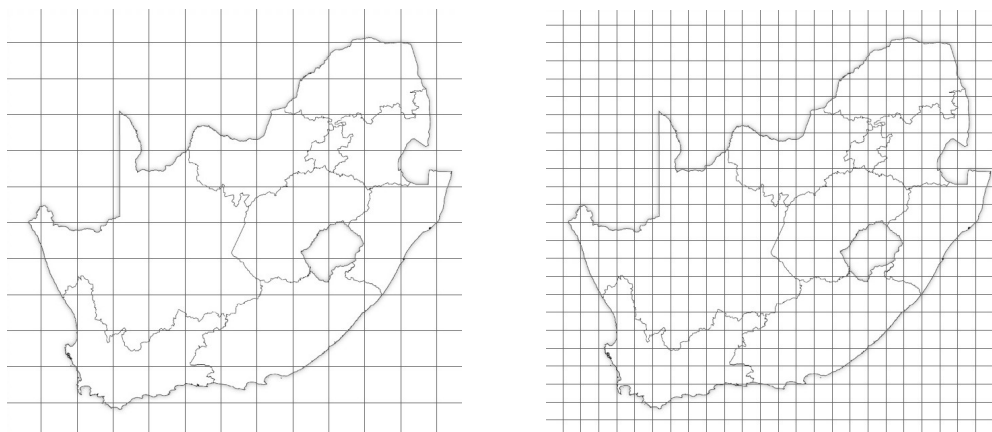
Jihoafrická Republika

Pomocí obvodové dimenze jsme ověřili, že pobřeží Jihoafrické Republiky není oproti jiným pobřežím moc členité. Obvodová dimenze tohoto útvaru vyšla přibližně 1,023, spočítáme nyní Minkowského dimenzi.

V první mřížce je tímto pobřežím pokryto 27 čtverečků, poté je pokryto 55 čtverečků:

$$D = \frac{\ln 55 - \ln 27}{\ln 2} \doteq 1,0265.$$

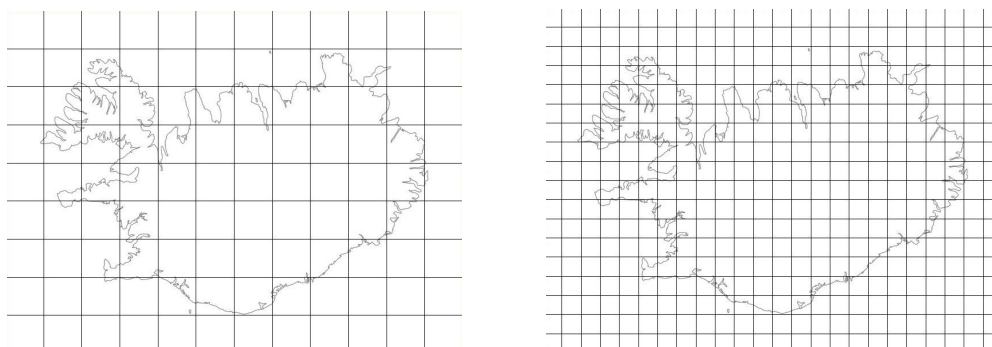
Hodnota Minkowského dimenze nám tedy vyšla jen nepatrně vyšší než hodnota dimenze obvodové.



Obrázek 3.13: Pobřeží Jihoafrické Republiky.[14]

Island

Pomocí obvodové dimenze jsme určili fraktální dimenzi pobřeží Islandu, ta vyšla přibližně 1,3593 a tento výsledek nám potvrdil naše pozorování o členitosti tohoto pobřeží. Nyní toto pozorování a ověříme ještě pomocí Minkowského dimenze.



Obrázek 3.14: Pobřeží Islandu.[15]

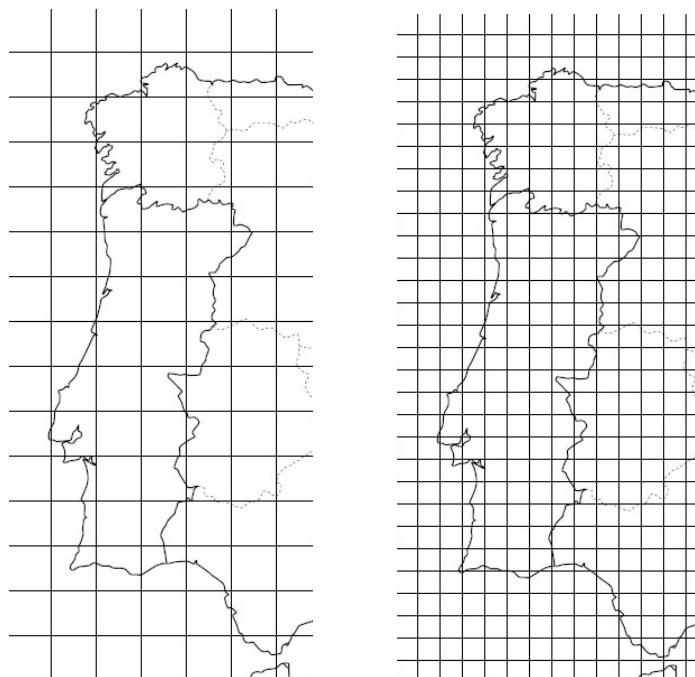
V první mřížce je obrysem pobřeží Islandu pokryto 51 čtverečků, v druhé je pokryto 131 čtverečků. Po dosazení do vztahu pro výpočet Minkowského dimenze dostáváme:

$$D = \frac{\ln 131 - \ln 51}{\ln 2} \doteq 1,36.$$

Výsledek je téměř shodný s obvodovou dimenzí tohoto pobřeží, můžeme tedy na základě těchto dvou hodnot získaných pomocí různých metod říci, že fraktální dimenze pobřeží Islandu je přibližně rovna číslu 1,36. Zároveň jsme pomocí jiné metody potvrdili, že pobřeží Islandu je členitější než pobřeží Velké Británie a zároveň není tak členité, jako pobřeží Norska.

Portugalsko

Již jsme spočítali obvodovou dimenzi hranice mezi Portugalskem a Španělskem. Těm nám vyšla přibližně 1,16, což ovšem úplně neodpovídalo výsledkům z Richardsonových měření, kde hodnota D vychází přibližně 1,14. Určíme nyní Minkowského dimenzi této hranice.



Obrázek 3.15: Hranice mezi Portugalskem a Španělskem.[16]

V první mřížce je hranicí pokryto 18 čtverečků, v druhé je pokryto 40 čtverečků. Tyto hodnoty dosadíme do vztahu pro výpočet Minkowského dimenze:

$$D = \frac{\ln 40 - \ln 18}{\ln 2} \doteq 1,152.$$

Tímto výsledkem jsme se přiblížili Richardsonově hodnotě D nicméně v porovnání s již zmíněnou dimenzí hranice Německa z roku 1899 (ta je přibližně 1,15) se jedná stále o poměrně nepřesný výsledek. Hranice mezi Portugalskem a Španělskem by totiž měla být méně členitá než tato hranice Německa, z našeho výsledku ovšem vyplývá, že jsou tyto dvě hranice v podstatě stejně členité.

Shrnutí

Již máme určené hodnoty obvodové dimenze pobřeží a hranic vybraných států, nyní jsme navíc určili Minkowského dimenzi stejných útvarů. Můžeme tedy tabulku s hodnotami obvodové dimenze a hodnotami určenými L. F. Richardsonem rozšířit o další sloupec obsahující zjištěné hodnoty Minkowského dimenze (hodnoty jsou opět uvedeny s přesností na dvě desetinná místa):

Pobřeží/hranice	Minkowského dimenze	Obvodová dimenze	Výzkum L. F. Richardsons
Pobřeží Velké Británie	1,26	1,26	1,25
Pobřeží Norska	1,51	1,48	–
Pobřeží Austrálie	1,14	1,13	1,13
Pobřeží Jihoafrické Republiky	1,03	1,02	1,02
Pobřeží Islandu	1,36	1,36	–
Hranice mezi Portugalskem a Španělskem	1,15	1,16	1,14

Tabulka 3.3: Minkowského dimenze pobřeží a hranic států

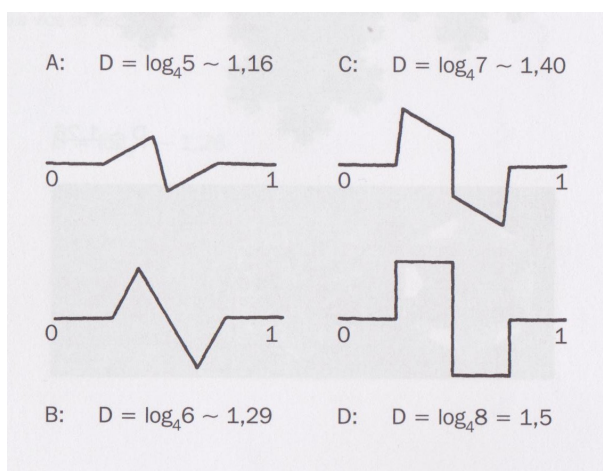
Z tabulky je vidět, že pomocí obvodové dimenze jsme v případě pobřeží Austrálie, Jihoafrické Republiky a Islandu došli ke stejným výsledkům jako L. F. Richardson, zatímco odhad fraktální dimenze těchto pobřeží pomocí Minkowského dimenze se mírně liší. V případě pobřeží Velké Británie se přibližné hodnoty Minkowského a obvodové dimenze shodují, neshodují se však už s výzkumem L. F. Richardsons. V případě hranice mezi Portugalskem a Španělskem již dochází k větším odchylkám a nejvíce se potom mezi sebou liší hodnoty dimenze pobřeží Norska. Ve všech případech se jedná o poměrně malé odchylky a výsledky našich měření nám i přes drobné nepřesnosti dávají poměrně dobrou představu o členitosti jednotlivých útvarů. Zároveň je ale nutno podotknout, že se jedná o hodnoty zaokrouhlené na setiny a vzhledem k tomu, že vycházíme z výše uvedených výpočtů, hodnoty které jsou uvedeny v tabulce, se, ačkoli jsou zdánlivě shodné, ve skutečnosti mírně liší. Jedná se však o nepatrný rozdíl, který v těchto případech můžeme zanedbat.

Pro srovnání zde ještě uvedeme tabulku shrnující fraktální dimenzi základních útvarů, kterou jsme určili pomocí soběpodobnostní dimenze opět s hodnotami zaokrouhlenými na dvě desetinná místa:

Fraktál	Soběpodobnostní dimenze
Cantorovo diskontinuum	0,63
Kochova křivka	1,26
Sierpiňského trojúhelník	1,58
Sierpiňského koberec	1,89
Pythagorův strom	2
Peanova křivka	2
Sierpiňského pyramida	2
Fraktální pyramida	2,32
Sierpiňského krychle	2,73

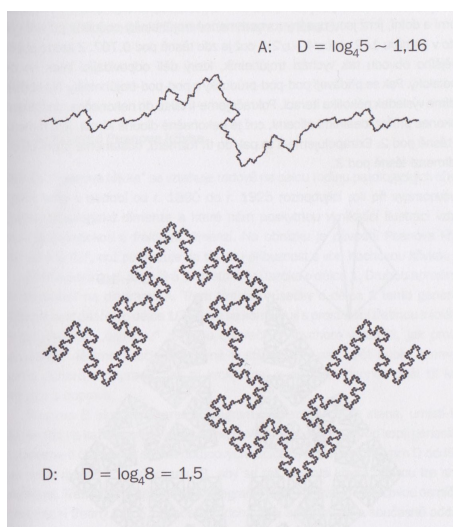
Tabulka 3.4: Soběpodobnostní dimenze fraktálů

Fraktální dimenzím pobřeží a hranic států je z uvedených soběpodobnostních dimenzí nejbližší dimenze Kochovy křivky. Její tvar má k tvaru pobřeží totiž velmi blízko. Abychom docílili ještě větší podoby s reálným pobřežím, můžeme Kochovu křivku zobecnit a modelovat tak různě členitá pobřeží. S tímto nápadem pracuje Mandelbrot ve své knize *Les objets fractal: Forme, hasard et dimension* (1995) – *Fraktály: Tvar, náhoda a dimenze* a uvádí následující příklady zobecnění Kochovy křivky:



Obrázek 3.16: Příklady zobecnění Kochovy křivky.[17]

Dimenze všech těchto křivek se podobají některým z našich výsledků fraktální dimenze různých pobřeží. V případě křivky D se už ovšem jedná o velmi členitou křivku odpovídající svou dimenzí pouze dimenzi pobřeží Norska, případně některým podobně členitým pobřežím, většina pobřeží má však fraktální dimenzi spíše menší. Na následujícím obrázku je patrná podoba křivek A a D s některými z pobřeží (křivka A se podobá většině méně členitým pobřežím, křivka D potom skutečně připomíná členité pobřeží Norska).



Obrázek 3.17: Aproximace pobřeží pomocí zobecněné Kochovy křivky.[18]

4 Praktické využití fraktální dimenze

Fraktální geometrie a spolu s ní i fraktální dimenze má v praxi velké využití i v oborech, ve kterých bychom to úplně nečekali. Vzhledem k tomu, že se jedná o poměrně mladé odvětví matematiky, je jeho praktické využití v některých případech spíše novinkou a teprve se zdokonaluje. Asi největší uplatnění nachází toto odvětví v počítačové grafice, ale je také významnou součástí biologie a medicíny. S fraktální geometrií se můžeme setkat také v umění, ať už jde o uvědomělé použití či ne. Například již v dobách dávno před vznikem fraktální geometrie používali umělci ve svých výtvarných dílech jisté opakující se motivy, čímž vytvářeli krásné obrazce, aniž by si uvědomovali jejich matematickou podstatu. Naopak dnes jsme díky znalostem o fraktálech, o jejich dimenzi, a také díky neméně důležitým moderním technologiím schopni vytvořit krásné fraktální obrazce.

4.1 Počítačová grafika

Nebýt informačních technologií, velké množství fraktálů bychom vůbec neměli šanci poznat. Nejenže jsme pomocí počítače schopni vizualizovat libovolný fraktál a získat tak lepší představu o jeho vzhledu a vlastnostech, ale můžeme pomocí něj také náhodně generovat řadu fraktálních útvarů, ať už soběpodobných nebo soběpříbuzných. Kupříkladu Mandelbrotova množina byla definována ještě před tím, než bylo vůbec možné ji graficky znázornit.

Počítače nám ovšem kromě možnosti hlouběji proniknout do fraktální geometrie nabízejí také možnost jejího praktického uplatnění v počítačové grafice, a to především při tvorbě filmů a počítačových her. Díky fraktální struktuře přírodních útvarů lze pomocí počítače animovat pohoří, oblaka, stromy, řeky, apod. Nejstarším příkladem použití fraktálů v počítačové grafice jsou potom filmy *Star Trek II: Khanův hněv* a *Star Wars:*

4.2 Medicína

Velmi významné využití nachází fraktální geometrie v medicíně. Můžeme si například představit rozvětvlující se průdušky uvnitř plic, cévní a nervovou soustavu, ale také činnost některých orgánů, například očí nebo srdce. Všechny tyto uvedené příklady (a nejen ty) je možné zkoumat pomocí fraktální geometrie a tím zjistit více o lidském těle. Velkým průlomem je využití fraktální geometrie v onkologii, přičemž vzhledem k tomu, že fraktály jsou v matematice zkoumány poměrně krátce, stojí výzkum nádorových onemocnění za pomoci těchto útvarů spíše na počátku svého zrodu. V budoucnu by ale fraktály mohly přinést velký průlom v diagnóze těchto onemocnění.

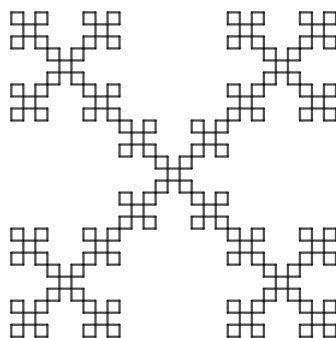
Podstatou propojení fraktální geometrie s výzkumem rakoviny je sledování rozdílu mezi fraktální dimenzí zdravých buněk a dimenzí těch, které jsou napadeny rakovinou. Ta je typická náhodným chaotickým růstem buněk, což přesně odpovídá soběpříbuzným fraktálním útvarům. Rakovinou napadená tkáň se pak vyznačuje velkou spletností cév a jejich výrazně vyšším množstvím, než je tomu u zdravé tkáně, a tedy fraktální dimenze napadené tkáně bude větší než fraktální dimenze tkáně zdravé. Proto bude-li pomocí fraktální geometrie sledován proces novotvorby cév v určité tkáni, tak nejenže může být rakovina odhalena v raném stadiu, ale zároveň je možné tímto způsobem sledovat mechanismus vzniku nádoru. Do budoucna má tedy fraktální geometrie v tomto medicínském odvětví velký potenciál.[19, str. 3683-3686]

4.3 Fraktální anténa

Využití fraktálů v medicíně a v počítačové grafice spočívalo především ve zkoumání a aplikování soběpříbuzných fraktálů na daný problém. V praxi ovšem najdeme využití i pro soběpodobné fraktály. Příkladem jsou fraktální antény, které využívají té vlastnosti některých fraktálů, že jejich délka lze libovolně zvětšovat na omezené části roviny. Nejvíce se tyto fraktální antény potom uplatňují u mobilních telefonů a u zařízení, které využívají mikrovlnný spoj (tj. zařízení sloužící k přenosu digitálního signálu).[20]

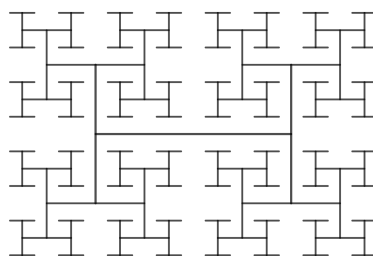
Příkladem fraktálu, jenž je v praxi používán pro konstrukci fraktální antény, je Vicse-

kův fraktál. Jedná se o soběpodobný fraktál, jehož základním útvarem je čtverec. Ten stejně jako při konstrukci Sierpiňského koberce pomyslně rozdělíme na devět shodných čtverců, tentokrát ovšem neodebíráme ten prostřední, ale odebereme všechny, které sousedí s jeho stranami. Po první iteraci tedy získáváme pět shodných čtverců s třetinovou délkou strany oproti té původní. Soběpodobnostní dimenze tohoto fraktálu je potom rovna $\frac{\ln 5}{\ln 3} \doteq 1,46497$, zabírá tedy v rovině poměrně dost místa, což je u fraktální antény výhodnou vlastností.



Obrázek 4.1: Vicsekův fraktál po třetí iteraci.

Dalším příkladem fraktální antény je tzv. H tree fraktál. Tento fraktál je zajímavý tím, že jeho fraktální dimenze je rovna dvěma a jedná se tedy o křivku, která vyplňuje celou plochu. Základem je úsečka, v jejíž krajních bodech jsou při první iteraci sestrojeny úsečky k ní kolmé, přičemž délka každé z nich je rovna délce původní úsečky vydělené druhou odmocninou ze dvou. Takto postupujeme dále s novými úsečkami a vzniká tak velmi rozvětvený obrazec připomínající píseno H. Soběpodobnostní dimenze je pak rovna $\frac{\ln 2}{\ln \sqrt{2}} = 2$.



Obrázek 4.2: H tree po šesté iteraci.

Dalšími fraktály využívanými jako fraktální anténa jsou například Sierpiňského trojúhelník s fraktální dimenzí přibližně 1,58 a také Sierpiňského koberec, jehož fraktální dimenze je přibližně 1,89.

5 Životopisné medailonky

Za vznikem fraktální geometrie stojí mnoho matematiků, jejichž jména byla již zmíněna kupříkladu u těch nejznámějších soběpodobných fraktálů. Jako nejvýznamnější průkopník fraktální geometrie je zde uváděn Benoît B. Mandelbrot, ovšem spousta dalších matematiků má na vzniku a rozvoji fraktální geometrie také značný podíl.

5.1 Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor

Jedním z nejvýznamnějších matematiků, kteří přispěli ke vzniku fraktální geometrie byl německý matematik Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor. Narodil se v roce 1845 v Petrohradě, od roku 1872 pak působil jako profesor na univerzitě v Halle. Svou práci věnoval především teorii množin a později se také zabýval topologií a nekonečnem, přičemž se mu podařilo objevit nový matematický útvar – Cantorovo diskontinuum – který jako jeden z prvních předcházel vzniku fraktální geometrie a samotnému vzniku slova *fraktál*. [21]

5.2 Waclaw Franciszek Sierpiński

Dalším z matematiků, kteří významně přispěli ke vzniku fraktální geometrie byl polský matematik Waclaw Franciszek Sierpiński. Narodil se v roce 1882 ve Varšavě a stejně jako G. Cantor se věnoval zejména teorii množin a topologii. Mimo to se také zabýval teorií čísel. [22] K fraktální geometrii přispěl dnes již jedním z nejznámějších fraktálů – Sierpiňského trojúhelníkem. Spolu s ním také popsal Sierpiňského koberec a později byly k těmto dvěma útvarům nalezeny analogické útvary generované z prostorových útvarů. V případě Sierpiňského trojúhelníku a koberce se opět jedná o útvary předcházející vzniku fraktální geometrie.

5.3 Niels Fabian Helge von Koch

Niels Fabian Helge von Koch byl švédský matematik narozený v roce 1870 ve Stockholmu. Jeho významným dílem jsou práce týkající diferenciálních rovnic, v roce 1911 se navíc stal profesorem matematiky na univerzitě ve Stockholmu. Mimo to se stejně jako W. Sierpiński věnoval také teorii čísel.[23] Do fraktální geometrie přispěl dalším velmi známým fraktálním útvarem, jehož vznik ovšem také předcházela jejímu vzniku – Kochovou křivkou.

5.4 Gaston Maurice Julia

Velmi významným matematikem, který do fraktální geometrie přispěl novým typem fraktálů, byl francouzský matematik Gaston Maurice Julia. Narodil se roku 1893 v Alžírsku a jeho práce později inspirovala B. B. Mandelbrota při jeho zkoumání fraktálních útvarů.[1, str. 20] Gaston Maurice Julia stojí za vznikem tzv. Juliových množin. Jedná se o množiny konstruované v komplexní rovině, výsledkem těchto konstrukcí jsou potom různé „divoké“ fraktální obrazce. Jejich přesná vizualizace je ovšem možná pouze za použití počítačových technologií.

5.5 Benoît B. Mandelbrot

Nejenže byl Benoît B. Mandelbrot nejvýznamnějším průkopníkem fraktální geometrie, ale byl také jejím zakladatelem. Ačkoli spousta fraktálů vznikla dávno před tím, než se těmito útvary začal zabývat Mandelbrot, byl to právě on, komu se je povedlo sjednotit do jedné geometrické skupiny. Mimo to jako první vizualizoval Mandelbrotovu množinu objevenou francouzským matematikem Pierrem Fatouem a také jako první přišel s pojmem *fraktál*.

Benoît B. Mandelbrot byl francouzsko-americký matematik, který se narodil ve Varšavě v roce 1924. Téměř celý svůj život se zabýval fraktální geometrií. V roce 1982 vydal knihu *The Fractal Geometry of Nature*, pomocí které se mu podařilo proslavit fraktální geometrii.[1, str. 23] Během své práce byl inspirován mnoha pracemi svých předchůdců, kromě práce G. Julii měla pro Mandelbrota velký význam například práce anglického matematika Lewise Frye Richardsona zakládající se na empirických zjištěních. Díky této

práci si všiml rozdílných údajů v případě délek pobřeží, což ho přivedlo ke zkoumání fraktální dimenze.

Díky Mandelbrotovi se tedy zprvu opomíjená fraktální geometrie dočkala své slávy a praktického využití v různých vědních oborech.

Závěr

Cílem této práce bylo popsat útvary fraktální geometrie pomocí fraktální dimenze. V teoretické části jsou představeny základní fraktály a způsob jejich konstrukce, následně je pak vysvětlen rozdíl mezi topologickou a fraktální dimenzí. Dále jsou v práci uvedeny tři typy fraktální dimenze – soběpodobnostní, obvodová a Minkowského dimenze – a jsou zde odvozeny vztahy pro jejich výpočet. Pomocí soběpodobnostní dimenze je pak spočítána fraktální dimenze některých z uvedených základních fraktálů.

Praktická část práce se věnuje odhadu fraktální dimenze různých pobřeží a hranic států pomocí obvodové a následně i pomocí Minkowského dimenze, přičemž výsledky jsou pak mezi sebou porovnávány. Ve většině případů se výsledky těchto dvou dimenzí shodují nebo jsou velmi podobné, odhad lze tedy považovat za poměrně přesný. V některých případech se ovšem výsledky mírně liší, při určování tedy docházelo k nepřesnostem. Jedná se především o pobřeží Norska a o hranici mezi Portugalskem a Španělskem. Při určování fraktální dimenze přírodních útvarů se navíc k porovnání hodily výsledky empirického výzkumu L. F. Richardsona, k dispozici ovšem bylo pouze omezené množství údajů.

Poslední část práce je věnována jednak praktickému využití fraktální geometrie a fraktální dimenze v různých oborech, kde jsou zároveň stručně uvedeny další příklady fraktálů, které lze použít při konstrukci fraktálních antén, na závěr pak byla přidána kapitola věnující se nejvýznamnějším průkopníkům fraktální geometrie.

Literatura

- [1] ZELINKA, Ivan, František VČELAŘ, Marek ČANDÍK, *Fraktální geometrie: principy a aplikace*. Praha : BEN - technická literatura, 2006. ISBN 80-730-0193-4.
- [2] Niabot. [Menger-Schwamm-farbig]. In: *cs.wikipedia.org* [online]. 10. září 2009 [cit. 2023-07-10]. Dostupné z: <https://cs.m.wikipedia.org/wiki/Soubor:Menger-Schwamm-farbig.png>
- [3] LINTON, Oliver. *Fraktály: Na hraně chaosu*. Holečkova 9, 150 00 Praha 5 : Dokořán, 2021. ISBN 978-80-7363-725-5.
- [4] António Miguel de Campos. [Peanocurve]. In: *cs.wikipedia.org* [online]. červen 2007 [cit. 2023-07-10]. Dostupné z: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Peanocurve.svg>
- [5] [Julia 0.4 0.6]. In: *cs.wikipedia.org* [online]. 7. srpna 2008 [cit. 2023-07-10]. Dostupné z: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Julia_0.4_0.6.png
- [6] [Julia 0.285 0.01]. In: *cs.wikipedia.org* [online]. 7. srpna 2008 [cit. 2023-07-10]. Dostupné z: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Julia_0.285_0.01.png
- [7] PEITGEN, Heinz-Otto, Hartmut JÜRGENS, Dietmar SAUPE, *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*. Dordrecht : Springer Science + Business Media, 2004. ISBN 0-387-21823-8.
- [8] Wolfgang Beyer. [Mandel zoom 00 mandelbrot set]. In: *cs.wikipedia.org* [online]. 13. října 2013 [cit. 2023-07-10]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Mandel_zoom_00_mandelbrot_set.jpg
- [9] MANDELBROT, Benoît B. *The fractal geometry of nature*. Updated and augmented. New York: W. H. Freeman and Company, c1983. ISBN 07-167-1186-9

- [10] MANDELBROT, Benoît B. *How long is the Coast of Britain?: Statistical self-similarity and fractional dimension*. American Association for the Advancement of Science [online]. 1967, **156**(3775), 636-638 [cit. 2023-07-02]. Dostupné z: <http://li.mit.edu/Stuff/CNSE/Paper/Mandelbrot67Science.pdf>
- [11] [Blank map of United Kingdom (UK)]. In: *ukmap360.com* [online]. [cit. 2023-07-10]. Dostupné z: <https://ukmap360.com/united-kingdom-%28uk%29-blank-map>
- [12] [Norway]. In: *www.edupics.com* [online]. [cit. 2023-07-10]. Dostupné z: <https://www.edupics.com/coloring-page-norway-i10317.html>
- [13] Golbez. [Blank map of the states of Australia]. In: *cs.wikipedia.org* [online]. 3. ledna 2006 [cit. 2023-07-10]. Dostupné z: https://cs.m.wikipedia.org/wiki/Soubor:Australia_states_blank.png
- [14] [Blank map of South Africa]. In: *ukmap360.com* [online]. [cit. 2023-07-10]. Dostupné z: <https://southafricamap360.com/south-africa-blank-map>
- [15] [Blank map of Iceland]. In: *www.worldmaphd.com* [online]. [cit. 2023-07-10]. Dostupné z: <https://www.worldmaphd.com/iceland/blank-map-of-iceland/>
- [16] [Blank map of Spain]. In: *maps-spain.com* [online]. [cit. 2023-07-10]. Dostupné z: <https://maps-spain.com/maps-spain-country/blank-map-of-spain>
- [17] Zobecněná von Kochova metoda [kniha]. In: Mandelbrot, Benoît B. *Fraktály: Tvar, náhoda a dimenze*. Praha: Mladá fronta, 2003, s. 38. ISBN 80-204-1009-0.
- [18] Zobecněná von Kochova metoda [kniha]. In: Mandelbrot, Benoît B. *Fraktály: Tvar, náhoda a dimenze*. Praha: Mladá fronta, 2003, s. 39. ISBN 80-204-1009-0.
- [19] BAISH, James W. a Rakesh K. JAIN, *Fractals and Cancer*. Cancer Research [online]. 2000, **60**(14), 3683–3688 [cit. 2023-07-10]. Dostupné z: <http://aacrjournals.org/cancerres/article-pdf/60/14/3683/3239765/ch140003683p.pdf>
- [20] Wikipedia contributors. Fractal antenna. *Wikipedia, The Free Encyclopedia* [online]. [cit. 2023-07-10]. Dostupné z:

https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Fractal_antenna&oldid=1154998129

- [21] Příspěvatelé Wikipedie. Georg Cantor. *Wikipedie: Otevřená encyklopedie* [online]. [cit. 2023-07-10]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Georg_Cantor&oldid=22029340
- [22] Příspěvatelé Wikipedie. Waclaw Sierpiński. *Wikipedie: Otevřená encyklopedie* [online]. [cit. 2023-07-10]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Wac%C5%82aw_Sierpi%C5%84ski&oldid=22032863
- [23] Příspěvatelé Wikipedie. Helge von Koch. *Wikipedie: Otevřená encyklopedie* [online]. [cit. 2023-07-10]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Helge_von_Koch&oldid=21993568