

## POSUDEK VEDOUCÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

**Název:** Coupling, transportní metrika a aplikace pro přibližné počítání

**Autor:** Rozálie Kluvancová

### SHRNUTÍ OBSAHU PRÁCE

Práce se zabývá odhady rychlosti mixingů Markovových řetězců s diskrétním časem a konečným stavovým prostorem, speciálně odhady využívajícími vhodný coupling dvou verzí Markovova řetězce s toutéž maticí pravděpodobností přechodu — jedné s počátečním rozdělením rovným stacionárnímu a druhé startující z pevného stavu. Otázka konstrukce vhodného couplingu (který vede na nejrychlejší mixing) není jednoduchá. V některých situacích ji lze řešit pomocí tzv. transportní metriky, kdy pomocí obyčejné metriky na stavové množině  $\mathcal{X}$  a všech možných couplingů různých pravděpodobnostních rozdělení na stavové množině  $\mathcal{X}$  definujeme metriku na množině všech pravděpodobnostních rozdělení na  $\mathcal{X}$  — transportní metriku.

Jádro práce tvoří čtvrtá kapitola, která obsahuje obecné vysvětlení a důkaz korektnosti metody, a také netriviální aplikaci na situaci počítání (tj. určení počtu) přípustných obarvení (velkého a složitého) grafu pomocí Markov chain Monte Carlo simulace. Nejdříve se v kapitole 4.3 ukáže horní odhad pro rychlost mixingů Glauberovy dynamiky pro přípustná obarvení grafu a poté se v kapitole 4.4 dokáže existence zcela polynomiálního (jak v počtu vrcholů grafu  $n$ , tak v přesnosti aproximace  $\epsilon^{-1}$ ) znáhodněného aproximačního schématu. V kapitole 4.5 je potom vylepšen odhad výpočetní složitosti při použití upraveného algoritmu.

Kapitoly 1-3 jsou přípravné a obsahují všechny definice a tvrzení (včetně důkazu nebo jen odkazovaná), které jsou potřeba k výkladu ve čtvrté kapitole.

### CELKOVÉ HODNOCENÍ PRÁCE

Práce je dobře logicky uspořádaná, srozumitelná a kompaktní, na velmi dobré formální a matematické úrovni.

Slečna Kluvancová pracovala na své bakalářské práci systematicky a se zájmem. Téma práce už není úplně jednoduché, k dobrému pochopení pojednávané metody i hlavního příkladu bylo třeba nastudovat a pochopit větší rozsah materiálu ze zdrojové knihy, a potom ho zredukovat na minimální postačující rozsah. Také řešení cvičení (zformulovat a dokázat větu 14 z práce) vyžadovalo samostatné dostudování a pochopení dalšího materiálu, a schopnost nenechat se zmást chybným návodem. K tomu se po jistém váhání slečna Kluvancová odhodlala a řešení se jí povedlo. Zcela jistě to prokazuje schopnost samostatného provozování matematiky a schopnost samostatného použití znalostí získaných během bakalářského studia i těch získaných během studia použitých zdrojů.

**Téma práce.** Téma práce bylo zvoleno nad rámec obsahu bakalářského studia. Markovovy řetězce se sice v kurikulu vyskytují, ale těžiště práce spadá do "moderní teorie" Markovových řetězců, která se v bakalářských kurzech nevyskytuje. Úkolem definovaným v zadání práce bylo nastudovat čtrnáctou kapitolu z knihy Levin a Peres (2017), dostudovat vše, co je třeba k jejímu pochopení a osvojení metod v ní používaných, vyřešit úkol spočívající ve vylepšení odhadu výpočetní složitosti v ústředním příkladu, a vše přesně a přehledně sepsat. Zadání práce bylo splněno.

**Vlastní příspěvek.** Práce má kompilační charakter. Vlastním příspěvkem autorky je přehledné a srozumitelné sepsání zadaného tématu při podmínce zachování rozumného rozsahu práce. Výběr materiálu v kapitolách 1-3 včetně doplnění odvození některých faktů tak, aby bylo v práci vše potřebné pro hlavní kapitolu 4, je také netriviální vlastní příspěvek. Důkazy převzaté ze zdroje byly doplněny tam, kde byl postup příliš rychlý. Hlavním vlastním příspěvkem je ale kapitola 4.5, což je správné řešení cvičení se zavádějícím návodem. Vlastní příspěvek je autorkou přesně popsán v úvodu práce.

**Matematická úroveň.** Matematická úroveň práce je velmi dobrá, práce obsahuje rigorózně a korektně formulovaný matematický text, matematické nedostatky se téměř nevyskytují.

**Práce se zdroji.** Výchozí zdroj je kniha Levin a Peres (2017), mimo ní už jen skripta k bakalářskému kurzu o Markovových řetězcích a článek z roku 2007, který lépe osvětluje problematiku algoritmických aplikací Markovových řetězců. Zdroje jsou řádně citovány.

**Formální úprava.** Formální úprava práce je na velmi dobré úrovni, práce obsahuje jen některé drobné typografické chyby.

## ZÁVĚR

Přestože by se možná v závěrečné fázi psaní hodilo ještě trochu více času ke konečnému "vyladění" práce, i tak vznikla velmi pěkná bakalářská práce, jistě splňující všechny požadavky kladené na bakalářskou práci na MFF UK. Doporučuji ji proto jako takovou uznat.

V Jablonci n. N., 31. srpna 2023

RNDr. Michaela Prokešová, Ph.D.  
KPMS MFF UK