MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Cyril Kotecký

Geometrie intervalových lineárních soustav

Katedra aplikované matematiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. Mgr. Milan Hladík Ph.D
Studijní program: Informatika
Studijní obor: Obecná informatika

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu Milanu Hladíkovi za doporučení perfektního tématu, za jeho cenné a klíčové rady, stejně jako za jeho trpělivost.

Název práce: Geometrie intervalových lineárních soustav

Autor: Cyril Kotecký

Katedra: Katedra aplikované matematiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. Mgr. Milan Hladík Ph.D, Katedra aplikované matematiky

Abstrakt: Intervalové lineární systémy rovnic a nerovnic jsou lineární systémy, kde reálné prvky vektorů a matic nahradíme uzavřenými intervaly reálných čísel. Množiny řešení těchto systémů mají zajímavé vlastnosti, a to zejména, že jsou sjednoceními exponenciálně mnoha polyedrů. Toto činí řešení mnoha problémů těžkým, zatímco na druhou stranu mají množiny formu, která je intuitivně přístupná pro analýzu. Tato práce se zabývá studováním geometrie těchto množin. Začneme rekapitulací jejich známých vlastností, jako jsou omezenost a souvislost. V prvé řadě se ale budeme soustředit na podmínky konvexity a na charakterizaci konvexního obalu, kde je obojí známé pro speciální případ systémů s regulárními intervalovými maticemi. S využitím teorie polyedrů tyto výsledky zobecníme, zejména pro obecné systémy intervalových lineárních nerovnic. Ukážeme ilustrativní příklady, některé sloužící jako protipříklady v případech, kde zobecnění nejsou možná.

Klíčová slova: intervalové lineární systémy, polyedry, geometrie, konvexita, konvexní obal

Title: Geometry of interval linear systems

Author: Cyril Kotecký

Department: Department of Applied Mathematics

Supervisor: prof. Mgr. Milan Hladík Ph.D, Department of Applied Mathematics

Abstract: Interval linear systems of equalities and inequalities are linear systems, where the real numbered entries of the vectors and matrices are replaced with closed intervals of real numbers. The sets of solutions to these systems have interesting properties, mainly that they are unions of exponentially many convex polyhedra. This makes solving many problems hard, while on the other hand, the solution sets have a form that is convenient to analyze. This thesis deals with studying the geometry of such sets. We will begin by reviewing known properties of these sets, such as boundedness and connectedness. But mostly, we will focus on the conditions for convexity and the characterization of the convex hull, which are both known for the special case of systems with invertible interval matrices. Using polyhedral theory, we will broaden these results, mostly to general systems of interval linear inequalities. We will present illustrative examples, some serving as counter-examples in cases where generalizations are not possible.

Keywords: interval linear systems, polyhedra, geometry, convexity, convex hull

Obsah

1. Úvod

Paměť počítačů je konečná. Přímým důsledem je, že musíme reálné hodnoty aproximovat ve floating point aritmetice, čímž nabíráme chybu, ještě než jsme začali dělat jakékoliv kalkulace. Když potom začneme s těmito hodnotami provádět výpočty, často akumulejeme ještě větší chybu, která v mnohých případech může divergovat a učinit tak výsledek zcela nepoužitelným.

Pro mnoho speciálních případů existují různé numerické metody, které nám pomáhají chyby minimalizovat a produkovat výsledky s jistými garancemi jejich přesnosti a konvergence ke správnému výsledku.

Další způsob, jak přistupovat k těmto nepřesnostem, je pracovat se systémy, které je dokáží reprezentovat. Zde přichází na pomoc intervalová aritmetika. Jak název napovídá, místo reálných hodnot použijeme intervaly, které inherentně zachycují nějaké specifické množství nejistoty, a dovolují nám provádět kalkulace v této reprezentaci. Intervalová lineární aritmetika je potom lineární algebra s intervalovými systémy. To znamená, že vektory a matice mají jako jednotlivé položky intervaly.

Na rozdíl od lineární algebry, kde bývá geometrická interpretace často přímočará, v intervalových lineárních systémech je složitější. Když začneme dávat dohromady systémy rovnic a nerovnic s intervalovými maticemi a vektory, zjistíme, že množina řešení takových systémů má zajímavou vlastnost. Zatímco je obecně nekonvexní, je konvexní v každém ortantu.

Konvexita má v informatice speciální význam, obzvlášť v optimalizaci, kde činí mnoho problémů řešitelných. Proto se v této práci budeme zabývat zkoumáním geometrických vlastností množin řešení intervalových systémů, především co se týče jejich konvexity a konvexního obalu.

Jako příklad, kde se toto stane užitečným, můžeme vzít situaci, kdy se snažíme optimalizovat lineární účelovou funkci nad množinou řešení nějakého intervalového lineárního systému. Výměnou komplikované nekonvexní množiny řešení za uzávěr jejího konvexního obalu transformujeme úlohu na problém lineárního programování. Vzhledem k tomu, že uzávěr konvexního obalu množiny řešení je konvexní polyedr, můžeme najít jeho množinu optimálních řešení, která bude nějakou z jeho stěn. Potom, jak se dozvíme, máme garanci, že najdeme prvek původní množiny řešení uvnitř této stěny.

Z tohoto a z dalších důvodů je užitečné studovat geometri množiny řešení intervalových lineárních systémů.

Cílem této práce je sesbírat známá fakta o intervalových lineárních systémech, která jsou spojená s geometrií. Poté, kde to bude možné, se pokusíme výsledky zobecnit, nebo alternativně, zkusit najít nová pozorování, která by eventuálně mohla vést k heuristikám, které by v budoucnu mohly být požívané pro efektivnější algoritmy pro řešení těchto systémů.

Autor této práce předpokládá čtenářovu znalost základních konceptů lineární algebry, jako jsou matice, vektory, afinní prostory a podobně. Stejně tak se předpokládá znalost základních geometrických konceptů, v první řadě týkajících se nadrovin a poloprostorů.

1.1 Notace

Začneme definováním několika zkratek, které budeme používat.

- Budeme značit $[n] := \{1, ..., n\}$.
- Vektor samých jedniček $e = (1, ..., 1)$ značíme jako $e \in \mathbb{R}^n$.
- Pro libovolné $i \in [n]$ definujeme jednotkový vektor $e_i \in \mathbb{R}^n$ po složkách jako

$$(e_i)_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

- Pro číslo $a \in \mathbb{R}$, označíme $\operatorname{sgn}(a) := \begin{cases} 1 & a \geq 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}.$
- Pro vektor $v \in \mathbb{R}^n$ označíme $\operatorname{sgn}(v)_i = \operatorname{sgn}(v_i)$ pro všechna $i \in [n]$.
- Pro vektor $v \in \mathbb{R}^n$ označíme $D_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonální matici s prvky

$$(D_v)_{ij} = \begin{cases} v_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

- Pro matici A, vektor b a indexovou množinu $\emptyset \neq I \subseteq [m]$ budeme pomocí A_I a b_I značit podmatici, respektive podvektor, které ponechávají pouze řádky, respektive prvky indexované indexy v I.
- Pro množinu $S \subseteq \mathbb{R}^n$ označíme její komplement $S^c = \mathbb{R}^n \setminus S$.

1.2 Konvexní množiny

Definice 1 (Konvexita)**.** *Nechť* $S \subseteq \mathbb{R}^n$ *je množina.*

- *Množinu* S *nazveme* konvexní*, pokud*

$$\forall x,y \in S \;\; \forall\, 0 \leq \;\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \textit{ takové, že } \lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$
$$\textit{je } z = \lambda_1 x + \lambda_2 y \in S.$$

- Konvexní obal conv(S) *množiny* S *je nejmenší konvexní množina obsahující* S*. Alternativě je to průnik všech konvexních množin obsahujících* S*.*

1.3 Konvexní polyedry

Jak se dozvíme v následujících sekcích, množina řešení intervalových lineárních systémů je sjednocením konvexních polyedrů. Uzávěr konvexního obalu takové množiny bude opět konečně generovaný konvexní polyedr. Z těchto důvodů se seznámíme s několika základními koncepty a vlastnostmi těchto objektů, mimo jiné se stěnami a recesními kužely.

Nejdřív si pojďme připomenout definice základních druhů konvexních polyedrů.

Definice 2 (Konvexní polyedr a konvexní polytop)**.**

- *Neprázdná množina* $P \subseteq \mathbb{R}^n$ *se nazývá* konvexní polyedr*, pokud máme*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \leq b\}$$

  pro nějakou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *a vektor* $b \in \mathbb{R}^m$*.*

- *Omezený konvexní polyedr* P *se nazývá* konvexní polytop*.*
- Dimenze *konvexního polyedru je dimenze nejmenšího afinního prostoru, který ho obsahuje.*

Pozorování 1.1 (Vlastnosti konvexních polyedrů)**.**

- *Průnik konvexních množin je konvexní.*
- *Konvexní polyedr je průnik konečně mnoha uzavřených poloprostorů, které svou uzavřeností a konvexitou činí výsledný polyedr také konvexním a uzavřeným.*

Pokračujeme s definicí stěn a navazujících konceptů. Jak uvidíme, stěny jsou kritické pro porozumění a popsání konvexních polyedrů.

Definice 3 (Stěny)**.**

- *Neprázdnou množinu* $F \subseteq P$ *nazveme* stěnou *konvexního polyedru* $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \leq b\}$*, pokud existuje podmnožina* $I \subseteq [m]$ *taková, že*
$$F = \{x \in P : \; (Ax)_I = b_I\}.$$
- Podstěna F' *stěny* F *je stěna polyedru* P *splňující* $F' \subseteq F$*.* *Pak máme* $F' = \{x \in P : \; (Ax)_{I'} = b_{I'}\}$ *pro nějaké* $I' \supseteq I$*.*
- *Stěna* F' *je vlastní* podstěna *stěny* F*, pokud* $F' \subsetneq F$*. Potom také* $I' \supsetneq I$*.*
- Minimální stěna *je stěna, která neobsahuje žádné vlastní podstěny.*

Každá stěna má takzvanou stěnovou nadrovinu.

Definice 4 (Stěnová nadrovina)**.**

- Stěnová nadrovina h *stěny* F *konvexního polyedru* P *je nadrovina splňující* $F \subseteq h$ *a* $P \subseteq h^-$*, kde* $h^- = \{x \in \mathbb{R}^n : \; a^\top x \leq b\}$ *pro nějaké* $a \in \mathbb{R}^n$*,* $b \in \mathbb{R}$*, neboli* h^- *je negativní uzavřený poloprostor určený nadrovinou* h*.*
- *Alternativně můžeme také psát* $F = h \cap P$ *and* $P \subseteq h^-$*.*
- *Stěna* $F = \{x\}$ *pro nějaké* $x \in P$ *se nazývá* vrchol P*. Říkáme, že má dimenzi nula.*

Pozorování 1.2 (Vlastnosti stěn Schrijver (1998) [str. 101, 104])**.**

- *Stěny konvexního polyedru jsou konvexní polyedry.*
- *Polyedr má konečně mnoho stěn.*
- *Minimální stěny jsou afinní prostory.*
- *Všechny minimální stěny* P *mají stejnou dimenzi* $n - \operatorname{rank}(A)$*.*
- *Každá stěna obsahuje minimální stěnu, nebo je sama minimální.*
- *Pokud existuje nadrovina* h *taková, že* $h \cap P \neq \emptyset$ *a* $P \subseteq h^-$*, pak* $F = h \cap P$ *je stěna.*

Důležité objekty v práci s konvexními polyedry jsou kužely a recesní kužely. Nejen, že se dají jednoduše charakterizovat pro konvexní polyedry reprezentované maticí, ale navíc nám spolu s minimálními stěnami dávají užitečný alternativní způsob, jak efektivně geometricky popsat konvexní polyedr.

Definice 5 (Kužely)**.**

- *Množinu* K *nazveme* kuželem*, pokud pro každý její bod* $x \in K$ *a libovolné* $0 \leq \rho \in \mathbb{R}$ *máme* $\rho x \in K$*.*
- *Kužel* K *se nazývá* bodový *pokud neobsahuje přímku, nebo ekvivalentně, pokud* $K \cap -K = \{0\}$*.*
- *Kužel* K *se nazývá* konvexním kuželem*, pokud, pro každou dvojici bodů* $x,x' \in K$ *a pro libovolná* $0 \leq \rho,\rho' \in \mathbb{R}$ *máme* $\rho x + \rho' x' \in P$*. Konvexní kužely jsou tedy evidentně konvexní.*
- Recesní kužel R *konvexního polyedru* $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \leq b\}$ *pro nějakou matici* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *a vektor* $b \in \mathbb{R}^m$ *je množina* $R = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \leq 0\}$*.*
- *Pro* $S \subseteq \mathbb{R}^n$*,* $\operatorname{cone}(S)$ *označuje nejmenší konvexní kužel obsahující* S*.*

Pozorování 1.3 (Vlastnosti kuželů, konvexních kuželů a recesních kuželů Schrijver (1998) [str. 87, 100])**.**

- *Recesní kužel polyedru P je také často nazýván charakteristickým kuželem polyedru P. Jeho význam je v tom, že obsahuje všechny neomezené směry v P. Přesněji*

$$r \in R \iff \exists x \in P \, \forall \rho \geq 0 : \; x + \rho r \in P \; .$$

  Takový vektor nazveme směr recese *nebo* recesní vektor *polyedru P. Recesní kužel polyedru $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ je ve skutečnosti množina*

$$R = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}.$$

- *Také máme vztah*

$$R \text{ je bodový} \iff \text{minimální stěny } P \text{ mají dimenzi 0.}$$

- *Konvexní kužel K lze popsat jako $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \; x = \sum\limits_{i \in [n_r]} \rho_i r_i\}$, kde $0 \leq \rho_i \in \mathbb{R}$ a vektory r_i generují polopřímky, které leží ve stěnách K, a zároveň vektory r_i generují K samotný. Pak n_r je počet těchto generátorů r_i.*

Definice 6 (Minkowského suma)**.** *Mějme množiny A,$B \subseteq \mathbb{R}^n$.*
Jejich Minkowského suma *$A + B$ značí množinu*

$$A + B = \{a + b : \; a \in A \; \wedge \; b \in B\}.$$

Předešlé koncepty nyní můžeme sloučit v následující charakterizaci konvexních polyedrů.

Věta 1.4 (Minkowského-Weylova pro polyedry Schrijver (1998) [str. 106])**.**

$$P \text{ je konvexní polyedr} \iff P = C + R$$

kde

- *$k \in \mathbb{N}$ je počet minimálních stěn $F_1, ..., F_k$ polyedru P,*
- *$C = \operatorname{conv}\{c_1, ..., c_k\}$ kde každé c_i je libovolný bod z minimální stěny F_i,*
- *$R = \{x \in \mathbb{R}^{n:} \; Ax \leq 0\}$ je recesní kužel P.*

Když je daný polyedr polytopem, dostaneme následující speciální případ věty.

Věta 1.5 (Minkowského-Weylova pro polytopy Schrijver (1998) [str. 89])**.**

Konvexní polytop je konvexním obalem svých konečně mnoha vrcholů.

1.4 Analýza a topologie

Jako poslední si připomeňme několik definic z topologie a analýzy, které budeme potřebovat. Nechť S je podmnožina $\mathbb{R}^n$.

Definice 7 (Metrika)**.**

- Metrika *je funkce* $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, kde* $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$

  0. $d(x,y) \geq 0$
  1. $d(x,y) = 0 \iff x = y$
  2. $d(x,y) = d(y,x)$
  3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

- *Metrika* L_1 *označuje metriku* $d(x,y) = \sum_{i\in[n]} |x_i - y_i|$.

Protože budeme pracovat nad vektorovým prostorem $\mathbb{R}^n$, doplníme ho metrikou L_1 a budeme dvojici $(\mathbb{R}^n, L_1)$ považovat za metrický prostor, kdykoliv to bude potřeba.

Definice 8 (Otevřené množiny)**.**

- *Pro bod* $x \in \mathbb{R}^n$ *a poloměr* $0 < \gamma \in \mathbb{R}$ *definujeme* otevřenou kouli

$$B(x, \gamma) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ d(x,y) < \gamma\}.$$

- *Říkáme, že množina* S *je* otevřená*, pokud pro každé* $x \in S$ *existuje* $0 < \gamma \in \mathbb{R}$ *takové, že otevřená koule* $B = B(x, \gamma)$ *je podmnožinou* S*.*

Definice 9 (Uzavřené množiny)**.**

- *Říkáme, že množina* S *je* uzavřená $\iff$ *její doplněk* S^c *je otevřený.*
- *Bod* $x \in \mathbb{R}^n$ *je* uzávěrovým bodem *množiny* S*, pokud*

$$\forall\, 0 < \gamma\ \exists y \in S : \ d(x,y) < \gamma.$$

- Uzávěr $\mathrm{cl}(S)$ *množiny* S *je množina všech uzávěrových bodů* S*. Ekvivalentně je to nejmenší uzavřená množina obsahující* S*.*
- *Pro bod* $x \in \mathbb{R}^n$ *a poloměr* $0 < \gamma \in \mathbb{R}$ *definujeme* uzavřenou kouli

$$\overline{B}(x, \gamma) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ d(x,y) \leq \gamma\}.$$

Definice 10 (Souvislé a nesouvislé množiny)**.**

- *Řekneme, že množina S je* nesouvislá $\iff$ *existují otevřené množiny $A, B \subsetneq \mathbb{R}^n$ takové, že*

$$S \subseteq A \cup B \quad \wedge \quad S \cap A \neq \emptyset \neq B \cap S \quad \wedge \quad S \cap A \cap B = \emptyset.$$

- *Jinak říkáme, že S je* souvislá*.*
- *Množina $R \subseteq S$ je* komponentou souvislosti *množiny S, pokud je to vzhledem k inkluzi maximální souvislá podmnožina S.*

Pozorování 1.6 (Vlastnosti souvislých a nesouvislých množin)**.**

- *Konvexní množiny jsou souvislé.*
- *Souvislé množiny mají jedinou komponentu souvislosti.*

Definice 11 (Topologická hranice a vnitřek)**.**

- Vnitřek $\mathrm{int}(S)$ *množiny S je největší otevřená podmnožina S.*
- Hranice *množiny S je množina $\partial S = \mathrm{cl}(S) \backslash \mathrm{int} S$.*

1.5 Intervalové systémy

Definice 12 (Nerovnosti matic a vektorů)**.**
Nerovnosti budeme pro matice a vektory interpretovat po položkách, neboli pro libovolné $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$*,*

$$A \le B \iff \forall i \in [m], j \in [n] : \; a_{i,j} \le b_{i,j}.$$

Definice 13 (Intervalové matice a vektory)**.**

- *Nechť* $\underline{A}, \overline{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *jsou matice splňující* $\underline{A} \le \overline{A}$*. Potom definujeme* intervalovou matici

$$\boldsymbol{A} = [\underline{A}, \overline{A}] := \left\{ A \in \mathbb{R}^{m \times n} : \underline{A} \le A \le \overline{A} \right\}.$$

- *Označíme* $A^c = \frac{\underline{A}+\overline{A}}{2}$*, respektive* $A^\Delta = \frac{\overline{A}-\underline{A}}{2}$ *její příslušnou* středovou*, respektive* poloměrovou *matici.*
- Intervalové vektory $\boldsymbol{b} = [\underline{b}, \overline{b}]$ *pro nějaké* $\underline{b}, \overline{b} \in \mathbb{R}^n$ *jsou pak jednoduše speciální případy intervalových matic.*
- Množinu všech intervalových matic $\boldsymbol{A}$ *velikosti* $m \times n$ *značíme* $\mathbb{IR}^{m \times n}$*.*

Definice 14 (Regulární intervalová matice)**.**

- *O matici* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ *řekneme, že je* regulární*, pokud všechny matice* $A \in \boldsymbol{A}$ *jsou regulární.*
- *Podobně, kdykoliv přiřadíme podobnou vlastnost nějaké intervalové matici, myslíme tím, že ji splňují všechny obsažené reálné matice. Další příklady jsou matice plné sloupcové hodnosti nebo singulární matice.*

Definice 15 (Matice speciální formy)**.**
Nechť $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ *je intervalová matice a mějme vektory* $s_1 \in \{\pm 1\}^m$ *a* $s_2 \in \{\pm 1\}^n$*.*

- *Potom definujeme matici speciální formy*

$$A_{s_1 s_2} := A^c - D_{s_1} A^\Delta D_{s_2}.$$

- *Také definujeme zjednodušenou verzi*

$$A_{e s_1} := A^c - D_e A^\Delta D_{s_1} = A^c - A^\Delta D_{s_1},$$

pro $e \in \mathbb{R}^m$ *vektor jednotek.*

- *Speciálně, pro intervalový vektor* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ *a vektor* $s \in \{\pm 1\}^n$

$$b_s := b^c + D_s b^\Delta.$$

Z definice intervalových matic a vektorů je zřejmé, že $A_{s_1 s_2} \in \mathbf{A},\ A_{es_1} \in \mathbf{A}$ a $b_s \in \mathbf{b}$.

Definice 16 (Ortantové polyedry)**.**
Nechť $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ *je intervalová matice a mějme vektor* $s \in \{\pm 1\}^n$.

- P_s *označuje konvexní polyedr* $P_s := \{x \in \mathbb{R}^n : \ A_{es} x \leq \overline{b}\}$.
- R_s *označuje jeho recesní kužel* $R_s := \{x \in \mathbb{R}^n : \ A_{es} x \leq 0\}$.
- *A* $P_s^=$ *označuje konvexní polyedr pro případ rovnic*

$$P_s^= := \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ A_{es} x \leq \overline{b} \ \wedge \ -A_{-es} x \leq -\underline{b}\right\}.$$

Definice 17 (Ortant)**.**
Nechť $\mathbb{R}^n$ *je vektorový prostor a* $s \in \{\pm 1\}^n$ *vektor.*

$$\textit{Ortant } \mathbb{R}^n \textit{ signatury } s \textit{ je } \mathbb{R}^n_s := \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ D_s x \geq 0\right\}.$$

Definice 18 (Množina řešení systému intervalových lineárních nerovnic)**.**

Pro daný intervalový systém $\boldsymbol{A}x \leq \boldsymbol{b}$ *označíme jeho množinu řešení jako*
$$\Sigma = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ \exists A \in \boldsymbol{A}\ \exists b \in \boldsymbol{b} : \ Ax \leq b\right\}.$$

Definice 19 (Množina řešení systému intervalových lineárních rovnic)**.**

Pro daný intervalový systém $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ *označíme jeho množinu řešení jako*
$$\Sigma^= = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ \exists A \in \boldsymbol{A}\ \exists b \in \boldsymbol{b} : \ Ax = b\right\}.$$

2. Známé výsledky

V této sekci projdeme známé výsledky o intervalových lineárních systémech a o geometrii jejich množin řešení. Začneme s případem nerovnic, kde je situace jednodušší.

2.1 Nerovnice

Jeden z nejzásadnějcích výsledků je následující věta. Ač to není na první pohled zjevné, hned se dozvíme, proč ve skutečnosti říká, že množina řešení je sjednocení konvexních polyedrů.

Věta 2.1 (Gerlach (1981))**.**
Nechť Σ je množina řešení daného systému $\boldsymbol{A}x \leq \boldsymbol{b}$. Potom

$$\Sigma = \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \ A^c x \leq A^\Delta |x| + \overline{b}\Big\}.$$

- Nejdřív si všimněme, že množina řešení pouze záleží na $\overline{b}$, proto nemá žádný vliv, jestli je na pravé straně vektor intervalový nebo reálný.
- Abychom ukázali, že jako důsledek věty je množina řešení sjednocení konvexních polyedrů, uvažujme nějaké $x \in \Sigma$ a mějme $s = \operatorname{sgn}(x)$. Pak získáme $D_s x \geq 0$, nebo ekvivalentně $D_s x = |x|$. Nyní použijeme výraz z Gerlachovy věty, kterou musí x splňovat, a přepíšeme $A^c x \leq A^\Delta D_s x + \overline{b}$. Potom máme $(A^x - A^\Delta D_s)x \leq \overline{b}$, což je ekvivalentní s $A_{es}x \leq \overline{b}$. Proto každé $x \in \Sigma$ splňuje $A_{es}x \leq \overline{b}$ pro nějaké $s \in \{\pm 1\}^n$. Protože máme 2^n takových vektorů s, máme nejvýš 2^n různých polyedrů P_s.
- Můžeme si také všimnout, že 2^n je vskutku pouze horní odhad. Ve skutečnosti, pokud máme matici $\mathbf{A}$, kde pouze k z n sloupců obsahuje intervaly, pak máme 2^k polyedrů.
- Navíc místo sjednocení všech polyedrů můžeme ekvivalentně protnout každý polyedr s jeho daným ortantem, a až pak sjednotit výsledky přes všechny ortanty.

Nyní můžeme shrnout různé, ale ekvivalentní definice množiny řešení.

Pozorování 2.2 (Ekvivalentní popisy množiny řešení)**.**

1. $\Sigma = \Big\{ x \in \mathbb{R}^{n}\colon \exists A \in \boldsymbol{A}\ \exists b \in \boldsymbol{b} :\ Ax \leq b \Big\}$
2. $\Sigma = \Big\{ x \in \mathbb{R}^{n} :\ A^{c}x \leq A^{\Delta}|x| + \overline{b} \Big\}$
3. $\Sigma = \bigcup\limits_{s \in \{\pm 1\}^{n}} \Big\{ x \in \mathbb{R}^{n} :\ A_{es}x \leq \overline{b} \ \ \wedge \ \ \mathrm{diag}(s)x \geq 0 \Big\}$
4. $\Sigma = \bigcup\limits_{s \in \{\pm 1\}^{n}} \Big\{ x \in \mathbb{R}^{n} :\ A_{es}x \leq \overline{b} \Big\}$
5. $\Sigma = \bigcup\limits_{s \in \{\pm 1\}^{n}} P_s$
6. $\Sigma = \bigcup\limits_{s \in \{\pm 1\}^{n}} (P_s \cap \mathbb{R}^{n}_{s})$

Jako důsledek této komplexity množin řešení je mnoho problémů v intervalové aritmetice těžkých. Vzhledem k tomu, že téma komplexity není středem zájmu této práce, ukážeme si krátce jen dvojici příkladů jako varování toho, co nás ještě čeká.

Věta 2.3 (Rohn (1995))**.**

Je NP-těžké rozhodnout, zda $\Sigma \neq \emptyset$.

Věta 2.4 (Garajová a Hladík (2019))**.**

Je co-NP těžké rozhodnout, zda-li je Σ *omezená.*

Tuto sekci ukončíme dvěma postačujícími podmínkami pro souvislost množiny řešení.

Tvrzení 2.5 (Hladík (2014))**.**

Pokud $\overline{b} \geq 0$*, pak* Σ *je souvislá.*

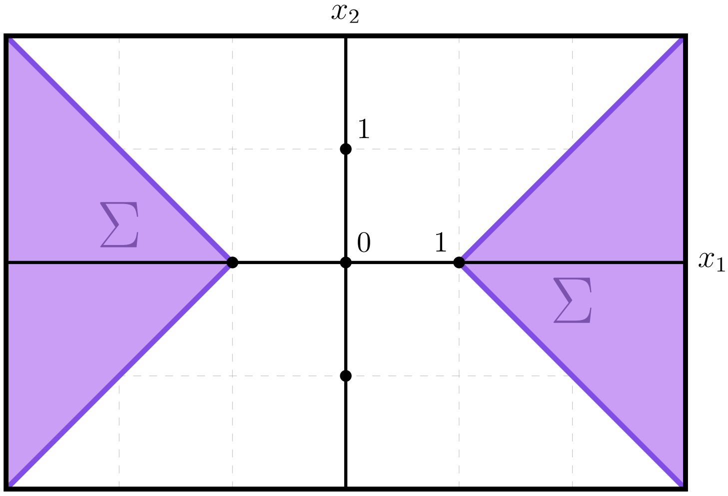
Tvrzení 2.6 (Hladík (2014))**.**

Pokud systém $\overline{A}u - \underline{A}v \leq \overline{b}$ *pro* $u,v \geq 0$ *má řešení, pak* Σ *je souvislá.*

Příklad 1 (Nesouvislá množina řešení)*.* Následující je příkladem nesouvislé množiny řešení systému $\mathbf{A}x \leq b$

$$\text{s maticí } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} [-1,1] & 1 \\ [-1,1] & -1 \end{pmatrix} \text{ a vektorem } b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Obrázek 2.1: Nesouvislá množina řešení.



2.2 Rovnice

Složitější případ rovnic začneme analogií Gerlachovy věty. Ihned vidíme, že situaci komplikují dva členy s absolutní hodnotou, které ve výrazu značně komplikují vztahy.

Věta 2.7 (Oettli a Prager (1964))**.**
Nechť $\Sigma^=$ je množina řešení nějakého systému $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

$$\textit{Pak } \Sigma^= = \left\{x \in \mathbb{R}^n :\ |A^c x - b^\Delta| \le A^\Delta |x| + b^\Delta\right\} .$$

Podobně jako u nerovnic, předešlá věta vede k tomu, že každém ortantu je Σ buď prázdná nebo je konvexním polyedrem, což ukotvuje následující věta.

Důsledek 2.8 (Oettli (1965))**.**

$\Sigma^=$ je v každém ortantu buď prázdná nebo je konvexní polyedr.

Opět můžeme shrnout odlišné ale ekvivalentní popisy množiny řešení.

Pozorování 2.9 (Ekvivalentní popisy množiny řešení)**.**

1. $\Sigma^= = \left\{x \in \mathbb{R}^n \colon \exists A \in \boldsymbol{A}\ \exists b \in \boldsymbol{b} :\ Ax = b\right\}$
2. $\Sigma^= = \left\{x \in \mathbb{R}^n :\ |A^c x - b^\Delta| \le A^\Delta |x| + b^\Delta\right\}$
3. $\Sigma^= = \bigcup_{s \in \{\pm 1\}^n} \left\{x \in \mathbb{R}^n :\ A_{es} x \le \overline{b}\ \wedge\ -A_{-es} x \le -\underline{b}\ \wedge\ \operatorname{diag}(s) x \ge 0\right\}$
4. $\Sigma^= = \bigcup_{s \in \{\pm 1\}^n} \left\{x \in \mathbb{R}^n :\ A_{es} x \le \overline{b}\ \wedge\ -A_{-es} x \le -\underline{b}\right\}$
5. $\Sigma^= = \bigcup_{s \in \{\pm 1\}^n} P_s^=$
6. $\Sigma^= = \bigcup_{s \in \{\pm 1\}^n} (P_s^= \cap \mathbb{R}^n_s)$

Stejně jako u nerovnic, mnoho problémů s rovnicemi je NP-těžkých. Následující věta je příkladem.

Věta 2.10 (Lakeev a Noskov (1994))**.**

Rozhodnout, zda-li $\Sigma^{=} \neq \emptyset$ je NP-těžké, i pro systémy se čtvercovými maticemi.

Tuto sekci ukončíme citováním dvou výsledků týkajících se obecné geometrie speciálních čtvercových systémů. První nám říká, že pro systém s regulární maticí a pouhým reálným nenulovým vektorem na pravé straně, množina řešení nemůže překročit opačné ortanty.

Tvrzení 2.11 (Rohn (2012) [str. 152])**.**
Nechť $\Sigma^{=}$ je množina řešení systému $\boldsymbol{A}x = b$ kde $\boldsymbol{A}$ je regulární a $b \neq 0$. Pak

$$\Sigma^{=} \cap \mathbb{R}^n_s \cap \mathbb{R}^n_{-s} = \emptyset \text{ pro každé } s \in \{\pm 1\}^n.$$

Další výsledek se týká omezenosti a souvislosti množiny řešení. Kompaktnost je garantovaná omezeností, protože jako konečné sjednoceních konvexních polyedrů je množina řešení uzavřená.

Věta 2.12 (Jansson (1997))**.**
Nechť $\Sigma^{=}$ je množina řešení systému $\boldsymbol{A}x = b$, kde $\boldsymbol{A}$ je čtvercová.
Pak platí následující:

1. *Pokud je $\boldsymbol{A}$ regulární, pak $\Sigma^{=}$ je kompaktní a souvislá.*
2. *Pokud je $\boldsymbol{A}$ singulární, pak každá komponenta souvislosti $\Sigma^{=}$ je neomezená.*

2.3 Konverze

Jelikož nerovnice vedou k jednodušším popisům, rádi bychom konvertovali mezi lineárními intervalovými systémy s rovnicemi a s nerovnicemi. Následující věta ukazuje, že je to ve skutečnosti celkem snadné.

Věta 2.13 (Rohn (1985), Li (2015))**.**
Množiny řešení systému $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ a systému $\boldsymbol{A}x \leq \boldsymbol{b} \ \wedge \ \boldsymbol{A}x \geq \boldsymbol{b}$ jsou stejné.

Důsledkem je, že ať najdeme jakýkoliv výsledek pro nerovnice, bude platit i pro rovnice. Ačkoliv je určitě lepší nacházet vlastnosti systémů s rovnicemi na míru, které přesněji popisují jejich speciální případ, tato věta je stále užitečný nástroj pro obecné výsledky.

2.4 Konvexita a konvexní obal

Jak už jsme viděli, neprázdné množiny řešení intervalových lineárních systémů jsou sjednoceními konvexních polyedrů, proto jsou obecně nekonvexní. Nicméně konvexita je pro nás důležitá, proto by bylo užitečné, kdybychom dokázali rozpoznat, kdy je množina řešení konvexní, a pokud není, bylo by dobré znát, jak vyjádřit její konvexní obal. Obě tyto otázky byly zodpovězeny J. Rohnem pro případ rovnic s regulárními maticemi.

Množiny řešení těchto speciálních systémů jsou konvexní polytopy (v případě, že jsou konvexní), nebo mají konvexní polytop jako konvexní obal. Proto můžeme konvexitu charakterizovat použitím vrcholů množiny řešení, které teď definujme.

Definice 20 (Vrcholy množiny řešení systémů s regulární maticí)**.**
Nechť $\Sigma^=$ *je množina řešení systému* $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ *pro nějakou regulární matici* $\boldsymbol{A}$*. Pak pro každý* $s \in \{\pm 1\}^n$ *označíme* x_s *jako jednoznačné řešení rovnice*

$$A^c x - \operatorname{diag}(s) A^\Delta |x| = b_s.$$

Pro regulární matice mají tyto vrcholy vždy jednoznačné řešení (Rohn (2012) [str. 162]). Máme tedy 2^n těchto vrcholů x_s, se kterými můžeme pracovat.

Začneme s podmínkou nekonvexity.

Věta 2.14 (Nekonvexita množiny řešení, Rohn (2012) [str. 171])**.**
Nechť $\Sigma^=$ *je množina řešení systému* $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ *pro nějakou regulární intervalovou matici* $\boldsymbol{A}$*. Pak* $\Sigma^=$ *je nekonvexní* $\iff$ $\exists s_1, s_2 \in \{\pm 1\}^n$ $\exists i,j \in [n]$ *splňující následující:*

1. $(s_1)_i = (s_2)_i$
2. $(x_{s_1})_j (x_{s_2})_j < 0$
3. $A^\Delta_{ij} > 0$

Tato věta má zjevnou geometrickou interpretaci. Ve skutečnosti hledáme dvojici vrcholů x_{s_1}, x_{s_2}, které leží v sousedních ortantech, ale jsou spojené úsečkou, jejíž vnitřek neleží v množině řešení.

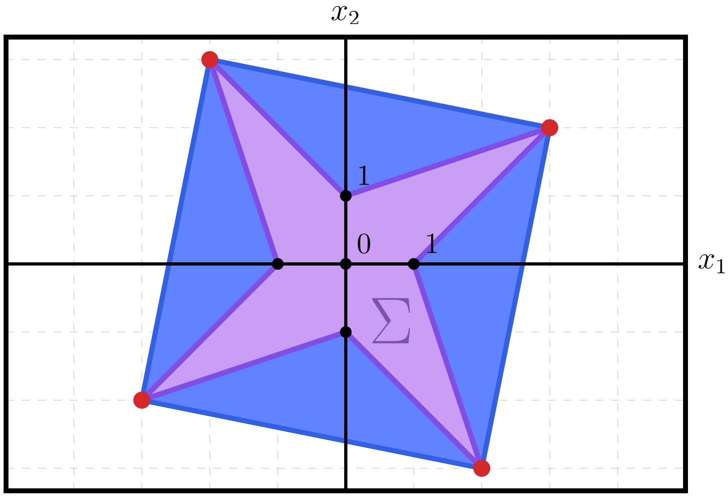
Jak už jsme zmiňovali, konvexní obal množiny řešení intervalových systémů s regulárními maticemi je polytop. Proto může být charakterizován jako konvexní obal vrcholů množiny řešení.

Věta 2.15 (Konvexní obal, Rohn (1989))**.**
Nechť $\Sigma^=$ *je množina řešení systému* $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ *pro nějakou regulární matici* $\boldsymbol{A}$*. Pak*

$$\operatorname{conv}(\Sigma^=) = \operatorname{conv}\Big\{x_s : s \in \{\pm 1\}^n\Big\}.$$

Příklad 2 (Konvexní obal pro rovnice s regulární maticí, Barth a Nuding (1974)). Ve spojitosti s předešlou větu zmiňujeme příklad množiny řešení a jejího konvexního obalu pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [2,4] & [-2,1] \\ [-1,2] & [2,4] \end{pmatrix}$ a vektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} [-2,2] \\ [-2,2] \end{pmatrix}$. Množina řešení je znázorněna fialově a modré jsou ty body, které přidává konvexní obal. Všimněme si čtyř červených vrcholů x_s v rozích sdílených množinou řešení i jejím konvexním obalem.

Obrázek 2.2: Konvexní obal systému rovnic s regulární maticí.



3. Výsledky v geometrii a topologii

Tato kapitola je věnována novým výsledkům této práce.

3.1 Topologická hranice a vnitřek v obecných nerovnicích

Zaměříme se na případ nerovnic. Nechť Σ je množina řešení intervalového lineárního systému $\mathbf{A}x \leq \mathbf{b}$. Protože Σ je obecně nekonvexní, standardní definice extremálních bodů by zde nefungovala. Protože jde ale o sjednocení konvexních polyedrů, je zřejmé, že dostaneme nějakou množinu bodů, která se jako hranice chovat bude. Z tohoto důvodu potřebujeme modifikovat definici extremálních bodů pro naše účely.

Definice 21 (Množina extremálních bodů)**.**
Pro Σ *jako výše máme* $\Sigma = \bigcup_{s \in \{\pm\}^n} (\mathbb{R}^n_s \cap P_s)$. Množinou extremálních bodů Σ *myslíme množinu*

$$\Sigma_\partial = \bigcup_{s \in \{\pm\}^n} \Big\{ G : \emptyset \neq G = F \cap \mathbb{R}^n_s \text{ a } F \text{ je stěna polyedru } P_s \Big\}.$$

Jinými slovy vybíráme ty podmnožiny stěn polyedrů P_s, které jsou v ortantu $\mathbb{R}^n_s$.

Pozorování 3.1 (Extremální body)**.** *Ekvivalentně můžeme definovat množinu extremálních bodů jako*

$$\Sigma_\partial = \{x \in \Sigma : (A^c x)_I = (A^\Delta |x| + \overline{b})_I \ \wedge \ \emptyset \neq I \subseteq [m]\}$$

Důkaz.

- $\subseteq$ Zaměřme se na jediné $s \in \{\pm 1\}^n$, příslušný polyedr P_s a jeho stěnu F. Máme

  $$F = \Big\{ x \in P_s : (A_{es} x)_I = \overline{b}_I \ \wedge \ \emptyset \neq I \subseteq [m] \Big\}.$$

  Vyjádřením $G = F \cap \mathbb{R}^n_s$ dostaneme

  $$G = \Big\{ x \in P_s : (A_{es} x)_I = \overline{b}_I \ \wedge \ \emptyset \neq I \subseteq [m] \ \wedge \ D_s x \geq 0 \Big\}.$$

  Můžeme přepsat

  $$(A_{es} x)_I = \overline{b}_I \text{ jako } (A^c - A^\Delta D_s x)_I = \overline{b}_I.$$

A protože $D_s x \geq 0$, pak $D_s x = |x|$ a tedy $(A^c x)_I = (A^\Delta |x| + \overline{b})_I$.

$\supseteq$ Na druhou stranu mějme $x \in \Sigma$ splňující $(A^c x)_I = (A^\Delta |x| + \overline{b})_I$ pro nějaké $\emptyset \neq I \subseteq [m]$. Označením $s = \mathrm{sgn}(x)$ opět dostáváme $D_s x = |x|$, proto můžeme výraz výš přepsat jako $(A^c x)_I = (A^\Delta D_s x + \overline{b})_I$, potom na $((A^c - A^\Delta D_s)x)_I = \overline{b}_I$, a konečně $(A_{es} x)_I = \overline{b}_I$. Existuje tedy stěna $F = \{x \in P_s : \ (A_{es} x)_I = \overline{b}_I\}$ polyedru P_s a $x \in F$. Dále, protože $s = \mathrm{sgn}(x)$, máme $x \in F \cap \mathbb{R}^n_s$.

□

Lemma 3.2 (Vnitřek)**.**

Vnitřek množiny řešení Σ *je* $\mathrm{int}\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : \ A^c x < A^\Delta |x| + \overline{b}\}$.

Důkaz.

- Označme

$$I = \{x \in \mathbb{R}^n : \ A^c x < A^\Delta |x| + \overline{b}\}.$$

  Zjevně $I \subseteq \Sigma$. Označme $s = \mathrm{sgn}(x)$, pak přepíšeme $A^c x < A^\Delta |x| + \overline{b}$ na $A_{es} x < \overline{b}$ a vyjádříme

$$\bigcup_{s \in \{\pm 1\}^n} \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \ A_{es} x < \overline{b}\Big\} = \bigcup_{s \in \{\pm 1\}^n} \bigcap_{i \in [n]} \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \ (A_{es} x)_i < \overline{b}_i\Big\}.$$

- Uvažujme doplněk

$$I^c = \bigcap_{s \in \{\pm 1\}^n} \bigcup_{i \in [n]} \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \ (A_{es} x)_i \geq \overline{b}_i\Big\}.$$

  Každá množina $\{x \in \mathbb{R}^n : \ (A_{es} x)_i \geq \overline{b}_i\}$ je uzavřený poloprostor. Tedy I^c jako konečný průnik konečných sjednocení uzavřených množin je také uzavřená. Tudíž její komplement I je otevřený.

- Vyjádříme

$$\Sigma \backslash I = \bigcup_{i \in [n]} \Big\{x \in \Sigma : \ (A_{es} x)_i = \overline{b}_i\Big\}$$
$$= \Big\{x \in \Sigma : \ (A^c x)_I = (A^\Delta |x| + \overline{b})_I \ \wedge \ \emptyset \neq I \subseteq [m]\Big\} = \Sigma_\partial.$$

  Vezměme bod $x' \in \Sigma_\partial$, který musí splňovat $(A_{es} x')_i = \overline{b}_i$ pro nějaké $i \in [n]$ a leží tedy v nadrovině $a = \{x \in \mathbb{R}^n : \ (A_{es} x)_i = \overline{b}_i\}$. Dále mějme $0 < \gamma \in \mathbb{R}$ a uvažujme otevřenou kouli $B = B(x, \gamma)$. Pak nadrovina a dělí B tak, že jedna polovina B leží v uzavřeném poloprostoru a^- a druhá v a^+. Proto můžeme pro libovolné $0 < \gamma$ vzít otevřenou kouli B poloměru γ s body mimo Σ. Tudíž bychom přidáním x do I ztratili otevřenost, tudíž I je maximální otevřená podmnožina Σ, a proto $I = \mathrm{int}\Sigma$.

□

Věta 3.3 (Hranice)**.**

Σ_∂ je topologická hranice množiny řešení Σ.

Důkaz.

Označme topologickou hranici množiny Σ jako $\partial\Sigma$, její vnitřek jako $\mathrm{int}\Sigma$ a její uzávěr jako $\overline{\Sigma}$. Jako konečné sjednocení konvexních polyedrů, které jsou samy uzavřené, je Σ uzavřená, tudíž $\overline{\Sigma} = \Sigma$. Potom, z definice Σ_∂ a použitím předešlého lemmatu dostáváme

$$\begin{aligned}
\partial\Sigma &= \overline{\Sigma} \setminus \mathrm{int}\Sigma \\
&= \Big\{x \in \mathbb{R}^{n:}\ A^c x \leq A^\Delta|x| + \bar{b}\Big\} \Big\backslash \Big\{x \in \mathbb{R}^{n:}\ A^c x < A^\Delta|x| + \bar{b}\Big\} \\
&= \bigcup_{i\in[n]} \Big\{x \in \Sigma :\ (A^c x)_i = (A^\Delta|x| + \bar{b})_i\Big\} \\
&= \Big\{x \in \Sigma :\ (A^c x)_I = (A^\Delta|x| + \bar{b})_I \ \wedge\ \emptyset \neq I \subseteq [m]\Big\} \\
&= \Sigma_\partial.
\end{aligned}$$

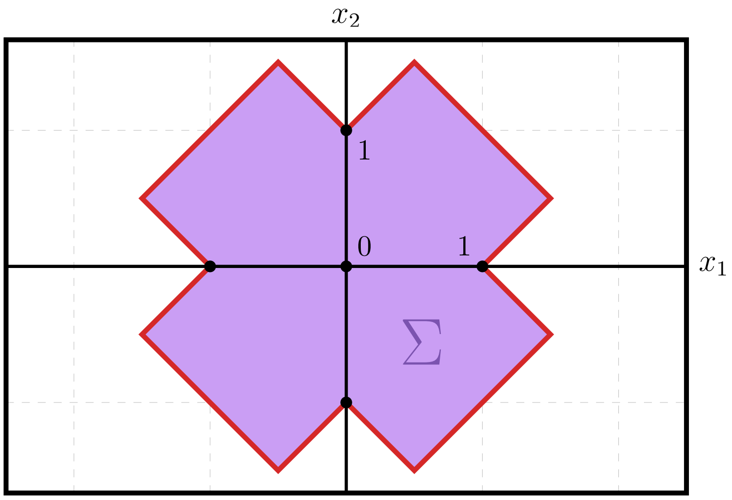
□

Příklad 3 (Hranice a vnitřek). Uvažujme množinu řešení systému $\mathbf{A}x \leq b$

$$\text{s maticí } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} [-1{,}1] & 1 \\ [-1{,}1] & -1 \\ 1 & [-1,1] \\ -1 & [-1,1] \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ a vektorem } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Červeně je znázorněna hranice množiny řešení a fialově je znázorněn její vnitřek.

Obrázek 3.1: Hranice a vnitřek množiny řešení.



3.2 Obecný konvexní obal

V této sekci se budeme věnovat problému popsání konvexního obalu intervalových lineárních systémů nerovnic. Na rozdíl od případu rovnic s regulární maticí nemůžeme spoléhat na popisování konvexního obalu jako konvexního obalu vrcholů množiny. V případě obecných nerovnic nemáme garantovanou omezenost a nemáme tedy důvod očekávat, že konvexní obal bude polytop. Z tohoto důvodu budeme chtít popsat konvexní obal množiny řešení jako obecný konvexní polyedr.

Dává smysl očekávat, že konvexní obal konečného sjednocení konvexních polyedrů bude opět konečně generovaný konvexní polyedr, ovšem toto je pouze napůl cesty k pravdě. Jak uvidíme, a jak Příklad 5 ilustruje, konvexní obal v případě neomozené množiny řešení nemusí být uzavřený. Ještě jednodušší příklad je jediný bod, disjunktní s jednou přímkou. Obě množiny jsou konvexní polyedry a je snadné vidět, že jejich konvexní obal nebude uzavřený. Nakonec ale máme štěstí v tom, že uzávěr konvexního obalu je konvexní polyedr.

Zaveďme tedy novou notaci, kterou budeme nadále používat.

Definice 22 (Notace)**.** *Nechť Σ je množina řešení systému $\boldsymbol{A}x \leq \boldsymbol{b}$.*

- $C := \operatorname{conv}(\Sigma) = \operatorname{conv}\Big(\bigcup\limits_{s\in\{\pm1\}^n} P_s\Big)$
- $\overline{C} := \operatorname{cl}(C)$
- $R := \operatorname{conv}\Big(\bigcup\limits_{s\in\{\pm1\}^n} R_s\Big)$

Nejprve se připravíme doplňujícím výsledkem, který nám pomůže dokázat ten následující.

Lemma 3.4 (Recesní kužel)**.**

R je konvexní kužel.

Důkaz.

Konvexita R je dána z definice, proto potřebujeme pouze ukázat, že je to kužel. Můžeme definici $R = \operatorname{conv}(\bigcup\limits_{s\in\{\pm1\}^n} R_s)$ přepsat jako

$$R = \Big\{x = \sum_{s\in\{\pm1\}^n} \lambda_s \sum_{j\in[n_s^r]} \rho_{s,j} r_{s,j} :\ \lambda_s, \rho_{s,j} \geq 0 \ \wedge \sum_{s\in\{\pm1\}^n} \lambda_s = 1\Big\},$$

kde n_s^r reprezentuje počet generátorů $r_{s,j}$ kužele R_s. Vezměme libovolný bod $x \in R$ a číslo $\rho \geq 0$. Chceme ukázat, že $\rho x \in R$, proto výraz ρx přepíšeme

$$\rho x = \rho \sum_{s\in\{\pm1\}^n} \lambda_s \sum_{j\in[n_s^r]} \rho_{s,j} r_{s,j} = \sum_{s\in\{\pm1\}^n} \lambda_s \sum_{j\in[n_s^r]} \rho\rho_{s,j} r_{s,j}\ .$$

Zjevně $\rho\rho_{s,j} \geq 0$, a protože R_s je kužel a $\rho_{s,j} r_{s,j} \in R_s$, máme $\rho\rho_{s,j} r_{s,j} \in R_s$, tudíž $\rho\rho_{s,j} r_{s,j} \in R$. Dále, protože ρx je konvexní kombinace takových bodů $\rho\rho_{s,j} r_{s,j}$, z konvexity R máme $\rho x \in R$. □

Lemma 3.5 (Sanity check)**.**

$\overline{C}$ je konvexní polyedr.

Dokazujeme ovšem obecněji, že uzávěr konvexního obalu sjednocení konečné množiny konvexních polyedrů je konvexní polyedr.

Důkaz.

- Z věty 1.4 můžeme vyjádřit

$$P_s = C_s + R_s \text{ pro } C_s = \operatorname{conv}\{c_{s,1}, ..., c_{s,n_s^c}\} \text{ a } R_s = \operatorname{cone}\{r_{s,1}, ..., r_{s,n_s^r}\} \quad \text{(a)}$$

  kde vybereme jeden bod $c_{s,i}$ pro každou minimální stěnu $F_{s,i}$ polyedru P_s a kde R_s je recesní kužel polyedru P_s generovaný vektory $r_{s,j}$. Dále n_s^c reprezentuje počet minimálních stěn polyedru P_s a n_s^r počet generátorů kuželu R_s. Definujme pro nějaká čísla $\lambda_{s,i}, \rho_{s,j}, \lambda_s \in \mathbb{R}$ podmínky

$$\lambda_{s,i},\ \rho_{s,j},\ \lambda_s \geq 0, \tag{1}$$

$$\sum_{i\in[n_s^c]} \lambda_{s,i} = 1, \tag{2}$$

$$\sum_{s\in\{\pm1\}^n} \lambda_s = 1. \tag{3}$$

  Můžeme vyjádřit

$$P_s = \left\{ x_s = \sum_{i\in[n_s^c]} \lambda_{s,i} c_{s,i} + \sum_{j\in[n_s^r]} \rho_{s,j} r_{s,j} \ : \ \lambda_{s,i},\ \rho_{s,j} \text{ splňují (1) a (2)} \right\}. \tag{3.1}$$

  Vyjádříme $C = \operatorname{conv}(\bigcup_{s\in\{\pm1\}^n} P_s)$ jako

$$C = \left\{ x_c = \sum_{s\in\{\pm1\}^n} \lambda_s \left(\sum_{i\in[n_s^c]} \lambda_{s,i} c_{s,i} + \sum_{j\in[n_s^r]} \rho_{s,j} r_{s,j} \right) \ : \right.$$
$$\left. \lambda_s,\ \lambda_{s,i}, \rho_{s,j} \text{ splňují (1), (2) a (3)} \right\}.$$

  Definujme množinu P jako $P = \operatorname{conv}\left(\bigcup_{s\in\{\pm1\}^n} \bigcup_{i\in[n_s^c]} c_{s,i} \right) + \operatorname{conv}\left(\bigcup_{s\in\{\pm1\}^n} R_s \right)$ nebo ekvivalentně jako $P = \operatorname{conv}\left(\bigcup_{s\in\{\pm1\}^n} \bigcup_{i\in[n_s^c]} c_{s,i} \right) + R$. Znovu, podle věty 1.4, a protože R je kužel, P je konvexní polyedr. Ukážeme, že $P = \overline{C}$. Definujme pro nějaká čísla $\mu_s,\ \lambda_{s,i},\ \rho_{s,j} \in \mathbb{R}$ další sadu podmínek

$$\mu_s,\ \lambda_{s,i},\ \rho_{s,j} \geq 0, \tag{4}$$

$$\sum_{s\in\{\pm1\}^n} \sum_{i\in[n_s^c]} \lambda_{s,i} = 1, \tag{5}$$

$$\sum_{s\in\{\pm1\}^n} \mu_s = 1. \tag{6}$$

  Z definice P můžeme přepsat

$$P = \left\{ x_p = \sum_{s\in\{\pm1\}^n} \sum_{i\in[n_s^c]} \lambda_{s,i} c_{s,i} + \sum_{s\in\{\pm1\}^n} \mu_s \sum_{j\in[n_s^r]} \rho_{s,j} r_{s,j} \ : \right.$$
$$\left. \mu_s,\ \lambda_{s,i},\ \rho_{s,j} \text{ splňují (4), (5) a (6)} \right\}$$

- Mějme libovolné $x_c \in C$ a rozepišme

$$x_c = \sum_{s\in\{\pm1\}^n} \lambda_s \left(\sum_{i\in[n_s^c]} \lambda_{s,i} c_{s,i} + \sum_{j\in[n_s^r]} \rho_{s,j} r_{s,j} \right)$$

pro $\lambda_s, \lambda_{s,i}, \rho_{s,j}$ splňující podmínky (1), (2) a (3). Opět můžeme přepsat

$$x_c = \sum_{s\in\{\pm1\}^n} \sum_{i\in[n_s^c]} \lambda'_{s,i} c_{s,i} + \sum_{s\in\{\pm1\}^n} \sum_{j\in[n_s^r]} \rho'_{s,j} r_{s,j}$$

kde $\lambda'_{s,i} = \lambda_s \lambda_{s,i}$ a $\rho'_{s,j} = \lambda_s \rho_{s,j}$. Zjevně $\lambda'_{s,i}, \rho'_{s,j} \geq 0$ a $\sum_{s\in\{\pm1\}^n} \sum_{i\in[n_s^c]} \lambda'_{s,i} = 1$, tudíž x_c splňuje podmínky (4), (5) a (6), neboli $x_c \in P$. Proto $C \subseteq P$, a z uzavřenosti P spolu s tím, že $\overline{C}$ je minimální uzavřená nadmnožina C, dostáváme $\overline{C} \subseteq P$.

- Na druhou stranu, mějme libovolné $x_p \in P$ a rozepišme

$$x_p = \sum_{s\in\{\pm1\}^n} \sum_{i\in[n_s^c]} \lambda_{s,i} c_{s,i} + \sum_{s\in\{\pm1\}^n} \mu_s \sum_{j\in[n_s^r]} \rho_{s,j} r_{s,j} \tag{7}$$

pro $\lambda_s, \lambda_{s,i}, \rho_{s,j}$ splňující dané podmínky pro P. Můžeme pak vyjádřit

$$x_p = \sum_{s\in\{\pm1\}^n} \lambda'_s \left(\sum_{i\in[n_s^c]} \lambda'_{s,i} c_{s,i} + \sum_{j\in[n_s^r]} \rho'_{s,j} r_{s,j} \right) \tag{8}$$

pro $\lambda'_s = \sum_{i\in[n_s^c]} \lambda_{s,i}$, $\lambda'_{s,i} = \frac{\lambda_{s,i}}{\lambda'_s}$ a $\rho'_{s,j} = \frac{\mu_s \rho_{s,j}}{\lambda'_s}$.

- Pokud $\forall s \in \{\pm1\}^n : \lambda'_s > 0$ pak máme $\lambda'_s, \lambda_{s,i}, \rho'_{s,j} \geq 0$ a $\sum_{s\in\{\pm1\}^n} \lambda'_s = 1$, a navíc $\sum_{i\in[n_s^c]} \lambda'_{s,i} = 1$. Tudíž x_p splňují podmínky (1), (2) a (3), tedy $x_p \in C$.

- Pokud ovšem existuje $s \in \{\pm1\}^n$ takové, že $\lambda'_s = 0$, pak parametry $\lambda'_{s,i}$ a $\rho'_{s,j}$ jsou nedefinované. Mějme tedy takový bod x_p s nějakým $s \in \{\pm1\}^n$, kde $\lambda'_s = 0$. Nechť $Q = \{s \in \{\pm1\}^n : \lambda'_s = 0\}$, $q = |Q|$ a nechť $m = \operatorname{argmin}_{s\in\{\pm1\}^n} \left\{\lambda'_s > 0\right\}$.

  Zjevně $q > 0$ a také víme, že m existuje, protože všechna λ'_s se musí sečíst na 1 z předpokladu $x_p \in P$. Můžeme pak vzít libovolně malé $0 < \gamma < \lambda'_m$ a zkonstruovat nový bod

$$x'_p = \sum_{s\in\{\pm1\}^n} \lambda''_s \left(\sum_{i\in[n_s^c]} \lambda'_{s,i} c_{s,i} + \sum_{j\in[n_s^r]} \rho'_{s,j} r_{s,j} \right),$$

  který má $\lambda''_m = \lambda'_m - \gamma$ a pro všechna $s \in Q$ položíme $\lambda''_s = \frac{\gamma}{q}$. Všechny ostatní parametry necháme stejné jako pro x_p. Z konstrukce má takový bod x'_p všechna $\lambda''_s > 0$, a všechna λ''_s se sečtou na 1, tudíž, podle předešlého argumentu, máme $x'_p \in C$. Ale také můžeme reprezentaci bodu jednoduše konvertovat zpět na reprezentaci (7), tudíž $x'_p \in P$.

Pak si všimněme, že vzdálenost mezi x_p a x'_p můžeme vyjádřit jako

$$
\begin{aligned}
d(x_p, x'_p) &= \sum_{k\in[n]} |(x_p)_k - (x'_p)_k| \\
&= \sum_{k\in[n]} \Bigg| \Bigg(\sum_{s\in\{\pm 1\}^n} \lambda'_s \Bigg(\sum_{i\in[n_s^c]} \lambda'_{s,i}(c_{s,i})_k + \sum_{j\in[n_s^r]} \rho'_{s,j}(r_{s,j})_k \Bigg)\Bigg) \\
&\quad - \Bigg(\sum_{s\in\{\pm 1\}^n} \lambda''_s \Bigg(\sum_{i\in[n_s^c]} \lambda'_{s,i}(c_{s,i})_k + \sum_{j\in[n_s^r]} \rho'_{s,j}(r_{s,j})_k \Bigg)\Bigg) \Bigg| \\
&= \sum_{k\in[n]} \Bigg| \Bigg(\sum_{s\in Q} \lambda'_s \Bigg(\sum_{i\in[n_s^c]} \lambda'_{s,i}(c_{s,i})_k + \sum_{j\in[n_s^r]} \rho'_{s,j}(r_{s,j})_k \Bigg)\Bigg) \\
&\quad \cancel{+ \Bigg(\sum_{s\in\{\pm 1\}^n\setminus(Q\cup\{m\})} \lambda'_s \Bigg(\sum_{i\in[n_s^c]} \lambda'_{s,i}(c_{s,i})_k + \sum_{j\in[n_s^r]} \rho'_{s,j}(r_{s,j})_k \Bigg)\Bigg)} \\
&\quad + \lambda'_m \Bigg(\sum_{i\in[n_m^c]} \lambda'_{m,i}(c_{m,i})_k + \sum_{j\in[n_m^r]} \rho'_{m,j}(r_{m,j})_k \Bigg) \\
&\quad - \Bigg(\sum_{s\in Q} \lambda''_s \Bigg(\sum_{i\in[n_s^c]} \lambda'_{s,i}(c_{s,i})_k + \sum_{j\in[n_s^r]} \rho'_{s,j}(r_{s,j})_k \Bigg)\Bigg) \\
&\quad \cancel{- \Bigg(\sum_{s\in\{\pm 1\}^n\setminus(Q\cup\{m\})} \lambda'_s \Bigg(\sum_{i\in[n_s^c]} \lambda'_{s,i}(c_{s,i})_k + \sum_{j\in[n_s^r]} \rho'_{s,j}(r_{s,j})_k \Bigg)\Bigg)} \\
&\quad - \lambda''_m \Bigg(\sum_{i\in[n_m^c]} \lambda'_{m,i}(c_{m,i})_k + \sum_{j\in[n_m^r]} \rho'_{m,j}(r_{m,j})_k \Bigg) \Bigg| \\
&= \sum_{k\in[n]} \Bigg| \Bigg(\sum_{s\in Q} 0 \, \Bigg(\cancel{\sum_{i\in[n_s^c]} \lambda'_{s,i}(c_{s,i})_k + \sum_{j\in[n_s^r]}} \rho'_{s,j}(r_{s,j})_k \Bigg)\Bigg) \\
&\quad + \Bigg(\lambda'_m \Bigg(\sum_{i\in[n_m^c]} \lambda'_{m,i}(c_{m,i})_k + \sum_{j\in[n_m^r]} \rho'_{m,j}(r_{m,j})_k \Bigg)\Bigg) \\
&\quad - \Bigg(\sum_{s\in Q} \frac{\gamma}{q} \Bigg(\sum_{i\in[n_s^c]} \lambda'_{s,i}(c_{s,i})_k + \sum_{j\in[n_s^r]} \rho'_{s,j}(r_{s,j})_k \Bigg)\Bigg) \\
&\quad - \Bigg((\lambda'_m - \gamma) \Bigg(\sum_{i\in[n_m^c]} \lambda'_{m,i}(c_{m,i})_k + \sum_{j\in[n_m^r]} \rho_{m,j}(r_{m,j})_k \Bigg)\Bigg) \Bigg| \\
&= \sum_{k\in[n]} \Bigg| - \gamma \Bigg(\sum_{s\in Q} \Bigg(\sum_{i\in[n_s^c]} \lambda'_{s,i}(c_{s,i})_k + \sum_{j\in[n_s^r]} \rho'_{s,j}(r_{s,j})_k \Bigg)\Bigg) \\
&\quad + \gamma \Bigg(\sum_{i\in[n_m^c]} \lambda'_{m,i}(c_{m,i})_k + \sum_{j\in[n_m^r]} \rho'_{m,j}(r_{m,j})_k \Bigg) \Bigg| \\
&= \gamma \cdot \sum_{k\in[n]} |d_k|
\end{aligned}
$$

pro $d_k = \Big(\sum_{i\in[n^c_m]} \lambda'_{m,i}(c_{m,i})_k + \sum_{j\in[n^r_m]} \rho'_{m,j}(r_{m,j})_k\Big)$

$$-\Big(\sum_{s\in Q}\Big(\sum_{i\in[n^c_s]} \lambda'_{s,i}(c_{s,i})_k + \sum_{j\in[n^r_s]} \rho'_{s,j}(r_{s,j})_k\Big)\Big).$$

Pro shrnutí, můžeme vybrat $0 < \gamma < \lambda'_m$ a zkonstruovat bod $x'_p \in P$, který také splňuje $x'_p \in C$. Vybráním libovolně malého γ můžeme škálovat vzdálenost $d(x_p, x'_p)$ libovolně blízko k 0, a tím zkonstruujeme tento bod $x'_p \in C$ libovolně blízko k x_p. Z toho plyne, že x_p uzávěrový bod množiny C a $x_p \in \overline{C}$.

- Ukázali jsme, že kterýkoliv bod $x_p \in P$ splňuje $x_p \in C$ nebo $x_p \in \overline{C}$, a protože $C \subseteq \overline{C}$, pak máme, že $P \subseteq \overline{C}$. A jak jsme ukázali výš, platí také $\overline{C} \subseteq P$ a tedy $\overline{C} = P$.

□

Důsledek 3.6 (Omezenost recesního kuželu)**.**

$$\overline{C} \textit{ je omezená} \iff R = \{0\}.$$

Důkaz. Z předešlého máme, že R je recesní kužel množiny $\overline{C}$, a pak máme

$$r \in R \iff \exists x \in \overline{C}\ \forall\, 0 \leq \rho \in \mathbb{R} :\ x + \rho r \in \overline{C}.$$

□

Důsledek 3.7 (Konvexní kužel omezené množiny řešení)**.**

$$\Sigma \textit{ je omezená} \iff \overline{C} = C \textit{ je konvexní polytop.}$$

Na druhou stranu, jak příklad po následujícím důsledku ukazuje, může nastat degenerovaný případ, kdy $\overline{C} = \mathbb{R}^n$.

Důsledek 3.8 (Degenerovaný konvexní obal)**.**

$$\overline{C} = \mathbb{R}^n \iff R = \mathbb{R}^n.$$

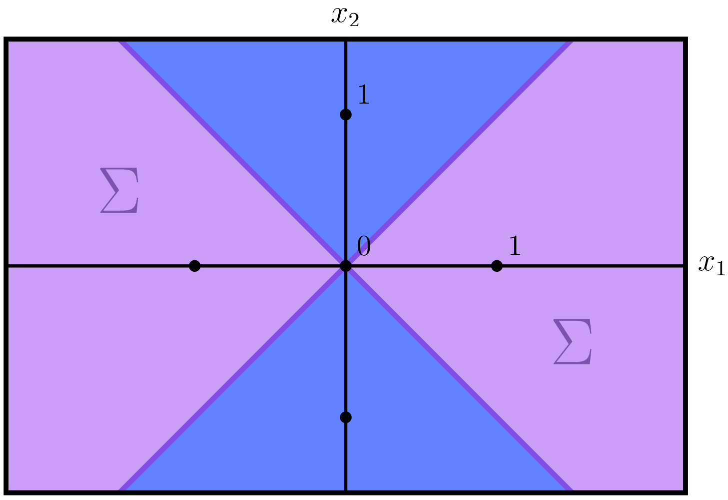
Příklad 4 (Degenerovaný konvexní obal)*.*

Zde máme množinu řešení pro systém $\mathbf{A}x \leq b$

$$\text{s maticí } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} [-1{,}1] & 1 \\ [-1{,}1] & -1 \end{pmatrix} \text{ a vektorem } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fialově je naznačena množina řešení a modré jsou body přidané uzávěrem konvexního obalu, který pokrývá celý prostor.

Obrázek 3.2: Degenerovaný konvexní obal.



Výše jsme zmínili důsledek, že recesní kužel množiny $\overline{C}$ je R. Navíc tím, že $\overline{C}$ je konvexní polyedr, který má své vlastní minimální stěny, můžeme z nich vzít reprezentativní body pro popis $\overline{C}$.

Ukážeme, že reprezentativní body pro minimální stěny konvexního polyedru $\overline{C}$ najdeme jako body z minimálních stěn jednotlivých konvexních polyedrů P_s. Pojďme se připravit na důkaz citací klasického výsledku pro konvexní množiny.

Věta 3.9 (Dělící věta, Klee (1969))**.**

Nechť X,$Y \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou disjunktní, uzavřené a konvexní množiny. Pokud je jedna z nich omezená, tj. kompaktní, pak mohou být ostře odděleny nadrovinou

$$h = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad a^\top x = b\}$$

pro nějaké $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$. Jinými slovy

$$\exists a \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R} : \quad \forall x \in X\ \forall y \in Y : \quad a^\top x < b < a^\top y$$

Lemma 3.10 (Minimální stěny obsahují minimální stěny)**.**

Nechť F je minimální stěna konvexního polyedru $\overline{C}$.

1. *Existuje $s \in \{\pm 1\}^n$ takové, že existuje stěna G konvexního polyedru P_s obsažená v F.*
2. *Pokud F je vrchol, pak existuje $s' \in \{\pm 1\}^n$ takové, že existuje vrchol G' polyedru $P_{s'}$ a $G' \subseteq \mathbb{R}^n_{s'}$.*

Důkaz.

- Buď h stěnová nadrovina stěny F, tedy $F = \overline{C} \cap h$ a $\overline{C} \subseteq h^-$ pro

$$\begin{array}{rcl} h & = & \{x \in \mathbb{R}^n : \quad a^\top x = b\} \\ h^- & = & \{x \in \mathbb{R}^n : \quad a^\top x \le b\} \\ h^+ & = & \{x \in \mathbb{R}^n : \quad a^\top x \ge b\}. \end{array}$$

Označme pak pro libovolné $b \neq b' \in \mathbb{R}^m$ paralelní nadrovinu

$$h_{b'} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ a^\top x = b'\}.$$

- Ukážeme, že F musí obsahovat nějaké řešení ze Σ. Pro spor, nechť $F \cap \Sigma = \emptyset$. Toto implikuje, že $\forall s \in \{\pm 1\}^n$ máme $F \cap P_s = \emptyset$, neboli také $h \cap P_s = \emptyset$.
- Pro libovolné $s \in \{\pm 1\}^n$ můžeme konvexní polyedr P_s vyjádřit formou (a) z Lemma 3.5, která říká, že $P_s = C_s + R_s$ pro konvexní polytop C_s a kužel R_s.
- Mějme libovolné $s \in \{\pm 1\}^n$. Ukážeme, že pokud jsou nějaké $x \in C_s$ a $b' \in \mathbb{R}^n$ takové, že $a^\top x \leq b'$ pro nějaké $b' < b$, pak pro všechny $r \in R_s$ a $0 \leq \rho \in \mathbb{R}$ máme $a^\top(\rho r) \leq 0$. Pro spor mějme nějaké $r \in R_s$ a $0 \leq \rho \in \mathbb{R}$ takové, že $a^\top(\rho r) > 0$ a mějme nějaké $x \in C_s$ a $b' \in \mathbb{R}^n$ takové, že $a^\top x \leq b' < b$. Pak najdeme ρ' dostatečně velké, aby

$$a^\top(\rho' r) > b - a^\top x > b' - a^\top x \geq 0,$$

  a získáme $a^\top(x + \rho' r) > b$. Protože $x \in C_s, \ r \in P_s$, a $\forall 0 \leq \rho'' \in \mathbb{R}:$ $\rho'' r \in R_s$ z definice R_s, z popisu (a) pak dostáváme, že $x + \rho' r \in P_s$. Tedy $x + \rho' r \in \Sigma$, a to je ve sporu s tím, že $\Sigma \subseteq h^-$. Proto tedy $a^\top(\rho r) \leq 0$ pro všechny $r \in R_s$ a všechna $0 \leq \rho \in \mathbb{R}$. Tedy pokud nějaká nadrovina $h_{b'}$ paralelní s h má $C_s \subseteq h_{b'}^- \subseteq h^-$, pak dostáváme rovnou $P_s \subseteq h_{b'}^-$.
- Uvažujme konvexní polytop $P = \operatorname{conv} \bigcup_{s \in \{\pm 1\}^n} C_s$. Jelikož C_s, jako konvexní obal reprezentativních bodů vybraných z minimálních stěn P_s je konečně gerovaný těmito body, pak P je konečně generováný sjednocením těchto bodů přes všechna $s \in \{\pm 1\}^n$.

  Ukážeme, že $P \cap h = \emptyset$. Pro spor, nechť $P \cap h = G$ je stěna polytopu P. Protože každá stěna obsahuje minimální stěnu, a minimální stěny P jsou některé z vrcholů sjednocených polytopů C_s (jiné mohou být uvnitř polytopu P), pak máme nějaké $s \in \{\pm 1\}^n$ s vrcholem $x \in C_s \subseteq P_s$ a $x \in G \subseteq h$, což je ve sporu s $h \cap P_s = \emptyset$. Tudíž P a h jsou disjunktní.
- Nyní použijeme větu 3.9 na dvojici disjuktních, uzavřených a konvexních množin h a P, kde P je navíc omezená a nalezneme oddělovací nadrovinu $h_{b'} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ a^\top x = b'\}$ pro nějaké $b' \in \mathbb{R}^n$, tedy

$$\forall y \in h \ \forall x \in P : \ a^\top x < b' < a^\top y,$$

  což také z definice h implikuje $b' < b$. Oddělovací nadrovina nutně musí být paralelní s h, jinak by jí protínala, což by byl spor s tvrzením věty. A protože paralelní nadroviny sdílejí normálové vektory, můžeme opět stejný normálový vektor a použít v popisu nadroviny $h_{b'}$.

  Výše jsme ukázali, že pokud $\forall s \in \{\pm 1\}^n : \ C_s \subseteq h_{b'}^-$, pak $P_s \subseteq h_{b'}^-$, tudíž máme dokonce $\Sigma \subseteq h_{b'}^-$.
- Máme tedy dva disjuktní uzavřené paralelní poloprostory h^+ a $h_{b'}^-$, kde $h \subseteq h^+$ a $\Sigma \subseteq h_{b'}^-$. Uvažme libovolné $x \in h$ a $d_{\min} = \sup_{y \in h_{b'}} d(x,y)$. Pak uzavřená koule $B = \overline{B}(x, d_{\min} + 1)$ obsahuje nejbližší bod $y \in h_{b'}$ k x. Protože

$\{x\}$ a $S = h_{b'} \cap B$ jsou obě kompaktní množiny, můžeme najít dvojici x,y nabývající této minimální vzdálenosti, která je nutně nenulová, jinak bychom z definice metriky měli $x = y$, což by bylo ve sporu s disjunktností nadrovin h a $h_{b'}$. Protože jsou nadroviny paralelní, tato minimální vzdálenost je konstatní pro všechna $x \in h$. Dále mějme $x' \in h^+$ a $y' \in h_{b'}^-$. Úsečka $\overline{x'y'}$ protíná nadroviny h^+ a $h_{b'}$, označme tedy průniky $x'' = \overline{x'y'} \cap h$ a $y'' = \overline{x'y'} \cap h_{b'}$. Pak máme $d(x',y') \geq d(x'',y'') \geq d_{\min}$.

Mezi prostory je tedy kladná vzdálenost, neboli

$$\exists\, 0 < d_{\min} \in \mathbb{R}^n \ \ \forall x \in h^+ \ \ \forall y \in h_{b'}^- : \ \ d(x,y) \geq d_{\min}.$$

Jelikož $h_{b'}^-$ je konvexní nadmnožina Σ, obsahuje i její konvexní obal C.

- Nyní mějme libovolný bod $x_f \in F$. Protože $x_f \in \overline{C}$, pak je to uzávěrový bod množiny C, tudíž máme $\forall\ 0 < \gamma \in \mathbb{R}$ nějaký bod $x_c \in C$ takový, že $d(x_f, x_c) < \gamma$. To je ale spor s předešlým bodem, protože všechny konvexní kombinace x_c bodů ze Σ leží v $h_{b'}^-$, tudíž máme

$$\gamma > d(x_f, x_c) \geq d_{\min} > 0,$$

což je ve sporu s tím, že γ může být libovolně malá.

- Proto tedy platí $F \cap P_s \neq \emptyset$ pro nějaké $s \in \{\pm 1\}^n$.

1. Protože máme nějaké $s \in \{\pm 1\}^n$ s $h \cap P_s \neq \emptyset$, $P_s \subseteq h^-$ a protože P_s je konvexní polyedr, pak $G = h \cap P_s$ tvoří stěnu P_s a $G \subseteq F$.
2. Předpokládejme, že F je vrchol. Pak G musí být také vrchol, tudíž je to také minimální stěna. Pokud $G \subseteq \mathbb{R}^n_s$, máme hotovo. Předpokládejme tedy $G \subseteq \mathbb{R}^n_{s'}$ pro nějaké $s \neq s' \in \{\pm 1\}^n$. Protože $G = \{x\}$, můžeme vzít $s' = \operatorname{sgn}(x)$, a pak $x \in \mathbb{R}^n_{s'}$ a tudíž $G \subseteq \mathbb{R}^n_{s'}$ Protože $\Sigma = \bigcup_{s \in \{\pm 1\}^n} (P_s \cap \mathbb{R}^n_s)$, existuje polyedr $P_{s'}$ takový, že $x \in P_{s'}$. Pak $h \cap P_{s'} \neq \emptyset$, $P_{s'} \subseteq h^-$ a znovu máme nějakou stěnu G' polyedru $P_{s'}$ takovou, že $G' \subseteq F$. Protože F je vrchol, G' je také vrchol, $G' = G$, a tentokrát $G' \subseteq \mathbb{R}^n_{s'}$.

□

Významný rozdíl od jednoduchých konvexních polyedrů je ten, že minimální stěny z jediné množiny řešení Σ můžou mít různé dimenze, pokud jsou z různých polyedrů P_s. Následující příklad toto ilustruje.

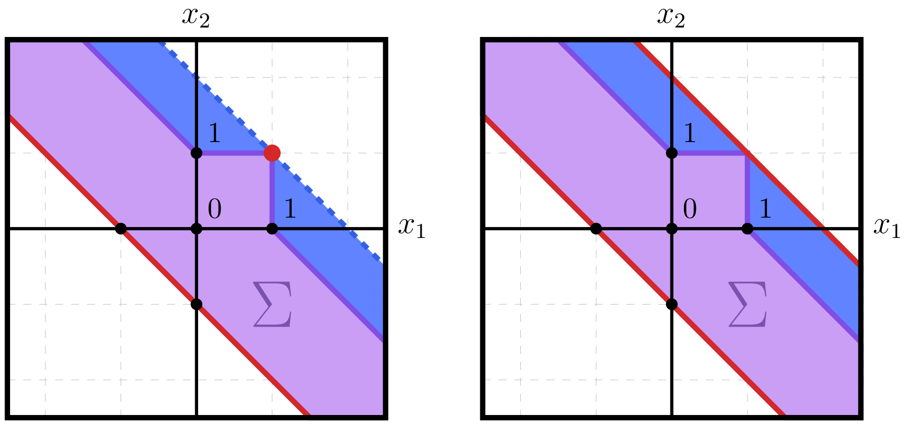
Příklad 5 (Různé dimenze minimálních stěn).

1. Uvažujme množinu řešení systému $\mathbf{A}x \leq b$

$$\text{s maticí } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0,1] & 1 \\ 1 & [0,1] \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ a vektorem } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

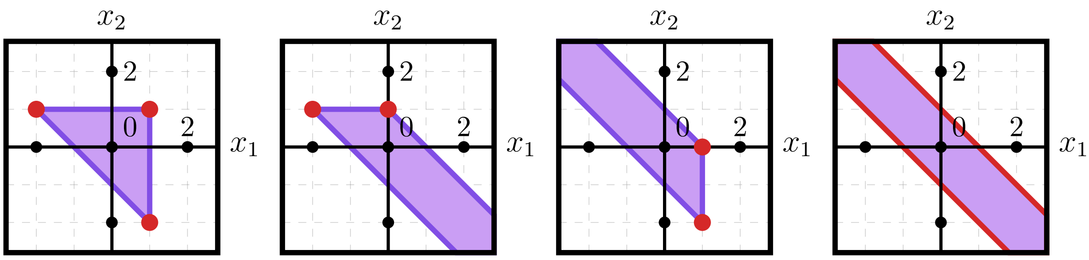
Množina řešení je zvýrazněna fialově, zatímco body, které přidává konvexní obal jsou modré. Nalevo vidíme minimální stěny konvexního obalu zvýrazněné červeně. Všimněme si dvou minimálních stěn s různými dimenzemi, a přerušovanou otevřenou hranou, která dělá konvexní obal neuzavřeným. Zatímco napravo vidíme minimální stěny uzávěru konvezního obalu, který je konvexní polyedr, tudíž minimální stěny mají stejné dimenze.

Obrázek 3.3: Neuzavřený konvexní obal.



Dekompozicí množiny řešení do polyedrů P_s můžeme zleva doprava vidět jednotlivé polyedry $P_{(1,1)^\top}$, $P_{(1,-1)^\top}, P_{(-1,1)^\top}$ a $P_{(-1,-1)^\top}$. Minimální stěny jsou opět zvýrazněny červeně. Jak lze vidět, dimenze se mohou lišit.

Obrázek 3.4: Odlišné dimenze minimálních stěn mezi polyedry v dekompozici.

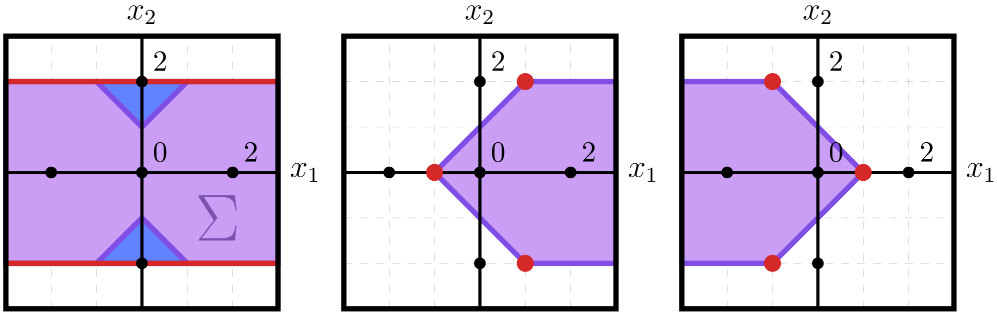


2. Můžeme dokonce sestrojit příklad, kde všechny minimální stěny polyedrů P_s mají stejné dimenze, ale minimální stěny uzávěru konvexního obalu mají dimenzi odlišnou. Tentokrát uvažujme

$$\text{matici } \mathbf{A} \begin{pmatrix} [-1,1] & 1 \\ [-1,1] & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ a vektor } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nalevo opět vidíme množinu řešení fialově s dodatečnými body uzávěru konvexního obalu modře a minimální stěny uzávěru konvexního obalu jsou červené. Následující dvě figury znázorňují polyedry $P_{(1,1)^\top} = P_{(1,-1)^\top}$ a $P_{(-1,1)^\top} = P_{(-1,-1)^\top}$ zleva doprava. Můžeme si všimnout, že minimální stěny polyedrů jsou vrcholy, zatímco minimální stěny uzávěru konvexního obalu jsou přímky.

Obrázek 3.5: Odlišná dimenze minimálních stěn konvexního obalu.



Z tohoto plyne, že obecná situace může být různorodá a zatím nemáme lepší způsob, jak popsat uzávěr konvexního obalu, než projít všech až 2^n ortantů a testovat minimální stěny polyedrů P_s. Toto je ekvivalentní s procházením podsystémů $(A_{es}x)_I \leq \bar{b}_I$ pro různé $\emptyset \neq I \subseteq [m]$ a se zkoušením, zda mají řešení. Jistě jde nejprve využít nějaké jednoduché heuristiky pro nalezení libovolné minimální stěny pro určení její dimenze, a až poté testovat podsystémy stejné dimenze.

Existuje několik speciálních případů, kde můžeme trochu zúžit výběr omezením dimenze minimálních stěn, které je třeba testovat.

Pozorování 3.11 (Matice plné sloupcové hodnosti)**.**

Pokud je $\mathbf{A}$ matice plné sloupcové hodnosti,
pak minimální stěny všech P_s mají stejnou dimenzi.

Důkaz. Pokud $\mathbf{A}$ má plnou sloupcovou hodnost, pak z definice má každá matice $A \in \mathbf{A}$ také plnou sloupcovou hodnost. Jinými slovy jsou všechny sloupcové hodnosti stejné, tudíž minimální stěny mají stejnou dimenzi $n - \operatorname{rank}(A)$. □

Pozorování 3.12 (Bodový recesní kužel)**.**

Pokud je $\overline{C}$ bodový, pak minimální stěny polyedru $\overline{C}$
obsahují vrchol $\{v\}$ nějakého P_s takový, že $v \in \mathbb{R}^n_s$.

Důkaz. Pokud $\overline{C}$ je bodový, jeho minimální stěny jsou vrcholy. Tudíž, jak říká Lemma 3.9, každá minimální stěna obsahuje vrchol splňující dané podmínky. □

Na závěr této sekce opět poznamenejme, že všechny tyto výsledky platí i pro rovnice, jelikož díky větě 2.13 můžeme vyjádřit množinu řešení jako množinu řešení většího systému nerovnic.

3.3 Nerovnice s regulárními maticemi

Stejně jako tomu bylo v případě rovnic s regulárními intervalovými maticemi, regularita intervalových matic nám dává speciální vlastnosti i v případě nerovnic.

Ukážeme, že můžeme zaručit nejen neomezenost a souvislost množiny řešení, což činí v porovnání s větou 2.12 situaci téměř opačnou než u rovnic, ale podobně jako u rovnic můžeme charakterizovat jedinečné vrcholy množiny řešení.

Pro tuto sekci, nechť Σ je množina řešení intervalového systému $\mathbf{A}x \leq \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A}$ je regulární.

Začneme formulováním užitečného pozorování ohledně regulárních intervalových matic. Dalo by se považovat za triviální, ale je dobrým nástrojem pro rozšíření intuice o geometrickém chování množiny řešení pro regulární matice.

Lemma 3.13 (Regularita a gradient)**.**

$$\boldsymbol{A} \textit{ je regulární} \implies \textit{žádné z následujících neplatí:}$$

1. $\exists i,i' \in [m] : \boldsymbol{A}_{i,*} \cap \boldsymbol{A}_{i',*} \neq \emptyset$

2. $\exists j,j' \in [n] : \boldsymbol{A}_{*,j} \cap \boldsymbol{A}_{*,j'} \neq \emptyset$

3. $\exists i,i' \in [m]\ \exists \alpha \in \mathbb{R} : \ \alpha \boldsymbol{A}_{i,*} = \boldsymbol{A}_{i',*}$

4. $\exists j,j' \in [n]\ \exists \alpha \in \mathbb{R} : \ \alpha \boldsymbol{A}_{*,j} = \boldsymbol{A}_{*,j'}$

Důkaz.

Předpokládejme, že $\mathbf{A}$ je regulární.

1. Pokud všechny intervaly nějakých dvou různých řádků mají průnik, dokážeme najít matice A v $\mathbf{A}$, které mají dva řádky stejné. To je ovšem ve sporu s regularitou $\mathbf{A}$ a tudíž s regularitou A.
2. Obdobně, jen místo řádků uvažujeme sloupce.
3. Toto je podobné případu 1., až na to, že nehledáme shodné řádky, ale takové, že jeden je násobek druhého. Toto by nám opět dalo singulární matici, což je opět spor.
4. Analogicky k předešlému, jen uvažujeme sloupce místo řádků.

□

Jedno povšimnutí, které si můžeme odnést je, že pokud je $\mathbf{A}$ regulární, pak žádná dvojice stěn dimenze větší, než 0, nemůže mít stejné naklonění.

Věta 3.14.

Σ je neomezená.

Důkaz.

- Uvažujme nějaké $i \in [m]$ a polopřímku
$$r = \{y \in \mathbb{R}^n : \ y = \overline{b} - \delta e_i \text{ kde } 0 \leq \delta \in \mathbb{R}\}.$$
Pak pro každé $y \in r$ máme $y \leq \overline{b}$. Dále uvažujme libovolné $s \in \{\pm 1\}^n$, matici A_{es} a obraz
$$\begin{aligned} r_{A_{es}} &= \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \ x = A_{es}^{-1} y\Big\} \\ &= \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \ x = A_{es}^{-1}(\overline{b} - \delta e_i) \text{ pro } 0 \leq \delta \in \mathbb{R}\Big\}, \end{aligned}$$
který je dobře definovaný díky regularitě A_{es}.
Dostáváme, že libovolné $x \in r_{A_{es}}$ splňuje $A_{es}x \leq \overline{b}$, protože
$$A_{es}x = A_{es}\Big(A_{es}^{-1} y\Big) = y \leq \overline{b}$$
pro nějaké $y \in r$. Navíc je $r_{A_{es}}$ také polopřímka, protože $A_{es}^{-1}e_i$ je nenulový vektor z regularity A_{es} a
$$r_{A_{es}} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \ x = A_{es}^{-1}\overline{b} - \delta\Big(A_{es}^{-1} e_i\Big) \text{ pro } 0 \leq \delta \in \mathbb{R})\Big\}.$$
Jelikož libovolné $x \in r_{A_{es}}$ splňuje $A_{es}x \leq \overline{b}$, pak $r_{A_{es}} \subseteq P_s$, tudíž $r_{A_{es}} \subseteq \Sigma$ a protože $r_{A_{es}}$ je neomezená polopřímka, Σ je také neomezená.

□

Věta 3.15.

Σ je souvislá.

Důkaz.

- Máme $\Sigma = \bigcup\limits_{s \in \{\pm 1\}^n} P_s$, kde každý $P_s = \{x \in \mathbb{R}^n : \ A_{es}x \leq \overline{b}\}$ je neprázdný, protože obsahuje aspoň jedinečné řešení x_s rovnice $A_{es}x = \overline{b}$. Navíc je každý P_s souvislý ze své konvexity.
- Uvažujme systém $\mathbf{A}x = \overline{b}$ a označme $\Sigma^=$ množinu jeho řešení. Z věty 2.12 je $\Sigma^=$ souvislá a z definice také obsahuje řešení x_s.
- Nyní pro spor předpokládejme, že Σ je nesouvislá, neboli, že má víc, než jednu komponentu souvislosti. Máme $\Sigma = \Big(\bigcup\limits_{s \in \{\pm 1\}^n} P_s\Big) \cup \Sigma^=$. Každý prvek sjednocení je souvislý, tudíž každý P_s musí být podmnožinou jediné komponenty souvislosti, a stejně tak pro $\Sigma^=$. Každý P_s ale musí být ve stejné komponentě jako $\Sigma^=$, protože sdílejí vrchol x_s. Proto všechny výše uvedené části Σ jsou v jedné komponentě souvislosti, což je ve sporu s naším předpokladem. Tudíž Σ je souvislá.

□

Nyní budeme citovat další Rohnův výsledek, který použijeme v následující větě. Pochází z jeho kolekce čtyřiceti ekvivalentních podmínek pro regularitu intervalových matic. Zde používáme podmínku číslo pět.

Věta 3.16 (Rohn (2009) [str. 502]).

$$\boldsymbol{A} \text{ je regulární} \iff \forall B \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ s } |B| \le A^{\Delta} \text{ a } \forall b \in \mathbb{R}^n, \\ \text{rovnice } A^c x + B|x| = b \text{ má jedinečné řešení.}$$

Lemma 3.17 (Jedinečný vrchol).

$$\text{Existuje jedinečný } s \in \{\pm 1\}^n \text{ takový,} \\ \text{že jedinečný vrchol } x_s \text{ polyedru } P_s \text{ splňuje } x_s \in \mathbb{R}^n_s.$$

Důkaz.

- Fakt, že pro všechna $s \in \{\pm 1\}^n$ má každý polyedr P_s jediný vrchol je důsledek regularity A_{es}, protože existuje jedinečné řešení x_s systému $A_{es}x = \overline{b}$. Každý podsystém má nižší než plnou hodnost a vyprodukuje množinu řešení vyšší dimenze.
- Podívejme se na libovolný x_s. Jako bod množiny řešení, podle věty 2.1, splňuje $A^c x_s \le A^{\Delta}|x_s| + \overline{b}$. Uvažujme dva možné případy.

1. V prvním případě máme nějaké $i \in [m]$ takové, že $(A^c x_s)_i < (A^{\Delta}|x_s| + \overline{b})_i$. Nechť $s' = \mathrm{sgn}(x_s)$. Pak máme $(A_{es'}x_s)_i < \overline{b}_i$, ale protože předpokládáme $A_{es}x_s = \overline{b}$, pak očividně $s \ne s'$. Tudíž x_s, vrchol polyedru P_s, neleží v $\mathbb{R}^n_s$.
2. V druhém případě máme $A^c x_s = A^{\Delta}|x_s| + \overline{b}$. Pak, vezmeme-li $s' = \mathrm{sgn}(x_s)$, dostaneme $D_{s'}\overline{x}_s = |x_s|$, proto máme $(A^c - A^{\Delta}D_{s'})x_s = A_{es'}x_s = \overline{b}$, tudíž $x_s \in P_{s'}$. Potom $s = s'$ a $x_s \in \mathbb{R}^n_s$. Evidentně, protože $A^c x_s = A^{\Delta}|x_s| + \overline{b}$ je rovnice odpovídající předešlé větě, existuje jen jeden takový x_s.

□

Věta 3.18 (Afinní kužel jako obal). *Nechť x_s je jedinečný vrchol z předešlého lemmatu.*

$$\overline{C} \text{ je bodový} \iff \overline{C} = x_s + R.$$

Důkaz.

- Pokud $\overline{C}$ je bodový, pak jsou všechny minimální stěny polyedru $\overline{C}$ vrcholy. Potom z 2. v Lemma 3.9, každý obsahuje minimální stěnu nějakého P_s, která musí být také vrchol, a navíc takový, že leží v $\mathbb{R}^n_s$. Ale z předešlého lemmatu existuje právě jeden takový bod, proto $\overline{C}$ má jediný vrchol x_s. Potom, z Lemma 3.4 máme $\overline{C} = x_s + R$.

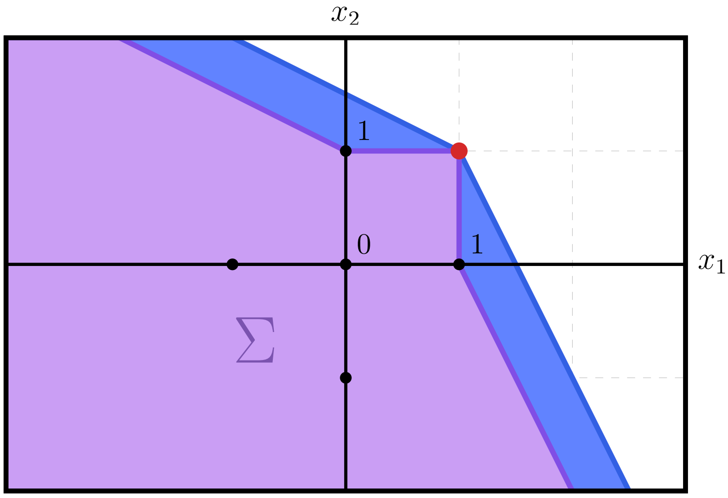
□

Příklad 6. Následující příklad ilustruje množiny řešení systému nerovnic s regulární maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0, \frac{1}{2}] & 1 \\ 1 & [0, \frac{1}{2}] \end{pmatrix} \text{ a vektorem } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Fialově máme opět znázorněnou množinu řešení a modře dodatečné body z uzávěru konvexního obalu. Jediný vrchol je červený.

Obrázek 3.6: Konvexní obal systému nerovnic s regulární intervalovou maticí.



V tento moment je nejasné, zda-li vůbec může existovat regulární matice $\mathbf{A}$ a vektor $\mathbf{b}$, pro které $\overline{C}$ není bodový. Je možné, že se toto nějak vztahuje k lemmatu 3.12 a že případ, kdy $\overline{C}$ je bodový, není z nějakého důvodu možný. Nyní ovšem nedokážeme nabídnout víc než doměnky.

3.4 Konvexita množiny řešení

Uzavřeme s několika podmínkami ohledně konvexity množiny řešení. Výsledky jsou zde mířené na případ nerovnic, ovšem z věty 2.13 víme, že můžeme systém rovnic vyjádřit jako větší systém nerovnic, na který pak můžeme aplikovat stejné podmínky. Toto je samozřejmě daleko od ideálního řešení, jelikož překlad vytváří nové lineární závislosti mezi řádky matic. Proto tento postup nemůže nahradit hledání vlastností množin řešení pro rovnice specificky. Je to ovšem stále validní způsob, jak adaptovat naše obecné výsledky pro případ rovnic.

Jako první máme následující pozorování. Může se zdát, že dokazujeme, že pokud matice má pouze reálné hodnoty, nebo pokud všechna řešení leží v jednom ortantu, pak je Σ konvexní. Obojí by implikovalo konvexitu. Místo toho ovšem ukazujeme, že existuje vztah mezi sloupci matice a příslušnými hranicemi mezi ortanty.

Už zde můžeme vidět podobnost s Rohnovou podmínkou ve větě 2.14.

Pozorování 3.19 (Základní podmínka konvexity)**.**

$$\textit{Pokud } \forall i \in [m]\ \forall j \in [n]\ \forall x_1, x_2 \in \Sigma: \quad A^\Delta_{i,j} = 0 \quad \vee \quad (x_1)_j (x_2)_j \geq 0, \\ \textit{pak } \Sigma \textit{ je konvexní.}$$

Důkaz. Zafixujme libovolné $i \in [m]$ a mějme libovolnou konvexní kombinaci $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ pro libovolné $x_1, x_2 \in \Sigma$ a nějaké $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ takové, že $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Protože $x_1, x_2 \in \Sigma$, z věty 2.1 máme

$$A^c x_1 \leq A^\Delta |x_1| + \bar{b} \text{ a } A^c x_2 \leq A^\Delta |x_2| + \bar{b}.$$

Z toho dostáváme

$$A^c x = \lambda_1 A^c x_1 + \lambda_2 A^c x_2 \leq A^\Delta \Big(\lambda_1 |x_1| + \lambda_2 |x_2| \Big) + \bar{b}.$$

Můžeme přepsat $\Big(A^\Delta \Big(\lambda_1 |x_1| + \lambda_2 |x_2| \Big) \Big)_i$ jako

$$\sum_{j \in [n]} A^\Delta_{i,j} \Big(\lambda_1 |x_1|_j + \lambda_2 |x_2|_j \Big).$$

Nyní uvažujme postupně všechna j a použijme předpoklady pro dokázání

$$A^\Delta_{i,j} \Big(\lambda_1 |x_1|_j + \lambda_2 |x_2|_j \Big) = A^\Delta_{i,j} \Big| \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \Big|_j . \tag{1}$$

1. Pokud $A^\Delta_{i,j} = 0$, pak (1) platí triviálně, protože $0 = 0$.
2. Pokud ovšem máme $(x_1)_j (x_2)_j \geq 0$, pak $|x_1 + x_2|_j = |x_1|_j + |x_2|_j$ a spolu s nezáporností λ_1, λ_2 opět dostáváme, že (1) platí.

Tudíž (1) platí pro jakékoliv j a můžeme vyjádřit

$$\sum_{j \in [n]} A^\Delta_{i,j} \Big(\lambda_1 |x_1|_j + \lambda_2 |x_2|_j \Big) = \sum_{j \in [n]} A^\Delta_{i,j} \Big| \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \Big|_j ,$$

neboli

$$\Big(A^\Delta \Big(\lambda_1 |x_1| + \lambda_2 |x_2| \Big) + \bar{b} \Big)_i = \Big(A^\Delta \Big| \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \Big| + \bar{b} \Big)_i .$$

Protože toto platí pro libovolné $i \in [m]$, konečně dostáváme

$$A^\Delta\Big(\lambda_1|x_1| + \lambda_2|x_2|\Big) + \bar{b} = A^\Delta\Big|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\Big| + \bar{b} = A^\Delta|x| + \bar{b}$$

což nám nakonec dává $A^c x \leq A^\Delta|x| + \bar{b}$, tudíž z věty 2.1, $x \in \Sigma$. Protože jsme vybrali libovolnou konvexní kombinaci x, Σ je konvexní. $\square$

Důsledek 3.20 (Adaptace pro rovnice)**.**

$$\textit{Pokud } \forall i \in [m]\ \forall j \in [n]\ \forall x_1, x_2 \in \Sigma^= :\ \ A^\Delta_{i,j} = 0 \ \ \vee\ \ (x_1)_j(x_2)_j \geq 0$$
pak $\Sigma^=$ *je konvexní.*

Důkaz.

- Redukujeme problém na předešlé pozorování. Pomocí věty 2.13 vyjádříme $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ jako $\mathbf{A}x \leq \mathbf{b} \ \wedge\ \mathbf{A}x \geq \mathbf{b}$ nebo ekvivalentně $\mathbf{A}x \leq \bar{b} \ \wedge\ -\mathbf{A}x \leq -\underline{b}$. Toto nám dává nový systém $\mathbf{B}x \leq b$, kde $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{pmatrix}$ a $b = \begin{pmatrix} \bar{b} \\ -\underline{b} \end{pmatrix}$. Nechť Σ je množina řešení tohoto nového systému.
- Z konstrukce $\mathbf{B}$ máme

$$\Big(B^\Delta_{i,j} = 0 \ \vee\ B^\Delta_{i+n,j} = 0\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad A^\Delta_{i,j} = 0.$$

  a z věty 2.13, opět víme, že $\Sigma^= = \Sigma$, tudíž druhá podmínka se také nemění.

$\square$

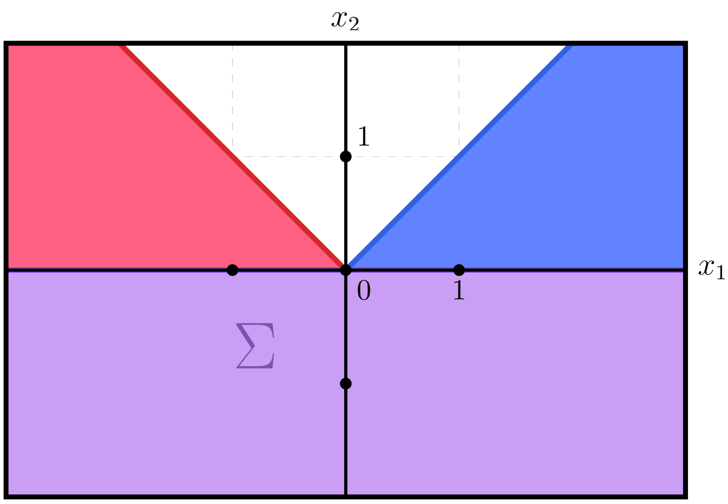
Následující je protipříklad ke zpětné implikaci výše uvedenému pozorování.

Příklad 7. Uvažujme množinu řešení $\mathbf{A}x \leq b$ s

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0,1] & 1 \\ [-1,0] & 1 \end{pmatrix} \text{ a } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Červené jsou vrcholy splňující pouze první nerovnost, modré jsou body splňující pouze druhou, a fialové jsou body, které splňují obě, neboli množina řešení Σ. Očividně je Σ konvexní, ale například máme $A^\Delta_{1,1} > 0$ a jednoduše najdeme body $x_1, x_2 \in \Sigma$ s $(x_1)_1 < 0 < (x_2)_1$.

Obrázek 3.7: Protipříklad k implikaci opačné vůči Pozorování 3.19.



Následující věta je pokus o zobecnění Rohnovy podmínky pro nekonvexitu množiny řešení rovnic s regulárními intervalovými maticemi ve větě 2.14. Vskutku dostaneme jednu implikaci, která vypadá velmi podobně a navíc se dokazuje velmi podobným způsobem. Po větě bude následovat protipříklad ke zpětné implikaci.

Věta 3.21 (Speciální podmínka nekonvexity)**.**

$$\exists x_1, x_2 \in \Sigma,\ \ \exists i \in [m],\ j \in [n]\ \textit{takové, že:}$$

1. $\left(A_{es_1}x_1\right)_i = \bar{b}_i = \left(A_{es_2}x_2\right)_i$ *kde* $s_1 := \operatorname{sgn}(x_1),\ s_2 := \operatorname{sgn}(x_2)$
2. $A^{\Delta}_{i,j} > 0$
3. $(x_1)_j(x_2)_j < 0$

Pak Σ je nekonvexní.

Důkaz.

Protože $s_1 := \operatorname{sgn}(x_1),\ s_2 := \operatorname{sgn}(x_2)$ a z definice A_{es} pro nějaké $s \in \{\pm 1\}^n$ můžeme přepsat 1. jako

$$\left(A^c x_1\right)_i = \left(A^{\Delta}|x_1| + \bar{b}\right)_i \text{ a } \left(A^c x_2\right)_i = \left(A^{\Delta}|x_2| + \bar{b}\right)_i$$

Nyní mějme libovolný x na úsečce $\overline{x_1 x_2}$, který není jedním z koncových bodů, neboli $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ pro $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ a $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Pak můžeme vyjádřit

$$\begin{aligned}
\left(A^c x\right)_i &= \lambda_1\left(A^c x_1\right)_i + \lambda_2\left(A^c x_2\right)_i \\
&= \lambda_1\left(A^{\Delta}|x_1| + \bar{b}\right)_i + \lambda_2\left(A^{\Delta}|x_2| + \bar{b}\right)_i \\
&= \left(A^{\Delta}\left(\lambda_1|x_1| + \lambda_2|x_2|\right) + \bar{b}\right)_i
\end{aligned}$$

Z 3. máme $\lambda_1|x_1|_j + \lambda_2|x_2|_j > x_j$, zatímco obecně pouze platí $\lambda_1|x_1|_{j'} + \lambda_2|x_2|_{j'} \geq x_{j'}$ pro $j' \neq j$. V konjukci s 2. pak máme

$$\left(A^{\Delta}\left(\lambda_1|x_1| + \lambda_2|x_2|\right)\right)_i > \left(A^{\Delta}|x|\right)_i$$

Tudíž

$$\left(A^c + x\right)_i > \left(A^{\Delta}|x| + \bar{b}\right)_i,$$

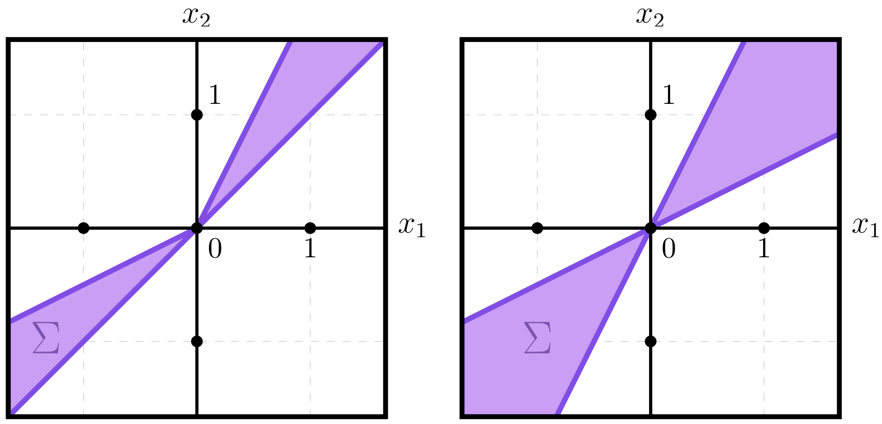
což důsledkem věty 2.1 znamená, že $x \notin \Sigma$. Ukázali jsme, že existují-li $x_1, x_2 \in \Sigma$ splňující tři dané podmínky, celý vnitřek úsečky mezi nimi neleží v Σ, proto Σ je nekonvexní. □

V Rohnově verzi jsou použity dvojice vrcholů množiny řešení, protože pro regulární případ existují. Zde nicméně, jak už jsme viděli, narážíme na problém, že naše množina může být neomezená nebo nemusí mít vrcholy. Z tohoto důvodu podmínku pouze povolujeme a díváme se místo toho na dvojice vrcholů v hranici množiny řešení.

Další podmínka chybějící v naší verzi je $(s_1)_i = (s_2)_i$ říkající, že dvojice bodů je v sousedních ortantech. Abychom ukázali proč tato podmínka obecně nefunguje, použijeme následující příklad.

Příklad 8 (Množina řešení v opačných ortantech). Zde vidíme množinu řešení pro systém s maticí $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [-2,-1] & [1,2] \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a vektorem $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Příklad nalevo demonstruje, že pro případ obecných nerovností lze najít systém, kde neexistují dvě odlišná řešení v sousedních ortantech, aby ani jedno nebylo na společné hranici. Nicméně množina řešení je stále nekonvexní.

Obrázek 3.8: Nekonvexní množina řešení bez stejné rovnosti v opačných ortantech.

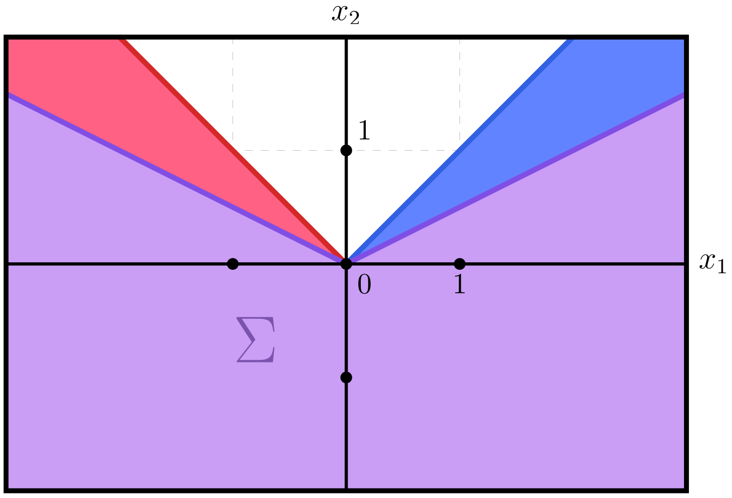


Jak vidíme napravo, můžeme dokonce najít analogický příklad z případu obecných rovnic s maticí $\mathbf{A} = ([-2,-1][1,2])$ a vektorem $b = 0$. Dokonce, jak víme z věty 2.13, můžeme reprezentovat stejný systém s nerovnicemi pro $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [1,2] & [-2,-1] \\ [-1,-2] & [1,2] \end{pmatrix}$ a $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Nyní si ukážeme protipříklad vyvracející opačnou implikaci podmínky nekonvexity.

Příklad 9 (Protipříklad ke zpětné implikaci). Zde vidíme množinu řešení pro systém s maticí $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [-1/2, 1] & 1 \\ [-1, 1/2] & 1 \end{pmatrix}$ a vektorem $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Můžeme vidět červené body splňující pouze první řádek, modré vrcholy splňující pouze druhý, a fialové body splňující oba, neboli množinu řešení. Můžeme si povšimnout, že nelze vybrat dvojici bodů, které splňují stejný řádek jako rovnost, ale množina řešení je jasně stále nekonvexní.

Obrázek 3.9: Nekonvexní množina řešení bez stejné rovnosti v různých ortantech.



Skončíme obecnější podmínkou nekonvenosti, která zachycuje předešlý příklad. Pro dané x_1, x_2 definujme $s \in \{\pm 1\}^n$ jako $s_j := \begin{cases} \operatorname{sgn}(x_2)_j & (x_1)_j = 0 \\ \operatorname{sgn}(x_1)_j & (x_1)_j \neq 0 \end{cases}$. Jinými slovy, pokud x_1 leží na hranici dvou ortantů, pak vybereme jako $\mathbb{R}^n_s$ ten ortant, který obsahuje nejen x_1, ale také netriviální část úsečky $\overline{x_1 x_2}$. Pak dostaneme následující.

Věta 3.22 (Obecnější podmínka nekonvexity)**.**

Pokud $\exists x_1, x_2 \in \Sigma\ \exists i \in [m]$ *takové, že* $\left(A_{es}x_1\right)_i = \bar{b}_i < \left(A_{es}x_2\right)_i$,
pak Σ *je nekonvexní.*

Důkaz.
$\mathbb{R}^n_s$ obsahuje x_1, konec úsečky $\overline{x_1 x_2}$ spolu s nějakou její další netriviální částí. Pak, pro dostatečně malá $\lambda > 0$, bod $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ bude ležet v ortantu $\mathbb{R}^n_s$. Proto, pokud má ležet v Σ, musí splňovat $\left(A_{es}x\right)_i \leq \bar{b}_i$. Ale my máme

$$\left(A_{es}x\right)_i = \left(A_{es}\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right)\right)_i = \lambda\left(A_{es}x_1\right)_i + (1-\lambda)\left(A_{es}x_2\right)_i > \bar{b}_i$$

tudíž $x \in \mathbb{R}^n_s$, ale $x \notin P_s$, proto $x \notin \Sigma$. □

4. Závěr

Na závěr shrňme, co jsme zde viděli. Nejdříve jsme představili téma intervalových lineárních systémů, a protože množiny řešení jsou sjednocením konvexních polyedrů, připoměli jsme si nějaké z centrálních konceptů a výsledků teorie polyedrů.

Vybaveni těmito znalostmi jsme poté rekapitulovali známé výsledky ohledně geometrie množin řešení intervalových lineárních systémů. Některé z těchto výsledků byly v zásadě obecné, specificky například věty Oettli-Prager a Gerlach, a některé, ač užitečné, jsou aplikovatelné jen na malou podmnožinu problémů, kupříkladu Rohnovy výsledky ohledně konvexity.

Poté jsme použili ty první, obecnější výsledky jako nástroj pro lepší porozumění a dekonstrukci množin řešení a jejich konvexních obalů pohledem teorie polyedrů, a nakonec, pro pokus o zobecnění některých z druhého druhu výsledků.

Zjistili jsme, že systémy nerovnic s regulární maticí mají některé garantované speciální geometrické charakteristiky analogické, ale v mnoha případech opačné, než jsou v případě rovnic.

Použili jsme teorii polyedrů pro charakterizaci konvexního obalu pro obecné systémy nerovnic. Toto nám pomáhá minimalizovat počet řešení, která musíme nacházet, abychom popsali konvexní obal. Navíc jsme našli nějaká omezení těchto řešení, která snižují jejich počet ještě víc. Není ovšem jasné, jestli toto povede k nějakým užitečným důsledkům, protože stále máme exponenciální počet polyedrů, ve kterých je tato řešení třeba hledat.

Nakonec jsme našli několik podmínek, které nám pomáhají charakterizovat konvexitu a nekonvexitu obecných intervalových lineárních systémů. Nenašli jsme ovšem postačující i nutnou podmínku, jak bychom chtěli.

Prozkoumali jsme tedy téma několika různými směry a našli jsme řadu bodů zájmu.

Toto nechává prostor a možná i jasný směr pro budoucí práci. Například, recesní kužel konvexního obalu stále nemá efektivní popis. Dále, nutná a postačující podmínka pro konvexitu množiny řešení by byla velmi cenná. Zjevně je také prostor pro zlepšování výsledků pro konvexitu a konvexní obal specificky pro obecné systémy rovnic, kde by speciální výsledky byly krok kupředu vůči tomu, co poskytujeme v této práci.

Další zajímavé téma je otázka kuželu duálního k R. Pokud bychom dokázali vyjádřit matici kuželu duálního k $\{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \leq 0\}$ pro $A \in \mathbf{A}$ takovým způsobem, že by všechny matice dohromady tvořily opět intervalovou matici, mohli bychom pak vzít množinu silných řešení takového systému. Mohlo by to být umožněno tím, že by mělo existovat několik stupňů svobody ve volbě takových matic. Ačkoliv jsme nezacházeli do tématu silných řešení, stojí za povšimnutí, že pro případ nerovnic se množina silných řešení takového systému dá spočítat v polynomiálním čase. Duální kužel k R by pak mohl poskytnout, v některých speciálních případech, jednodušší způsob jak spočítat R přímo. Možná ještě zajímavější je, že tento duál obsahuje normální vektory všech stěnových nadrovin polyedru $\overline{C}$, nebo ekvivalentně, všechny omezené směry $\overline{C}$ (Schrijver (1998) [str. 186, 187]).

Seznam použité literatury

BARTH, W. a NUDING, E. (1974). Optimale lösung von intervallgleichungssystemen. *Comput.*, **12**, 117–125. in German.

GARAJOVÁ, E. a HLADÍK, M. (2019). On the optimal solution set in interval linear programming. *Comput. Optim. Appl.*, **72**(1), 269–292. doi: 10.1007/s10589-018-0029-8.

GERLACH, W. (1981). Zur lösung linearer ungleichungssysteme bei störung der rechten seite und der koeffizientenmatrix. *Math. Operationsforsch. Stat., Ser. Optimization*, **12**, 41–43. doi: 10.1080/02331938108842705. in German.

HLADÍK, M. (2014). On approximation of the best case optimal value in interval linear programming. *Optim. Lett.*, **8**(7), 1985–1997. doi: 10.1007/s11590-013-0715-5.

JANSSON, C. (1997). Calculation of exact bounds for the solution set of linear interval systems. *Linear Algebra Appl.*, **251**, 321–340.

KLEE, V. (1969). Separation and support properties of convex sets: A survey. Technical report.

LAKEEV, A. V. a NOSKOV, S. I. (1994). On the solution set of a linear equation with the right-hand side and operator given by intervals. *Sib. Math. J.*, **35**(5), 957–966.

LI, W. (2015). A note on dependency between interval linear systems. *Optim. Lett.*, **9**(4), 795–797.

OETTLI, W. (1965). On the solution set of a linear system with inaccurate coefficients. *J. SIAM Numer. Anal.*, **2**(1), 115–118.

OETTLI, W. a PRAGER, W. (1964). Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides. *Numer. Math.*, **6**, 405–409. doi: 10.1007/BF01386090.

ROHN, J. (1985). Miscellaneous results on linear interval systems. Freiburger Intervall-Berichte 85/9, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg.

ROHN, J. (1989). Systems of linear interval equations. *Linear Algebra Appl.*, **126** (C), 45.

ROHN, J. (1995). NP-hardness results for some linear and quadratic problems. Technical Report 619, Institute of Computer Science, Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague. URL `http://hdl.handle.net/11104/0122691`.

ROHN, J. (2009). Forty necessary and sufficient conditions for regularity of interval matrices: A survey. **18**, 502.

ROHN, J. (2012). A manual of results on interval linear problems. Technical Report 1164, Institute of Computer Science, Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague. URL `http://hdl.handle.net/11104/0212115`.

SCHRIJVER, A. (1998). *Theory of Linear and Integer Programming. Repr.* Wiley, Chichester. ISBN 0-471-98232-6.

Seznam obrázků