Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Osová afinita v rovině

Perspective affinity in a plane

Mgr. Pavla Chomová

Vedoucí práce: Mgr. Michal Zamboj, Ph.D.

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

2023

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Osová afinita v rovině potvrzuji, že jsem ji vypracovala samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 30.6.2023

Mgr. Pavla Chomová

PODĚKOVÁNÍ

Na tomto místě bych ráda poděkovala hlavně svému manželovi, který mě po celou dobu studia velmi podporoval. Jeho trpělivost, povzbuzení i ochota pohlídat naše tři malé děti pro mě byly obrovskou pomocí při psaní této bakalářské práce.

Velké poděkování patří také vedoucímu mé bakalářské práce za jeho konstruktivní připomínky a rady.

ABSTRAKT

Cílem této bakalářské práce je napsat text, který by pokrýval široké spektrum znalostí o osové afinitě v rovině. Má přinést komplexnější náhled na toto téma, neboť kombinuje přístupy syntetické i analytické geometrie. Každý z těchto pohledů totiž klade důraz na jiné prvky či vlastnosti osových afinit.

Na začátku jsou stručně představeny afinní transformace v rovině jako nadřazený pojem k osovým afinitám. Další kapitoly pak přináší definici a vlastnosti osových afinit, jejich členění a ukázky konstrukcí. Nechybí ani prezentace některých významných osových afinit, které je možné blíže specifikovat či definovat - jako například elace, pravoúhlá osová afinita, involutorní osová afinita, primitivní osová afinita apod.

Součástí práce je také téma skládání osových afinit a existence specifické grupy osových afinit. Poslední část práce přináší přehled různých možností rozkladů obecných afinit právě s využitím osových afinit.

Jako zdroje pro tuto práci byla zvolena odborná literatura zaměřená na afinní zobrazení či geometrické transformace. Snahou bylo zachovat rozmanitost zdrojů, proto text vychází z materiálů českých i zahraničních, zaměřených analyticky i synteticky a vydaných v různých obdobích zahrnujících posledních přibližně 50 let.

KLÍČOVÁ SLOVA

Osová afinita, směr afinity, charakteristika osové afinity, elace, involutorní osová afinita, ekviafinita, primitivní osová afinita, rozklad afinit

ABSTRACT

The aim of this bachelor's thesis is to write a text that would cover a wide range of knowledge about perspective affinity in a plane. It is intended to bring a more comprehensive view of this topic, because it combines the approaches of synthetic and analytic geometry. Each of these views emphasizes different elements or properties of perspective affinities.

At the beginning, affine transformations in the plane are briefly introduced as a superior concept to perspective affinities. The next chapters then provide the definition and properties of perspective affinities, their breakdown and examples of constructions. There is also a presentation of some important perspective affinities, which can be specified or defined more closely – for example shear, oblique reflection, equiaffinity, primitive transformation etc.

Part of the text is also the subject of composition of perspective affinities and the existence of a specific group of perspective affinities. The last part of the thesis provides an overview of various possibilities of decompositions of affinities using perspective affinities.

Professional literature focusing on affine mapping or geometric transformations was chosen as the source for this work. The effort was to preserve the diversity of sources. Therefore the text is based on Czech and foreign materials, focused analytically and synthetically and published in different periods covering the last approximately 50 years.

KEYWORDS

Perspective affinity, axis of affinity, direction of affinity, scale factor of the affinity, shear, oblique reflection, equiaffinity, primitive transformation, decomposition of affinities

Obsah

Úvod 6

1 Afinita v rovině 8

1.1 Stručný vhled do odborné literatury k tématice 8

1.2 Definice a základní vlastnosti afinit 8

1.3 Analytický předpis afinit 10

1.4 Skládání afinit a grupa afinit 11

2 Osová afinita v rovině 14

2.1 Definování osové afinity 14

2.2 Samodružné směry, směr afinity 19

2.3 Charakteristika / modul osové afinity 22

2.4 Inverzní osová afinita 26

2.5 Změny tvarů v osové afinitě 27

3 Významné osové afinity, členění osových afinit 33

3.1 Osová afinita s osou tvořenou osou x 33

3.2 Členění osových afinit podle směru afinity a charakteristiky osové afinity 35

3.3 Elace, souměrnost, ekviafinita 38

3.4 Primitivní osová afinita 41

4 Skládání osových afinit a grupa osových afinit 46

5 Rozklady afinit pomocí osové afinity 50

5.1 Osová afinita jako základní afinita 50

5.2 Rozklad afinit pomocí primitivních osových afinit a posunutí 54

5.3 Rozklad afinit přes podobnost a osovou afinitu 56

Závěr 60

Seznam použitých informačních zdrojů 62

Úvod

V rámci svého studia na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy v Praze jsem postupně absolvovala třísemestrální kurzy syntetické a analytické geometrie. Část učiva v obou předmětech se detailně věnovala geometrickým zobrazením, hlavně shodnostem a podobnostem, jejich skládáním a grupám.

V analytické geometrii bylo toto téma ještě doplněno zobrazením afinním, které mi jako první poodhalilo poznání mimo základní euklidovskou geometrii. Do této doby jsem uměla rozlišit jen, pokud jsou dva trojúhelníky shodné či podobné. Afinní zobrazení mě však zaujalo svým konstatováním, že mezi každými dvěma libovolnými trojúhelníky existuje popsatelné zobrazení, čímž mé dosavadní geometrické představy zcela zastínilo. Zaujalo mě to natolik, že jsem se rozhodla zaměřit svou bakalářskou práci tímto směrem.

Téma afinních zobrazení je však obzvlášť v analytické geometrii hodně obsáhlé, proto bylo nutné ho více zúžit. Stěžejní část této práce se tedy věnuje představení jen jednoho typu afinního zobrazení, a to osové afinitě v rovině. V názvu práce je navíc uvedeno „v rovině“, tím jsem chtěla zdůraznit, že se v celé bakalářské práci budu zabývat výhradně vzájemně jednoznačným afinním zobrazením roviny na sebe, neboli afinitou (či afinní transformací), a tudíž i osovou afinitou v rovině[1].

Při hlubším studiu tématiky jsem zjistila, že existuje široká škála učebních textů a odborných knih, které zmiňují osovou afinitu. Každý materiál však toto téma rozebírá trochu jinak – obsahem i formou. Při psaní této práce jsem tedy musela načíst informace a propojovat znalosti z různých zdrojů. Nenašla jsem totiž žádnou knihu, ve které by bylo napsáno vše, co jsem do té doby nastudovala, z jiných materiálů.

Mým cílem je tedy shrnout a popsat dostupné poznatky, které jsem v odborné literatuře na téma osová afinita našla, a to jak z pohledu syntetického, tak i analytického. To může

[1] Pojem osová afinita se používá také v prostoru. Představuje prosté afinní zobrazení mezi dvěma různými rovinami (Čižmár 1984, s. 208, nebo Kraemer 1991, s. 92 - 97). Jedná se o specifický typ afinního zobrazení v prostotu, které má přímku samodružných bodů (osu afinity) a množinu všech samodružných rovin tvoří svazek rovin s osou afinity a osnova rovin rovnoběžných se směrem afinity.

být přínosné, neboť některé věty a definice se snadněji odvozují analyticky, ovšem některé spíše synteticky. Navíc to může přinést komplexnější pohled na dané téma.

Jako zdroje k tomuto tématu jsem primárně využila základní i doporučenou literaturu k předmětům Syntetická geometrie 1, 2 a Analytická geometrie 1, 2, 3, které jsem v rámci svého studia absolvovala. Sekundárně jsem si pak vyhledala další odbornou literaturu zaměřenou na afinní zobrazení či geometrické transformace. Snažila jsem se zachovat rozmanitost zdrojů, abych obsáhla téma co nejvíce. Vycházela jsem tedy z materiálů českých i zahraničních, zaměřených analyticky i synteticky, vydaných v různých obdobích zahrnujících posledních přibližně 50 let.

V odborné literatuře na téma osové afinity či afinit obecně jsem občas narazila na nejednotnost v používaných termínech a pojmenováních. Ve svém textu uvádím pojmy, které jsou užívány ve většině zdrojích, nebo v novějších zdrojích, ale vždy zmiňuji i alternativní názvy. Všechny definice a věty uvedené v této práci jsem převzala doslovně nebo s menšími úpravami ze zdrojů, které jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Práci jsem se snažila strukturovat logicky a přehledně. V první kapitole stručně představuji vzájemně jednoznačné afinní zobrazení v rovině, neboť osová afinita je jedním jeho typem. V dalších kapitolách se už věnuji jen osové afinitě. Nejdříve uvádím její definici a vlastnosti, následně se věnuji členěním osových afinit a představuji některé významné osové afinity, které je možné blíže specifikovat či definovat. Čtvrtá kapitola obsahuje téma skládání osových afinit a existenci grup vytvořených z osových afinit. V poslední kapitole pak podrobně rozvádím tvrzení, že osová afinita je základní afinitou. To znamená, že každou afinitu lze získat složením osových afinit.

Mojí prioritou je napsat text, který by pokrýval široké spektrum znalostí o osové afinitě v rovině. Velkým přínosem by mělo být propojení syntetického a analytického pohledu na toto téma. Každý z těchto přístupů totiž klade důraz na jiné prvky či vlastnosti osových afinit. Druhotně by pak tato práce mohla přinést názornější náhled na rozklad afinit pomocí osových afinit, což bývá v literatuře zmíněno jen okrajově.

1 Afinita v rovině

1.1 Stručný vhled do odborné literatury k tématice

V literatuře můžeme vysledovat dva hlavní přístupy, jak autoři zavádí pojem osová afinita. První způsob zavádí nejdříve pojem afinní transformace (afinita) a její vlastnosti, až následně představí osovou afinitu jako speciálního představitele afinit. Častěji se s tímto přístupem setkáme u odborných textů zaměřených na analytickou geometrii (např. Boček a Šedivý 1979, Lávička 2006, Sekanina aj. 1988, Stehlíková 2006–2008 a další).

V druhém případě zase autoři na začátku podrobněji popíší spíše osovou afinitu a její vlastnosti, pak pojem afinita a afinní grupa představí pomocí skládání osových afinit. Tento postup je typičtější spíše pro syntetický přístup, neboť využívá geometrické názornosti při konstrukci osových afinit (Jeger 1969, Kuřina 2002). Ale může se objevit i v publikacích zaměřených analyticky. Například koncept zavedení vlastností afinit a jejich dokazování pomocí přesně definovaných osových afinit (tzv. „primitive transformations“, Gans 1969), které blíže definuji v kapitole 3.4.

V některých materiálech, které jsem během psaní této práce prostudovala, se zase objevují jen dílčí informace o afinních zobrazeních nebo osových afinitách. Např. Brannan aj. (1999) představuje pouze afinní transformace a její vlastnosti, aniž by se o osových afinitách zmiňoval. Naopak v Jelínkovi (1976) se objevuje vedle shodností a podobností informace pouze o jedné afinitě, a to o elaci (v knize uváděná jako zkosení). Podobně Judith Cederberg (2001) definuje afinní transformace, ale jako jejich příklad uvádí pouze elaci a pravoúhlé osové afinity. Nezahrnuje tedy celou škálu osových afinit.

1.2 Definice a základní vlastnosti afinit

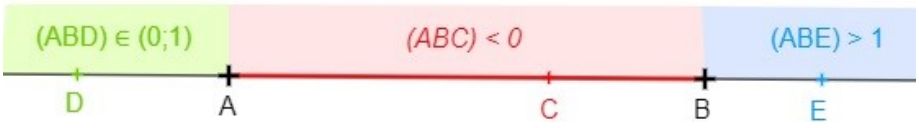
Já jsem si zvolila první variantu zavedení pojmu osová afinita. To znamená, že než se budu věnovat tématu osových afinit, stručně představím jejich nadřazenější zobrazení, a to afinní transformace (afinitu).

Definice 1. Vzájemně jednoznačné zobrazení f roviny A_2 na sebe ($f: A_2 \to A_2$) se nazývá afinní transformace roviny A_2 (nebo v rovině), zkráceně afinita v rovině A_2, jestliže zobrazí tři různé kolineární body X, Y, Z opět na kolineární body $f(X), f(Y), f(Z)$ a dělicí poměr bodů X, Y, Z a jejich obrazů se rovná, tj. $(X, Y, Z) = \big(f(X), f(Y), f(Z)\big)$.

Pro připomenutí dělicí poměr jednoznačně udává polohu bodu na přímce vzhledem ke dvěma pevně daným bodům této přímky.

Definice 2. Mějme dánu přímku AB a na ní bod C. Při rovnosti vektorů $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{BC}$ se reálné číslo λ nazývá dělicím poměrem bodu C vzhledem k bodům A, B (právě v tomto pořadí) a značí se $\lambda = (ABC)$.

Podle této definice je $\lambda \in (0,1)$ pro bod C ležící vně úsečky AB za bodem A, $\lambda = 0$ pro $C = A$, $\lambda < 0$ pro bod C ležící uvnitř úsečky AB, neexistující λ pro $C = B$ a $\lambda > 1$ pro bod C ležící vně úsečky AB za bodem B (viz obr. 1). Dělicí poměr nedosahuje hodnoty $\lambda = 1$ pro žádnou polohu bodu C (Boček a Zhouf 2012, s. 120).



Obr. 1 Hodnota dělicího poměru podle vzájemné polohy bodů

Pro absolutní hodnotu dělicího poměru λ platí vztah (s užitím velikosti úseček):

$$|\lambda| = |(ABC)| = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

<u>Základní vlastnosti afinní transformace roviny</u> (Brannan aj 1999, s. 55):

Věta 1. Afinní transformace f roviny zobrazí přímku na přímku.

Věta 2. V afinitě f se dvě rovnoběžné přímky zobrazí opět do dvou rovnoběžných přímek.

Na definici afinní transformace, kdy se tři různé body přímky zobrazí opět na tři různé body přímky, navazuje také **základní věta afinní geometrie** (Brannan aj 1999, s. 67–71):

Věta 3. Nechť P, Q, R a P', Q', R' jsou dvě množiny tří nekolineárních bodů (neležících na jedné přímce, tj. tvořící $\Delta\, PQR$ a $\Delta\, P'Q'R'$) v A_2. Potom existuje afinní transformace f roviny A_2, která zobrazí $f(P) = P', f(Q) = Q'$ a $f(R) = R'$. Tato afinní transformace f roviny A_2 je určena jednoznačně.

Důsledkem toho tvrzení platí, že všechny trojúhelníky v rovině jsou afinně příbuzné. To znamená, že mezi každými dvěma libovolnými trojúhelníky $\Delta\, ABC$ a $\Delta\, DEF$ v rovině existuje právě jedna afinní transformace f, která zobrazuje $f(\Delta\, ABC) = (\Delta\, DEF)$.

1.3 Analytický předpis afinit

Definice 3. Buď v afinní rovině A_2 zvolena afinní soustava souřadnic. Pak má vzhledem k ní afinní transformace analytické vyjádření $f: \begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n, \end{cases} \quad ad - cb \neq 0.$

Při afinní transformaci f se tedy bod X o souřadnicích $[x, y]$ zobrazí do bodu $f(X) = X'$ o souřadnicích $[x', y']$, přičemž se souřadnice bodu X' vypočtou ze souřadnic bodu X podle dané rovnice afinity f.

Rovnice afinity f lze napsat také v maticovém tvaru $f: X' = FX + T$, kde F je regulární matice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a $T = [m, n]^T$ představuje souřadnice obrazu počátku afinní soustavy souřadnic $f(O)$, kde $O[0,0]$.

Poznámka. Tento zápis navozuje skutečnost, že afinita $f: X' = FX + T$ je výsledkem dvou zobrazení $f': X' = FX$ a $f'': X'' = X' + T$ (v tomto pořadí). Zobrazení $f': X' = FX$ se označuje jako lineární složka afinity[2] a zobrazení $f'': X'' = X' + T$ je posunutím (neboli translační složkou afinity; Kadleček a Troják 1984, s. 56).

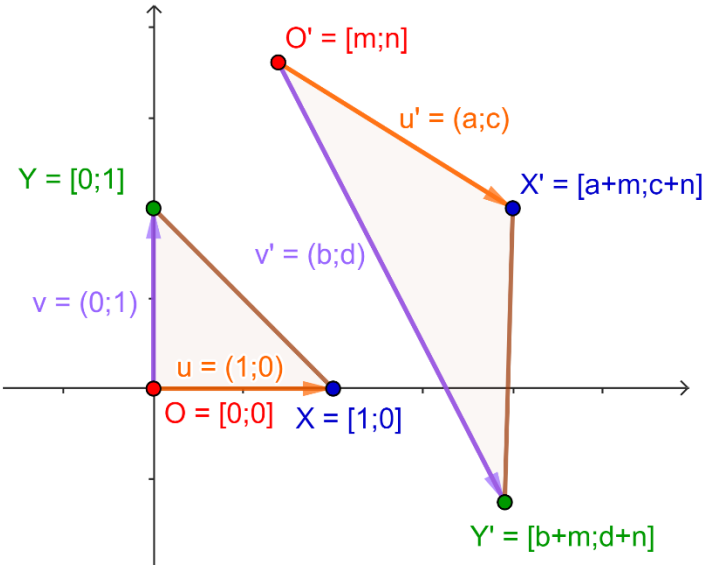
Pro analytický předpis afinit se však podle mě více hodí využití homogenních souřadnic. Pokud máme afinní rovinu A_2, pak homogenní souřadnice vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2)$ je tvořena uspořádanou trojicí $\vec{u} = (u_1, u_2, 0)$ a homogenní souřadnice bodu $X = [x_1, x_2]$ je uspořádaná trojice $X = [x_1, x_2, 1]$. Maticový zápis $F' = FX + T$ v homogenních souřadnicích pak musí být ve tvaru $F' = \begin{pmatrix} F & T \\ o & 1 \end{pmatrix} \cdot X$, kde F je regulární matice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, T = [m, n]^T$ a $o = (0,0)$ je nulový vektor (Olšák 2010).

Pro afinitu f tedy platí též rovnice $f: X' = FX$, kde $F = \begin{pmatrix} a & b & m \\ c & d & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ je matice afinní transformace f v homogenních souřadnicích, přitom $ad - cb \neq 0$, tzn. $\det(F) \neq 0$.

[2] Čižmár (1984, s. 180) označuje takto definovanou transformaci $f: X' = FX$ jako centroafinní transformaci. Název souvisí s tím, že v každé centroafinní transformaci je bod $O = [0,0]$ invariantní. Její výhodu vidí v jednodušším analytickém vyjádření matice transformace. Centroafinní transformace navíc tvoří samostatnou podgrupu grupy afinit vzhledem ke skládání.

Toto vyjádření afinit je velmi výhodné, neboť se skládá pouze z jedné matice. Užitečnost tohoto zápisu se projevuje hlavně při skládání afinit, které lze provést jen pomocí násobení matic. V dalším textu používám především toto analytické vyjádření afinních transformací.

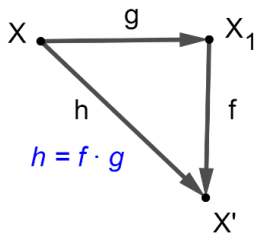
Geometricky si matici F afinní transformace lze přiblížit pomocí zobrazení trojúhelníku OXY, kde $O = [0,0], X = [1,0], Y = [0,1]$. Vrcholy trojúhelníka se v afinitě f promítnou do bodů $O' = [m,n]$, $X' = [a+m, c+n]$, $Y' = [b+m, d+n]$ (viz obr. 2). Vektory $\vec{u} = \overrightarrow{XO} = (1,0)$ a $\vec{v} = \overrightarrow{YO} = (0,1)$ se v afinitě promítnou do vektorů $\vec{u'} = \overrightarrow{X'O'} = (a,c)$, respektive do $\vec{v'} = \overrightarrow{Y'O'} = (b,d)$, což jsou prvky přímo z matice afinity F (Stehlíková 2006–2008, s. 53).



Obr. 2 Zobrazení trojúhelníku OXY v afinitě f

1.4 Skládání afinit a grupa afinit

Mějme dvě afinní transformace f a g dané rovnicemi f: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & m \\ c & d & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ a g: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & M \\ C & D & N \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$. Představme si situaci zobrazenou na obr. 3, kdy je bod $X[x,y]$ zobrazen afinitou g na bod $X_1[x_1, y_1]$ a následně je pak zobrazen afinitou f nabod $X'[x', y']$. Hledejme zobrazení h, které přímo zobrazí bod $X[x,y]$ na bod $X'[x', y']$.



Obr. 3 Ukázka skládání afinit v rovině

Zmíněná skutečnost lze zapsat rovnicemi $X \xrightarrow{g} X_1$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & M \\ C & D & N \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$;

$X_1 \xrightarrow{f} X'$: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & m \\ c & d & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$, odkud po dosazení $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ z první rovnice do druhé dostaneme $X \xrightarrow{h} X'$: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & m \\ c & d & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B & M \\ C & D & N \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$.

Získané zobrazení h přiřazující bodu X bod $X' = f\big(g(X)\big)$ vzniklo tedy složením zobrazení g a f. Daná operace se označuje jako skládání afinních transformací a značí se $h = f \circ g$ nebo $h = f \cdot g = f\big(g(X)\big)$. Skládání afinit je asociativní $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, ale obecně není komutativní $f \circ g \neq g \circ f$. Proto je důležité pořadí skládání.

Při skládání afinních transformací lze vysledovat rozdílnost mezi syntetickým a analytickým přístupem. Zatímco synteticky najdu složené zobrazení h tak, že nejdříve provedu konstrukci afinity g a následně afinity f, analyticky stejné zobrazení h získám jako složení afinit v pořadí opačném $f \circ g$, tj. vynásobením matic těchto zobrazení $F \cdot G$.

Věta 4. Množina všech afinních transformací roviny tvoří vzhledem k operaci skládání zobrazení grupu, tzv. afinní grupu roviny.

Důkaz. Otestujeme všechny podmínky existence grupy.

1) Uzavřenost grupy – Vznikne složením dvou afinních transformací f, g opět afinní transformace? Mějme afinity f, g dané maticemi F, G. Složení afinit $(f \circ g)$ lze vyjádřit součinem matic

$$F \cdot G = \begin{pmatrix} a & b & m \\ c & d & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B & M \\ C & D & N \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA + bC & aB + bD & aM + bN + m \\ cA + dC & cB + dD & cM + dN + n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tato výsledná matice je opět maticí afinní transformace, neboť má obecný tvar afinity $\begin{pmatrix} p & q & u \\ r & s & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a zároveň se její determinant nerovná nule, tj. $\det(F \cdot G) \neq 0$. Odvození vychází ze skutečnosti, že $\det(F \cdot G) = \det(F) \cdot \det(G)$ a pro afinity f a g platí podmínky $\det(F) \neq 0$ a $\det(G) \neq 0$.

2) Asociativita je splněna, neboť násobení matic je asociativní operace.
3) Inverzním zobrazením k afinitě f s maticí transformace F je afinní transformace f^{-1} s maticí F^{-1}. Matice F^{-1} existuje vždy, protože F je regulární čtvercová matice.
4) Neutrální prvek tvoří afinita f_{id} vyjádřena jednotkovou maticí E (identitou).

V afinních transformacích je výhodné zjišťovat tzv. samodružné prvky (body, přímky, směry), jež se zobrazují samy na sebe.

Definice 4. Buď f afinita v rovině A daná maticí F. Bod $X \in A$ se nazývá samodružný bod afinity f, právě když $f(X) = X$, neboli $FX = X$. Množina $M \subseteq A$ se nazývá množina samodružných bodů, je-li každý její bod samodružný.

Věta 5. Množina všech samodružných bodů afinity f afinního prostoru A_n buď tvoří afinní podprostor prostoru A_n nebo je to množina prázdná.

Pro afinní rovinu $(n = 2)$ tedy množina samodružných bodů může být:

a) celá rovina A – jedná se o identickou transformaci, v níž jsou všechny body i ostatní geometrické útvary samodružné (Lávička 2006, s. 9);
b) přímka samodružných bodů – jedná se o afinitu nazvanou *osová afinita*;
c) jeden samodružný bod;
d) prázdná množina - afinita f pak nemá žádná samodružný bod.

Definice 5. Buď f afinita v rovině A daná maticí F. Přímka $p \in A$ vyjádřená v obecném tvaru jako $p: Sx + Ty + V = 0$ se nazývá samodružná přímka afinity, pokud pro libovolnou reálnou konstantu t platí $(S, T, V) \cdot F = t(S, T, V)$ (Stehlíková 2006–2008, s. 42).

Definice 6. Buď f afinita v rovině A daná maticí F. Nenulový směr nazveme samodružným směrem afinity f, právě když $F\vec{u} = k \cdot \vec{u}$, kde $k \neq 0$.

Dle samodružných bodů a směrů lze afinity dále členit. Já se však už zaměřím pouze na jeden speciální typ afinity – a to na již zmíněnou osovou afinitu v rovině.

2 Osová afinita v rovině

2.1 Definování osové afinity

Nejdříve navážu na předchozí kapitolu a představím osovou afinitu z analytického pohledu. Ten vychází z klasifikace afinit podle stanovení invariantních bodů a směrů.

Věta 6. Afinní transformace roviny, která má přímku samodružných bodů, se nazývá *osová afinita*. Přímka samodružných bodů se pak označuje jako *osa afinity*.

Pro osovou afinitu neexistuje jednoduchý obecný maticový zápis. Jak tedy mezi afinitami rozpoznat matici osové afinity? Její určení vychází ze stanovení samodružných bodů. Samodružný bod se zobrazuje sám na sebe $X' = X$. Je-li afinita f dána maticovou rovnicí $X' = AX$ (v homogenních souřadnicích), jsou jeho samodružné body určeny rovnicí $(A - E)X = O$, kde E je jednotková matice a O nulová matice (Sekanina aj. 1988, s. 24),

$$\text{tj. } \begin{pmatrix} a-1 & b & m \\ c & d-1 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jedná se tedy o dvě rovnice o dvou neznámých

$$(a-1)x_1 + bx_2 + m = 0$$
$$cx_1 + (d-1)x_2 + n = 0.$$

Osová afinita má nekonečně mnoho samodružných bodů, které tvoří přímku. Pro existenci přímky samodružných bodů tedy musí platit, že hodnost matice soustavy $\begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix}$ a rozšířené matice soustavy $\begin{pmatrix} a-1 & b & m \\ c & d-1 & n \end{pmatrix}$ se musí rovnat 1.

Matice $A = \begin{pmatrix} a & b & m \\ c & d & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ je maticí osové afinity $\boldsymbol{a}$ právě tehdy, když $(ad - bc) \neq 0$ a zároveň $hod \begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix} = hod \begin{pmatrix} a-1 & b & m \\ c & d-1 & n \end{pmatrix} = 1.$

Rovnice přímky samodružných bodů, tj. osy afinity se vyjádří jedním ze vztahů[3] $o: (a-1)x + by + m = 0$, nebo $o: cx + (d-1)y + n = 0$.

[3] Buď je jeden ze vztahů rovností $0 = 0$ a druhý rovnicí osy afinity, nebo oba vztahy vyjadřují rovnici téže přímky, tj. osy afinity (Stehlíková 2006–2008, s. 47).

Právě jsem představila osovou afinitu pomocí podmínek, pro které je matice afinity zároveň i maticí osové afinity. V případě, že je však osová afinita určena osou afinity a dvěma odpovídajícími si body, lze matici osové afinity odvodit pomocí následujícího tvrzení.

Věta 7. Osová afinita a s osou afinity $rx + sy + t = 0$, která převádí bod $P[p, q]$ do bodu $P'[p', q']$ a $P \neq P'$, má analytické vyjádření (Sedlář, s. 4):

$$x' = x + \frac{p' - p}{rp + sq + t}(rx + sy + t),$$

$$y' = y + \frac{q' - q}{rp + sq + t}(rx + sy + t).$$

Odvození (Lávička 2006, s.15–16). Z předchozího textu víme, že pro osovou afinitu a danou maticí A je přímka samodružných bodů $o_1: (a - 1)x + by + m = 0$, nebo také $o_2: cx + (d - 1)y + n = 0$. Obě tyto rovnice tudíž musejí být jistým λ_i násobkem zadané osy afinity $rx + sy + t = 0$, tj.

$$(a - 1)x + by + m = \lambda_1 \cdot (rx + sy + t)$$
$$cx + (d - 1)y + n = \lambda_2 \cdot (rx + sy + t).$$

Úpravou těchto rovnic získáme tvar

$$\underbrace{ax + by + m}_{x'} = \mathrm{x} + \lambda_1 \cdot (rx + sy + t)$$

$$\underbrace{cx + dy + n}_{y'} = \mathrm{y} + \lambda_2 \cdot (rx + sy + t).$$

Zbývá dořešit, jak vypočítat hodnoty λ_1 a λ_2. Jelikož známe souřadnice bodu $P[p, q]$ a jeho obrazu $P'[p', q'] = a(P)$, pak musí platit

$$p' = p + \lambda_1 \cdot (rp + sq + t)$$
$$q' = q + \lambda_2 \cdot (rp + sq + t),$$

odkud snadno odvodíme

$$\lambda_1 = \frac{p' - p}{(rp + sq + t)};\ \lambda_2 = \frac{q' - q}{(rp + sq + t)}.$$

Další vlastnosti osové afinity z pohledu analytické geometrie (např. samodružné směry, směr afinity, modul osové afinit apod.) budou popsány v dalších podkapitolách. Nyní se zaměřím na představení osové afinity z pohledu syntetické geometrie.

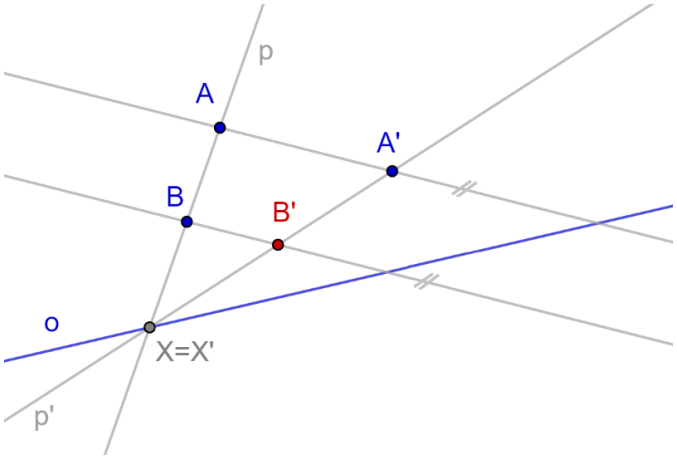
Kuřina (2002, s. 163–165) definuje osovou afinitu zcela ve shodě s již uvedeným analytickým přístupem (Věta 6): „Afinní transformace roviny, která má přímku samodružných bodů, se nazývá osová afinita“.

Ukažme si, že už z tohoto poznatku vyplývá konstrukce obrazu B' libovolného bodu B, pokud máme dánu osu afinity o a dvojici sobě odpovídající bodů A, A', z nichž žádný neleží na ose. Taková osová afinita se často zapisuje jako $a(o, A, A')$. V angličtině se pro takto definované zobrazení používá termín „perspective affinity“[4] nebo „axial stretching“ (Jeger 1969, s. 111).

Předpoklady pro konstrukci. Přímku AB označíme jako p a její průsečík s osou o jako bod X. Osa o je přímka samodružných bodů, bod X je tedy vzorem a zároveň i svým obrazem X'. Z definice afinní transformace (Definice 1) víme, že tři kolineární body $A, B, X \in p$ se zobrazí do tří kolineárních bodů A', B', X', proto bod $B' \in p' = A'X'$. Další vlastností afinit je, že zachovávají dělicí poměr. Pokud tedy platí, že

$$(ABX) = (A', B', X'),$$

je přímka BB' rovnoběžná s přímkou AA' (obr. 4).

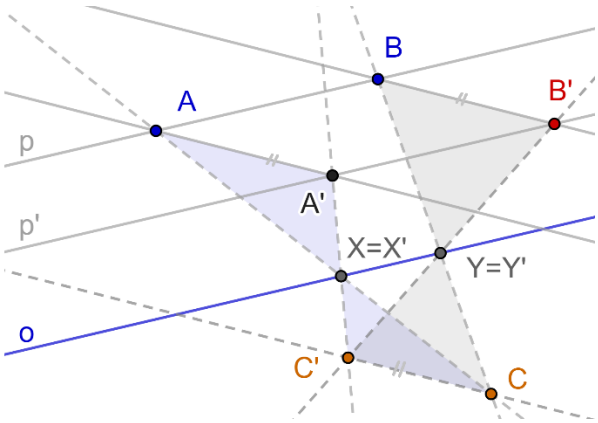


Obr. 4 Ukázka konstrukce obrazu bodu B v osové afinitě $a(o, A, A')$ – varianta 1

Je-li přímka $p = AB$ rovnoběžná s osou o, musí být s osou o rovnoběžný i obraz přímky $p' = A'B'$. Pokud $p \cap o = \{\emptyset\}$, tak není možné, aby existoval průsečík $p' \cap o$. Prvním předpokladem je tedy skutečnost, že bod B' leží na rovnoběžce p'.

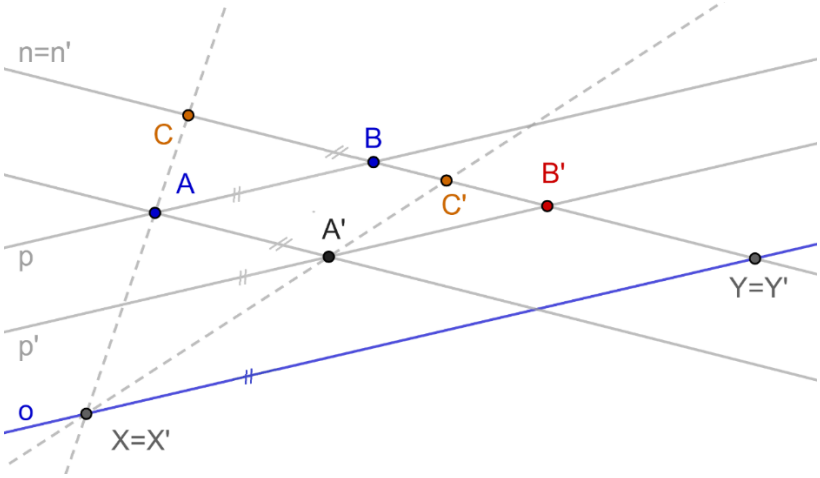
[4] Doslovný překlad „perspektivní afinita“ se v češtině příliš nepoužívá. Zmiňuje ji ale třeba Kraemer (1991, s. 93) jako alternativní název k osové afinitě. Ve slovenštině pak Čižmár (1984, s. 191) pojem „perspektívna afinita“ a osová afinita uvádí jako dva možné názvy téže afinity v A_2.

V dalším kroku zvolíme libovolný bod $C \notin p$. Dle výše zmíněného postupu sestrojíme nejdříve obraz bodu C v osové afinitě $a(o, A, A')$ a následně se provede konstrukce bodu B', při které využijeme osu o a odpovídající si body C a C' (obr. 5).



Obr. 5 Ukázka konstrukce obrazu bodu B v osové afinitě $a(o, A, A')$ – varianta 2

Můžeme také libovolný bod $C \notin p$ zvolit záměrně tak, aby přímka $CB \parallel AA'$. Obraz bodu C' již umíme sestrojit, stejně jako víme, že obraz Y průsečíku přímky $n = CB$ s osou o je bod $Y' = Y$. To však znamená, že obrazem přímky $n = n'$. Bod $B \in p \cap n$, proto bod B' získáme jako $B' \in p' \cap n'$, přitom vznikne rovnoběžník $ABA'B'$ (obr. 6).



Obr. 6 Ukázka konstrukce obrazu bodu B v osové afinitě $a(o, A, A')$ – varianta 3

V literatuře jsem objevila ještě jednu starší definici osové afinity, která vychází z jiných určujících prvků (M. Jeger 1969, s. 110–111):

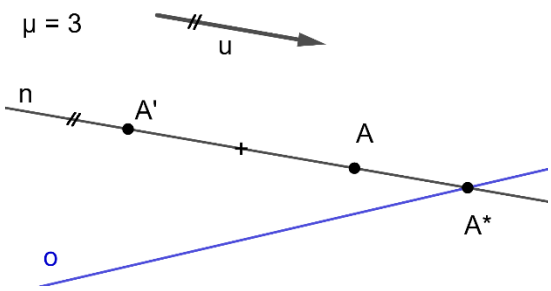
Definice 7. Mějme v rovině přímku o a směr daný vektorem[5] $\vec{u}$. Dále zvolme nenulové reálné číslo μ. Jako osovou afinitu s označením $a(o, u, \mu)$ budeme nazývat takové zobrazení, pro které platí následující pravidla:

1) přímky procházející vzory a jejich odpovídajícími obrazy jsou rovnoběžné se zadaným směrem;
2) pro každý pár odpovídajících si bodů P, P' máme

$$\overrightarrow{P'P^*} = \mu \cdot \overrightarrow{PP^*},$$

kde P^* představuje průsečík přímky PP' s přímkou o. Pokud je $\vec{u} \parallel o$, pak vždy platí $\mu = 1$.

Konstrukce. Tady se vychází přímo z definice. Pokud máme mimo osu o libovolný bod A, stačí bodem A vést rovnoběžku n se směrem $\vec{u}$. Získáme tak bod $A^* \in n \cap o$. Následně pak na základě zadaného μ určíme na přímce n bod A' (obr. 7).



Obr. 7 Ukázka konstrukce obrazu bodu A v osové afinitě $a(o, u, \mu)$

Osová afinita bývá nejčastěji určena právě osou afinity a párem odpovídajících si bodů mimo tuto osu. Není to však jediný způsob, jak osovou afinitu určit. Může být zadána například třemi páry odpovídajících si bodů (AA', BB', CC'), nebo dvěma různoběžnými přímkami $a, b \neq o$ a jejich obrazy a', b' apod.[6] Pokud je osová afinita zadána jinak, je třeba nejdříve určit právě osu afinity a body, z nichž jeden je vzor a druhý jeho obraz. Potom se postupuje dle uvedeného postupu získávání obrazů bodů.

[5] M. Jeger tento směr nedefinuje vektorem, nýbrž jako úhel, který tento směr svírá s přímkou o.
[6] Možnosti určenosti osové afinity i postup konstrukce osy a odpovídajících si bodů v jednotlivých případech popisuje Plichtová (2013, s. 26–29) a lze je najít v její webové aplikaci pod odkazem [*https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~jole/plichtova/Diplomka/AfinitaAKolineace/?page=OA].*

2.2 Samodružné směry, směr afinity

Nyní se zaměřím na samodružné směry v osové afinitě, neboť představují významnou vlastnost, jež se využívá při konstrukci obrazů v osové afinitě. To je patrné i z následující věty.

Věta 8. Nechť je přímka p určená bodem A a nenulovým vektorem $\vec{u}$. Je-li vektor $\vec{u}$ samodružný, zobrazí se přímka p v osové afinitě na přímku p' s ní totožnou či rovnoběžnou.

Samodružný směr je takový směr, který se v afinitě zobrazí sám na sebe. Pro obraz vektoru $\vec{u}$ v afinitě f dané maticí $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (tj.nerozšířené) tedy musí platit vztah $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$, kde λ je nenulové reálné číslo. Hledání samodružných směrů v afinitách obecně vychází z hledání vlastních čísel a vlastních vektorů matice A. Aby existovalo jiné než triviální řešení soustavy rovnic, tak determinant $det(A - \lambda E) = 0$. Dosazením se získá charakteristická rovnice

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - cb = 0,$$

z níž se zjišťují vlastní čísla λ.

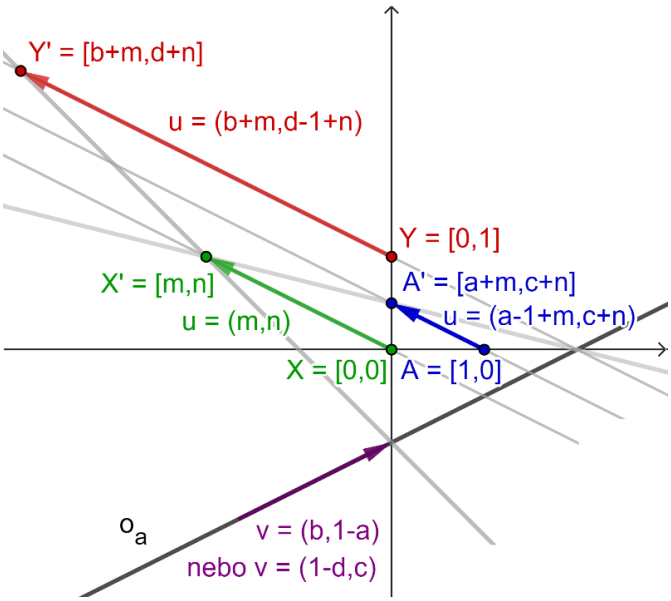
V případě osové afinity se však samodružné směry určují snáze. Prvním samodružným směrem je směr osy afinity. Pro přímku samodružných bodů totiž platí, že směrový vektor se zobrazí sám na sebe a navíc nemění svou velikost. Vysvětlení je jednoduché. Mám-li dva libovolné body $A, B \in o$, které tvoří vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Jejich obrazy jsou body $A' = A$ a $B' = B$, proto obrazem vektoru $a(\vec{v})$= $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} = \vec{v}$. Pro rovnici $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$ se tedy v tomto případě vlastní číslo $\lambda_o = 1$ a vlastní vektor odpovídá směrovému vektoru osy afinity, tj. $\vec{u} = (b; 1 - a)$ nebo $\vec{u} = (1 - d; c)$.

V osové afinitě však existuje ještě jeden samodružný směr, který se nazývá směr afinity a je určen spojnicí vzoru a obrazu bodu v osové afinitě, tj. $\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$. Z analytického vyjádření matice $A = \begin{pmatrix} a & b & m \\ c & d & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ osové afinity (uvedeno blíže na str. 14 v rámečku) víme, že musí platit $hod\begin{pmatrix} a-1 & b & m \\ c & d-1 & n \end{pmatrix} = 1$. Z toho plyne, že každá dvojice

vektorů $(m; n)$, $(a-1; c)$ a $(b; d-1)$ je lineárně závislá. Tyto vektory pak určují směr afinity (Stehlíková 2006– 2008, s. 47).

Synteticky lze směr afinity určit jako vektor mezi dvěma odpovídajícími si body ležícími mimo osu afinity. Pro ilustraci zvolím body $X = [0; 0]$, $A = [1; 0]$ a $Y = [0; 1]$, kde $X, A, Y \notin o$. Ty se pak zobrazí do bodů $X' = [m; n]$, $A' = [a+m; c+n]$ a $Y' = [b+m; d+n]$ (obr. 8).

Směr afinity pak určují lineárně závislé nenulové vektory $\overrightarrow{AA'} = (a-1+m; c+n)$, $\overrightarrow{XX'} = (m; n)$, $\overrightarrow{YY'} = (b+m;\ d-1+n)$ či jakákoli jejich lineární kombinace, tj. i vektory $(a-1; c)$ a $(b; d-1)$.



Obr. 8 Ukázka odvození směru afinity

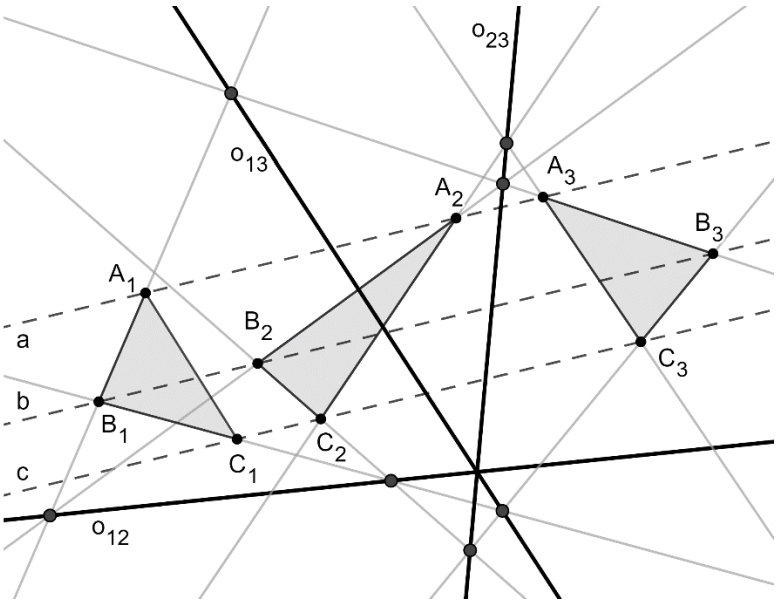
Poznámka. Existuje i speciální osová afinita zvaná elace (zkosení), pro kterou je směr osy afinity a směr afinity totožný (viz kapitola 3.3).

Poznámka. Směr osové afinity v rovině a směr její osy jsou jediné směry, které přecházejí touto afinitou samy v sebe (Kraemer 1991, s. 97). Tato skutečnost vychází přímo z možností řešení odvozené charakteristické rovnice $(a-\lambda)(d-\lambda) - cb = 0$. Stupeň polynomu této rovnice (tj. $n = 2$) totiž udává maximální počet vlastních čísel, která pak generují vlastní (samodružné) vektory.

Všechny přímky určené libovolným bodem a vektorem směru afinity jsou samodružné přímky, tzn. že se zobrazí samy na sebe. Oproti tomu přímky mající směr stejný jako osa afinity jsou buď přímo osou afinity, nebo jsou s ní rovnoběžné.

Směr afinity představuje důležitou vlastnost osové afinity, která se využívá při konstrukci. Díky němu lze také osovou afinitu snadno rozlišit od jiných afinit, což přibližuje následující tvrzení.

Věta 9. (Desarguesova) Jsou-li ABC, $A'B'C'$ dva trojúhelníky takové, že přímky AA', BB', CC' jsou rovnoběžné, pak existuje osová afinita, nebo translace, která převádí trojúhelník ABC do trojúhelníku $A'B'C'$ (Kuřina 2002, s. 169).



Obr. 9 Desarguesova věta – ukázka

Ukázku tohoto tvrzení zachycuje obrázek 9. Na něm jsou tři různé trojúhelníky $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ a $A_3B_3C_3$, přitom body $A_1, A_2, A_3 \in a$, $B_1, B_2, B_3 \in b$, $C_1, C_2, C_3 \in c$ a přímky $a \parallel b \parallel c$. Mezi každými dvěma trojúhelníky existuje osová afinita. Trojúhelník $A_1B_1C_1$ se zobrazuje do trojúhelníku $A_2B_2C_2$ v osové afinitě dané osou o_{12}, $\Delta\, A_1B_1C_1$ se zobrazuje do $\Delta\, A_3B_3C_3$ v osové afinitě dané osou o_{13} a $\Delta\, A_2B_2C_2$ se zobrazuje do $\Delta\, A_3B_3C_3$ v osové afinitě dané osou o_{23}. Ve všech případech je směr afinity stejný a odpovídá směrovému vektoru přímek a, b, c.

Směr afinity tudíž stanovuje, jakým směrem se mění poloha jednotlivých bodů v osové afinitě.

2.3 Charakteristika / modul osové afinity

Věta 10. Mějme osovou afinitu $a(o, A, A')$ danou osou afinity o a dvěma odpovídajícími si body $A \neq A'$ takovou, že přímka AA' je různoběžná[7] s osou afinity a protíná osu afinity v bodě A_0. Potom pro každý pár odpovídajících si bodů X, X' a bod X_0 ($X_0 \in XX' \cap o$) je dělicí poměr $(\mathrm{X'XX_0}) = (\mathrm{A'AA_0})$ konstantní. Dělicí poměr $(\mathrm{A'AA_0})$ se nazývá charakteristika osové afinity (někdy i modul či koeficient osové afinity), značí se k

$$\overrightarrow{A'A_0} = k \cdot \overrightarrow{AA_0}$$

a pro absolutní hodnotu k platí

$$|k| = |(A'AA_0)| = \frac{|A'A_0|}{|AA_0|}.$$

Z definice dělicího poměru (Definice 2 v kapitole 1.2) víme, že charakteristika osové afinity $k = (A'AA_0)$ nabývá kladných hodnot z intervalu $(0; 1) \cup (1; \infty)$ pro bod A_0 ležící vně úsečky AA', neboť vektory $\overrightarrow{A'A_0}$ a $\overrightarrow{AA_0}$ mají stejný směr. Naopak k je záporné pro A_0 ležící uvnitř úsečky AA'. Jedná se o případ, kdy vektory $\overrightarrow{A'A_0}$ a $\overrightarrow{AA_0}$ jsou opačné.

Jinak řečeno to znamená, že pro hodnoty charakteristiky $k > 0$ leží vzory i obrazy bodů ve stejné polorovině od osy afinity. Pokud je charakteristika osové afinity $k < 0$, pak vzory a obrazy bodů leží v různých polorovinách od osy afinity. Případ, kdy $A' = A_0$ nastat nemůže, proto $k \neq 0$.

Důkaz Věty 10. V dané osové afinitě známe osu afinity a odpovídající si body A, A'. Dle podmínek osové afinity doplníme další pár odpovídajících si bodů X, X'. Bod A_0 je průsečík přímky AA' a osy afinity, bod X_0 pak průsečík přímky XX' a osy afinity. Bod Y je samodružným bodem přímky AX (obr. 10). Dle věty (uu) jsou trojúhelníky AA_0Y, XX_0Y a dále $A'A_0Y, X'X_0Y$ podobné.
Z podobnosti trojúhelníků vyplývají mezi vektory vztahy

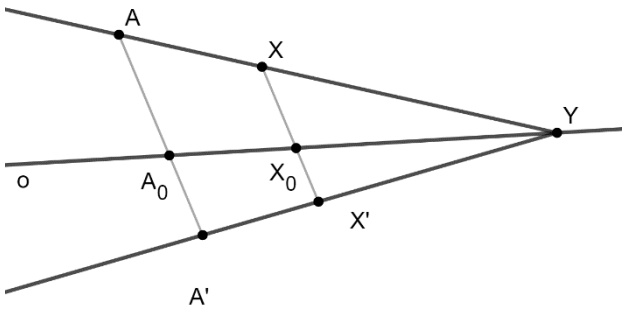
[7] Vyloučíme tedy osovou afinitu, kdy směr afinity je rovnoběžný se směrem osy (elace). V takovém případě totiž neexistuje průsečík přímky AA' s osou afinity o.

$$\frac{|AA_o|}{|A_oY|} = \frac{|XX_o|}{|X_oY|} \qquad \text{a} \qquad \frac{|A'A_o|}{|A_oY|} = \frac{|X'X_o|}{|X_oY|}.$$

Úpravou a dosazením do definice charakteristiky osové získáme (Plichtová 2013, s. 24)

$$|k| = |(A'AA_o)| = \frac{|A'A_o|}{|AA_o|} = \frac{\frac{|X'X_o|\cdot|A_oY|}{|X_oY|}}{\frac{|XX_o|\cdot|A_oY|}{|X_oY|}} = \frac{|X'X_o|}{|XX_o|} = |(X'XX_o)|.$$

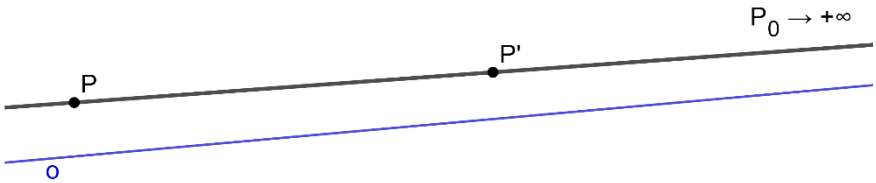
Z podobnosti zmíněných trojúhelníků také vyplývá $\overrightarrow{AA_o} = p \cdot \overrightarrow{XX_o}$ a $\overrightarrow{A'A_o} = p \cdot \overrightarrow{X'X_o}$, kde $p > 0$ je poměr podobnosti. Vektory $\overrightarrow{AA_o}$ a $\overrightarrow{XX_o}$ mají tedy stejný směr, stejně jako vektory $\overrightarrow{A'A_o}$ a $\overrightarrow{X'X_o}$. Proto i znaménka dělicích poměrů $(A'AA_o)$ a $(X'XX_o)$ jsou totožná.



Obr. 10 Charakteristika osové afinity – důkaz

Poznámka. Charakteristika osové afinity definovaná dle Věty 10 nikdy nenabývá hodnoty $k = 1$ a není určena pro elaci (případ, kdy je směr afinity rovnoběžný s osou afinity).

Zkusme odvodit hodnotu charakteristiky osové afinity $k = (P'PP_0)$ v situaci, kdy průsečík P_0 osy afinity a přímky PP' se blíží nekonečnu (obr. 11), tzn. osa afinity je téměř rovnoběžná se směrem afinity (elace).



Obr. 11 Charakteristika osové afinity pro P_0 jdoucí do nekonečna

Ze vztahu $\overrightarrow{P'P_0} = k \cdot \overrightarrow{PP_0}$ lehce odvodíme, že pokud jde bod P_0 k $\pm\infty$, tak oba vektory mají stejný směr. Dělicí poměr $(P'PP_0)$ bude tedy v obou případech kladný. Teď odvodíme hodnotu dělicího poměru.

$$\lim_{P_0 \to \pm\infty} k = \lim_{P_0 \to \pm\infty} \frac{|P'P_0|}{|PP_0|} = \lim_{P_0 \to \pm\infty} \frac{\pm|P'P| + |PP_0|}{|PP_0|} = \pm\frac{c}{\infty} + 1 = 0 + 1 = 1,$$

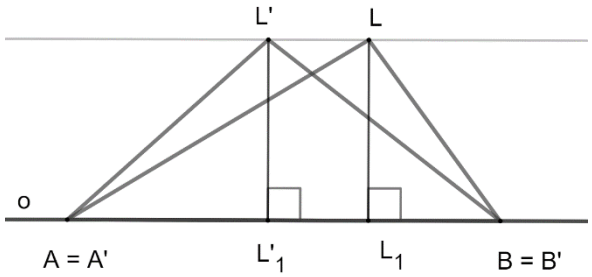
kde $P \neq P', P, P' \neq P_0$ a kde c je nenulové reálné číslo.

Charakteristika osové afinity dokáže také určit, jak se mění velikost útvarů v osové afinitě.

Věta 11. Osová afinita a v rovině budiž určena osou o a uspořádanou dvojicí různých bodů A, A'. Nechť v této afinitě je obrazem libovolného konvexního n-úhelníku $B_1B_2 \dots B_n$ ($n \geq 3$, celé) s obsahem S konvexní n-úhelník $B_1^{'}B_2^{'} \dots B_n^{'}$ mající obsah S', potom platí (Kraemer 1991, s. 99):

a) Je-li osová afinita a elací, je $S' = S$.
b) Není-li osová afinita a elací a má-li charakteristiku k, je $S' = |k| \cdot S$.

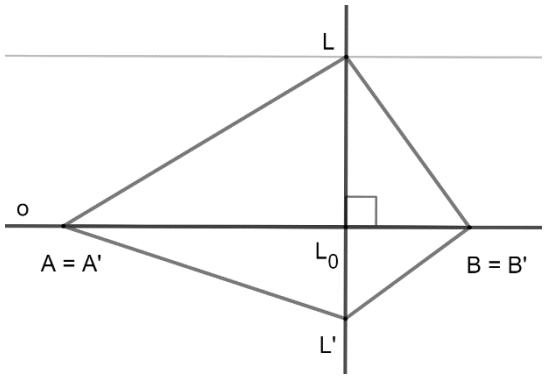
Důkaz. Zvolme trojúhelník ABL, jehož strana AB je částí osy afinity o. Potom $A' = A$ a $B' = B$, takže trojúhelník ABL a jeho obraz ABL' mají společnou stanu AB.



Obr. 12 Důkaz změny obsahu trojúhelníku – varianta a)

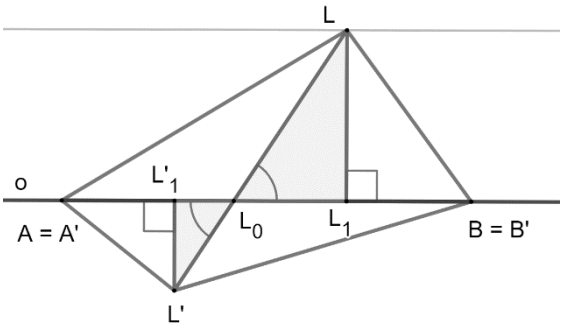
a) Je-li osová afinita a elací (obr. 12), je $LL' \parallel AB$, takže uvedené dva trojúhelníky mají shodnou délku výšek $|LL_1| = |L'L'_1|$ ke straně AB. Proto je $S' = S$.
b) Není-li osová afinita a elací, pak přímka LL' protíná osu o v bodě L_0 a dělicí poměr $|k| = |L'LL_o| = \frac{|L'L_o|}{|LL_o|}$. Úpravou získáme $|L'L_o| = |k| \cdot |LL_o|$. Je-li přímka

LL' kolmá k ose afinity (obr. 13), jsou úsečky $LL_0, L'L_0$ po řadě výškami trojúhelníků ABL, ABL'. Obsah $S' = \frac{1}{2}|AB| \cdot |L'L_o| = \frac{1}{2}|AB| \cdot |k| \cdot |LL_o| = |k| \cdot S$.



Obr. 13 Důkaz změny obsahu trojúhelníku – varianta b1

Není-li přímka LL' kolmá k ose afinity (obr. 14), jsou výškami trojúhelníků ABL, ABL' po řadě úsečky $LL_1, L'L'_1$. Dle věty (uu) jsou $\Delta\, L'L'_1L_o$ a $\Delta\, LL_1L_o$ podobné. Z toho plyne vztah $\frac{|L'L'_1|}{|LL_1|} = \frac{|L'L_o|}{|LL_o|} = |k|$. Obdobně jako v předchozím případě zjistíme, že obsah $S' = \frac{1}{2}|AB| \cdot |L'L'_1| = \frac{1}{2}|AB| \cdot |k| \cdot |LL_1| = |k| \cdot S$.



Obr. 14 Důkaz změny obsahu trojúhelníku – varianta b2

V analytické geometrii se u afinních transformací setkáváme s pojmem modul afinního zobrazení:

Definice 8. Nechť má afinní transformace f analytické vyjádření $X' = AX + b$. Potom hodnota determinantu matice A se nazývá modul afinního zobrazení a značíme ho k, tedy $k = \det(A)$ (Boček a Šedivý 1979, s. 53, Sedlář, s. 4).

Pro osovou afinitu a s nerozšířenou[8] maticí transformace $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je tak modul osové afinity $k = \det(A) = (ad - bc)$. Tento modul má zajímavou vlastnost:

Věta 12. Afinní transformace, tedy i osové afinity, mění obsah všech trojúhelníků násobením hodnotou jejich determinantu (Gans 1969, s. 96).

Tady je třeba se zastavit. Synteticky jsme dokázali, že osové afinity mění obecně obsah n-úhelníků násobením absolutní hodnoty dělicího poměru. Analytický pohled zase představuje modul osové afinity (dán determinantem matice osové afinity), jehož násobením se v afinitě mění obsah trojúhelníků, tedy i n-úhelníků. Modul osové afinity nabývá tedy stejných hodnot jako charakteristika osové afinity stanovená prostřednictvím dělicího poměru. Můžeme proto tvrdit, že se jedná o vyjádření stejné vlastnosti týkající se změn velikosti útvarů v osové afinitě, a to dvěma různými způsoby.

Poznámka. Výhodou analytického přístupu je fakt, že charakteristika / modul osové afinity lze stanovit i pro elaci. U osové afinity, která je elací, platí, že modul osové afinity $k_a = \det(A) = 1$. Synteticky, pomocí dělicího poměru, není případ elace definován, ovšem už dříve jsem odvodila, že pro $P_0 \to \pm\infty$ je $(P'PP_0) = 1$.

2.4 Inverzní osová afinita

Další vlastnost, kterou můžeme u osových afinit zmínit, je existence opačného (inverzního) zobrazení. Této skutečnosti se využívá především u skládání osových afinit či při rozkladech afinit, a to konstrukčně i analyticky při dokazování vět a definic.

Věta 13. Mějme osovou afinitu $a(o, B, B')$ s osou afinity o, která promítá bod B do bodu $a(B) = B'$. Inverzní zobrazení k této transformaci je osová afinita $a^{-1}(o, B', B)$ (Kuřina 2002, s. 165).

To znamená, že inverzní osová afinita má stejnou osu afinity, ale promítá bod B' na bod B. Pro inverzní zobrazení platí, že $(a \circ a^{-1}) = (a^{-1} \circ a) = identita$.

[8] Uvedená definice by platila i pro rozšířenou matici afinity zapsanou v homogenního souřadnicích, neboť $det\begin{pmatrix} a & b & m \\ c & d & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (ad - bc)$.

Matici A^{-1} inverzní osové afinity a^{-1} lze získat inverzí matice A původní osové afinity a. Jelikož je matice osové afinity z definice regulární, inverzní matice existuje vždy. Pokud $A = \begin{pmatrix} a & b & m \\ c & d & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, kde $(ad - bc) \neq 0$, pak

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} & \frac{bn-dm}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} & \frac{cm-an}{ad-bc} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (ad - bc) \neq 0.$$

Jestliže se charakteristika osové afinity a rovná $k_a = (ad - bc)$, potom charakteristika osové afinity k ní inverzní odpovídá hodnotě

$$\det(A^{-1}) = \frac{ad - bc}{(ad - bc)^2} = \frac{1}{ad - bc} = \frac{1}{k_a}.$$

2.5 Změny tvarů v osové afinitě

Shodnosti mění polohu objektů, podobnosti pak polohu i velikost objektů. V afinním zobrazením dochází kromě změny polohy a velikosti také ke změně tvaru objektů. Desarguesova věta (Věta 9) poodhalila, jak se v osové afinitě mění poloha trojúhelníku (spojnice odpovídajících si vrcholů vzoru a obrazu trojúhelníku jsou vždy rovnoběžné). Proměny velikosti útvarů zas popisuje představená charakteristika osové afinity. V této části textu tedy představím, jak se mění tvar objektů v osové afinitě a vlastně i v afinitách obecně.

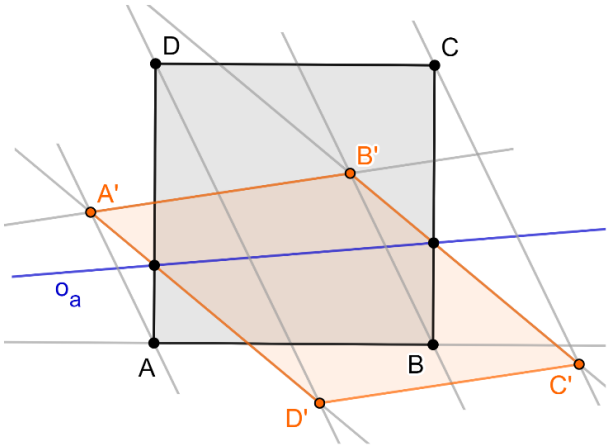
<u>Mnohoúhelníky</u>

Víme už, že osová afinita zachovává rovnoběžnost, že obrazem přímky je opět přímka a že obrazem trojúhelníku je trojúhelník, pro jehož vrcholy platí, že $AA' \parallel BB' \parallel CC'$.

Tato zjištění můžeme ještě zobecnit:

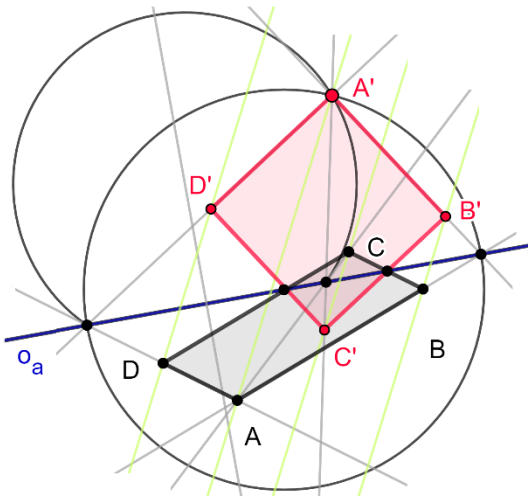
Věta 14. Osová afinita a v rovině budiž určena osou o a uspořádanou dvojicí různých bodů. Nechť $A_1A_2 \dots A_n$ je libovolný konvexní n-úhelník ($n \geq 3$, celé). Nechť v osové afinitě a jsou obrazy vrcholů $A_1, A_2, \dots, A_n$ po řadě body $A_1', A_2', \dots, A_n'$. Potom obrazem n-úhelníku $A_1A_2 \dots A_n$ v osové afinitě a (i afinitě obecně) je konvexní n-úhelník $A_1'A_2' \dots A_n'$ (Kraemer 1991, s. 90).

Každý konvexní mnohoúhelník se tedy v osové afinitě promítne opět do mnohoúhelníku. Navíc rovnoběžné strany těchto mnohoúhelníků se vždy promítnou do rovnoběžných stran, jelikož afinní transformace zachovávají rovnoběžnost. Proto také obrazem rovnoběžníku $ABCD$ (či lichoběžníku) je vždy rovnoběžník $A'B'C'D'$ (resp. lichoběžník). Čtverec lze považovat za specifický případ obdélníku. Čtverec i obdélník pak můžeme zařadit mezi speciální varianty rovnoběžníku. Proto obrazem čtverce v osové afinitě je obecně rovnoběžník (obr. 15), ve specifických případech může být obrazem čtverce i obdélník či kosočtverec.



Obr. 15 Obraz čtverce v osové afinitě $a(o_a, A, A')$

Platí to i opačně. Daný čtyřúhelník může být pomocí osové afinity zobrazen do čtverce (obr.16), ale pouze za podmínky, že jeho protilehlé strany jsou rovnoběžné (tzn. že je to zároveň rovnoběžník; Jeger 1969, s. 113).



Obr. 16 Konstrukce osové afinity zobrazující rovnoběžník na čtverec

Příklad. Najděte osovou afinitu s danou osou afinity o_a, která promítne libovolný rovnoběžník $ABCD$ právě do čtverce $A'B'C'D'$. Při konstrukci se využívá Thaletova kružnice a středový a obvodový úhel, neboť úhel $\measuredangle BAD$ se zobrazí do $\measuredangle B'A'D' = 90°$ a $\measuredangle CAD$ pak do $\measuredangle C'A'D' = 45°$ (obr. 16).

<u>Kuželosečky</u>

V této části se podíváme, jak osové afinity zobrazují kuželosečky, konkrétně regulární kuželosečky, tj. elipsy, hyperboly a paraboly. Kuželosečky bývají stanoveny na základě vzdáleností, mohou být tedy vůbec invariantní při afinních transformacích?

Věta 15. Obraz kuželosečky v afinitě je znovu kuželosečka stejného typu. Když A je matice afinity a K symetrická matice kuželosečky, potom matice obrazu kuželosečky je $K' = (A^{-1})^t K A^{-1}$ (Cederberg 2001, s.196–197).

Nejdříve připomenu obecný analytický předpis pro kuželosečky, který bude dále využit pro dokazování.

Věta 16. Libovolná kuželosečka může být zapsána algebraicky jako

$$kx_1^2 + lx_2^2 + 2nx_1x_2 + 2px_1 + 2qx_2 + m = 0,$$

nebo v maticovém zápisu $X^t K X = 0$ jako

$$(x_1, x_2, 1)\begin{pmatrix} k & n & p \\ n & l & q \\ p & q & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Symetrická matice K se nazývá maticí regulární kuželosečky, pokud $|K| \neq 0$. Jednotlivé typy kuželoseček se pak rozliší podle hodnoty $\delta = n^2 - kl$. Pro $\delta < 0$ je K maticí elipsy, pro $\delta > 0$ se jedná o maticí hyperboly a pro $\delta = 0$ vyjadřuje matice K parabolu. Kružnice se přitom nepovažuje za samostatný typ kuželosečky, ale jako speciální případ elipsy (pro $k = l$).

Důkaz Věty 15. V afinitě f se bod X zobrazí do bodů $X' = AX$ (uvedeno v homogenních souřadnicích). Vyjádřením X z této rovnice dostaneme vztah $X = A^{-1}X'$. Substitucí X v maticovém vyjádření kuželoseček $X^t K X = 0$ lze odvodit vztah

$$(A^{-1}X')^t K (A^{-1}X') = 0, \text{ čili}$$

$$X'^t((A^{-1})^t K A^{-1})X' = 0.$$

Druhá rovnice je symetrickou maticí kuželosečky s předpisem $K' = (A^{-1})^t K A^{-1}$, kde $|K'| = 0$ pouze tehdy, když $|K| = 0$.

Dokázali jsme, že obrazem regulární kuželosečky v afinitě obecně je opět regulární kuželosečka. Nyní zbývá dokázat, že invariantní zůstává i typ kuželosečky. Tento důkaz je přímočarý, ovšem vyžaduje delší algebraické výpočty. Základní princip tohoto důkazu vychází z knihy D. Ganse (1969, s. 93–94), který však při dokazování používal zjednodušenou matici afinní transformace. Jeho postup jsem aplikovala na obecnou matici afinity $A = \begin{pmatrix} a & b & m \\ c & d & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pro určení typu kuželosečky je určující hodnota $\delta = n^2 - kl$. Vypočteme tedy matici obrazu kuželosečky $K' = (A^{-1})^t K A^{-1}$ a zjistíme $\delta' = (n')^2 - k'l'$. Pro tyto účely nám tedy stačí vypočítat pouze hodnoty k', l', n'.

$$K' = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-c}{ad-bc} & 0 \\ \frac{-b}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} & 0 \\ \frac{bn-dm}{ad-bc} & \frac{cm-an}{ad-bc} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & n & p \\ n & l & q \\ p & q & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} & \frac{bn-dm}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} & \frac{cm-an}{ad-bc} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pro zjednodušení vytkneme z rovnice výraz $\left(\frac{1}{ad-bc}\right)^2$ a vypočteme součin.

$$K' = \left(\frac{1}{ad-bc}\right)^2 \cdot \begin{pmatrix} dk-cn & dn-cl & dp-cq \\ -bk+an & -bn+al & -bp+aq \\ . & . & . \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b & bn-dm \\ -c & a & cm-an \\ 0 & 0 & \frac{1}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

$$K' = \left(\frac{1}{ad-bc}\right)^2 \cdot \begin{pmatrix} d^2k-2cdn+c^2l & -bdk+bcn+adn-acl & . \\ -bdk+adn+cbn-acl & b^2k-2abn+a^2l & . \\ . & . & . \end{pmatrix}$$

Nyní můžeme zjistit hodnotu $\delta' = (n')^2 - k'l'$.

$$\delta' = \left(\frac{1}{ad-bc}\right)^4 [(-bdk+adn+cbn-acl)^2 \\ - (d^2k-2cdn+c^2l)(b^2k-2abn+a^2l)]$$

$$\delta' = \left(\frac{1}{ad-bc}\right)^4 [(b^2d^2k^2 + a^2d^2n^2 + b^2c^2n^2 + a^2c^2l^2 - 2abd^2kn - 2b^2cdkn + 2abcdkl + 2abcdn^2 - 2a^2cdln - 2abc^2ln) - (b^2d^2k^2 - 2abd^2kn + a^2d^2kl - 2b^2cdkn + 4abcdn^2 - 2a^2cdln + b^2c^2kl - 2abc^2ln + a^2c^2l^2)]$$

$$\delta' = \left(\frac{1}{ad-bc}\right)^4 [a^2d^2n^2 + b^2c^2n^2 + 2abcdkl - 2abcdn^2 - a^2d^2kl - b^2c^2kl]$$

$$\delta' = \left(\frac{1}{ad-bc}\right)^4 [n^2(a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd) + kl(2abcd - a^2d^2 - b^2c^2)]$$

$$\delta' = \left(\frac{1}{ad-bc}\right)^4 [n^2(ad-bc)^2 - kl(ad-bc)^2]$$

$$\delta' = \left(\frac{1}{ad-bc}\right)^4 (ad-bc)^2(n^2-kl)$$

$$\delta' = \left(\frac{1}{ad-bc}\right)^2 (n^2-kl) = \left(\frac{1}{ad-bc}\right)^2 \cdot \delta$$

Z definice afinit víme, že $ad - bc \neq 0$ a druhá mocnina výrazu $\left(\frac{1}{ad-bc}\right)^2$ je vždy kladná. Ze získaného vztahu tedy plyne, že $\delta' > 0$ ($\delta' < 0$, nebo $\delta' = 0$), právě když $\delta > 0$ ($\delta < 0$, resp. $\delta = 0$).

Dokázali jsme tedy, že obrazem hyperboly v osové afinitě i afinitě obecně je opět hyperbola, obrazem paraboly je parabola a obrazem elipsy je elipsa.

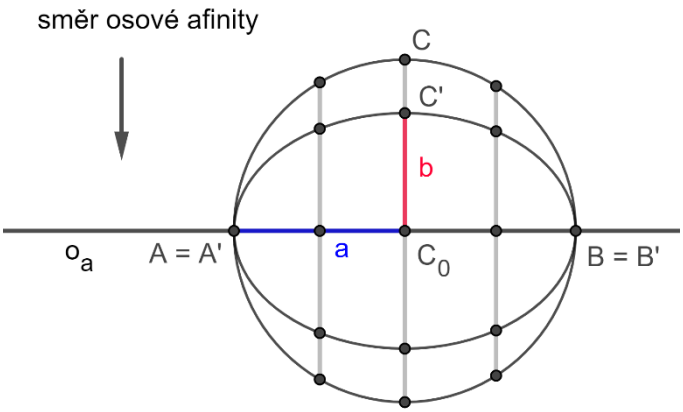
Poznámka. Určující prvky kuželoseček však invariantní nejsou.[9]

Jelikož kružnice byla popsána jako speciální případ elipsy, tak kružnice se v afinitě zobrazuje na elipsu. Tento vztah se využívá v syntetické geometrii při konstrukci elipsy s využitím osové afinity.

Vztahem mezi kružnicí a elipsou v osové afinitě se zabývá hned několik zdrojů, např. Jeger (1969, s. 132–140), Kraemer (1991, s. 113 – 153), nebo Kuřina (2002, s. 171–176). Většinou se zaměřují na různé způsoby konstrukci elipsy pomocí kružnice a osové afinity. Využití tohoto vztahu jde však i hodně do historie, ještě před zavedení pojmu

[9] To znamená, že obrazy ohnisek hyperboly a elipsy netvoří zároveň také ohniska obrazů hyperboly a elipsy. Podobně u paraboly obraz určující přímky a ohniska není totožný s určující přímkou a ohniskem nově vzniklé paraboly.

osová afinita. Podle Trkovské (2015, s. 10–12) je zmíněno už třeba v díle Archiméda ze Syrákús, který odvodil, že poměr obsahu elipsy a obsahu kruhu sestrojeného nad její hlavní osou je stejný jako poměr délek vedlejší a hlavní osy. Jedná se o případ, kdy se kružnice zobrazí na elipsu v pravoúhlé osové afinitě s osou procházející středem kruhu (obr. 17).



Obr. 17 Ukázka zobrazení kružnice na elipsu v osové afinitě

3 Významné osové afinity, členění osových afinit

3.1 Osová afinita s osou tvořenou osou x

Osovou afinitu, kde osu tvoří přímo osa x, zde uvádím na prvním místě proto, že má jednoduchou matici transformace. Navíc je snadné ji využít při vyjádření jiných osových afinit, jak bude představeno níže.

Její analytický zápis lze odvodit např. dle Věty 7 (kapitola 2.1). Osovou afinitu a_x s osou afinity tvořenou osou x, tj. $o: y = 0$ a odpovídajícími si body $P[0,1]$ a $P'[e, f]$ lze vyjádřit rovnicemi:

$$x' = x + \frac{e - 0}{0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0}(0x + y + 0) = x + ey,$$
$$y' = y + \frac{f - 1}{0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0}(0x + y + 0) = y + (f - 1)y = fy.$$

Matice A_x této osové afinity[10] má tedy tvar $A_x = \begin{pmatrix} 1 & e & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, f \neq 0$. Samodružné směry tvoří směrový vektor osy x, $\vec{u} = (e; 0)$ a směr afinity je dán vektorem $\vec{v} = (e; f - 1)$. Charakteristika osové afinity je rovna $k = f$.

J. Cederberg (2001, s. 193–194) zmiňuje, že osová afinita a_x s osou tvořenou osou x je hlavní reprezentant osových afinit, neboť každou osovou afinitu lze vyjádřit pomocí právě osové afinity a_x:

Věta 17. Mějme osovou afinitu a_m s osou afinity danou přímkou m a vyjádřenou maticí A_m, dále osovou afinitu a_x s osou afinity tvořenou osou x a maticí A_x. Obecně matice A_m reprezentující osovou afinitu a_m může být vyjádřena rovnicí $A_m = SA_xS^{-1}$, kde S představuje matici přímé shodnosti s zobrazující osu x na přímku m, tj. $s(x) = m$.

---

[10] Obdobně lze určit i osovou afinitu s osou afinity tvořenou osou y a maticí $A_y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \neq 0$.

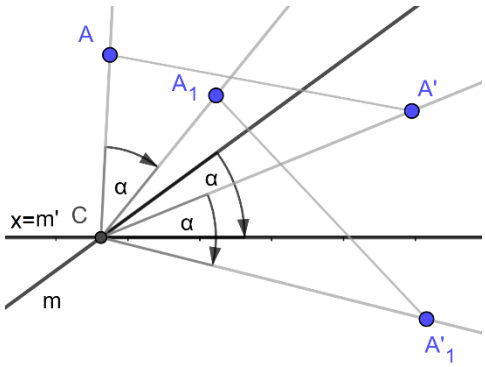
Pokud je přímka m rovnoběžná s osou x, pak matice S je matice posunutí. Pokud je přímka m různoběžná s osou x, jejich společným průsečíkem je bod M a přímka m svírá s osou x úhel α, pak matice S představuje otočení kolem bodu M o úhel α.

Ukázka. Máme zadanou osovou afinitu $a_m(m, A, A')$, kde přímka m je různoběžná s osou x a body A, A' ležící mimo tuto přímku. Průsečík přímky m a osy x je bod C a obě přímky svírají uhel α. Ověření tvrzení ukážu pomocí konstrukce bodu B. Obrazem bodu B v osové afinitě a_m je bod B'. Aby platilo tvrzení z Věty 17, pak bod B se postupným složením afinit $(s \circ a_x \circ s^{-1})$ zobrazí do bodu B_3 (dle schématu na obr. 18) a musí být totožný s bodem B'. Celá konstrukce je uvedena na obr. 20.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "s^{-1}"] \arrow[rrr, bend right, "a_m"'] & B_1 \arrow[r, "a_x"] & B_2 \arrow[r, "s"] & B_3 \end{tikzcd}$$

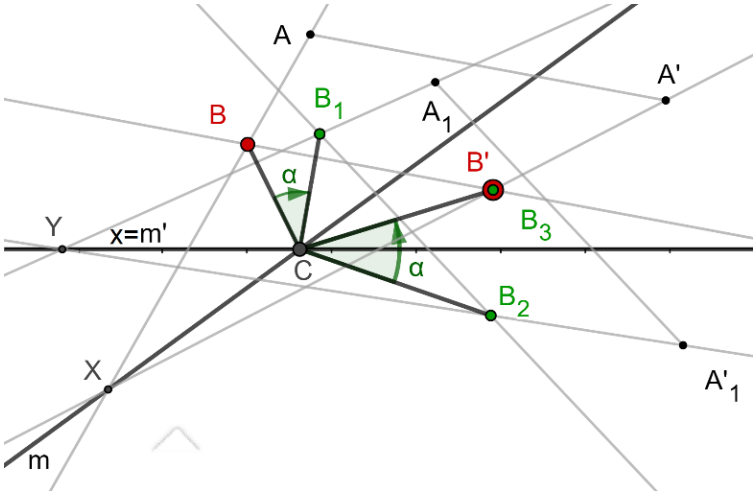
Obr. 18 Schéma rozložení osové afinity a_m

- Zobrazení s^{-1} odpovídá v tomto případě otočení přímky m na přímku $m' = x$ okolo bodu C o orientovaný úhel $-\alpha$. Jedná se o inverzní zobrazení k otočení $s(C, +\alpha)$.
- Osová afinita a_x je dána osou afinity x a párem odpovídajících si bodů A_1, A_1'. Body A_1, A_1' jsou přitom obrazy bodů A, A' v zobrazení s^{-1} (obr. 19).



Obr. 19 Zobrazení bodů A, A' v zobrazení s^{-1}

- Přímá shodnost s pak představuje otočení zobrazující osu x zpět na přímku m.



Obr. 20 Zobrazení bodu B v zobrazení $a_m i$ v zobrazení $(s \circ a_x \circ s^{-1})$

3.2 Členění osových afinit podle směru afinity a charakteristiky osové afinity

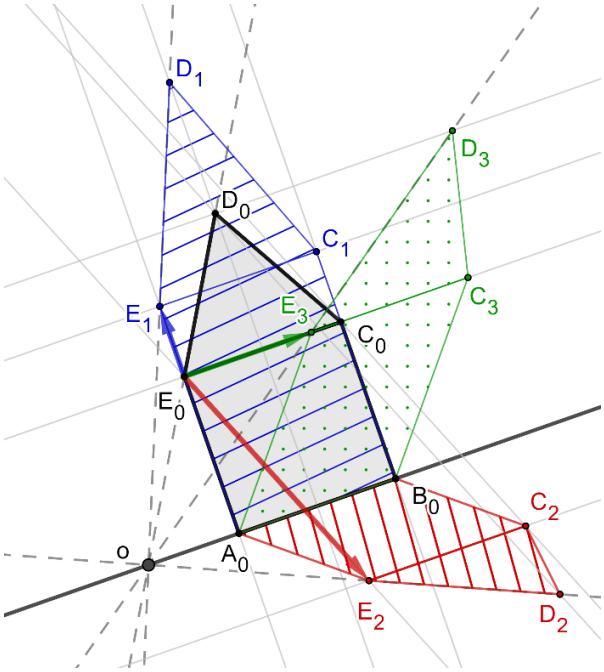
Osové afinity lze členit podle různých kritérií, nebo tyto kritéria dokonce vzájemně kombinovat. V této kapitole představím, jak se jednotlivé osové afinity rozlišují podle jejich směru afinity a podle hodnot jejich charakteristiky. Několik osových afinit, které jsou některými svými vlastnostmi specifické, podrobněji popíši.

3.2.1 Členění osových afinit podle směru afinity

Hlavním kritériem tohoto členění je vzájemná poloha osy afinity a směru afinity daného spojnicí bodu a jeho obrazu. Mějme osovou afinitu $a(o, A.A')$. Podle směru afinity rozlišujeme tři případy:

1) *Pravoúhlá osová afinita* – přímka AA' je k ose afinity kolmá;
2) *Elace* – přímka AA' je rovnoběžná s osou afinity o;
3) *Kosá (kosoúhlá) osová afinita* – přímka AA' protíná osu o, ale není k ní kolmá.

Ukázka všech tří případů je zobrazena na obr. 21. Vzorem zobrazení je pětiúhelník $A_0B_0C_0D_0E_0$, kde body A_0, B_0 jsou samodružné. Pětiúhelník $A_0B_0C_1D_1E_1$ je obrazem pětiúhelníku $A_0B_0C_0D_0E_0$ v pravoúhlé osové afinitě (označen modře), pětiúhelník $A_0B_0C_2D_2E_2$ vznikl přes kosou osovou afinitu (červeně), obrazec $A_0B_0C_3D_3E_3$ je pak výsledek elace (zeleně).



Obr. 21 Zobrazení pětiúhelníku $A_0B_0C_0D_0E_0$ v pravoúhlé osové afinitě, v elaci a v kosoúhlé osové afinitě

Ad 1) Pravoúhlá osová afinita

Pravoúhlá osová afinita t_x s osou afinity tvořenou osou x je popsána jednoduchou maticí

$$T_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, c \neq 0.$$

Libovolnou pravoúhlou osovou afinitu t_m s osou afinity m pak lze vyjádřit maticí $T_m = ST_xS^{-1}$, kde S představuje matici přímé shodnosti s zobrazující osu x na přímku m. V angličtině se tato osová afinita nazývá „strain“ (Cederberg 2001, s. 194).

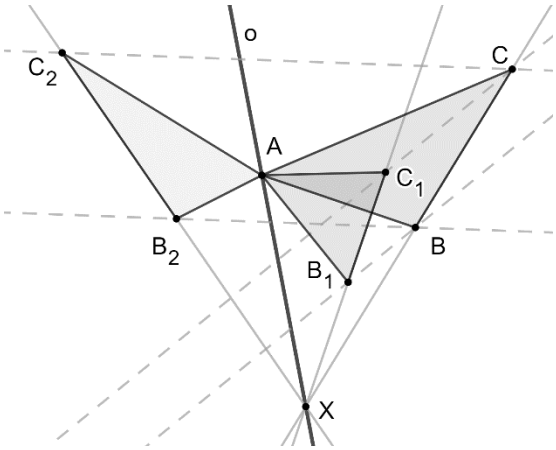
Ad 2) Elace je podrobněji představena v samostatné kapitole 3.3.1.

3.2.2 Členění osových afinit podle charakteristiky osové afinity

Stejně jako u shodností se i osové afinity dělí dle hodnoty determinantu matice zobrazení na přímé a nepřímé osové afinity. Samozřejmě to platí i pro dělicí poměr definovaný jako charakteristika osové afinity. Jestliže je charakteristika osové afinity $k < 0$, tak jde o nepřímou osovou afinitu, pokud $k > 0$ jedná se o přímou osovou afinitu.

Pro přímou osovou afinitu platí, že bod i jeho obraz leží ve stejné polorovině od osy afinity a při zobrazení n-úhelníků se nemění orientace jejich bodů. Naopak nepřímou osovou afinitu lze rozpoznat tím, že osa afinity protíná spojnici bodu a jeho obrazu právě mezi těmito body. Při zobrazování n-úhelníku v nepřímé osové afinitě dochází ke změně orientace celého mnohoúhelníku.

Přímá osová afinita je reprezentována na obr. 22 osovou afinitou $a_1\,(o, C, C_1)$, která zobrazuje ΔABC na ΔAB_1C_1. Nepřímá osová afinita $a_2\,(o, C, C_2)$ pak ΔABC transformovala na ΔAB_2C_2.



Obr. 22 Ukázka přímé a nepřímé osové afinity

Tabulka 1 zachycuje přehled členění osových afinit v závislosti na hodnotě charakteristiky osové afinity a vzájemné poloze samodružných směrů osové afinity. Z ní je patrné, že na základě hodnoty charakteristiky osové afinity se vyčleňují ještě tři specifické skupiny osových afinit:

1) *Elace* – přímá osová afinita s modulem $k = 1$;
2) *Involutorní osová afinita (souměrnost)* – nepřímá osová afinita s $k = -1$;
3) *Ekviafinní osová afinita* – osové afinity, pro něž platí $|k| = 1$. Jedná se vlastně o sjednocení předchozích dvou skupin osových afinit (elace a souměrnost).

Blíže tyto typy osových afinit představím v další kapitole.

Tab. 1 Podrobné členění osových afinit podle hodnoty charakteristiky osové afinity a vzájemné poloze samodružných směrů

	Hodnota charakteristiky (modulu) osové afinity			
	$k < 0$		$k > 0$	
	Nepřímá osová afinita		Přímá osová afinita	
		$\boldsymbol{k = -1}$	$\boldsymbol{k = 1}$	
Směr afinity JE STEJNÝ se směrem osy afinity	X	X	**Elace**	X
Směr afinity JE KOLMÝ k ose afinity	Pravoúhlá osová afinita	Osová souměrnost	X	Pravoúhlá osová afinita
Směr afinity NENÍ STEJNÝ ani KOLMÝ k ose afinity	Kosoúhlá (šikmá) osová afinita	Kosoúhlá (šikmá) souměrnost	X	Kosoúhlá (šikmá) osová afinita
		Involutorní osová afinita (souměrnost)		
		$\boldsymbol{\lvert k \rvert = 1}$ **Ekviafinita**		

3.3 Elace, souměrnost, ekviafinita

3.3.1 Elace / zkosení

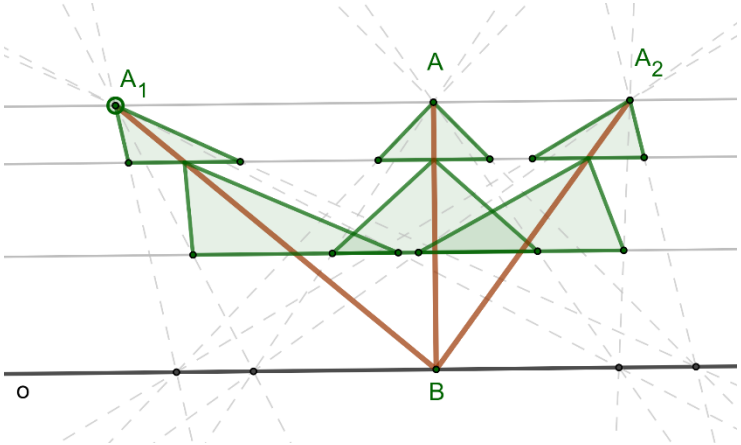
Jak už bylo uvedeno výše, elace představují speciální typ osových afinit, u kterých je směr afinity rovnoběžný s osou afinity. To znamená, že mají jen jeden samodružný směr. Všechny body mimo osu se posunují rovnoběžně s osou afinity a velikost posunutí bodu je přímo úměrná vzdálenosti bodu od osy.

Jelínek (1976) pro tuto osovou afinitu použil český název „zkosení“. V angličtině je toto zobrazení známé pod pojmem „shear“.

Opět představím alespoň jednoho základního zástupce elací, a to elaci e_x s osou afinity tvořenou osou x a maticí $E_x = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Bod $X = [0; 1]$ se přitom promítne do bodu $X' = [b; 1]$.

Přímka spojující bod s jeho obrazem neprotíná osu afinity, proto pro elaci není definován dělicí poměr představující charakteristiku osové afinity ($k = (A'AA_o)$, viz kapitola 2.3). Dle determinantu matice elace však považujeme charakteristiku osové afinity $k = \det E_x = 1$. Jedná se tedy o přímou afinitu.

Na obr. 23 jsou ukázány dvě proměny obrazce ve tvaru stromu prostřednictvím dvou elací se stejnou osou afinity $e_1(o, A, A_1)$ a $e_2(o, A, A_2)$.



Obr. 23 Ukázka zobrazení stromu v elaci

3.3.2 Souměrnost / involutorní osová afinita

Pro afinity obecně platí definice:

Definice 9. Neidentická afinní transformace f, která složena sama se sebou dává identitu, se nazývá involutorní. Symbolicky tedy platí $f \circ f = identita$, nebo $f = f^{-1}$ (Kubát a Trkovská 2011, s. 247).

Stejná podmínka platí i pro osové afinity. Zobrazení a nazveme involutorní osovou afinitou, platí-li a je osovou afinitou a zároveň $a \circ a = identita$. To znamená, že pokud je obrazem bodu X bod Y, tak obrazem bodu Y je ve stejné osové afinitě bod X. V češtině

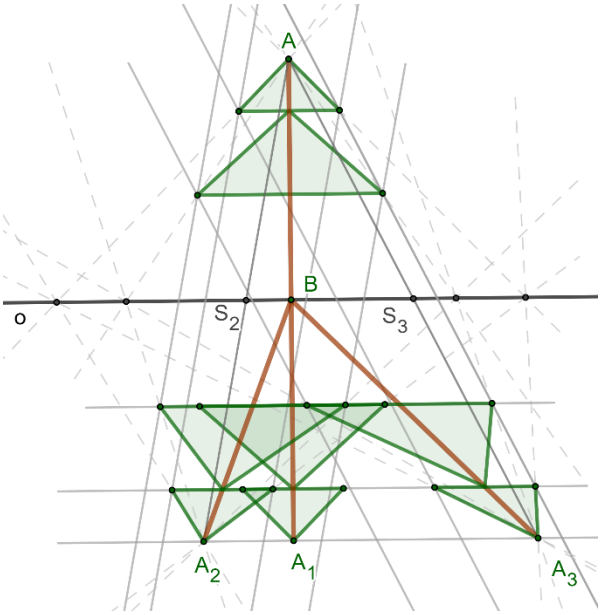
se pro toto zobrazení používá i název souměrnost (Kuřina 2002, s. 170, Kraemer 1991, s. 102). Anglický ekvivalent tohoto zobrazení je „oblique reflection“.

Involutorní osová afinita i_x s osou afinity danou osou x je popsána jednoduchou maticí (velmi podobnou matici elace) $I_x = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, přitom od $X = [0; 1]$ se promítne do bodu $X' = [b; -1]$. Pro hodnotu $b = 0$ jde o osovou souměrnost s osou x.

Determinant matice involutorní osové afinity je roven hodnotě charakteristiky osové afinity $k = \det I_x = -1$. Dělicí poměr $(A'AA_o) = -1$ znamená, že bod A_o (tj. průsečík osy afinity a úsečky $A'A$) tvoří střed úsečky A´A.

Pokud je involutorní osová afinita pravoúhlá, jedná se o osovou souměrnost, jinak hovoříme o kosé souměrnosti.

Na obr. 24 jsou ukázány tři zobrazení obrazce ve tvaru stromu, jednou se jedná o zobrazení v osové souměrnosti $i_1(o, A, A_1)$. Dva další příklady představují různé kosé souměrností se stejnou osou afinity $i_1(o, A, A_2)$ a $a_2(o, A, A_3)$. Bod B je přitom střed úsečky AA_1, body S_2, S_3 pak středy úseček AA_2, AA_3.



Obr. 24 Ukázka zobrazení stromu v souměrnosti

3.3.3 Ekviafinní osová afinita

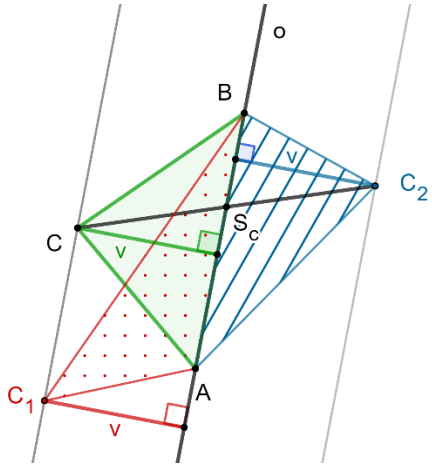
Věta 18. Osovou afinitu a nazveme ekviafinní (někdy také unimodulární), jestliže charakteristika osové afinity $k = \pm 1$.

Jediné osové afinity, které tuto podmínku splňují jsou právě elace a involutorní osová afinita (souměrnost).

Hlavní vlastnost těchto osových afinit představuje fakt, že zobrazením nemění obsah útvarů. V kapitole o charakteristice osové afinity byl odvozen vztah, že obsah S' obrazu

útvaru je přímo úměrný charakteristice osové afinity k a obsahu S původního útvaru, tedy $S' = |k| \cdot S$. Jelikož u ekviafinních osových afinit se $|k| = 1$, pak tedy $S' = S$.

Na obr. 25 lze vidět proměnu $\Delta\, ABC$ (označen zeleně) v elaci na $\Delta\, ABC_1$ (červeně) a v involutorní osové afinitě na $\Delta\, ABC_2$ (modře). Základna AB všech tří trojúhelníků leží na ose afinity a body C, C_1, C_2 mají od osy afinity stejnou vzdálenost v. Proto je obsah všech tří trojúhelníků totožný.



Obr. 25 Ukázka zobrazení trojúhelníku v ekviafinních osových afinitách

Skládáním ekviafinních osových afinit vznikne vždy jen ekviafinní afinita, nemusí to však být jen osová afinita. Vychází to z faktu, že při skládání afinit se determinanty matic násobí.

3.4 Primitivní osová afinita

David Gans (1969, s. 86–98) ve své knize zavádí pojem „primitive transformation“ (doslovný překlad „primitivní transformace“). Jedná se podle něj o klíčovou afinitu, pomocí níž snadněji odvozuje všechny vlastnosti afinních transformací. Následně dokáže, že všechny afinity lze složit právě pomocí zmíněných primitivních transformací a posunutí, a tudíž všechny vlastnosti, které dokázal pro primitivní transformace, platí i pro afinity obecně.

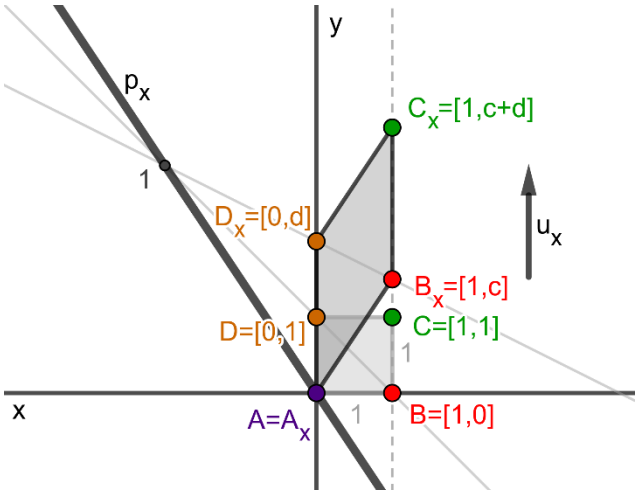
Já ve své práci uvádím tuto jeho „primitive transformation“ jako speciální typ osové afinity, neboť splňuje všechny prvky definice osové afinity. Pro zdůraznění, že se jedná

o osovou afinitu však nepoužívám doslovný překlad, ale zvolila jsem označení „primitivní osová afinita“[11].

Pod označením primitivní osová afinita s osou afinity procházející počátkem souřadnic se skrývají dva typy afinních transformací. Jedna z nich zachovává souřadnici x, u druhé pak zůstává zobrazením neměnná souřadnice y. Jak tedy vypadá analytický zápis takového zobrazení a jeho konstrukce?

Primitivní osová afinita p_x (zachovávající souřadnici x) s osou afinity procházející počátkem souřadnic (obr. 26) přiřazuje bodu $X = [x, y]$ obraz $X' = [x', y']$ podle soustavy rovnic

$$p_x : \quad x' = x, \qquad y' = cx + dy, \qquad \text{kde } d \neq 0.$$

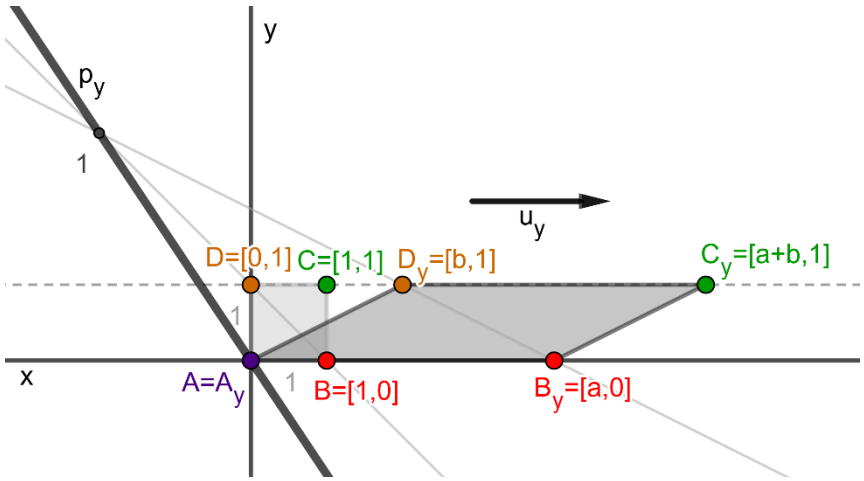


Obr. 26 Ukázka primitivní osové afinity p_x

Analogicky, primitivní osová afinita p_y (zachovávající souřadnici y) s osou afinity procházející počátkem souřadnic má analytické vyjádření

$$p_y : \quad x' = ax + by, \qquad y' = y, \qquad \text{kde } a \neq 0 \text{ (obr. 27).}$$

[11] V česky psané literatuře jsem nenarazila na žádný jiný ekvivalent pro tuto transformaci, tudíž ani na zavedený český překlad.



Obr. 27 Ukázka primitivní osové afinity p_y

V maticovém tvaru $X' = P_x \cdot X$, resp. $X' = P_y \cdot X$ jsou pak obě primitivní osové afinity s osami afinity procházejícími počátkem souřadnic určeny maticemi

$$P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{kde } d \neq 0,$$

$$\text{resp. } P_y = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{kde } a \neq 0.$$

Pojďme si nyní takto specifikované primitivní osové afinity a jejich hlavní znaky představit podrobněji.

1) Primitivní osová afinita p_x (zachovávající souřadnici x) s osou afinity procházející počátkem souřadnic:
   - Determinant transformační matice $|P_x| = d$. Vzhledem k podmínce $d \neq 0$ se tedy ani determinant matice primitivní osové afinity nerovná nule ($|P_x| \neq 0$), což dokazuje, že jde o afinitu.
   - Jde o osovou afinitu, neboť můžeme určit přímku samodružných bodů
   $$\text{hod}\begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ c & d-1 \end{pmatrix} = \text{hod}\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ c & d-1 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$
   - Rovnice osy primitivní osové afinity p_x lze snadno vyčíst přímo z matice transformace
   $$\overleftrightarrow{o}\colon\ cx + (d-1)y = 0.$$

- Počátek os souřadnic se v této transformaci zobrazí sám na sebe $O = [0,0] = O'$, jde tedy o samodružný bod a osa afinity prochází tímto počátkem.
- Směr primitivní osové afinity p_x, který je dán spojnicí vzoru a obrazu (např. $\overline{BB_x}$ na obr. 26), představuje vektor $\overrightarrow{u_x} = (0, c)$. Tento směr primitivní osové afinity p_x je vždy kolmý k ose x, nezáleží přitom na poloze osy afinity.
- Charakteristika (modul) primitivní osové afinity p_x je $k = |P_x| = d$.

2) Primitivní osová afinita p_y (zachovávající souřadnici y) s osou afinity procházející počátkem souřadnic
   - Determinant transformační matice $|P_y| = a$. Vzhledem k podmínce $a \neq 0$ se tedy ani determinant matice primitivní osové afinity nerovná nule.
   - Po odečtení jednotkové matice se hodnost matice rovná 1, i tato primitivní osová afinita tedy má přímku samodružných bodů.

$$\text{hod}\begin{pmatrix} a-1 & b \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix} = \text{hod}\begin{pmatrix} a-1 & b & 0 \\ 0 & 1-1 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

   - Rovnice osy primitivní osové afinity p_y odvozená přímo z matice transformace je

$$\overleftrightarrow{o}\colon\ (a-1)x + by = 0.$$

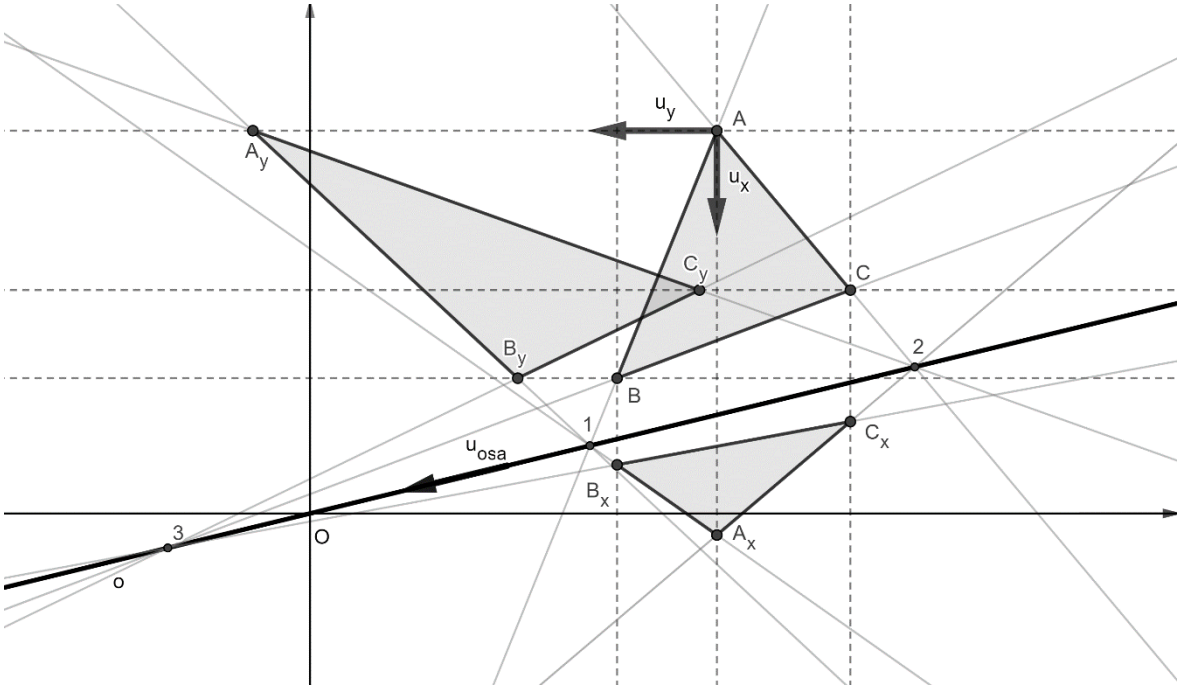
   - Vzor a obraz počátku souřadnic splývají, jde tedy o samodružný bod. Osa afinity primitivní osové afinity p_y tedy prochází počátkem.
   - Směr afinity primitivní osové afinity p_y, který je dán spojnicí vzoru a obrazu (např. $\overline{DD_y}$ viz obrázek 27), odpovídá vektoru $\overrightarrow{u_y} = (b, 0)$. Tento směr primitivní osové afinity p_y je vždy kolmý k ose y, nezáleží přitom na poloze osy afinity.
   - Charakteristika (modul) primitivní osové afinity p_y je $k = |P_y| = a$.

Při konstrukci primitivní osové afinity se vychází ze všech vlastností osové afinity a přidává se k tomu ještě další dvě specifika:

1) osa afinity prochází počátkem os souřadnic

2) směr afinity je vždy kolmý na osu x (u primitivní osové afinity p_x), nebo kolmý na osu y (u primitivní osové afinity p_y).

Ukázka geometrické konstrukce obou primitivních osových afinit s osou afinity procházející počátkem souřadnic je uvedena na obrázku 28. Trojúhelník $\Delta\, ABC$ se na něm znázorňuje v primitivní osové afinitě $p_x(o; A; A_x)$ na $\Delta\, A_xB_xC_x$ a v primitivní osové transformaci $p_y(o; A; A_y)$ na $\Delta\, A_yB_yC_y$. Osa osové afinity je v obou případech stejná, samodružný směr $\overrightarrow{u_x} = (\overrightarrow{AA_x})$ primitivní osové afinity p_x je kolmý k ose x, samodružný směr $\overrightarrow{u_y} = (\overrightarrow{AA_y})$ primitivní osové afinity p_y je kolmý k ose y. Přímky $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{A_xB_x}$, $\overleftrightarrow{A_yB_y}$ se protínají v jednom bodě, a to na přímce samodružných bodů, analogicky je to i s přímkami $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{A_xC_x}$, $\overleftrightarrow{A_yC_y}$ a $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{B_xC_x}$, $\overleftrightarrow{B_yC_y}$.



Obr. 28 Ukázka konstrukce obou primitivních osových afinit s osou afinity procházející počátkem souřadnic

4 Skládání osových afinit a grupa osových afinit

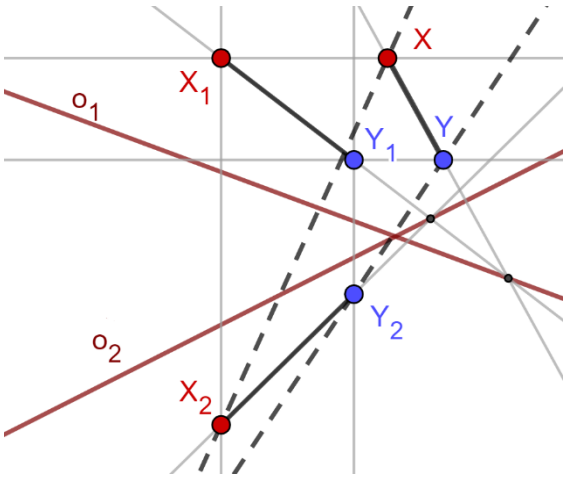
Skládání osových afinit je definováno stejně jako pro afinity obecně (viz kapitola 1.4). Nechť jsou dány dvě osové afinity $a_1: X \to a_1(X)$ a $a_2: X \to a_2(X)$. Složením zobrazení a_1 a a_2 se rozumí zobrazení $a = a_1 \circ a_2$ dané předpisem $X \to a_2(a_1(X)) = a(X)$. Daná operace se označuje jako skládání osových afinit. Obecně platí, že skládání osových afinit je asociativní, ale není komutativní, a dá se vyjádřit součinem matic osových afinit.

Na rozdíl od obecných afinit však množina všech osových afinit NETVOŘÍ vzhledem k operaci skládání zobrazení grupu, neboť není splněna podmínka uzavřenosti grupy.

Složením dvou osových afinit, které mají každá jinou osu afinity, nelze obecně získat opět osovou afinitu. Tuto skutečnost dokazuje např. složení dvou primitivních osových afinit p_x a p_y, z nichž jedna má směr afinity kolmý k ose x a osu afinity $o_1: cx + (d-1)y + n = 0$ a u druhé je směr afinity kolmý k ose y a osu afinity tvoří $o_2: (a-1)x + by + m = 0$, přitom $a, d \neq 0$ a $o_1 \neq o_2$, tzn. vektor (c, d, n) není lineární kombinací vektoru $(a-1, b+1, m)$. Pak

$$p_x \circ p_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & d & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & m \\ ac & bc+d & cm+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Výsledkem složení těchto osových afinit je afinita $a = p_x \circ p_y$, která není pro libovolné hodnoty a, b, c, d, m, n osovou afinitou.



Obr. 29 Ukázka složení dvou primitivních osových afinit

Zmíněný případ ukazuje i obr. 29. Na něm se úsečka $\overline{XY}$ zobrazí v primitivní osové afinitě $p_y(o_1, X, X_1)$ na úsečku $\overline{X_1Y_1}$, která se následně transformuje v primitivní osové afinitě $p_x(o_2, X_1, X_2)$ na úsečku $\overline{X_2Y_2}$. Složením těchto osových afinit se z úsečky $\overline{XY}$ stala úsečka $\overline{X_2Y_2}$. Jelikož spojnice vzorů a obrazů bodů X a Y nejsou rovnoběžné $(\overleftrightarrow{XX_2} \nparallel \overleftrightarrow{YY_2})$, výsledná afinní transformace nesplňuje tedy parametry osové afinity.

Osová afinita netvoří sice grupu, má však mezi afinitami v rovině významné místo. Z obecné definice se afinita v n-rozměrném afinním prostoru A_n nazývá základní, pokud množina všech jejích samodružných bodů je nadrovinou prostoru A_n (Kubát a Trkovská 2011, s. 238). Pro rovinu A_2 tedy platí, že afinita A je základní, pokud všechny její samodružné body tvoří přímku. Osová afinita v rovině je tedy základní afinitou v rovině. To znamená, že vzájemným skládáním osových afinit lze získat celou grupu afinit v rovině. Podrobněji se tomuto tématu věnuje kapitola 5.

V následujícím textu však ještě představím skupinu osových afinit, které grupu tvoří.

Věta 19. Osové afinity a_m se stejnou osou afinity m formují grupu $\mathrm{G_m}$ (Jeger 1969, s. 120).

Důkaz. Ověření správnosti tohoto tvrzení ukážu nejdříve na jednom konkrétním případu, tj. pro grupu osových afinit s osou afinity tvořenou osou x. Mějme dvě osové afinity a_1 a a_2 dané maticemi A_1 a A_2, obě s osou afinity danou osou x. Jejich složením vznikne afinita $a = a_1 \circ a_2$ vyjádřená maticí $A = A_1A_2$, tj.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & e & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i + ej & 0 \\ 0 & fj & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Výsledná matice A vyjadřuje opět osovou afinitu s osou x jako osou afinity, směr afinity se změní na $\vec{u} = (i + ej; fj - 1)$ a charakteristika osové afinity je rovna součinu charakteristik původních osových afinit $k = fj$. Zkoumaná grupa je tedy uzavřená. Násobení matic je asociativní, vzájemné skládání osových afinit s osou x tedy také zachovává asociativitu. Neutrální prvek v této grupě tvoří identické zobrazení, které lze

považovat za speciální případ osové afinity s osou x. A konečně inverzní prvek v této grupě je tvořen afinitou a^{-1} danou inverzní maticí A^{-1} k matici A, tj.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-e}{f} & 0 \\ 0 & \frac{1}{f} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matice A^{-1} opět představuje osovou afinitu se stejnou osou afinity, tedy s osou x. Geometricky to znamená, že pro osovou afinitu $a(x, P, P')$ je inverzní osová afinita definovaná jako $a^{-1}(x, P', P)$.

Bylo dokázáno, že osové afinity s osou tvořenou osou x tvoří vzhledem k operaci skládání grupu. Dle Věty 17 (kap. 3.1) lze toto tvrzení zobecnit i na osové afinity a_m se stejnou osou afinity m. Libovolnou osovou afinitu a_m s osou afinity m lze totiž vyjádřit rovnicí $a_m = s \circ a_x \circ s^{-1}$, kde zobrazení s značí přímou shodnost převádějící osu x na přímku m, tj. $s(x) = m$, a zobrazení a_x je osová finita s osou afinity rovnou ose x.

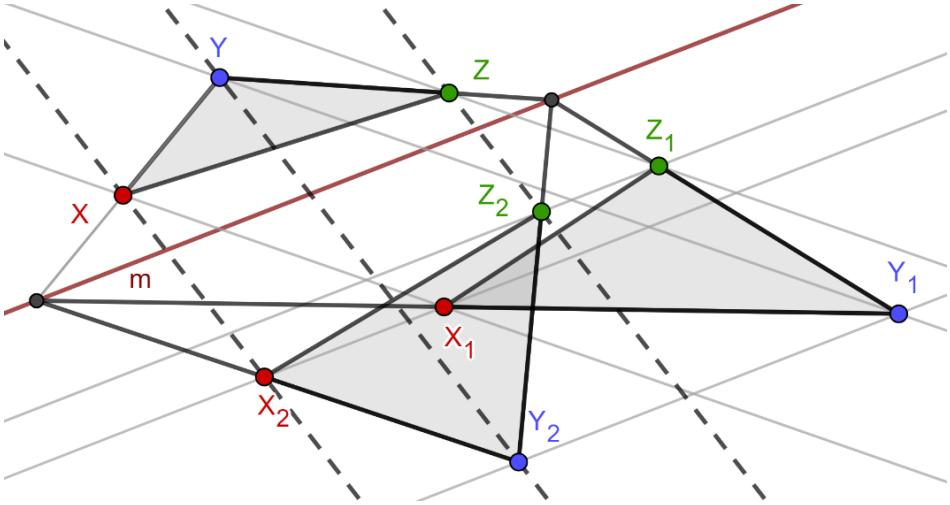
Následující vztah pak ukazuje, že složením dvou osových afinit a_m^1, a_m^2 s osou afinity m tak vznikne znovu osová afinita a_m s osou afinity m:

$$a_m^1 \circ a_m^2 = (s \circ a_x^1 \circ s^{-1}) \circ (s \circ a_x^2 \circ s^{-1}) =$$
$$= s \circ a_x^1 \circ (\underbrace{s^{-1} \circ s}_{identita}) \circ a_x^2 \circ s^{-1} = s \circ (a_x^1 \circ a_x^2) \circ s^{-1} = s \circ a_x \circ s^{-1} = a_m.$$

Podobně lze odvodit existenci inverzní osové afinity $(a_m)^{-1}$ s osou afinity m:

$$(a_m)^{-1} = (s \circ a_x \circ s^{-1})^{-1} = s \circ a_x^{-1} \circ s^{-1} = a_m^{-1}.$$

Obrázek 30 znázorňuje $\Delta\, XYZ$, který se v osové afinitě a_m^1 s osou m zobrazí na $\Delta\, X_1Y_1Z_1$. $\Delta\, X_1Y_1Z_1$ je následně zobrazen do $\Delta\, X_2Y_2Z_2$ v osové afinitě a_m^2 s osou m. Jelikož jsou přímky $\overleftrightarrow{XX_2} \parallel \overleftrightarrow{YY_2} \parallel \overleftrightarrow{ZZ_2}$ rovnoběžné a odpovídající si přímky $\overleftrightarrow{XY}$ a $\overleftrightarrow{X_2Y_2}$ se protínají na ose m, stejně jako $\overleftrightarrow{YZ}$ a $\overleftrightarrow{Y_2Z_2}$, existuje osová afinita a_m s osou afinity m, která zobrazuje $\Delta\, XYZ$ do $\Delta\, X_2Y_2Z_2$.



Obr. 30 Ukázka složení dvou osových afinit se stejnou osou afinity

5 Rozklady afinit pomocí osové afinity

Osové afinity v rovině lze libovolně navzájem skládat nebo i kombinovat s jinými afinními transformacemi. Výsledkem jsou opět afinní transformace. Podobně můžeme afinity zase rozkládat na dílčí zobrazení. Jako velmi vhodný a užitečný se jeví rozklad afinních transformací právě pomocí osových afinit. U nich totiž dokážeme určit jejich vlastnosti, samodružné prvky a umíme je zkonstruovat.

Ve studijních zdrojích jsem narazila na několik způsobů rozkladu afinních transformací prostřednictvím osových afinit. Některé jsou odvozeny konstrukčně, jiné analyticky. Všechny však lze rozdělit do dvou hlavních skupin, které v následujících dvou kapitolách popíšu.

5.1 Osová afinita jako základní afinita

Jak už bylo zmíněno v kapitole 4, osová afinita představuje základní stavební prvek afinit roviny A_2, neboť každou afinitu v rovině lze získat složením osových afinit. V této kapitole nabídnu jednoduchý důkaz uvedené skutečnosti. Následně pak analyticky i pomocí konstrukce ukážu způsob, jak lze obecnou afinitu v rovině rozložit na pouhé dvě osové afinity.

5.1.1 Rozklad afinity na tři osové afinity

Ve většině učebnicích analytické geometrie (např. Sekanina aj. 1988, s. 38, Kubát a Trkovská 2011, s. 239) se setkáme s tvrzením:

Věta 20. Ke každé afinitě f n-rozměrného afinního prostoru A_n existuje $m \leq n + 1$ základních afinit tak, že afinní transformace f je jejich složením.

Pro afinní rovinu A_2 pak tedy podle této věty platí, že každou afinitu v rovině můžeme získat složením nejvýše tří osových afinit. Nyní uvedu důkaz této věty.

Důkaz. Mějme v rovině dva trojúhelníky $\Delta\, ABC$ a $\Delta\, A_f B_f C_f$. Potom existuje afinita f, která převádí body $\Delta\, ABC$ na body $\Delta\, A_f B_f C_f$ ve stejném pořadí, je tedy jednoznačně určena.

Nyní zvolíme přímku o_1, na které neleží body A, A_f. Pak existuje osová afinita a_1, která zobrazuje bod A na bod A_f a přímka o_1 tvoří její osu afinity. Dále označme $a_1(B) = B_1$ a $a_1(C) = C_1$. Obrazem $\Delta\, ABC$ při osové afinitě a_1 je tedy $\Delta\, A_f B_1 C_1$.

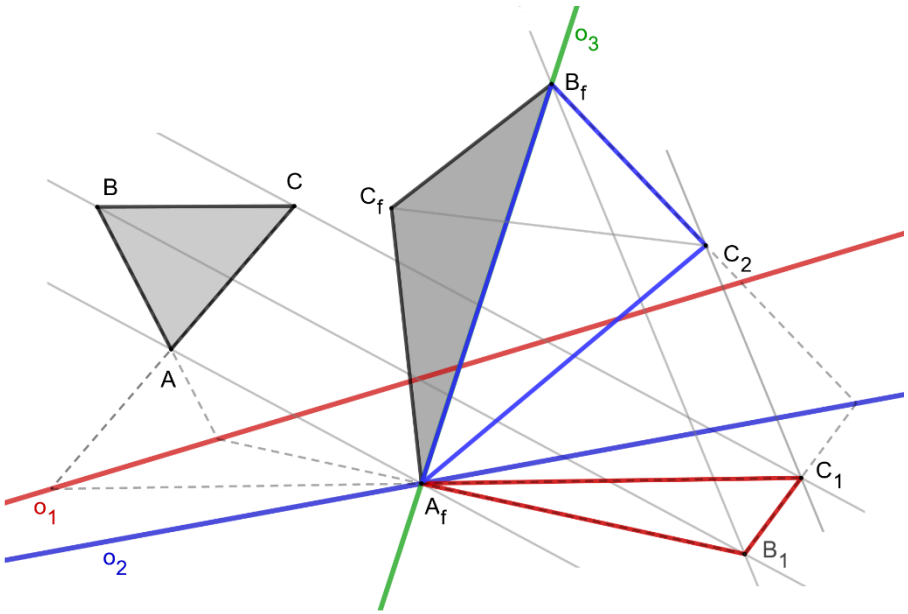
Dále zvolíme přímku o_2, která prochází bodem A_f, ale neobsahuje body B_1, B_f. Pak opět existuje osová afinita a_2, která zobrazuje bod B_1 na bod B_f a přímka o_2 tvoří její osu afinity. Když označíme $a_2(C_1) = C_2$, tak obrazem $\Delta A_f B_1 C_1$ při osové afinitě a_2 se stane $\Delta\, A_f B_f C_2$.

Třetí osová afinita a_3 s osou afinity o_3, která už je však přesně určena jako spojnice bodů $o_3 = A_f B_f$, zobrazí bod C_2 na bod C_f. Složená afinita $(a_3 \circ a_2 \circ a_1)$ zobrazuje $\Delta\, ABC$ na $\Delta\, A_f B_f C_f$, je tudíž totožná s afinitou f. Tím byla Věta 20 dokázána.

Schéma postupu důkazu je zobrazeno také na obrázku 31. Konstrukci uvedeného postupu pak zobrazuje obrázek 32.

$$\begin{tikzcd} \Delta\, ABC \arrow[r, "a_1"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \Delta\, A_f B_1 C_1 \arrow[r, "a_2"] & \Delta\, A_f B_f C_2 \arrow[r, "a_3"] & \Delta\, A_f B_f C_f \end{tikzcd}$$

Obr. 31 Schéma rozkladu afinit na tři osové afinity



Obr. 32 Ukázka konstrukce rozkladu afinit na tři osové afinity

Poznámka. Počet osových afinit při takovém rozkladu může být i nižší. To by nastalo v případě, že by se při dílčí osové afinitě zobrazilo do konečných obrazů vrcholů trojúhelníku více bodů najednou. Například pokud by se při osové afinitě a_1 promítl $\Delta\, ABC$ přímo na $\Delta\, A_f B_f C_2$, počet osových afinit potřebných pro složení afinity by se o jednu snížil.

Jelikož je možné u osových afinit a_1 a a_2 zvolit osu afinity libovolně (samozřejmě za předpokladu splnění daných podmínek), tak můžeme konstatovat, že neexistuje pouze jedna kombinace osových afinit, které mohou složením odpovídat vybrané afinní transformaci. Lze totiž vždy nalézt více než jednu trojici osových afinit, jejichž složením získáme požadovanou afinní transformaci.

5.1.2 Syntetické odvození rozkladu afinity na dvě osové afinity

Prostřednictvím syntetické geometrie však jde jednoduše dokázat i zesílená věta k předchozí Větě 20.

Věta 21. Každou afinitu f afinní roviny A_2 ze napsat jako složení nejvýše dvou osových afinit (Stehlíková 2006–2008, s. 54).

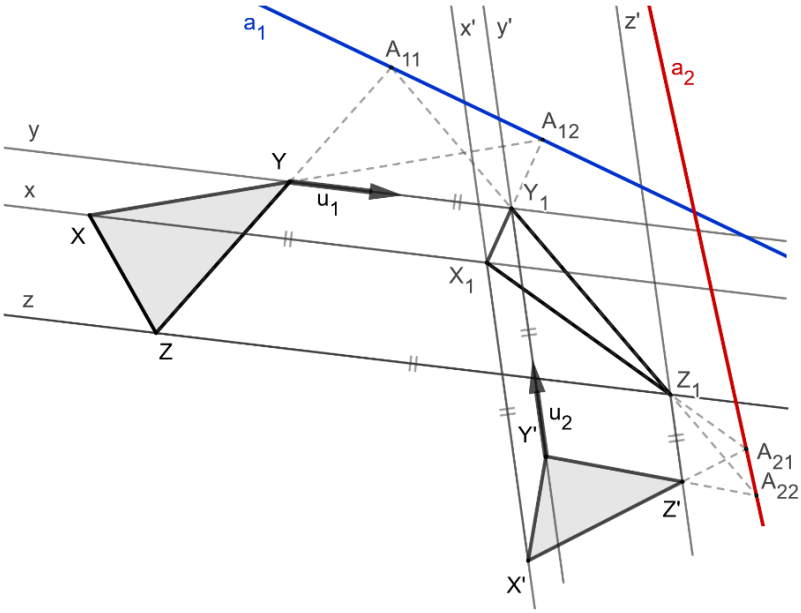
To znamená, že „…libovolné afinní zobrazení v rovině je buď přímo osovou afinitou, nebo ho lze rozložit na dvě osové afinity“ (Kuřina 2002, s. 181–183). Tuto větu demonstruje Kuřina na příkladu afinity f, která je dána dvěma trojúhelníky, a to $\Delta\, XYZ$ a jeho obrazem $\Delta\, X'Y'Z'$. Stačí najít $\Delta\, X_1Y_1Z_1$, který je obrazem $\Delta\, XYZ$ v osové afinitě a_1 a který je zároveň vzorem $\Delta\, X'Y'Z'$ v osové afinitě a_2 (schéma na obr. 33). Pak podle citované věty platí $f = a_2 \circ a_1$.

$$\begin{tikzcd} \Delta\, XYZ \arrow[r, "a_1"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \Delta\, X_1Y_1Z_1 \arrow[r, "a_2"] & \Delta\, X'Y'Z' \end{tikzcd}$$

Obr. 33 Schéma rozkladu afinit pomocí dvou osových afinit

Konstrukce. Ke dvěma trojúhelníkům $\Delta\, XYZ$ a $\Delta\, X'Y'Z'$ se libovolně zvolí bod X_1 a sestrojí se přímky $x = XX_1$ a $x' = X'X_1$. Následně se zkonstruují přímky y, z rovnoběžné s přímkou x, resp. y', z' rovnoběžné s přímkou x' tak, aby $Y \in y$, $Z \in z$,

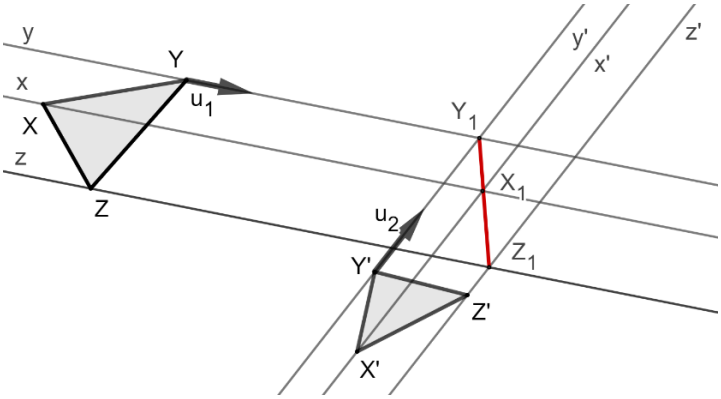
$Y' \in y', Z' \in z'$. Průsečíky přímek $Y_1 \in y \cap y'$ a $Z_1 \in z \cap z'$ pak tvoří vrcholy $\Delta X_1Y_1Z_1$ (obr. 34).



Obr. 34 Ukázka konstrukce rozkladu afinit pomocí dvou osových afinit

Zbývá otázka, zda lze vždy najít $\Delta X_1Y_1Z_1$. Volbou bodu X_1 se současně zvolí i směry osových afinit $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{XX_1}$ a $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{XX_2}$. Může se stát, že se náhodně zvolí bod X_1 takový, že průsečíky Y_1 a Z_1 s ním budou kolineární (obr. 35). To znamená, že neexistuje $\Delta X_1Y_1Z_1$, a tudíž ani osová afinita a_1. V tomto případě však stačí pouze zvolit X_1 tak, aby se změnil směr osové afinity $\overrightarrow{u_1}$ a body X_1, Y_1, Z_1 nebyly kolineární. Vždy tedy existuje alespoň jeden $\Delta X_1Y_1Z_1$, který je obrazem ΔXYZ v osové afinitě a_1 a zároveň vzorem pro $\Delta X'Y'Z'$ v osové afinitě a_2.[12]

[12] Kuřina (2002, s. 181–183) nabízí podrobnější diskusi řešitelnosti na základě vzájemného porovnávání vzdáleností rovnoběžek x, y, z a x', y', z'.



Obr. 35 Případ, kdy afinita není rozložena na dvě osové afinity

Z konstrukce tohoto rozkladu i jeho důkazu lze vidět, že uvedené rozložení afinity na dvě osové afinity také není jednoznačně určeno. Lze totiž vždy nalézt více než jednu dvojici osových afinit, jejichž složením získáme požadovanou afinní transformaci. Záleží na volbě samodružných směrů $\overrightarrow{u_1}$a $\overrightarrow{u_2}$ osových afinit a_1a a_2.

5.2 Rozklad afinit pomocí primitivních osových afinit a posunutí

V analytické geometrii neexistuje pro osové afinity obecně jednoduchý maticový zápis, který by je jednoznačně určil. Vždy je nutné zjišťovat, zda má daná afinita přímku samodružných bodů. To značně ztěžuje analytické odvození rozkladu libovolné afinity na osové afinity.

Jediný zdroj (Gans 1969, s. 96), který nabídl alespoň obdobu takového rozkladu, už jsem zmínila v kapitole 3.4, kde jsem představila primitivní osové afinity jako speciální typ osových afinit. Pro připomenutí – primitivní osové afinity jsou osové afinity, jejichž směr afinity je buď kolmý k ose x, nebo kolmý k ose y. David Gans navíc pracuje pouze s primitivními osovými afinitami, jejichž osa afinity prochází počátkem souřadnic. Představím teď jeho rozklad obecné osové afinity.

Věta 22. Každá afinní transformace může být rozložena na primitivní osové afinity (s osou afinity procházející počátkem souřadnic) a posunutí, a to přesně v tomto pořadí.

Důkaz. Afinní transformaci f ve formátu

$$f: \begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n, \end{cases} \qquad ad - cb \neq 0$$

získáme jako výsledek složení transformací $f = t \circ f_1$

$$f_1: \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad \text{a} \quad t: \begin{cases} x'' = x' + m \\ y'' = y' + n, \end{cases}$$

v tomto pořadí. Tím rozdělí afinity na lineární a translační složku. U druhého zobrazení se jedná o posunutí. Lineární zobrazení f_1 může být dále rozloženo na dvě primitivní osové afinity (s osou procházející počátkem), a to $f_1 = p_x \circ p_y$

$$p_y \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = y \end{cases} \quad \text{a} \quad p_x \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = \frac{c}{a}\, x' + \frac{ad-bc}{a} y', \end{cases} \quad \text{kde } a \neq 0,$$

nebo v případě kdy $a = 0$ na primitivní osové afinity $f_1 = p_y \circ p_x$

$$p_x \begin{cases} x' = x \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad \text{a} \quad p_y \begin{cases} x'' = \frac{ad-bc}{d} x' + \frac{b}{d} y' \\ y'' = y', \end{cases} \quad \text{kde } d \neq 0.$$

Maticový zápis těchto rozkladů afinit je a) $F = TP_xP_y$

$$\begin{pmatrix} a & b & m \\ c & d & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c/a & (ad-bc)/a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{kde } a \neq 0,$$

nebo b) $F = TP_yP_x$

$$\begin{pmatrix} a & b & m \\ c & d & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (ad-bc)/d & b/d & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{kde } d \neq 0.$$

Pro případ, kdy se $a, d = 0$ nabízí Gans rozklad sérii primitivních osových afinit s osami procházejícími počátkem souřadnic dle tohoto analytického zápisu:

$$\begin{cases} x^i = x - y \\ y^i = y \end{cases}, \quad \begin{cases} x^{ii} = x^i \\ y^{ii} = x^i + y^i \end{cases}, \quad \begin{cases} x^{iii} = -bx^{ii} + by^{ii} \\ y^{iii} = y^{ii} \end{cases}, \quad \begin{cases} x^{iv} = x^{iii} \\ y^{iv} = cy^{iii} \end{cases}.$$

Maticový zápis tohoto rozkladu afinity, kde $a, d = 0$ je $F = TP_x^{iv}P_y^{iii}P_x^{ii}P_y^{i}$

$$\begin{pmatrix} 0 & b & m \\ c & 0 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Uvedené rozklady tedy dokazují tvrzení z Věty 22.

5.3 Rozklad afinit přes podobnost a osovou afinitu

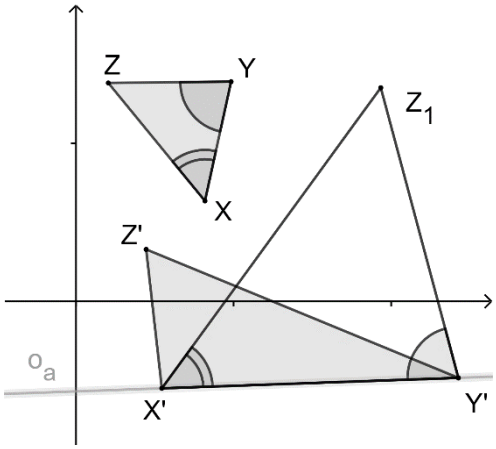
V této části představím další zajímavý rozklad afinit pomocí osové afinity, a to opět synteticky i analyticky.

Věta 23. Libovolné afinní zobrazení lze rozložit na podobné zobrazení a osovou afinitu (Kuřina 2002, s. 179).

Důkaz tohoto tvrzení lze snadno vyvodit. Je dána afinita f, která vzor $\Delta\, XYZ$ zobrazí do obrazu $\Delta\, X'Y'Z'$. Stačí sestrojit $\Delta\, X'Y'Z_1$, který je obrazem $\Delta\, XYZ$ v podobnosti d a následně ze vzoru $\Delta\, X'Y'Z_1$ sestrojit $\Delta\, X'Y'Z'$ v osové afinitě a s osou afinity danou samodružnými body X'a Y' a směrem afinity $\overrightarrow{ZZ_1}$ (obr. 36 a 37). Pro afinitu f pak platí $f = a \circ d$.

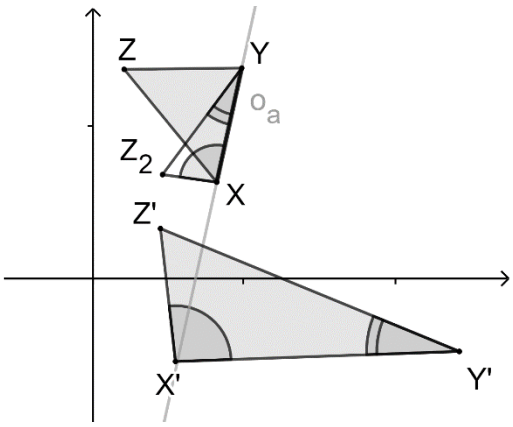
$$\begin{tikzcd} \Delta\, XYZ \arrow[r, "d"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \Delta\, X'Y'Z_1 \arrow[r, "a"] & \Delta\, X'Y'Z' \end{tikzcd}$$

Obr. 36 Schéma rozkladu afinit na osovou afinitu a podobnost



Obr. 37 Ukázka konstrukce rozkladu afinit na osovou afinitu a podobnost

Možné je i opačné řazení zobrazení při rozkladu. Pro rozklad $f = a \circ d$ je pak třeba sestrojit $\Delta\, XYZ_2$ v podobnosti d, jehož vzorem je $\Delta\, X'Y'Z'$. Dále pak navazuje konstrukce $\Delta\, XYZ$ v osové afinitě a s osou afinity danou body X, Y a směrem afinity $\overrightarrow{ZZ_2}$ (obr. 38).



Obr. 38 Ukázka konstrukce rozkladu afinit na podobnost a osovou afinitu

Podobný rozklad afinit, ovšem z analytického pohledu, zmiňuje ve své knize také Judith Cederberg (2001, s. 194–195). Využívá k němu specifické osové afinity, které mají velmi jednoduchou matici zobrazení. Samozřejmě to však není jediná varianta rozkladu. Slouží však jako důkaz, že existuje alespoň jeden takový rozklad.

Věta 24. Libovolná afinita může být zapsána jako výsledek skládání elace s osou x (e_x vyjádřenou maticí E_x), pravoúhlé osové afinity s osou x (k_x s maticí K_x) a přímé podobnosti (d_+ s maticí D_+).

Jako důkaz uvádí analytické odvození tohoto rozkladu pro matici F obecné afinity f

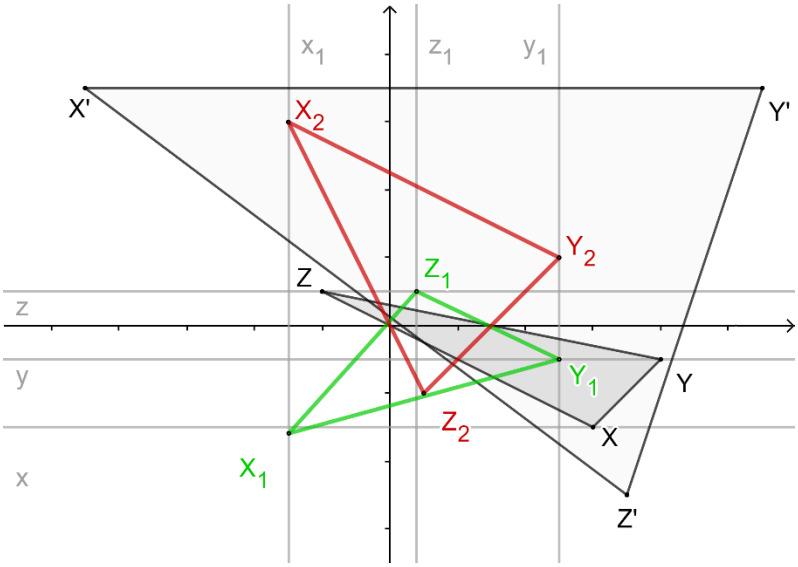
$$F = D_+ K_x E_x$$

$$\begin{pmatrix} a & b & m \\ c & d & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c & m \\ c & a & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & j & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde $(ad - bc) \neq 0$, $(a, c) \neq (0,0)$ a kde koeficienty k a j nabývají hodnot

$$j = \frac{(ab + cd)}{(a^2 + c^2)} \quad \text{a} \quad k = \frac{(ad - bc)}{(a^2 + c^2)}.$$

Obrázek 39 reprezentuje rozklad afinity dle Věty 24.



Obr. 39 Ukázka konstrukce rozkladu afinity na elaci, pravoúhlou osovou afinitu a přímou podobnost

Jelikož zmíněná elace i pravoúhlá osová afinita mají totožnou osu afinity, a to osu x, jejich složením vznikne také osová afinita s osou x. Předchozí tvrzení tedy můžeme upravit, čímž vlastně analyticky potvrdíme Větu 23:

Věta 25. Libovolná afinita může být zapsána jako skládání osové afinity s osou x (a_x vyjádřené maticí A_x) a přímé podobnosti (p_+ s maticí P_+) – obr. 40.

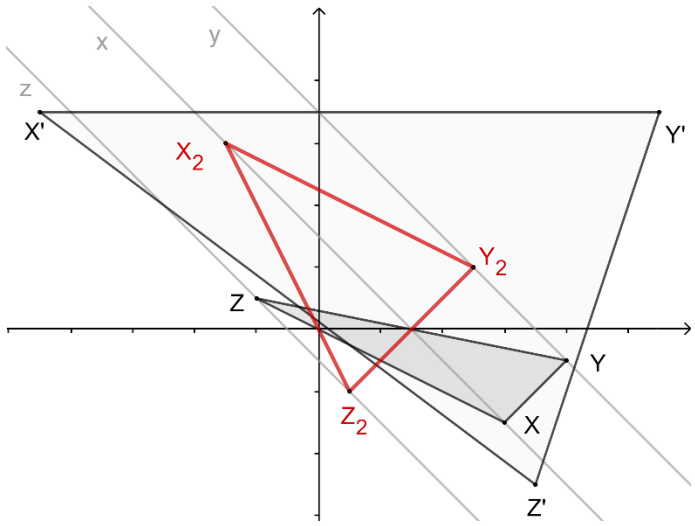
$$A = P_+ A_x$$

$$\begin{pmatrix} a & b & m \\ c & d & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c & m \\ c & a & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{j} & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde $(ad - bc) \neq 0$, $(a, c) \neq (0,0)$. Koeficienty k a j nabývají hodnot

$$j = \frac{(ab + cd)}{(a^2 + c^2)} \quad \text{a} \quad k = \frac{(ad - bc)}{(a^2 + c^2)}.$$

Osová afinita a_x vyjádřená maticí A_x má osu afinity osu x a samodružné směry $\overrightarrow{u_1} = (1,0)$ a $\overrightarrow{u_2} = \left(\frac{j}{k-1}, 1\right)$.



Obr. 40 Ukázka konstrukce rozkladu afinit na osovou afinitu s osou x a přímé podobnosti

Závěr

V závěru práce mohu konstatovat, že nejtěžší pro mě bylo zkombinovat dohromady informace z velkého množství zdrojů. Definice a základní vlastnosti osových afinit se v literatuře příliš neodlišují, řada autorů však k tématu osových afinit zmiňuje jen dílčí informace a zdůrazňuje jiné prvky, možnosti či okolnosti tohoto zobrazení. Setkala jsem se i s nejednotností pojmů či užívané terminologie. Přesto se mi podle mého názoru podařilo do práce zakomponovat většinu relevantních informací k tématu osové afinity v rovině, které jsem v citované literatuře našla.

Přínosem této práce mělo být i propojení syntetického a analytického pohledu na téma osové afinity v rovině. Při psaní jsem přemýšlela, jak oba přístupy vhodně propojit. Jedna z variant byla nejdříve představit celé téma analyticky a následně totéž provést synteticky, čímž by se dobře ukázaly výhody a nevýhody obou přístupů. Toto by však bylo možné i prostým porovnáním odborných textů či učebnic.

Nakonec jsem proto zvolila jinou variantu, a to postupného střídání přístupů. U každého dílčího oddílu jsem tedy popsala či alespoň zmínila pohled na dané téma, jak analyticky, tak i synteticky. Tím jsem chtěla docílit toho, aby byla osová afinita představena čtenáři názorněji a komplexněji. Nevýhodu tohoto členění však vidím v tom, že takto podané informace jsou více rozkouskované a mnohdy na sebe ne úplně navazují. To může někomu připadat nekonzistentně.

Nechám na čtenáři, aby posoudil, zda jsem získané poznatky vhodně propojila. Jestli je téma osových afinit takto popsáno komplexnější, nebo zda se takovéto rozčlenění čtenáři jeví spíše nekompatibilní.

Co mohu tvrdit s určitostí, potvrdilo se mi, že pro některá tvrzení a jejich důkazy je výhodnější analyticky přístup a pro některá syntetický. Například zjišťování, jak se obecně v osové afinitě zobrazuje parabola, hyperbola a elipsa, by se synteticky odvozovalo dost komplikovaně. Naopak dokázat při rozkladech afinit, že vždy existuje dvojice osových afinit, jejichž složením danou afinitu získáme, lze konstrukčně velmi snadno a rychle. V analytické geometrii se však takové odvození v literatuře vůbec neobjevuje.

Ještě bych chtěla zmínit jeden přínos této práce, a to představení primitivních osových afinit. V jejich případě totiž podle mě dochází k tomu, že se krásně doplňuje syntetický a analytický přístup. V obou pohledech se tyto osové afinity velmi jednoduše popisují i interpretují. Navíc je možné jejich využití u rozkladů afinit.

Seznam použitých informačních zdrojů

BOČEK, Leo, ŠEDIVÝ, Jaroslav, 1979. *Grupy geometrických zobrazení.* Vyd. 1. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 213 s.

BOČEK, Leo, ZHOUF, Jaroslav, 2012. *Planimetrie*. 2. rozš. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta. ISBN 978-80-7290-594-2.

BRANNAN, David A., ESPLEN, Matthew F., GRAY Jeremy J., 1999. *Geometry*. New York: Cambridge University Press. 512 s. ISBN 978-0-521-59787-6 (1. vydání, 8. dotisk z roku 2007).

CEDERBERG, Judith N., 2001. *A course in modern geometries*. 2nd ed. New York: Springer-Verlag. Undergraduate texts in mathematics. 442 s. ISBN 978-1-4419-3193-1.

ČIŽMÁR, Ján, 1984. *Grupy geometrických transformácií*. Vyd. 1. Bratislava: Alfa. 374 s.

GANS, David, 1969. *Transformations and geometries*. New York: Appleton-Century-Crofts. 402 s.

HAŠEK, Roman, 2018. *GEOMETRIE 3 - KMA/GE3SŽ (celoživotní vzdělávání)* [online]. [cit. 2021-03-03]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~hasek/GEO3/GEO3_CZV_SS_Text_2017_2.pdf

HEJNÝ, Milan, JIROTKOVÁ, Darina, VONDROVÁ Naďa, 1997. *Geometrické transformace (metoda analytická)*. Praha: Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy. 99 s. ISBN 80-86039-25-0.

JANYŠKA, Josef, 2020. *Geometrická zobrazení* [online]. Učební text MU [cit. 2021-03-27]. Dostupné z: https://www.math.muni.cz/~janyska/ZobrazeniWS.pdf.

JEGER, Max, 1969. *Transformation Geometry*. 2nd ed. London: George Allen and Unwin Ltd. 143 s. Mathematical studies: A Series For Teachers and Students, No. 1. Překlad z němčiny do angličtiny DEICKE A.W. a HOWSON A.G. SBN 04 513002 7.

JELÍNEK, Miloš, 1976. *Transformace 5*. Vyd. 1. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. Nové směry ve školské matematice. 256 s.

KADLEČEK, Jiří, TROJÁK, Jan, 1984. *Geometrie III. Geometrická zobrazení. Přehled látky s řešenými příklady*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. 249 s.

KRAEMER, Emil, 1991. *Zobrazovací metody: promítání rovnoběžné. I. díl*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. 245 s. ISBN 80-04-21778-8.

KUBÁT, Václav, TRKOVSKÁ, Dana, 2011. *Analytická geometrie v afinních a eukleidovských prostorech*. Vyd. 1. Praha: Matfyzpress. 359 s. ISBN 978-80-7378-144-6.

KUŘINA, František, 2002. *Deset geometrických transformací*. Vyd. 1. Praha: Prometheus. 282s. ISBN 80-7196-231-7.

LÁVIČKA, Miroslav, 2006. KMA/G2 Geometrie 2: Pomocný učební text [online]. Plzeň: ZČU v Plzni. [cit. 2023-01-03]. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~sir/soubory/G2_text.pdf

LEVÁK, Ondřej, 2010. *Afinita a kolineace*. Brno. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce Josef Janyška.

OLŠÁK, Petr, 2010. *Lineární algebra* [online]. Druhé vydání. Praha. [cit. 2021-03-09]. Dostupné z: http://petr.olsak.net/ftp/olsak/linal/linal2.pdf

PLICHTOVÁ, Petra, 2013. *Webová aplikace pro výuku osové afinity a středové kolineace*. Diplomová práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky. Vedoucí práce Jana Hromadová. (Webová aplikace je dostupná na adrese https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~jole/plichtova/Diplomka/AfinitaAKolineace)

SEDLÁŘ, V. *Analytická geometrie. Téma 3.: Afinní zobrazení* [online]. Matematický ústav, Slezská univerzita. Učební text [cit. 2021-03-27]. Dostupné z: http://homepages.math.slu.cz/VladimirSedlar/files/AfinniZobrazeni.pdf

SEKANINA, Milan, BOČEK, Leo, KOČANDRLE, Milan, ŠEDIVÝ Jaroslav, 1988. *Geometrie II.* Vyd. 1. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. 307 s. Učebnice pro VŠ.

STEHLÍKOVÁ, Naďa, 2006–2008. *Analytická geometrie II: Geometrické transformace* [online]. Praha: Univerzita Karlova [cit. 2021-03-03]. Dostupné z: https://docplayer.cz/740733-Analyticka-geometrie-ii-geometricke-transformace.html

TRKOVSKÁ, Dana, 2015. *Historický vývoj geometrických transformací*. Dizertační práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky. Vedoucí práce Bečvář, Jindřich.