MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Filip Nicek

Kundtova třída prostoročasů v Einsteinově–Gaussově–Bonnetově teorii gravitace

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce:	prof. RNDr. Jiří Podolský, CSc., DSc.
Studijní program:	Fyzika
Studijní obor:	Obecná Fyzika

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Rád bych zde poděkoval svému vedoucímu prof. Jiřímu Podolskému za jeho vedení, cenné rady, trpělivost a neuvěřitelnou podporu při psaní této práce.

Také bych rád poděkoval svým spolužákům Jánu Kovačovskému a Josefu Kučerovi za technickou pomoc se softwarem, konkrétně s programy LaTeX a Wolfram Mathematica.

V neposlední řadě bych chtěl poděkovat své rodině, zejména mamince Ing. Petře Nickové a sestře Elišce Nickové, za jejich cenné připomínky k jazykové stránce práce a za jejich podporu během mého studia.

Název práce: Kundtova třída prostoročasů
v Einsteinově–Gaussově–Bonnetově teorii gravitace

Autor: Filip Nicek

Ústav: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jiří Podolský, CSc., DSc.,
Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: V této práci studujeme úplnou třídu neexpandujících lorentzovských geometrií s netriviálními gyratonovými členy v Einsteinově–Gaussově–Bonnetově (EGB) teorii gravitace libovolné dimenze. Nejprve zavádíme Kundtovu třídu prostoročasů, která je geometricky definována pomocí kongruence neexpandujících světelných paprsků (bez twistu a shearu), a shrnujeme hlavní výsledky z Einsteinovy teorie gravitace v obecné dimenzi. Následně systematicky odvozujeme polní rovnice EGB teorie, analyzujeme jejich hlavní vlastnosti a indentifikujeme čtyři různé podtřídy. Nakonec rozebíráme speciální případ zcela obecných EGB *pp*-vln a EGB VSI/CSI prostoročasů.

Klíčová slova: Obecná teorie relativity, Einsteinova–Gaussova–Bonnetova teorie, Kvadratická gravitace, Kundtova třída prostoročasů, Gravitační vlny

Title: Kundt spacetimes in the Einstein–Gauss–Bonnet theory of gravity

Author: Filip Nicek

Institute: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: prof. RNDr. Jiří Podolský, CSc., DSc.,
Institute of Theoretical Physics

Abstract: In this work, we study a complete family of non-expanding Lorentzian geometries with non-vanishing gyratonic terms in the Einstein–Gauss–Bonnet (EGB) theory of gravity of arbitrary dimension. First, we introduce the large Kundt class, defined geometricaly by admitting a non-expanding, twist-free, shear-free null geodesic congruence, and summarise the main results from Einstein's theory of gravity in an arbitrary dimension. We then systematically derive the field equations of EGB theory, analyse their main properties, and identify four distinct subclasses. Finally, we discuss the special case of fully general EGB *pp*-waves and EGB VSI/CSI spacetimes.

Keywords: General Relativity, Einstein–Gauss–Bonnet Theory, Quadratic Gravity, Kundt Spacetimes, Gravitational Waves

Obsah

Úvod

Cílem této práce je studovat konkrétní přesná řešení polních rovnic v rámci Einsteinovy teorie gravitace a jejich zobecnění v takzvané *Einsteinově–Gaussově–Bonnetově teorii*. Konkrétně půjde o Kundtovu třídu prostoročasů reprezentující různé kosmologické modely a také přesné gravitační vlny.

Při hledání nových řešení rovnic gravitačního pole je třeba postupovat opatrně, neboť Einsteinova teorie gravitace je kovariantní a daný prostoročas tak lze (lokálně) vyjádřit v libovolném systému souřadnic. Mezi dvěma různými systémy je možné přejít vhodnou (hladkou) transformací tak, aby fyzikální význam řešení zůstal zachovám. V důsledku tohoto principu není obecně jasné, zda je nově nalezené řešení Einsteinových rovnic skutečně nové, či zda se jedná pouze o známé řešení vyjádřené v nových souřadnicích. Je tedy nezbytné analyzovat strukturu *Riemannova tenzoru* křivosti, identifikovat symetrie, optické vlastnosti, určit algebraickou strukturu *Weylova tenzoru* a tak dál.

Nejčastěji se studují vakuové rovnice bez přítomné hmoty, ale připouští se i kosmologická konstanta Λ či elektromagnetické pole nebo dokonalá tekutina. Mezi hlavní třídy přesných řešení patří *Minkowského*, *de Sitterův* či *anti-de Sitterův* kosmologický prostoročas s maximálními počty symetrií, *Friedmannův–Lamaîtreův–Robertsonův–Walkerův* (FLRW) vesmír, nebo velmi známé *Schwarzschildovo* či *Kerrovo* černoděrové řešení. Pro tuto práci je důležitá *Kundtova* a *Robinsonova–Trautmanova* třída obsahující přesné gravitační vlny, které jsou geometricky definovány pomocí optických skalárů.

Einsteinova teorie gravitace je *klasická polní teorie* a nelze ji přímo aplikovat na případy, kdy začínají dominovat kvantové efekty, tedy v oblastech s extrémně vysokou energií (např. na okolí křivostních singularit v černých dírách a nebo velkém třesku). Všeobecně se očekává, že tyto efekty se projevují na škálách Planckovy délky.

Jeden z možných kandidátů na zobecnění Einsteinovy obecné teorie relativity je tzv. *Einsteinova–Gaussova–Bonnetova* (EGB) teorie, která patří mezi nejjednodušší zástupce rozsáhlé třídy tzv. *kvadratických gravitací*. Tyto teorie přidávají do polních rovnic kvadratické opravné členy, které se nejvíce projeví právě v oblastech s extrémní nehomogenitou a extrémním zakřivením. Pro lepší pochopení efektů souvisejících s kvantováním gravitace je tedy klíčové zkoumat přesné prostoročasy v těchto rozšířených teoriích, a porovnat je s klasickými výsledky z obecné relativity.

Z tohoto hlediska je velmi zajímavá právě Kundtova třída prostoročasů, která patří mezi nejzákladnější známá řešení v obecné relativitě. V EGB teorii byla již systematičtěji analyzována v práci [12] a následném článku [31], ale jen pro speciální případ $g_{ui} = 0$, tedy bez tzv. *gyratonového* členu. V tomto textu se proto pokusíme analyzovat zcela *obecnou Kundtovu třídu prostoročasů* v EGB teorii i s gyratonným členem $g_{ui} = 0$. Naším cílem je spočítat všechny složky příslušného Riemannova tenzoru, jeho kontrakcí a relevantních kvadrátů. Pak sestavíme polní rovnice, pokusíme se je řešit a také analyzovat jejich hlavní vlastnosti.

1. Einsteinova obecná teorie relativity

Již okolo roku 1905, kdy se zrodila speciální teorie relativity, začalo být jasné, že Newtonova teorie gravitace má nedostatky, díky kterým není kompatibilní jak s Einsteinovou speciální relativitou, tak s Maxwellovým elektromagnetismem. Původní newtonovská teorie nebyla schopna vysvětlit některé jevy jako např. stáčení perihelia Merkuru, avšak jejím hlavním koncepčním nedostatkem bylo okamžité působení na dálku. Nastával tedy problém, jak zahrnout teorii gravitace do nového kontextu speciální teorie relativity a jak tuto teorii zobecnit i na neinerciální vztažné systémy.

Klíčovou odpověď na tuto otázku dal jednoduchý myšlenkový experiment, který Einstein nazval nejšťastnější myšlenkou svého života. V roce 1907, když pozoroval pokrývače střech ze své kanceláře na patentovém úřadu v Bernu, si představil, co by se stalo, kdyby se střecha s pokrývačem utrhla. Uvědomil si, že pokud by pokrývač upustil během volného pádu své kladivo, z jeho pohledu by se již nepohybovalo s žádným zrychlením a na krátký okamžik by byl tento případ zcela nerozlišitelný od případu, kdy by plul prázdným vesmírem. Jde o tzv *princip ekvivalence*, základní postulát obecné teorie relativity, který říká, že gravitační pole je ekvivalentní s polem „setrvačných sil“. Gravitační pole je tedy možné ***lokálně*** odtransformovat přechodem k volně padajícím lokálním inerciálním systémům (LIS), kde platí stejné fyzikální zákony jako ve speciální relativitě.

Inerciální soustavy se vůči vztažným systémům, které se nachází v gravitačním poli, nepohybují rovnoměrně přímočaře, nýbrž po zakřivených trajektoriích, tzv. geodetikách. Pokud bychom se neomezili na dostatečně malé okolí volně padajícího systému, začal by se v důsledku nehomogenity pole tvar geodetik v různých bodech měnit. Pozorovali bychom proto slapové jevy. Je tedy vhodné popisovat gravitační pole nikoli jako sílu, ale jako *zakřivení prostoročasu*.

To ovšem matematicky znamená, že musíme přejít od plochého Minkowského prostoročasu k obecným *pseudo-Riemmanovým* varietám, tedy hladkým diferencovatelným varietám s metrikou $g_{\mu\nu}$, která v žádném bodě nedegeneruje a má signaturu $(-+++)$. Kovariantní derivace je následně dána *Levi-Civitovou afinní konexí*, tj. *Christo elovými symboly*

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} \left(g_{\mu\alpha,\nu} + g_{\nu\alpha,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha} \right), \tag{1.1}$$

jako

$$V^{\mu}_{;\nu} = V^{\mu}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} V^{\lambda}, \tag{1.2}$$

kde středník značí kovariantní derivaci podle souřadnice, zatímco čárka obyčejnou parciální derivaci.

Lze nahlédnout, že složky afinní konexe $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ jsou symetrické v indexech μ, ν a navíc, pokud je prostoročas plochý, zcela vymizí. Christoffelovy symboly a tím i kovariantní derivace jsou tedy klíčové pro konstrukci tenzorů, které charakterizují zakřivení prostoročasu.

Riemannův tenzor křivosti je definován pomocí komutátoru druhých kovariantních derivací, tak aby

$$V^{\kappa}_{\ ;\mu\nu} - V^{\kappa}_{\ ;\nu\mu} = -R^{\kappa}_{\ \lambda\mu\nu} V^{\mu}, \tag{1.3}$$

kde

$$R^{\kappa}_{\ \lambda\mu\nu} \equiv \Gamma^{\kappa}_{\ \lambda\nu,\mu} - \Gamma^{\kappa}_{\ \lambda\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\ \lambda\nu}\Gamma^{\kappa}_{\ \alpha\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\ \lambda\mu}\Gamma^{\kappa}_{\ \alpha\nu}. \tag{1.4}$$

Občas je výhodné Riemannův tenzor vyjádřit ve zcela kovariantní podobě

$$R_{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\lambda,\nu\kappa} + g_{\nu\kappa,\mu\lambda} - g_{\mu\kappa,\nu\lambda} - g_{\nu\lambda,\mu\kappa}\right) + g_{\alpha\beta}\left(\Gamma^{\alpha}_{\ \mu\lambda}\Gamma^{\beta}_{\ \nu\kappa} - \Gamma^{\beta}_{\ \mu\kappa}\Gamma^{\alpha}_{\ \nu\lambda}\right). \tag{1.5}$$

Tyto objekty jsou antisymetrické v indexech μ,ν a κ,λ, symetrické ve dvojicích $\mu\nu$, $\kappa\lambda$ a navíc, pro (1.4) platí tzv. ***první Bianchiho identity*** $R^{\kappa}_{\ [\lambda\mu\nu]} = 0$, kde $[\ldots]$ označuje antisymetrizaci. Celkově má tak ve zcela obecném případě čtyřrozměrného prostoročasu ($D = 4$) Riemannův tenzor 20 netriviálních komponent.

Pomocí Riemannova tenzoru lze dále definovat symetrický ***Ricciho tenzor***

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\lambda}_{\ \mu\lambda\nu} = g^{\lambda\kappa} R_{\lambda\mu\kappa\nu}, \tag{1.6}$$

a ***Ricciho skalár***

$$R \equiv R^{\mu}_{\ \mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \tag{1.7}$$

Definujeme též ***Weylův tenzor*** jako bezestopou část Riemannova tenozru

$$\begin{aligned} C_{\kappa\lambda\mu\nu} \equiv R_{\kappa\lambda\mu\nu} &+ \frac{1}{2}\left(R_{\lambda\mu}g_{\kappa\nu} + R_{\kappa\nu}g_{\lambda\mu} - R_{\lambda\nu}g_{\kappa\mu} - R_{\kappa\mu}g_{\lambda\nu}\right) \\ &+ \frac{1}{6}R\left(g_{\kappa\mu}g_{\lambda\nu} - g_{\kappa\nu}g_{\lambda\mu}\right). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Zavedením nulové tetrády čtyř bázových vektorů

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{t} + \boldsymbol{z}\right), & \boldsymbol{l} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{z}\right), \\ \boldsymbol{m} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}\right), & \bar{\boldsymbol{m}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{x} - i\boldsymbol{y}\right), \end{aligned} \tag{1.9}$$

s normalizací

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l} = -1, \qquad \boldsymbol{m}\cdot\bar{\boldsymbol{m}} = 1, \tag{1.10}$$

kde ($\boldsymbol{t}$,$\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$,$\boldsymbol{z}$) je ortonormální tetráda, lze pomocí různých projekcí zavést skalární veličiny, které jednoznačně určují složky tenzorů křivosti zavedených výše. Zápis v této podobě je známý jako ***Newmanův–Penroseův formalismus***.

Pro Ricciho tenzor můžeme definovat šest skalárních funkcí

$$\begin{aligned} \Phi_{00} &= \frac{1}{2}R_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu}, & \Phi_{22} &= \frac{1}{2}R_{\mu\nu}l^{\mu}l^{\nu}, \\ \Phi_{01} &= \frac{1}{2}R_{\mu\nu}k^{\mu}m^{\nu}, & \Phi_{12} &= \frac{1}{2}R_{\mu\nu}l^{\mu}m^{\nu}, \\ \Phi_{02} &= \frac{1}{2}R_{\mu\nu}m^{\mu}m^{\nu}, & \Phi_{11} &= \frac{1}{4}R_{\mu\nu}\left(k^{\mu}l^{\nu} + m^{\mu}\bar{m}^{\nu}\right), \end{aligned} \tag{1.11}$$

kde $\Phi_{AB} = \bar{\Phi}_{BA}$ jsou obecně komplexní. Podobným způsobem lze také zavést skalární funkce pro Weylův tenzor

$$
\begin{aligned}
\Psi_0 =& C_{\mu\nu\kappa\lambda} k^\mu m^\nu k^\kappa m^\lambda, \\
\Psi_1 =& C_{\mu\nu\kappa\lambda} k^\mu l^\nu k^\kappa m^\lambda, \\
\Psi_2 =& C_{\mu\nu\kappa\lambda} k^\mu m^\nu m^\kappa l^\lambda, \\
\Psi_3 =& C_{\mu\nu\kappa\lambda} l^\mu k^\nu l^\kappa m^\lambda, \\
\Psi_4 =& C_{\mu\nu\kappa\lambda} l^\mu m^\nu l^\kappa m^\lambda.
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

Druhým základním principem obecné teorie relativity je ***princip obecné kovariance*** neboli princip relativity, který zrovnoprávňuje všechny vztažné systémy včetně těch urychlených. Říká, že je nutné fyzikální zákony reprezentovat v takové formě, která je invariantní vůči souřadnicové transformaci, tedy v tenzorové podobě. Pokud jsou fyzikální zákony platné ve speciální relativitě, lze je na základě ***principu minimální vazby*** zobecnit do obecné relativity přechodem od obyčejné parciální derivace ke kovariantní a od Minkowského metriky $\eta_{\mu\nu}$ k obecné metrice $g_{\mu\nu}$.

Zakřivení prostoročasu je provázáno s hustotou energie a hybnosti prostřednictvím ***Einsteinových polních rovnic***

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{1.13}$$

kde $T_{\mu\nu}$ je tenzor energie a hybnosti, G Newtonovská gravitační konstanta, Λ kosmologická konstanta a c rychlost světla. Tyto rovnice objevil v roce 1915 Albert Einstein, a ve stejný měsíc je nezávisle odvodil i David Hilbert pomocí akčního funkcionálu, který je dnes známý jako ***Einsteinova–Hilbertova*** akce

$$S = \frac{c^4}{16\pi G} \int (R - 2\Lambda) \sqrt{-g}\; \mathrm{d}^4 x\,. \tag{1.14}$$

Vztah (1.13) obecně představuje nesmírně složitou soustavu 10 nelineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu. Jejich řešení nazýváme ***prostoročasy*** (v Einsteinově teorii gravitace). Jednotky obvykle volíme tak, aby $c = 1 = G$.

Je pozoruhodné, že se Einsteinovi podařilo objevit rovnice v takovém tvaru, který zároveň vyjadřuje zákony zachování. Skutečně, pokud bychom v rovnici (1.13) zvedli index ν a provedli v této formě kovariantní divergenci, přejdou díky druhým Bianchiho identitám $R^{\mu\nu}{}_{[\kappa\lambda;\sigma]} = 0$ Einsteinovy rovnice do podoby $T_\mu{}^\nu{}_{;\nu}=0$.

Soustava Einsteinových rovnic klade 6 různých omezení na metrický tenzor $g_{\mu\nu}$ a zbylé 4 rovnice omezují $T_{\mu\nu}$, aby byly splněny zákony zachování. Metrika tedy není polními rovnicemi plně určena a v souladu s principem obecné kovariance nám rovnice dávají volnost ve výběru souřadnic.

Poznamenejme, že kosmologický člen $\Lambda g_{\mu\nu}$ Einstein dodal do svých rovnic až o dva roky později ve snaze zachránit představu statického a uzavřeného vesmíru. Poté co se ale ukázalo, že vesmír není statický, Einstein od tohoto členu upustil. Dnes však víme, že míra expanze vesmíru roste, nikoli klesá, a je tak nezbytné kosmologický člen s $\Lambda > 0$ v rovnicích ponechat.

Einsteinova obecná teorie relativity učinila celou řadu úspěšných předpovědí jako např. ohyb světla, rudý posuv, dilataci času v gravitačním poli, dynamický vesmír (de Sitterův prostoročas, FLRW kosmologický model), černé díry

(Schwarzschildovo, Reissnerovo–Nordströmovo, či Kerrovo řešení) a především také gravitační vlny (Kundtova a Robinsonova–Trautmanova třída prostoročasů), které mají kvadrupólový charakter, jsou příčné, nesou energii a šíří se rychlostí světla. Všechna tato řešení vyvolávají efekty, jež jsou fyzikálně měřitelné a ověřitelné. Umožňují testovat Einsteinovu teorii gravitace, a tato teorie všemi testy zatím úspěšně prošla. Můžeme tedy říct, že obecná relativita je dosud nelepší teorií gravitace.

2. Kundtovy prostoročasy v Einsteinově teorii gravitace

V této kapitole popíšeme rozsáhlou třídu prostoročasů, kterou zavedl a poprvé systematicky zkoumal Wolgang Kundt v letech 1961 [14] a 1962 [15]. Je definována geometricky pomocí takzvaných *optických skalárů*, které jsou v daném případě všechny nulové, a její podtřídy lze klasifikovat pomocí *algebraických typů*.

2.1 Optické skaláry

Uvažujme nulovou kongruenci geodetik danou v lokálním systému souřadnic jako $x^\mu = x^\mu\,(y^\mu,s)$, kde y^μ značí jednotlivé geodetiky a s parametrizaci každé z nich. Takováto kongruence generuje tečné vektorové pole

$$v^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}, \tag{2.1}$$

které musí pro afinní parametr s splňovat rovnici

$$v^\mu{}_{;\nu} v^\nu = 0. \tag{2.2}$$

Pro nulovou tetrádu (1.9) lze zavést tzv. *Newmanovy–Penrosovy spinové koeficienty* jako rozklad kovariantních derivací vektorů nulové tetrády

$$\begin{aligned}
k_{\mu;\nu} = &- (\gamma + \bar{\gamma})\, k_\mu k_\nu - (\epsilon + \bar{\epsilon})\, k_\mu l_\nu + \left(\alpha + \bar{\beta}\right) k_\mu m_\nu + (\bar{\alpha} + \beta)\, k_\mu \bar{m}_\nu \\
&+ \bar{\tau} m_\mu k_\nu + \bar{\kappa} m_\mu l_\nu - \bar{\sigma} m_\mu m_\nu - \bar{\rho} m_\mu \bar{m}_\nu \\
&+ \tau \bar{m}_\mu k_\nu + \kappa \bar{m}_\mu l_\nu - \rho \bar{m}_\mu m_\nu - \sigma \bar{m}_\mu \bar{m}_\nu, \\
l_{\mu;\nu} = &\,(\gamma + \bar{\gamma})\, l_\mu k_\nu + (\epsilon + \bar{\epsilon})\, l_\mu l_\nu - \left(\alpha + \bar{\beta}\right) l_\mu m_\nu - (\bar{\alpha} + \beta)\, l_\mu \bar{m}_\nu \\
&- \nu m_\mu k_\nu - \pi m_\mu l_\nu + \lambda m_\mu m_\nu + \mu m_\mu \bar{m}_\nu \\
&- \bar{\nu} \bar{m}_\mu k_\nu - \bar{\pi} \bar{m}_\mu l_\nu + \bar{\lambda} \bar{m}_\mu \bar{m}_\nu + \bar{\mu} m_\nu, \\
m_{\mu;\nu} = &- (\gamma - \bar{\gamma})\, m_\mu k_\nu - (\epsilon - \bar{\epsilon})\, m_\mu l_\nu + \left(\alpha - \bar{\beta}\right) m_\mu m_\nu + (\bar{\alpha} - \beta)\, m_\mu \bar{m}_\nu \\
&- \bar{\nu} k_\mu k_\nu - \bar{\pi} k_\mu l_\nu + \bar{\mu} k_\mu m_\nu + \bar{\lambda} k_\mu \bar{m}_\nu \\
&+ \tau l_\mu k_\nu + \kappa l_\mu l_\nu - \rho k_\mu m_\nu - \sigma l_\nu \bar{m}_\nu.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Tetrádu můžeme orientovat tak, aby k^μ bylo v libovolném bodě kongruence tečné t.j. $k_{\mu;\nu} k^\nu = 0$. Pokud navíc $k_{\mu;\nu} k^\nu = l_{\mu;\nu} k^\nu = m_{\mu;\nu} k^\nu = 0$, celá tetráda se podél kongruence paralelně přenáší.

Zaveďme nyní prostorový vektor $\boldsymbol{w}$, kolmý na vektory $\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{l}$ tak, aby spojoval dvě blízké geodetiky kongruence. Takovýto vektor můžeme vyjádřit jako

$$\boldsymbol{w} = \bar{\zeta} \boldsymbol{m} + \zeta \bar{\boldsymbol{m}}, \tag{2.4}$$

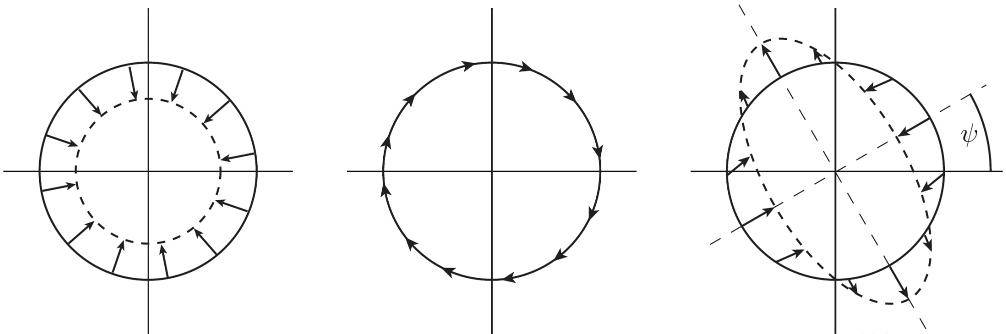
kde komplexní parametr ζ lze interpretovat jako posunutí mezi dvěma okolními prostorupodobnými paprsky. Aby si vektor $\boldsymbol{w}$ udržel stejný význam podél celé kongruence, musí nutně $w^\mu{}_{;\nu}k^\nu = k^\mu{}_{;\nu}w^\nu$, tedy Lieova derivace musí být nulová. Odpovídající změnu veličiny ζ pak můžeme vyjádřit vztahem

$$\frac{D\zeta}{ds} = \zeta_{;\nu}k^\nu = m_\mu w^\mu{}_{;\nu}k^\nu = m_\mu k^\mu{}_{;\nu}w^\nu = -\rho\zeta - \sigma\bar{\zeta}. \tag{2.5}$$

Nyní definujeme ***optické skaláry*** θ, ω, $|\sigma|$ a ψ pomocí výrazů $\rho \equiv -\theta - i\omega$ a $\sigma \equiv |\sigma|\, e^{2i\psi}$. Rovnice (2.5) tím přejde do tvaru

$$\frac{D\zeta}{ds} = \theta\zeta + i\omega\zeta - |\sigma|\, e^{2i\psi}\bar{\zeta}. \tag{2.6}$$

Odtud je vidět, že parametr $\theta \equiv -\operatorname{Re}\rho$ určuje míru ***expanze*** kongruence, zatímco $\omega \equiv -\operatorname{Im}\rho$ udává ***rotaci*** nebo-li twist. Parametr σ lze chápat jako ***shear*** (střih) orientovaný dle úhlu ψ, viz obrázek 2.1.



Obrázek 2.1: Geometrická interpretace optických skalárů θ, ω a σ (resp. kontrakce $-\theta$ a rotace v opačném směru $-\omega$) vykreslená v rovině $\boldsymbol{m}$, $\bar{\boldsymbol{m}}$. Převzato z monografie Griffiths a Podolský [11].

2.2 Algebraická klasifikace

Prostoročasy je možné rozčlenit do různých algebraických tříd na základě ***Petrovovy–Penrosovy*** klasifikace Weylova tenzoru, která je dána počtem ***hlavních nulových směrů***. Nulový vektor $\boldsymbol{k}$ tetrády (1.9) je hlavní nulový směr, pokud splňuje rovnici

$$k_{[\rho}C_{\kappa]\lambda\mu[\nu}k_{\sigma]}k^\lambda k^\mu = 0. \tag{2.7}$$

Tato podmínka je ekvivalentní podmínce $\Psi_0 = 0$ pro Weylův skalár (1.12).

Obecně existují celkem čtyři různé takové směry, avšak v některých případech mohou být degenerované a mít tak vyšší algebraickou násobnost. Pro existenci takovýchto degenerovaných směrů s násobností 1, 2, 3, 4 platí postupně následující podmínky:

$$\begin{aligned}
k_{[\rho}C_{\kappa]\lambda\mu[\nu}k_{\sigma]}k^\lambda k^\mu = 0 &\Leftrightarrow \Psi_0 = 0, \Psi_1 = 0,\\
C_{\kappa\lambda\mu[\nu}k_{\sigma]}k^\lambda k^\mu = 0 &\Leftrightarrow \Psi_0 = \Psi_1 = 0, \Psi_2 = 0,\\
C_{\kappa\lambda\mu[\nu}k_{\sigma]}k^\mu = 0 &\Leftrightarrow \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = 0, \Psi_3 = 0,\\
C_{\kappa\lambda\mu\nu}k^\mu = 0 &\Leftrightarrow \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0, \Psi_4 = 0.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

V případě, že prostoročas připouští čtyři ***různé*** hlavní nulové směry je ***algebraicky obecný*** (typu I) jinak je ***algebraicky speciální***. Pokud existuje právě jeden degenerovaný hlavní nulový směr s algebraickou násobností 2, 3, nebo 4, je prostoročas typu II, typu III, nebo typu N. V případě že existují dva různé degenerované nulové směry s algebraickou násobností 2, je prostoročas typu D. Pokud je Weylův tenzor nulový, je prostoročas ***konformě plochý***, tedy typu O.

Tyto různé algebraické typy jsou shrnuty v následující tabulce:

typ I	↖↑↑↗	$\Psi_1 = 0$
typ II	↖↑	$\Psi_2 = 0$
typ D		jen $\Psi_2 = 0$
typ III	↖⇛	$\Psi_3 = 0$
typ N	⇶	$\Psi_4 = 0$

Tabulka 2.1: Schéma možných algebraických tříd

Algebraickou klasifikaci prostoročasů pomocí multiplicity hlavních nulových směrů Weylova tenzoru lze zobecnit do $D > 4$, viz rozsáhlá práce [17], kde mimo samotné zobecnění byly také shrnuty jeho obecné důsledky a diskutovány některé třídy prostoročasů, jejíž geometrická definice nezávisí na dimenzi.

2.3 Geometrická definice Kundtovy třídy

Prostoročas libovolné dimenze D se nazývá ***Kundtův***, pokud připouští nulovou kongruenci geodetik, generovanou vektorovým polem $\boldsymbol{k}$, která je bez ***twistu***, ***shearu*** a bez ***expanze*** (tedy $\theta = 0$, $\omega = 0$, $\sigma = 0$). Jde o velmi zajímavou a rozsáhlou třídu obsahující přesné neexpandující gravitační vlny jako jsou např. ***pp-vlny*** či ***Kundtovy vlny***, která byla poprvé studována Kundtem v letech 1961 [14] a 1962 [15] (viz. zavedení ***Kundtovy třídy*** v [11]), a jejich zobecnění obsahující kosmologickou konstantu či hmotu.

Pro popis této třídy je vhodné zavést ***kanonický souřadný systém***, kde definujeme retardovaný čas u splňující $k_\mu = -u_{,\mu}$, afinní parametr kongruence r, pro který platí $\boldsymbol{k} = \partial_r$ a zbylé prostorové souřadnice ponecháme jako x^i. Provedeme-li jednoduchou úpravu $k^\mu = g^{\mu\nu}k_\nu = -g^{\mu\nu}u_{,\nu} = -g^{\mu u}$, obdržíme $g^{ur} = -1$, $g^{uu} = g^{ui} = 0$ a díky inverzním vztahům je také $g_{ur} = 0$, $g_{rr} = g_{ri} = 0$. Kovariantní derivace vektoru $\boldsymbol{k}$ se tak redukuje na $k_{\mu;\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu,r}$. Pokud tedy požadujeme, aby byly všechny optické skaláry nulové, musí být ryze prostorové metrické funkce g_{ij} nezávislé na souřadnici r. Jde o klíčovou vlastnost, která odlišuje Kundtovu třídu od obecnější Robinsonovy–Trautmanovy třídy, kdy se navíc připouští také nenulová expanze $\theta = 0$.

Zcela obecnou metriku ***Kundtovy*** třídy prostoročasů tak lze vyjádřit ve tvaru

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\,(u,x)\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j + 2g_{ui}\,(r,u,x)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x^i - 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}r + g_{uu}\,(r,u,x)\,\mathrm{d}u^2\,. \qquad (2.9)$$

Nadplochy $u = konst.$ jsou popsány $(D-2)$-rozměrnou prostorovou metrikou $\mathrm{d}\sigma^2 = g_{ij}(u,x)\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$. Vektorové pole $\boldsymbol{k}$ je k těmto plochám vždy kolmé a tečné (neboť je nulové).

V literatuře (např. [11]) se v $D = 4$ také zavádí 2-prostorová ***komplexní*** souřadnice $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy)$ místo klasických dvou prostorových souřadnic x^i. Metrika pak přechází do podoby

$$\mathrm{d}s^2 = -2\,\mathrm{d}u\left(\mathrm{d}r + H\,\mathrm{d}u + W\,\mathrm{d}\zeta + \bar{W}\,\mathrm{d}\bar{\zeta}\right) + 2P^{-2}(u, \zeta, \bar{\zeta}), \tag{2.10}$$

která je kanonickým Kundtovým tvarem metriky.

Lze dokázat (viz [14]), že pro vakuum s Λ a určité druhy hmoty musí být prostoročasy patřící do Kundtovy třídy (2.10) ***nutně algebraicky speciální*** a musí tedy náležet typu II, D, III, N, nebo musí být konformě ploché.

V kanonických souřadnicích (2.9) má hlavní nulový směr tvar $\boldsymbol{k} = \partial_r$ s přirozenou nulovou tetrádou

$$\boldsymbol{k} = \partial_r, \qquad \boldsymbol{l} = \frac{1}{2}g^{rr}\partial_r - \partial_u + g^{ri}\partial_i, \quad \boldsymbol{m}_{(i)} = p\partial_i, \tag{2.11}$$

zatímco pro metriku (2.10) je vhodné zavést spíše tetrádu

$$\boldsymbol{k} = \partial_r, \qquad \boldsymbol{l} = \partial_u - H\partial_r, \quad \boldsymbol{m} = P\partial_{\bar{\zeta}} - P\bar{W}\partial_r. \tag{2.12}$$

2.4 Kundtovy prostoročasy v $D = 4$

Známé prostoročasy ***Kundtovy třídy*** v klasické Einsteinově teorii byly shrnuty např. v knize [29], nebo v 18. kapitole knihy [11]. Pro ***vakuová*** řešení algebraického typu III, N a O, která připouští nenulovou ***kosmologickou konstantu*** Λ a ***čisté záření***, nabývají funkce metriky (2.10) podoby

$$W = \frac{2\bar{\tau}}{P}r + W^\circ, \qquad H = -\left(\tau\bar{\tau} + \frac{1}{6}\Lambda\right)r^2 + 2G^\circ r + H^\circ, \tag{2.13}$$

kde funkce W°, G°, H°, P a τ již nezávisí na souřadnici r. Funkce P musí dále splňovat rovnici

$$P^2\left(\log P\right)_{,\zeta\bar{\zeta}} = \frac{1}{6}\Lambda, \tag{2.14}$$

která zajišťuje konstantní ***gaussovské zakřivení*** 2-dimenzionálního transversálního prostoru. Je tedy vhodné využít volnosti ve výběru souřadnic a zapsat funkci P v kanonické formě

$$P = 1 + \frac{1}{6}\Lambda\zeta\bar{\zeta}. \tag{2.15}$$

Odtud plyne, že znaménko kosmologické konstanty Λ musí určovat znaménko zakřivení a tím i tvar vlnoploch, které mohou mít sférický ($\Lambda > 0$), rovinný ($\Lambda = 0$), nebo hyperboloidní ($\Lambda < 0$) charakter.

Díky této volbě přechází spinový koeficient $\tau \equiv -k_{\mu;\nu}m^\mu l^\nu$ pro nulovou tetrádu (1.9) do tvaru

$$\tau = \frac{-b + \frac{1}{3}\Lambda a\zeta + \frac{1}{6}\Lambda\bar{b}\zeta^2}{\left(1 - \frac{1}{6}\Lambda\zeta\bar{\zeta}\right)a + \bar{b}\zeta + b\bar{\zeta}}, \tag{2.16}$$

kde $a(u)$ je libovolná reálná a $b(u)$ libovolná komplexní funkce závislá pouze na souřadnici u. Následně je vhodné definovat výraz

$$k \equiv \frac{1}{6}\Lambda a^2 + b\bar{b}, \tag{2.17}$$

který byl poprvé zavedený v [18]. Protože $\operatorname{sign} k$ je invariantní vůči transformacím zachovávajícím metriku, je tento výraz použitelný pro klasifikaci různých ***podtříd*** Kundtových prostoročasů. Pokud navíc využijeme volnost ve výběru souřadnic, můžeme vždy příslušnou transformací obdržet jednu z následujících kanonických forem:

- Pro nulovou kosmologickou konstantu $\Lambda = 0$ dostáváme v případě $k = 0$ pro kanonickou volbu $a = 1$, $b = 0$ zobecněné ***pp-vlny***, pro něž je

  $$\tau = 0, \tag{2.18}$$

  a v případě $a = 0$, $b = 1$, kdy $k > 0$ zobecněné ***Kundtovy vlny*** s

  $$\tau = -\frac{1}{\zeta + \bar{\zeta}}, \tag{2.19}$$

  které jsou obecně algebraického typu III. Případ $k < 0$ nemůže pro $\Lambda = 0$ kvůli (2.17) nastat.

- Pokud je $\Lambda > 0$, pro libovolné a, b je k vždy kladné. Dostáváme tak zobecněné ***pp-vlny*** či zobecněné ***Kundtovy vlny*** ve dvou ekvivalentních formách. Pro $a = 1$, $b = 0$ je

  $$\tau = \frac{\frac{1}{3}\Lambda\zeta}{1 - \frac{1}{6}\zeta\bar{\zeta}}, \tag{2.20}$$

  zatímco pro $b = 1$, $a = 0$ je

  $$\tau = -\frac{1 - \frac{1}{6}\Lambda\zeta^2}{\zeta + \bar{\zeta}}. \tag{2.21}$$

- V případě kdy je $\Lambda < 0$, nastávají 3 případy. Pokud $a = 1$, $b = 0$ je $k < 0$ a dostáváme opět zobecněné ***pp-vlny*** s

  $$\tau = \frac{\frac{1}{3}\Lambda\zeta}{1 - \frac{1}{6}\zeta\bar{\zeta}}, \tag{2.22}$$

  a pro $a = 0$, $b = 1$ kdy $k > 0$ zobecněné ***Kundtovy vlny*** s

  $$\tau = -\frac{1 - \frac{1}{6}\Lambda\zeta^2}{\zeta + \bar{\zeta}}. \tag{2.23}$$

  Konečně pro případ $k = 0$, položíme-li $b = \sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}\, a\, e^{i\theta}$, kde $\theta\,(u)$ je libovolná reálná funkce, obdržíme zobecněné ***Siklosovy vlny*** s

  $$\tau = -\sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}\left(\frac{1 + \sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}\zeta e^{-i\theta}}{1 + \sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda}\bar{\zeta} e^{i\theta}}\right) e^{i\theta}, \tag{2.24}$$

  které zobecňují řešení typu N popsaná v [28].

Je zajímavé poznamenat, že funkce $a\,(u)$ a $b\,(u)$ jsou libovolné a lze tak s jejich pomocí sestrojit prostoročasy, které nabývají různých kanonických forem pro různé hodnoty u.

Prostoročasy typu III

Zbylé funkce W°, H° a G° ze vztahů (2.13) lze dle polních rovnic a souřadnicové volnosti volit tak, že $W^\circ(u,\zeta)$ je libovolná holomorfní funkce, $H^\circ\left(\zeta,\bar\zeta,u\right)$ je libovolná reálná funkce, a funkce $G^\circ\left(\zeta,\bar\zeta,u\right)$ je určena předpisem

$$G^\circ = -\frac{1}{2}P\left(\tau W^\circ + \bar\tau \bar W^\circ\right) - \frac{1}{6}\Lambda \int W^\circ \,\mathrm{d}\zeta\,. \tag{2.25}$$

V tomto případě mají jediné netriviální komponenty tenzorů křivosti tvar

$$\begin{aligned}
\Psi_3 =& -\tau\left(P^2W^\circ\right)_{,\zeta} - \frac{1}{3}\Lambda P W^\circ,\\
\Psi_4 =& \left[-P\tau\left(P^2W^\circ\right)_{,\zeta\zeta} + 2\left(\tau\bar\tau - \tau P_{,\zeta} - \frac{1}{3}\Lambda\right)\left(P^2W^\circ\right)_{,\zeta} + \Lambda P\bar\tau W^\circ\right] r\\
&+ P^2 H^\circ_{,\zeta\zeta} + 2P\left(\bar\tau + P_{,\zeta}\right) H^\circ_{,\zeta} + 2\bar\tau^2 H^\circ - \left(P^2W^\circ\right)_{,u\zeta}\\
&+ \left[3P\tau W^\circ + P\bar\tau\bar W^\circ + \frac{1}{3}\Lambda\left(f+\bar f\right)\right]\left(P^2W^\circ\right)_{,\zeta}\\
&+ 2P^2\bar\tau^2 W^\circ \bar W^\circ + \Lambda P^2 W^{\circ 2},\\
\Phi_{22} =& P^2 H^\circ_{,\zeta\bar\zeta} + P\tau H^\circ_{,\zeta} + P\bar\tau H^\circ_{,\bar\zeta} + 2\left(\tau\bar\tau + \frac{1}{3}\Lambda\right) H^\circ\\
&+ P\tau \bar W^\circ\left(P^2W^\circ\right)_{,\zeta} + P\bar\tau W^\circ\left(P^2\bar W^\circ\right)_{,\bar\zeta} + P^2\left(2\tau\bar\tau + \Lambda\right) W^\circ \bar W^\circ,
\end{aligned} \tag{2.26}$$

kde funkci f volíme tak, aby $W^\circ = f_{,\zeta}$. Obecně tedy dostáváme prostoročasy algebraického typu III.

Ve speciálním případě, kdy $\Lambda = \tau = 0$, musí funkce W° záviset na souřadnici ζ a komponenty Weylova tenzoru nabývají poněkud jiné podoby než (2.26). Jejich charakter se však příliš neliší, viz [10].

Gyratony

Velice zajímavá řešení algebraického typu III jsou axiálně symetrické prostoročasy popsané 2-prostorovými souřadnicemi $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho e^{i\phi}$, které obsahují specifický druh rotující nulové kapaliny. Tenzor energie a hybnosti má v takovémto případě nediagonální člen.

Zajímavým příkladem takovýchto prostoročasů jsou řešení s $\Lambda = 0$, $\tau = 0$, $W^\circ = -\frac{\sqrt{2}i}{2\rho} J(u,\rho)\, e^{-i\phi}$, $G^\circ = 0$ a $H^\circ = 0$ daná metrikou

$$\mathrm{d}s^2 = -2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}r - 2H(u,\rho)\,\mathrm{d}u^2 - 2J(u,\rho)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\phi + \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\,\mathrm{d}\phi^2\,, \tag{2.27}$$

kde funkce J obsahuje informaci o vnitřním ***momentu hybnosti*** hmoty. Díky tomu bývají funkce g_{ui} často označovány za tzv. ***gyratonové členy*** viz [11].

Netriviální komponenty tenzorů křivosti mají pro tuto metriku s přirozenou nulovou tetrádou $\boldsymbol{k} = \partial_r$, $\boldsymbol{l} = \partial_u - H + \frac{1}{2}\frac{J^2}{\rho^2}\partial_r + \frac{J}{\rho^2}\partial_\phi$ a $\boldsymbol{m} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\partial_\rho + \left(\frac{i}{\rho}\right)\partial_\phi\right)$ tvar

$$
\begin{aligned}
\Psi_4 =& \frac{1}{2}\left(H_{,\rho\rho} - \frac{1}{\rho}H_{,\rho}\right) + \frac{i}{2\rho}\left(J_{,u\rho} - \frac{2}{\rho}J_{,u}\right) + \frac{J}{2\rho^2}\left(J_{,\rho\rho} - \frac{1}{\rho}J_{,\rho}\right), \\
\Psi_3 =& \frac{i}{4\sqrt{2}\rho}\left(J_{,\rho\rho} - \frac{1}{\rho}J_{,\rho}\right), \\
\Phi_{22} =& \frac{1}{2}\left(H_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho}H_{,\rho}\right) + \frac{J}{2\rho^2}\left(J_{,\rho\rho} - \frac{1}{\rho}J_{,\rho}\right) + \frac{1}{4\rho^2}J_{,\rho}^2, \\
\Phi_{12} =& \frac{i}{4\sqrt{2}\rho}\left(J_{,\rho\rho} - \frac{1}{\rho}J_{,\rho}\right).
\end{aligned} \tag{2.28}
$$

Protože hlavní nulový směr $\boldsymbol{k}$ je kovariantně konstantní, jedná se o prostoročasy třídy *pp*-vln. Pokud Φ_{12} vymizí a současně i Ψ_3, tedy pokud $J = \kappa(u)\rho^2 + \lambda(u)$, kde κ, λ jsou libovolné funkce retardovaného času u, zanikne také moment hybnosti zdroje a prostoročas přejde v klasické *pp*-vlny, které je možné transformací $r = \bar{r} - \lambda\bar{\phi}$, $\phi = \bar{\phi} + \int \kappa\, du$ převést do kanonické formy, kde $\bar{H} = H + \frac{1}{2}\kappa^2\rho^2 + \kappa\lambda - \lambda_u\bar{\phi}$. Funkci $\kappa(u)\rho^2$ je tak vždy možné z funkce J pomoci této transformace odstranit a vakuové rovnice redukovat na

$$
H_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho}H_{,\rho} = 0, \tag{2.29}
$$

s obecným řešením

$$
J = \lambda(u), \qquad H = 2\mu(u)\log\rho + \nu(u), \tag{2.30}
$$

kde funkce μ určuje profil *pp*-vlny a ν je libovolná funkce bez fyzikálního významu. V této oblasti nabývá poslední netriviální komponenta Weylova tenzoru podoby

$$
\Psi_4 = -\frac{2\mu + i\lambda_{,u}}{\rho^2}. \tag{2.31}
$$

Z fyzikálního hlediska je užitečné se zabývat takovými prostoročasy, které koncentrují nulovou gyratonovou hmotu v nějakém cylindrickém svazku o poloměru a, který je obklopen vakuem. Jeden z takových prostoročasů představil Bonnor v [1] jako

$$
\rho \leq a : \begin{cases} J = \lambda\rho^3\frac{3a-2\rho}{a^3}, \\ H = \mu\frac{\rho^2}{a^2}, \end{cases} \tag{2.32}
$$

$$
\rho \geq a : \begin{cases} J = \lambda, \\ H = \mu\left(1 + 2\log\frac{\rho}{a}\right). \end{cases} \tag{2.33}
$$

Díky libovolné závislosti metrických funkcí na retardovaném čase u lze uvažovat takový tvar, ve kterém jsou funkce nentriviální pouze pro nějaký konečný časový interval. Profilové funkce λ a μ by následně na tomto intervalu mohly být úměrné $\left(b^2 - u^2\right)^4$, jak poprvé navrhl Bonnor v roce 1970, a nulové mimo něj.

Vnější pole by bylo tvořené tzv. *sandwichovou vlnou*, kterou lokálně nelze rozlišit od sandwichové *pp*-vlny typu N. Informace o rotující povaze hmoty je tedy obsažena pouze ve vnitřním poli zdroje.

Tyto prostoročasy byly pak podrobněji zkoumány Frolovem a Fursaevem v roce 2005 [9] a v následujících pracích. Bylo ukázáno, že řešení popisuje například kruhově polarizované záření, emitované lokalizovanou hmotou s energií a vnitřním momentem hybnosti. Príslušný zdroj nezvali *gyraton*. Také byl zkoumán geodetický pohyb ze kterého vyplynulo, že kroužek volných testovacích částic jejíž středem prochází svazek zdroje, se bude během pulsu okolo tohoto svazku stáčet.

Prostoročasy typu N

Pokud položíme funkci $W^\circ = 0$ v (2.13), zanikne dle (2.26) komponenta Ψ_3 Weylova tenzoru a prostoročas bude typu N. Provedením transformace $r = \frac{Q^2}{P^2}v$, kde $Q = \left(1 - \frac{1}{6}\Lambda\zeta\bar{\zeta}\right)a + b\bar{\zeta} + \bar{b}\zeta$, a volbou $H^\circ = \frac{Q}{2P}\mathcal{H}$, $G^\circ = -\frac{1}{2}(\log Q)_{,u}$ obdržíme tvar metriky objevený v práci [18],

$$\mathrm{d}s^2 = -2\frac{Q^2}{P^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \left(2k\frac{Q^2}{P^2}v^2 - \frac{(Q^2)_{,u}}{P^2}v^2 - \frac{Q}{P}\mathcal{H}\right)\mathrm{d}u^2 + \frac{2\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}\bar{\zeta}}{P^2}, \tag{2.34}$$

kde $\mathcal{H}\left(\zeta,\bar{\zeta},u\right)$ je libovolná funkce. Pro takovéto prostoročasy jsou jediné dvě netriviální komponenty Weylova a Ricciho tenzoru

$$\begin{aligned}\Psi_4 &= \frac{1}{2}\left(P\mathcal{H}\right)_{,\zeta\zeta}\frac{P^4}{Q^3},\\ \Phi_{22} &= \frac{1}{2}\left(P^2\mathcal{H}_{,\zeta\bar{\zeta}} + \frac{1}{3}\Lambda\mathcal{H}\right)\frac{P^4}{Q^3}.\end{aligned} \tag{2.35}$$

Prostoročas je tedy vakuový (Φ_{22}=0), pokud lze funkci $\mathcal{H}\left(\zeta,\bar{\zeta},u\right)$ zapsat ve tvaru

$$\mathcal{H}\left(\zeta,\bar{\zeta},u\right) = \left(f_{,\zeta} + \bar{f}_{,\bar{\zeta}}\right) - \frac{\Lambda}{3P}\left(\bar{\zeta}f + \zeta\bar{f}\right), \tag{2.36}$$

kde $f(\zeta,u)$ je tentokrát libovolná funkce holomorfní v ζ.

Třída prostoročasů daná metrikou (2.34) v sobě obsahuje několik dobře známých podtříd, a to zejména *pp-vlny* (Λ=0, $a = 1$, $b = 0$)

$$\mathrm{d}s^2 = -2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}r - 2\mathcal{H}\left(\zeta,\bar{\zeta},u\right)\mathrm{d}u^2 + 2\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}\bar{\zeta}, \tag{2.37}$$

Kundtovy vlny s $\Lambda = 0$ [14], *zobecněné Kundtovy* a *pp-vlny* (Λ>0, $a = 0$, $b = 1$, s volbou $H(\zeta,\bar{\zeta},u) = (\zeta + \bar{\zeta})(1 + \frac{1}{6}\Lambda\zeta\bar{\zeta})\mathcal{H}$)

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{6}\Lambda\zeta\bar{\zeta}}\left[-2\left(\zeta + \bar{\zeta}\right)^2\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \left(2\left(\zeta + \bar{\zeta}\right)^2 v^2 - \tilde{H}\right)\mathrm{d}u^2 + 2\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}\bar{\zeta}\right], \tag{2.38}$$

poprvé popsané v [6] a *Siklosovy* vlny [28] (Λ<0, $a = 1$, $b = \sqrt{-\frac{1}{6}\Lambda e^{i\theta}}$) popsané *Siklosovou metrikou*

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{3}{(-\Lambda)\,x^2}\left(-2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}r - \frac{1}{6}\Lambda x\mathcal{H}\,\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2\right). \tag{2.39}$$

kterou lze získat transformací

$$\zeta = -\frac{6}{-\Lambda}\frac{x + \frac{1}{2} + iy}{x + \frac{1}{2} + iy}, \qquad\qquad v = \frac{12}{-\Lambda}r. \tag{2.40}$$

.

Konformně ploché prostoročasy

V případě, že $\Psi_4 = 0$, bude prostoročas konformně plochý. Tato situace nastává dle (2.35) právě tehdy, když $H\left(\zeta,\bar{\zeta},u\right)$ lze zapsat ve tvaru

$$H = \frac{A(u) + \bar{B}(u)\zeta + B(u)\bar{\zeta} + C(u)\zeta\bar{\zeta}}{1 + \frac{1}{6}\Lambda\zeta\bar{\zeta}}, \tag{2.41}$$

kde $A\,(u)$, $B\,(u)$ a $C\,(u)$ jsou libovolné reálné resp. komplexní funkce. Jediná netriviální komponenta tenzorů křivosti Φ_{22} zde nabývá podoby

$$\Phi_{22} = \frac{1}{2}\left(C + \frac{1}{6}\Lambda A\right)\frac{P^3}{Q^3}, \tag{2.42}$$

a pro vakuové prostoročasy tak musí $C = -\frac{1}{6}\Lambda A$. Tato podmínka odpovídá ve vztahu (2.36) situaci, kdy f lze zapsat jako kvadratickou funkci ζ

$$f = c_0\,(u) + c_1\,(u)\,\zeta + c_2\,(u)\,\zeta^2, \tag{2.43}$$

kde $c_i\,(u)$ jsou komplexní funkce spjaté s funkcemi $A\,(u)$ a $B\,(u)$ a jsou izometrické k *Minkowského*, *de Sitterovu*, či *anti-de Sitterovu* prostoročasu.

Libovolný konformně plochý prostoročas, který obsahuje čisté záření, musí navíc být dle Bianchiho identit nutně bez expanze a tedy musí patřit do Kundtovy třídy. Metrika (2.34) s (2.41) tak překvapivě popisuje již zcela úplnou třídu konformně plochých prostoročasů s čistým zářením.

Jednu ze známých metrik patřících do této podtřídy obdržíme transformací $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x + iy)$ a dosazením $\Lambda = 0$, $a = 0$ a $b = 1$ jako

$$\mathrm{d}s^2 = -2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}r + \left(\frac{r^2}{x^2} - 2H^\circ\right)\mathrm{d}u^2 + 4\frac{r}{x}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2\,, \tag{2.44}$$

kde $2H^\circ = (\alpha\,(u) + \beta\,(u)\,x + \gamma\,(u)\,y + \delta\,(u)\,(x^2 + y^2))$ (α, β γ a δ jsou zde libovolné reálné funkce u). Tato metrika byla prezentována v [7], [8] a zahrnuje také řešení objevená v [30].

Geometrie vlnoploch

Na začátku sekce 2.4 jsme zmínili, že veškerá řešení Kundtovy třídy lze dle klasifikace (2.17) vyjádřit ve zobecněném kanonickém tvaru *pp*-vln, Kundtových vln či Siklosových vln. Jde tedy obecně o prostoročasy, které vyzařují gravitační vlny jejichž paprsky neexpandují (rovněž nemají twist ani shear). Jejich vlnoplochy, které jsou dány $u = konst$, mají konstantní křivost závislou na kosmologické konstantě a díky nenulovému koeficientu τ se vůči sobě navzájem stáčí v prostorovém směru.

Ze vztahu pro skalár τ (2.16), který vystupuje v metrických funkích (2.13), je zřejmé, že prostoročasy v určitých místech obsahují křivostní singularitu, kde komponenty Riemannova tenzoru (2.26) divergují. Tuto singularitu lze interpretovat jako kaustiku tvořenou obálkou vlnoploch a bude tedy při jejich analýze hrát klíčovou roli.

Pro studium geometrie vlnoploch je vhodné uvažovat limitu slabého pole, kdy jsou funkce W°, G° a H° zanedbatelně malé a tím také zaniknou všechny funkce Ψ. Pozadí dané metrickými funkcemi

$$H = -\left(\tau\bar{\tau} + \frac{1}{6}\Lambda\right) r^2, \qquad\qquad W = \frac{2\bar{\tau}}{1 + \frac{1}{6}\Lambda\zeta\bar{\zeta}} r, \tag{2.45}$$

tak musí být konformě ploché, tedy Minkowského ($\Lambda = 0$), de Sitterovo ($\Lambda > 0$), či anti de Sitterovo ($\Lambda < 0$).

Dosadíme-li tyto funkce do metriky (2.34) a položíme-li $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy)$, obdržíme například pro Kundtovy vlny v Minkowského pozadí ($a = 0$, $b = 1$, $\Lambda = 0$ s $\tau = -\left(\zeta + \bar{\zeta}\right)^{-1}$) metriku

$$\mathrm{d}s^2 - 4x^2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + 4x^2v^2\,\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2\,, \tag{2.46}$$

kterou lze přetransformovat do kartézského tvaru Minkowského prostoročasu

$$\mathrm{d}s^2 - \mathrm{d}T^2 + \mathrm{d}X^2 + \mathrm{d}Y^2 + \mathrm{d}Z^2\,, \tag{2.47}$$

viz [11]. Vlnoplochy $u = u_0 = konst$ jsou přitom popsány rovnicí

$$\left(1 + u_0^2\right) T - 2u_0 X - \left(1 - u_0^2\right) Z, \tag{2.48}$$

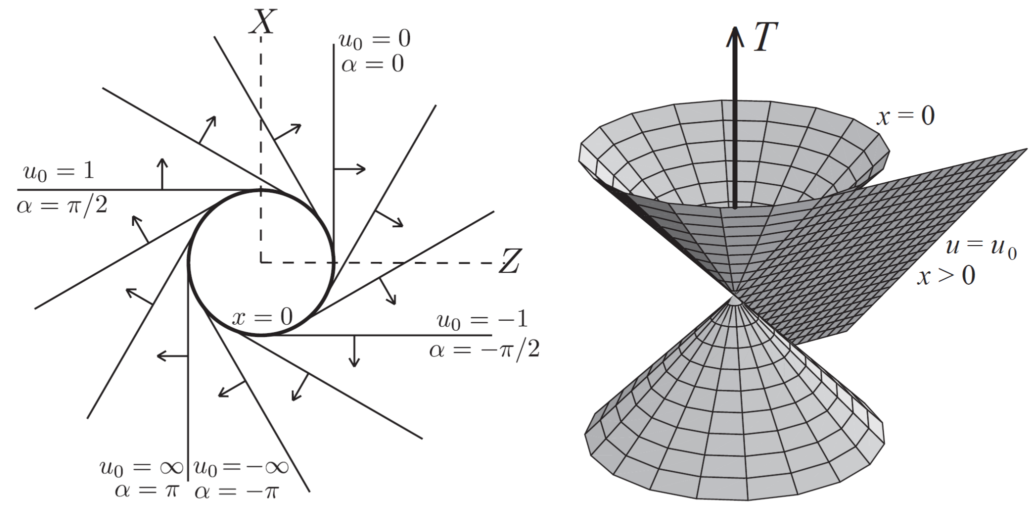
která lze substitucí $u_0 = \tan\frac{\alpha}{2}$ převést do podoby

$$\sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Z = T. \tag{2.49}$$

Singularita $x = 0$ na plochém pozadí tvoří expandující válec s osou Y, daný

$$X^2 + Z^2 = T^2. \tag{2.50}$$

Příslušné vlnoplochy tedy musí být dány třídou polorovin, které jsou vzdáleny od počátku o T. Jednotlivé poloroviny se vůči sobě stáčejí takovým způsobem, že vytváří ***obálku*** ve tvaru expandujícího cylindru. Každá vlnoplocha se následně šíří kolmo k tečně jeho povrchu, viz obrázek 2.2.



Obrázek 2.2: Geometrie vlnoploch Kundtových vln v Minkowského pozadí. Převzato z monografie Griffiths a Podolský [11].

Podobným způsobem je také možné vyšetřit vlnoplochy v de Sitterově či anti-de Sitterově pozadí s tím rozdílem, že tato pozadí nejprve vnoříme do 5 dimenzionálního plochého prostoru. V tomto případě jsou pro $\Lambda > 0$ vlnoplochy ***sférické*** s konstantní plochou a singularita je tvořena expandujícím torusem, zatím co pro $\Lambda < 0$ jsou vlnoplochy ***hyperbolické*** a singularia se nachází na expandujícím hyperboloidu. Podrobněji viz 17. a 18. kapitola monografie Griffiths a Podolský [11].

Prostoročasy typu D a II

Veškeré prostoročasy Kundtovy třídy typu D je možné obdržet z neexpandující podtřídy Plebańskiho a Demiańskiho metriky [20]

$$\mathrm{d}s^2 = \rho^2\left(-\tilde{Q}\,\mathrm{d}t^2 + \frac{1}{\tilde{Q}}\,\mathrm{d}q^2\right) + \frac{P}{\rho^2}\left(\mathrm{d}\psi + 2\gamma q\,\mathrm{d}t\right)^2 + \frac{\rho^2}{P}\,\mathrm{d}p^2\,. \tag{2.51}$$

transformací

$$z = p, \qquad y = \psi + 2\gamma\int\frac{q}{\tilde{Q}}\,\mathrm{d}q\,, \qquad u = t - \int\frac{\mathrm{d}q}{\tilde{Q}}, \qquad r = \rho^2 q, \tag{2.52}$$

a dosazením

$$\sqrt{2}\zeta = x + iy, \qquad x = \int P^2(z)\,\mathrm{d}z\,, \qquad P^2 = \frac{\rho^2}{P}. \tag{2.53}$$

Tak obdržíme kanonickou metriku Kundtovy třídy

$$\mathrm{d}s^2 = -2\mathrm{d}u\left(\mathrm{d}r + H\mathrm{d}u + W\mathrm{d}\zeta + \bar{W}\mathrm{d}\bar{\zeta}\right) + 2P^{-2}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\bar{\zeta}, \tag{2.54}$$

která popisuje řešení nalezené v [13] a dále zobecněné v [3] a [19]. Zde je

$$\begin{aligned}
P^2 =& \frac{z^2+\gamma^2}{-\left(e^2+g^2+\epsilon_2\gamma^2-\Lambda\gamma^4\right)+2nz+\left(\epsilon_2-2\Lambda\gamma^2\right)z^2-\frac{1}{3}\Lambda z^4},\\
W =& -\frac{\sqrt{2}}{(z+i\gamma)\,P^2}r,\\
H =& \frac{1}{2}\epsilon_0\left(z^2+\gamma^2\right)-\left[\frac{\epsilon_2}{2\left(z^2+\gamma^2\right)}+\frac{2\gamma^2}{\left(z^2+\gamma^2\right)^2P^2}\right]r^2,
\end{aligned} \tag{2.55}$$

kde parametr ϵ_2 nabývá diskrétních hodnot $0, \pm 1$ a parametry e, g popisují elektrický a magnetický náboj.

Známé prostoročasy, které patří do této podtřídy jsou např. tzv. ***B-metriky*** s tachyonovými zdroji, kde $\gamma = e = g = \Lambda = 0$, nebo ***Melvinovo řešení*** s magnetickým polem, když $\gamma = \epsilon_2 = \Lambda$, $B^2 = e^2 + g^2 = 2n$ a transformací $r \longrightarrow r - \frac{1}{2}\epsilon_0 z^2 u$.

Některá řešení lze také vyjádřit zobecněním metriky (2.34) tak, že funkci $k \equiv \frac{1}{6}\Lambda a^2 + b\bar{b}$ zobecníme na libovolnou funkci $D(u)$. Obdržíme tak

$$\mathrm{d}s^2 = -2\frac{Q^2}{P^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \left(D\frac{Q^2}{P^2}v^2 - \frac{(Q^2)_{,u}}{P^2} - \frac{Q}{P}H\right)\mathrm{d}u^2 + \frac{2\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}\bar{\zeta}}{P^2}, \tag{2.56}$$

kde $P = 1 + \alpha\zeta\bar{\zeta}$, $Q = \left(1 + \beta\zeta\bar{\zeta}\right)\varepsilon + C\zeta + \bar{C}\bar{\zeta}$ (α, β a ε jsou zde příslušné konstanty) a funkce H je omezena (2.41). Nenulové komponenty Weylova a Ricciho tenzoru nabývají tvar

$$\Psi_2 = -\frac{1}{6}\left(D + 2\varepsilon\beta - 2C\bar{C}\right)\frac{P^2}{Q^2}, \tag{2.57}$$

$$R = 24\alpha - 12\varepsilon(\alpha+\beta)\frac{P}{Q} + 2\left(D + 2\varepsilon\beta - 2C\bar{C}\right)\frac{P^2}{Q^2}. \tag{2.58}$$

Tyto prostoročasy jsou typu D. Speciálně pro $\alpha = \beta$, $\varepsilon = 1$, $\mathsf{C} = 0$, $\mathsf{H} = 0$ a $\mathsf{D} = (2\Lambda - \alpha)$, přechází metrika (2.56) v

$$\mathrm{d}s^2 = -2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + 2\,(\Lambda - \alpha)\,v^2\,\mathrm{d}u^2 + \frac{2\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\left(1 + \alpha\zeta\bar{\zeta}\right)}. \tag{2.59}$$

Pokud $\alpha = \frac{1}{2}\Lambda$, popisuje tato metrika ***Nariaiho*** či ***anti-Nariaiho*** vesmír a pro $\alpha = 0$ naopak popisuje ***Plebańskiho-Hacyanův*** prostoročas, viz [11].

Zobecněním metriky (2.56) lze také obdržet prostoročasy typu II, kdy je kromě Ψ_2 přítomna i komponenta $\Psi_4 = \frac{1}{2}\,(P\mathsf{H})_{,\zeta\zeta}\,\frac{P^4}{Q^3}$ popisující neexpandující gravitační vlny, které se šíří kosmologickým pozadím typu D [24].

2.5 Kundtovy prostoročasy v $D > 4$

Řešení Einsteinových–Maxwellových rovnic obecné Kundtovy třídy prostoročasů bylo zobecněno do vyšších dimenzí v článku [22]. Aby mohla být splněna rr komponenta polních rovnic $T_{rr} = 0$, musí být podobně jako v klasickém případě elektromagnetické pole nutně shodně orientované s nulovým vektorovým polem (tedy musí platit $F_{\mu\nu}k^{\nu} = Qk_{\mu}$, kde Q je libovolná funkce určující Maxwellovo pole). Obecná metrika Kundtovy třídy prostoročasů dimenze D, která připouští i nenulovou konstantu Λ, lze zapsat ve tvaru

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j + 2\,(e_i + f_i\,r)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x^i - 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}r + \left(a\,r^2 + b\,r + c\right)\mathrm{d}u^2\,, \tag{2.60}$$

kde

$$a = \frac{1}{4}f^i f_i + \frac{1}{2}\,{}^{S}\!R - \frac{D-4}{D-2}\,\Lambda - \frac{D\,(F^2 + 2Q^2) + 4\,(D-4)\,Q^2}{2\,(D-2)}, \tag{2.61}$$

a funkce $a(u,x)$, $b(u,x)$, $f_i(u,x)$, $e_i(u,x)$ a $g_{ij}(u,x)$ jsou dále omezeny zbývajícími polními rovnicemi, které jsou však ve zcela obecném případě poměrně složité.

Příslušné elektromagnetické pole je dáno vztahem

$$\boldsymbol{F} = Q\,\mathrm{d}r \quad \mathrm{d}u + (rQ_{,i} + \varepsilon_i)\,\mathrm{d}x^i \quad \mathrm{d}u + \frac{1}{2}F_{ij}\,\mathrm{d}x^i \quad \mathrm{d}x^j\,, \tag{2.62}$$

kde $Q\,(x,u)$, $\varepsilon_i\,(x,u)$ a $F_{ij}\,(x,u)$ jsou libovolné funkce vyhovující Maxwellovým rovnicím $\sqrt{g}\,F^{ir}{}_{,r} = -\left(\sqrt{g}\,F^{ij}\right)_{,j}$ a $\left(\sqrt{g}\,F^{ir}\right)_{,i} = -\left(\sqrt{g}\,Q\right)_{,u}$.

Pro zjednodušení funkcí (2.60) je možné využít kalibrační invarianci metriky (2.9) vůči transformacím

$$x = x\,(\tilde{x},\tilde{u})\,, \qquad u = u\,(\tilde{u})\,, \qquad r = \frac{\tilde{r}}{\dot{u}\,(\tilde{u})} + \rho\,(\tilde{x},\tilde{u})\,, \tag{2.63}$$

kde $\dot{u}$ je derivace $u\,(\tilde{u})$. Transformační vztahy metrických funkcí jsou

$$\tilde{g_{kl}} = g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^l}, \tag{2.64}$$

$$\tilde{e_k} = (e_i + f_i\rho)\,\dot{u}\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} - \dot{u}\frac{\partial \rho}{\partial \tilde{x}^k} + g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{u}}, \tag{2.65}$$

$$\tilde{f_k} = f_i\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}, \tag{2.66}$$

$$\tilde{a} = a, \tag{2.67}$$

$$\tilde{b} = (b + 2a\rho)\,\dot{u} + 2f_i\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{u}} + 2\frac{\ddot{u}}{\dot{u}}, \tag{2.68}$$

$$\tilde{c} = \left(c + b\rho + a\rho^2\right)\dot{u}^2 - 2\dot{u}\frac{\partial \rho}{\partial \tilde{u}} + (e_i + f_i\rho)\,\dot{u}\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{u}} + g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{u}}\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{u}}. \tag{2.69}$$

Pro úplnost také uvedeme transformační vztahy funkcí, které určují Maxwellovo pole, a to

$$\tilde{Q} = Q, \tag{2.70}$$

$$\tilde{Q}_{,\tilde{k}} = Q_{,i}\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}, \tag{2.71}$$

$$\tilde{\varepsilon}_k = \left(\varepsilon_i\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} + Q\frac{\partial \rho}{\partial \tilde{x}^k} + \rho Q_{,i}\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}\right)\dot{u} + F_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}\frac{\partial u}{\partial \tilde{x}^k}, \tag{2.72}$$

$$\tilde{F}_{kl} = F_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^l}. \tag{2.73}$$

Z výše zmíněných vztahů ihned plyne, že jak invariant elektromagnetického pole $\tilde{F}^2 = F^2$, tak výraz $g^{ij}f_if_j = f^if_i \geq 0$ jsou ***neměnné*** vůči zmíněným souřadnicovým transformacím. Je tedy užitečné zavést pomocí této veličiny klasifikaci na podtřídy $f = 0$ a $f = 0$. Rozšíříme-li Newmanovy–Penrosovy spinové koeficienty do obecné dimenze D vztahem pro τ_i

$$\tau_i \equiv k_{\mu;\nu}m^{\nu}_{(i)}l^{\nu}, \tag{2.74}$$

lze nahlédnout, že

$$\tau_i = -\frac{1}{2}pf_i, \tag{2.75}$$

kde konstanta p je dána zobecněním spinových koeficientů γ tak, aby platil vztah $g_{ij} = p^{-2}\gamma_{ij}$. Je tedy zřejmé, že kvadrát f^if_i v klasickém případě $D = 4$ přechází v $\bar{\tau}\tau$ a výše zmíněná klasifikace tak rozšiřuje rozlišení ***pp***-vln ($\tau = 0$) a Kundtových vln ($\tau = 0$), diskutované v předchozí podkapitole, do vyšších dimenzí.

Uveďme nyní několik transformací (2.63), díky kterým je možné na základě kalibrační a souřadnicové volnosti některé metrické funkce (2.60) zjednodušit.

- Pokud $a = 0$, lze volbou $\rho = -\frac{b}{2a}$, $\tilde{x} = x$ a $\tilde{u} = u$ funkci b odtransformovat.
- Naopak, položíme-li $\tilde{x} = x$, $\tilde{u} = u$ a ρ zvolíme tak, aby byla splněna diferenciální rovnice $2\rho_{,\tilde{u}} = a\rho^2 + b\rho + c$, mohli bychom se zbavit funkce a.

- Funkci e_i je též možné ***lokálně*** odstranit pomocí transformace

$$x^i\left(\tilde{x},u\right) = -\int e^i\left(\tilde{x},u\right)\mathrm{d}u\,. \tag{2.76}$$

Tento vztah je však možný použít pouze pokud je determinant Jacobiánu $J^i_j \equiv \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}$ nenulový. V degenerovaném případě je nutné použít lehkou modifikaci této transformace, a to

$$x^i\left(\tilde{x},u\right) = -\int e^i\left(\tilde{x},u\right)\mathrm{d}u + \lambda\tilde{x}^i, \tag{2.77}$$

kde λ je reálný parametr různý od vlastních čísel matice J^i_k.

- Také funkce f_i je v libovolném bodě možné vhodnou rotací orientovat tak, aby byla nenulová pouze i-tá komponenta. Této transformace je však na okolí (nebo dokonce globálně) možné dosáhnout pouze ve speciálních případech.

Vybrané podtřídy Kundtových prostoročasů ve vyšších dimenzích

Vhodnou volbou funkcí v metrice (2.60) je možné obdržet různé podtřídy ***Kundtových prostoročasů*** v $D > 4$. Uveďme stručně některé z nich.

- Pokud $k_{\mu;\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu,r} = 0$, a tím i $f_i = 0$, $a = 0$ a $b = 0$, bude vektorové pole $\boldsymbol{k}$ kovariantně konstantní a obdržíme tak metriku ***pp-vln***

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j + 2e_i\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x^i - \mathrm{d}u\,\mathrm{d}r + c\,\mathrm{d}u^2\,, \tag{2.78}$$

které připouští Maxwellovo pole (2.62) splňující podmínku

$$F^2 + 2\left(D-3\right)Q^2 = 2\Lambda \geq 0. \tag{2.79}$$

- Bude-li transverzální prostor plochý tj. $g_{ij} = \delta_{ij}$, dostaneme třídu prostoročasů s nulovými skalárními invarianty všech řádů (tzv. ***VSI prostoročasy***). Příslušný metrický tenzor tak má ve vyšších dimenzích tvar

$$\mathrm{d}s^2 = \delta_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j + 2\left(e_i + f_i r\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x^i - 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}r + \left(a\,r^2 + b\,r + c\right)\mathrm{d}u^2. \tag{2.80}$$

Víme, že veškeré VSI prostoročasy musí patřit do Kundtovy třídy a mají Weylův tenzor algebraického typu III nebo více speciální viz [5] nebo [17]. Navíc, ve speciálním případě, kdy $f_i = 0 = a = b$, přechází tato metrika na ***pp***-vlny (2.78) s plochou prostorovou metrikou.

Poznamenejme, že VSI prostoročasy lze zobecnit na třídu prostoročasů s konstantními polynomickými skalárními invarianty (tzv. ***CSI prostoročasy***), které lze sestrojit z Riemannova tenzoru a jeho derivací. Jde o další význammnou podřídu Kundtovy třídy.

- Vnější gravitační pole nejjednodušších ***gyratonů*** je popsáno metrikou

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j + 2e_i\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x^i - \mathrm{d}u\,\mathrm{d}r + c\,\mathrm{d}u^2\,, \tag{2.81}$$

kde funkce e_i a c splňují vakuové rovnice, které jsou formálně ekvivalentní rovnicím pro vektorový a skalární potenciál elektromagnetického pole v $D-2$ dimenzionálním prostoru. Toto vnější pole zřejmě patří do obou výše zmíněných podtříd.

Popis vnitřního pole zdroje je již poněkud komplikovanější neboť, tenzor energie a hybnosti musí mít navíc nediagonální člen $T_{ui}=0$. Jediné netriviální komponenty Ricciho tenzoru mají v této oblasti tvar $\Phi \equiv R_{\mu\nu}l^\mu l^\nu$ a $\Phi_i \equiv R_{\mu\nu}l^\mu m^\nu_{(i)}$ odpovídající funkcím Φ_{22} a Φ_{11} v $D=4$.

Výše zmíněné prostoročasy byly podrobněji shrnuty v práci [17].

2.6 Kundtovy prostoročasy v $D = 3$

Uvažujme zcela obecnou 3-dimenzionální Lorentzovskou geometrii s nulovou kongruencí geodetik generovanou nulovým vektorovým polem $\boldsymbol{k}$ a nulovou triádu $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, kde $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l}=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{l}=0$, a

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=-1, \qquad \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m}=1. \tag{2.82}$$

Vůči této triádě můžeme opět rozložit kovariantní derivaci vektorového pole $\boldsymbol{k}$ za pomoci $D=3$ ekvivalentu Newmanových–Penroseových spinových koeficientů jako

$$\begin{aligned} k_{\mu;\nu} =& K_{ll}k_\mu k_\nu + K_{lk}k_\mu l_\nu - K_{lm}k_\mu m_\nu \\ & - K_{ml}m_\mu k_\nu - K_{mk}m_\mu k_\nu + K_{mm}m_\mu m_\nu, \end{aligned} \tag{2.83}$$

kde jsme využili značení $K_{IJ} \equiv k_{\mu;\nu}e^\mu_I e^\nu_J$.

V tomto případě však příspěvky $\rho = K_{mm} = k_{\mu;\nu}m^\mu m^\nu$, které určují optické skaláry, degenerují pouze na ***jedinou*** funkci ρ a jak twist, daný antisymetrickou částí optické matice, tak shear, určený její bezestopou částí, ***musí být nutně nulové***. To ale znamená, že libovolné prostoročasy ve třech dimenzích, které připouští nulovou kongruenci geodetik, automaticky patří do Robinsonovy–Trautmanovy třídy nebo do Kundtovy třídy (v případě, že je také expanze nulová).

Ukazuje se, že ve $D=3$ je nutnou a postačující podmínkou pro geodetičnost vektorového pole ***ortogonalita nadploch***. Je pozoruhodné, že takovou nulovou kongruenci lze alespoň lokálně sestrojit pro ***libovolnou*** rozumnou $D=3$ Lorentzovskou geometrii a veškeré možné prostoročasy ve třech dimenzích tak nutně patří do jedné ze dvou výše zmíněných tříd.

Tato fakta byla ukázána a podrobněji rozebrána v práci [23]. Následně pak byly vyřešeny zcela obecné Einsteinovy polní rovnice pro Kundtovu i Robinsonovu–Trautmanovu třídu prostoročasů ve 3D, které připouští kosmologickou konstantu, čisté záření či gyratony. Tato práce byla následně zobecněna v [21], kde byl pro tyto geometrie vyřešen provázaný systém Einsteinových–Maxwellových rovnic (bez nábojů a proudů).

Bylo ukázáno, že podobně jako v $D=4$ a $D>4$, musí i v $D=3$ být pro Kundtovy prostoročasy elektromagnetické pole „zarovnané“ s geometricky privilegovaným vektorovým polem $\boldsymbol{k}$. Ve zcela obecném případě má metrika tvar

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 =& P^{-2}\,\mathrm{d}x^2 + 2\,(e+fr)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x - 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}r \\ & + \left(\left(\Lambda + \tfrac{1}{4}P^2f^2 - \tfrac{\kappa_0}{2}Q^2\right)r^2 + b\,r + c+\right)\mathrm{d}u^2\,, \end{aligned} \tag{2.84}$$

a příslušné elektromagnetické pole je dáno

$$\boldsymbol{F} = q\,\mathrm{d}r \quad \mathrm{d}u + (fQr - \varepsilon)\,\mathrm{d}u \quad \mathrm{d}x\,, \tag{2.85}$$

kde funkce $Q\,(u,x)$ určuje nenulovou komponentu a $\varepsilon\,(u,x)$ nulovou komponentu Maxwellova pole. Jejich vztah k funkcím P, e, f, b a c je explicitně dán Einstein–Maxwellovými rovnicemi, viz [21]. Protože ve třech dimenzích má Riemannův i Ricciho tenzor stejný počet nezávislých komponent, je lokální zakřivení prostoročasu plně určeno polními rovnicemi.

Podobně jako v předchozích případech $D = 4$ a $D > 4$, i zde platí relace

$$f^i f_i \equiv g^{ij} f_i f_j = g^{xx} f_x f_x = P^2 f^2. \tag{2.86}$$

Tato veličina je tedy invariantní vůči souřadnicovým transformacím a je tak užitečné zavést klasifikaci na případy $f = 0$ a $f = 0$. To je analogické rozlišování Kundtových vln a *pp*-vln v klasickém případě $D = 4$, neboť

$$\tau \equiv k_{\mu;\nu} m^\mu l^\nu = \frac{1}{2} P f. \tag{2.87}$$

Metriku (2.84) je možné dále zjednodušit vhodným výběrem prostorové souřadnice pomocí transformace $(u,x) \to (u,x\ )$ dané $x = (u,x\ )$.

- Vhodnou volbou lze např. lokálně odtransformovat funkci $e\,(u,x)$.
- Naopak je také možné volit x tak, že se funkce P zjednoduší na $P = 1$.

Vybrané podtřídy Kundtových prostoročasů ve třech dimenzích

Na závěr krátce uvedeme tvary několika významných podtříd Kundtovy třídy v $D = 3$

- Položíme-li $Q = 0 = \varepsilon$, elektromagnetické pole zcela zanikne, kosmologická konstanta Λ musí být nulová a funkce $b\,(u)$ již nesmí záviset na x. Obdržíme tak ***Minkowského metriku*** ve formě

  $$\mathrm{d}s^2 = P^{-2}\,\mathrm{d}x^2 + 2e\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}u\,\mathrm{d}r + (b\,r + c)\,\mathrm{d}u^2\,. \tag{2.88}$$

- Pokud $\Lambda = 0$ a $k_{\mu;\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu,r} = 0$, tedy nutně $f = 0$, $b = 0$ a $Q = 0$, obdržíme gravitační ***pp-vlny*** v Brinkmannově tvaru [2]

  $$\mathrm{d}s^2 = P^{-2}\,\mathrm{d}x^2 + 2e\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}u\,\mathrm{d}r + c\,\mathrm{d}u^2\,, \tag{2.89}$$

  které doprovází elektromagnetická vlna daná Maxwellovým polem

  $$\boldsymbol{F} = -\frac{\gamma\,(u)}{P\,(u,x)}\,\mathrm{d}u \quad \mathrm{d}x\,, \tag{2.90}$$

  kde $\gamma\,(u)$ je libovolná profilová funkce retardovaného času. Polní rovnice umožňují pouze *pp*-vlny s klasickým čistým zářením. Gyratonové řešení tak ve třech dimenzích není možné.

- *VSI prostoročasy* mají ve $3D$ tvar

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + 2\,(e+f)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}u\,\mathrm{d}r + \Big(a\,r^2 + b\,r + c\Big)\,\mathrm{d}u^2\,. \tag{2.91}$$

  Tuto formu lze získat z metriky (2.84) tak, že položíme $P = 1$ a $a = \Lambda + \frac{1}{4}f^2$. Pokud navíc $f = 0$ a $b = 0 = a$, přechází tato VSI metrika v klasické *pp*-vlny s triviální prostorovou částí.

- Obecnou metriku ***CSI prostoročasů*** lze ve třech dimenzích napsat ve tvaru

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + 2\,(e+fr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u - 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}r + \Big[\Big(\sigma + \tfrac{1}{4}f^2\Big)\;r^2 + b\,r + c\Big]\,, \tag{2.92}$$

  kde funkce f musí splňovat podmínky

$$f_{,x} + \tfrac{1}{2}f^2 = -\,s, \qquad\qquad (2\sigma - s)\,f = -2\alpha. \tag{2.93}$$

  Porovnáme-li tuto metriku s řešením (2.84), je na první pohled zřejmé, že konstanty σ, s a α musí být $\sigma = \Lambda$, $s = 2\Lambda$ a $\alpha = 0$.

- Poslední podtřídu, kterou zde zmíníme, lze získat pokud $f = 0$, $b = c = 0$, $Q = 0$ a $\varepsilon = 0$ jako

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 - 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}r + 2\Lambda r^2\,\mathrm{d}u^2\,. \tag{2.94}$$

  S využitím transformace $U = \frac{1}{2\Lambda u}$ a $V = 2\frac{u+1}{\Lambda r}$ lze tuto metriku převést do tvaru

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 - \frac{2\,\mathrm{d}U\,\mathrm{d}V}{(1-\Lambda UV)^2}. \tag{2.95}$$

  Jde o $D = 3$ analogii metrik (2.59) popisujících *elektrovakuová řešení typu D* se zápornou kosmologickou konstantou.

Na základě známých výsledků pro případ $D = 3$, $D = 4$ a $D > 4$ shrnutých v této kapitole lze konstatovat, že v klasické Einsteinově teorii si jsou Kundtova elektrovakuová řešení pro různé dimenze dosti podobná.

3. Kvadratická gravitace a Gaussovo–Bonnetovo rozšíření

Krátce poté, co Albert Einstein zformuloval svoji obecnou teorii relativity v roce 1915, se řada fyziků i matematiků začala pokoušet o její rozšíření a zobecnění. Jedna z možných cest, kterou poprvé navrhl Hermann Weyl v roce 1919, spočívá v dodání různých skalárních kontrakcí tenzorů křivosti do akčního funkcionálu

$$S = \int \frac{1}{\kappa}\left(R - 2\Lambda_0\right) \sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4 x\,. \tag{3.1}$$

Tyto dodatečné kvadratické členy se dají interpretovat jako korekce Einsteinovy teorie gravitace, které hrají velmi důležitou roli v oblastech s extrémně vysokou energií např. poblíž velkého třesku či okolo prostoročasových singularit černých děr.

Akční funkcionál rozsáhlé třídy takzvaných ***kvadratických gravitací*** v obecné dimenzi D má podobu

$$S = \int \left(\frac{1}{\kappa}\left(R - 2\Lambda_0\right) + \alpha R + \beta R^2_{\mu\nu} + \gamma\left(R^2_{\mu\nu\kappa\lambda} - 4R^2_{\mu\nu} + R^2\right)\right) \sqrt{-g}\ \mathrm{d}^D x, \tag{3.2}$$

kde

$$R^2_{\mu\nu\kappa\lambda} \equiv R_{\mu\nu\kappa\lambda}R^{\mu\nu\kappa\lambda}, \qquad R^2_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, \qquad R^2 \equiv RR, \tag{3.3}$$

a α, β a γ jsou konstanty příslušných kvadratických teorií. Polní rovnice, které z akčního funkcionálu (3.2) plynou, představují velmi složitou soustavu nelineárních parciálních diferenciálních rovnic, které mohou být až ***čtvrtého řádu***. V případě $\alpha = \beta = \gamma = 0$ přejde obecná kvadratická akce (3.2) v klasickou Einsteinovu–Hilbertovu akci (3.1). Lze také ukázat, že pro $D = 4$ tyto nové členy polním rovnicím nepřispívají; jsou topologicky triviální a kvadratické teorie gravitace tak mají smysl až pro $D > 4$.

Jedna z nejjednodušších a nejzajímavějších kvadratických gravitací je tzv. ***Einsteinova–Gaussova–Bonnetova teorie*** (EGB teorie), která patří do rozsáhlé třídy ***Lovelockových*** gravitací [16]. Příslušné polní rovnice, které lze obdržet z akčního funkcionálu (3.2) tím, že položíme $\alpha = 0 = \beta$, obsahují pouze ***derivace prvního a druhého řádu***. Konkrétně vakuové polní rovnice EGB teorie mají podobu

$$\frac{1}{\kappa}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda_0 g_{\mu\nu}\right) + 2\gamma H_{\mu\nu} = 0, \tag{3.4}$$

kde dodatečný člen $H_{\mu\nu}$ je

$$H_{\mu\nu} \equiv RR_{\mu\nu} - 2R_{\mu\kappa\nu\lambda}R^{\kappa\lambda} + R_{\mu\kappa\lambda\alpha}R_{\nu}{}^{\kappa\lambda\alpha} - 2R_{\mu\kappa}R_{\nu}{}^{\kappa} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}L_{GB}. \tag{3.5}$$

a L_{GB} je tzv ***Gaussův–Bonnetův člen*** definovaný vztahem

$$L_{GB} \equiv R^2_{\mu\nu\kappa\lambda} - 4R^2_{\mu\nu} + R^2. \tag{3.6}$$

Vyčíslíme-li stopu rovnice (3.4) dostáváme ekvivalentní vyjádření polních EGB rovnic v praktičtější podobě

$$R_{\mu\nu} = \frac{2\Lambda_0}{D-2}\,g_{\mu\nu} - 2k\left(H_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{D-2}H\right), \tag{3.7}$$

kde

$$H \equiv g^{\mu\nu} H_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} (D - 4) L_{GB}, \tag{3.8}$$

a konstanta k je

$$k \equiv \kappa\gamma. \tag{3.9}$$

Einsteinova teorie gravitace tedy odpovídá speciální volbě $k = 0$.

4. Kundtovy prostoročasy v EGB teorii gravitace

V této kapitole obsahující původní výsledky bakalářské práce postupně odvodíme polní rovnice v Gaussově–Bonnetově rozšíření Einsteinovy teorie gravitace v obecné dimenzi $D > 4$, které se pak pokusíme vyřešit. Nová řešení porovnáme jak se známými klasickými výsledky, diskutovanými v předchozí kapitole 2, tak se speciálním případem $g_{ui} = 0$ v EGB teorii, který byl analyzován ve článku Švarc, Podolský a Hruška [31] z roku 2020.

4.1 Tenzory křivosti

Všechny komponenty Riemmanova a Ricciho tenzoru pro obecnou Kundtovu metriku (2.9) v obecné dimenzi D byly v rámci této práce spočteny na papíře bez použití počítače. Jejich explicitní tvar je však již znám (viz např. práce [25], se kterou byly uvedené výsledky zkontrolovány). Protože tyto veličiny budou hrát klíčovou roli v dalších částech práce, vyjádříme je zde v plné podobě.

Kundtova metrika ve zcela obecném tvaru (2.9) má netriviální kovariantní komponenty

$$g_{ij}(u,x), \quad g_{ui}(r,u,x), \quad g_{ru} = -1, \quad g_{uu}(r,u,x), \tag{4.1}$$

a netriviální kontravariantní komponenty

$$g^{ij}, \quad g^{ri} = g^{ij} g_{uj}, \quad g^{ru} = -1, \quad g^{rr} = g^{ij} g_{ui} g_{uj} - g_{uu}, \tag{4.2}$$

kde navíc platí obvyklý vztah pro inverzní matici

$$g_{ji} g^{ik} = \delta^k_j. \tag{4.3}$$

Prostorové složky metriky g_{ij} s $i,j = 1,2,..,D-2$ reprezentují transversální $D-2$ dimenzionální prostor se souřadnicemi x^i, který je dále popsán příslušnými *prostorovými* složkami tenzoru křivosti ${}^S R_{ijkl}$

Christoffellovy symboly, které jsou dány prvními parciálními derivacemi metriky (1.1), spočteme přímočarým dosazením (4.1) a (4.2) do (1.1). Veškeré jejich netriviální komponenty jsou

$$
\begin{aligned}
\Gamma^r{}_{ru} &= \frac{1}{2} g^{ij} g_{uj} g_{ui,r} - \frac{1}{2} g_{uu,r}, \\
\Gamma^r{}_{ri} &= -\frac{1}{2} g_{ui,r}, \\
\Gamma^r{}_{ij} &= {}^S\Gamma^k{}_{ij} g_{uk} - \frac{1}{2}\left(2 g_{u(i,j)} - g_{ij,u}\right), \\
\Gamma^r{}_{ui} &= \frac{1}{2} g^{jk} g_{uk} (g_{ij,u} - 2 g_{u[i,j]}) - \frac{1}{2}\left(g^{jk} g_{uj} g_{uk} - g_{uu}\right) g_{ui,r} - \frac{1}{2} g_{uu,i}, \\
\Gamma^r{}_{uu} &= \frac{1}{2} g^{ij} g_{uj} \left(2 g_{ui,u} - g_{uu,i}\right) - \frac{1}{2}\left(g^{ij} g_{ui} g_{uj} - g_{uu}\right) g_{uu,r} - \frac{1}{2} g_{uu,u}, \\
\Gamma^k{}_{ru} &= \frac{1}{2} g^{ki} g_{ui,r}, \\
\Gamma^k{}_{ij} &\equiv {}^S\Gamma^k{}_{ij}, \\
\Gamma^k{}_{ui} &= -\frac{1}{2} g^{jk} g_{uj} g_{ui,r} + \frac{1}{2} g^{kj} \left(g_{uj,i} + g_{ij,u} - g_{ui,j}\right), \\
\Gamma^k{}_{uu} &= -\frac{1}{2} g^{ik} g_{ui} g_{uu,r} + \frac{1}{2} g^{ki} \left(2 g_{ui,u} - g_{uu,i}\right), \\
\Gamma^u{}_{ui} &= \frac{1}{2} g_{ui,r}, \\
\Gamma^u{}_{uu} &= \frac{1}{2} g_{uu,r},
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

kde ${}^S\Gamma^k{}_{ij}$ s $i,j,k = 1,...,D-2$ odpovídají ***Christo elovým symbolům*** ryze ***prostorové metriky*** g_{ij}. Kulaté závorky $(.\,,.)$ značí symetrizaci indexů, zatím co hranaté $[.\,,.]$ antisymetrizaci.

Pro výpočet ***Riemannova tenzoru*** využijeme jeho kovariantní vyjádření (1.5), kde navíc $R_{(\mu\nu)\kappa\lambda=0}$, $R_{\mu\nu(\kappa\lambda)} = 0$ a pro dvojice indexů $R_{[(\mu\nu)(\kappa\lambda)]} = 0$. Jednotlivé nezávislé komponenty tak můžeme vyjádřit jako

$$
\begin{aligned}
R_{rirj} &= \frac{1}{2}\left(g_{rj,ir} + g_{ir,rj} - g_{rr,ij} - g_{ij,rr}\right) + g_{\alpha\beta}\left(\Gamma^\alpha{}_{rj}\Gamma^\beta{}_{ir} - \Gamma^\beta{}_{rr}\Gamma^\alpha{}_{ij}\right), \\
R_{rijk} &= \frac{1}{2}\left(g_{rk,ij} + g_{ij,rk} - g_{rj,ik} - g_{ik,rj}\right) + g_{\alpha\beta}\left(\Gamma^\alpha{}_{rk}\Gamma^\beta{}_{ij} - \Gamma^\beta{}_{rj}\Gamma^\alpha{}_{ik}\right), \\
R_{riuj} &= \frac{1}{2}\left(g_{rj,iu} + g_{iu,rj} - g_{ru,ij} - g_{ij,ru}\right) + g_{\alpha\beta}\left(\Gamma^\alpha{}_{rj}\Gamma^\beta{}_{iu} - \Gamma^\beta{}_{ru}\Gamma^\alpha{}_{ij}\right), \\
R_{ruri} &= \frac{1}{2}\left(g_{ri,ur} + g_{ur,ri} - g_{rr,ui} - g_{ui,rr}\right) + g_{\alpha\beta}\left(\Gamma^\alpha{}_{ri}\Gamma^\beta{}_{ur} - \Gamma^\beta{}_{rr}\Gamma^\alpha{}_{ui}\right), \\
R_{ruru} &= \frac{1}{2}\left(g_{ru,ur} + g_{ur,ru} - g_{rr,uu} - g_{uu,rr}\right) + g_{\alpha\beta}\left(\Gamma^\alpha{}_{ru}\Gamma^\beta{}_{ur} - \Gamma^\beta{}_{rr}\Gamma^\alpha{}_{uu}\right), \\
R_{ruij} &= \frac{1}{2}\left(g_{rj,ui} + g_{ui,rj} - g_{ri,uj} - g_{uj,ri}\right) + g_{\alpha\beta}\left(\Gamma^\alpha{}_{rj}\Gamma^\beta{}_{ui} - \Gamma^\beta{}_{ri}\Gamma^\alpha{}_{uj}\right), \\
R_{ruui} &= \frac{1}{2}\left(g_{ri,uu} + g_{uu,ri} - g_{ru,ui} - g_{ui,ru}\right) + g_{\alpha\beta}\left(\Gamma^\alpha{}_{ri}\Gamma^\beta{}_{uu} - \Gamma^\beta{}_{ru}\Gamma^\alpha{}_{ui}\right), \\
R_{ijkl} &= \frac{1}{2}\left(g_{il,jk} + g_{jk,il} - g_{ik,jl} - g_{jl,ik}\right) + g_{\alpha\beta}\left(\Gamma^\alpha{}_{il}\Gamma^\beta{}_{jk} - \Gamma^\beta{}_{ik}\Gamma^\alpha{}_{jl}\right), \\
R_{uijk} &= \frac{1}{2}\left(g_{uk,ij} + g_{ij,uk} - g_{uj,ik} - g_{ik,uj}\right) + g_{\alpha\beta}\left(\Gamma^\alpha{}_{uk}\Gamma^\beta{}_{ij} - \Gamma^\beta{}_{uj}\Gamma^\alpha{}_{ik}\right), \\
R_{uiuj} &= \frac{1}{2}\left(g_{uj,iu} + g_{iu,uj} - g_{uu,ij} - g_{ij,uu}\right) + g_{\alpha\beta}\left(\Gamma^\alpha{}_{uj}\Gamma^\beta{}_{iu} - \Gamma^\beta{}_{uu}\Gamma^\alpha{}_{ij}\right).
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Konkrétním dosazením z (4.1), (4.2) a (4.4) dostaneme

$$
\begin{aligned}
R_{rirj} &= 0, \\
R_{rijk} &= 0, \\
R_{riuj} &= \frac{1}{2} g_{ui,rj} - \Gamma^{r}{}_{rj} \Gamma^{u}{}_{ui} - g_{kl} \Gamma^{k}{}_{ru} \Gamma^{l}{}_{ij}, \\
R_{ruri} &= -\frac{1}{2} g_{ui,rr}, \\
R_{ruru} &= -\frac{1}{2} g_{uu,rr} + g_{ij} \Gamma^{i}{}_{ru} \Gamma^{j}{}_{ru}, \\
R_{ruij} &= g_{u[i,j]r} + 2\, \Gamma^{r}{}_{r[i} \Gamma^{u}{}_{uj]}, \\
R_{ruui} &= \frac{1}{2} g_{uu,ri} - \frac{1}{2} g_{ui,ru} - \Gamma^{r}{}_{ri} \Gamma^{u}{}_{uu} + \Gamma^{r}{}_{ru} \Gamma^{u}{}_{ui} - g_{uj} \Gamma^{j}{}_{ru} \Gamma^{u}{}_{ui} - g_{jk} \Gamma^{j}{}_{ru} \Gamma^{k}{}_{ui}, \\
R_{ijkl} &= \frac{1}{2} \left(g_{il,jk} + g_{jk,il} - g_{ik,jl} - g_{jl,ik} \right) + g_{mn} \left(\Gamma^{m}{}_{il} \Gamma^{n}{}_{jk} - \Gamma^{n}{}_{ik} \Gamma^{m}{}_{jl} \right), \\
R_{uijk} &= g_{u[k,j]i} + g_{i[j,uk]} + 2\, \Gamma^{r}{}_{i[k} \Gamma^{u}{}_{uj]} + 2 g_{lm} \Gamma^{l}{}_{u[k} \Gamma^{m}{}_{j]i} + 2 g_{ul} \Gamma^{u}{}_{u[k} \Gamma^{l}{}_{j]i} \\
R_{uiuj} &= g_{u(i,uj)} - \frac{1}{2} g_{uu,ij} - \frac{1}{2} g_{ij,uu} - 2\, \Gamma^{r}{}_{u(i} \Gamma^{u}{}_{uj)} + \Gamma^{u}{}_{uu} \Gamma^{r}{}_{ij} + g_{uu} \Gamma^{u}{}_{ui} \Gamma^{u}{}_{uj} \\
&\quad + g_{uk} \left(2\, \Gamma^{u}{}_{u(i} \Gamma^{k}{}_{uj)} - {}^{S}\Gamma^{k}{}_{ij} \Gamma^{u}{}_{uu} \right) + g_{kl} \left(\Gamma^{k}{}_{ui} \Gamma^{l}{}_{uj} - {}^{S}\Gamma^{k}{}_{ij} \Gamma^{l}{}_{uu} \right). \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

a dále

$$
\begin{aligned}
R_{rirj} &= 0, \\
R_{rijk} &= 0, \\
R_{riuj} &= \frac{1}{2} g_{ui,r\ \ j} + \frac{1}{4} g_{ui,r} g_{uj,r}, \\
R_{ruri} &= -\frac{1}{2} g_{ui,rr}, \\
R_{ruru} &= -\frac{1}{2} g_{uu,rr} + \frac{1}{4} g^{ij} g_{ui,r} g_{uj,r}, \\
R_{ruij} &= g_{u[i,j]r}, \\
R_{ruui} &= g_{u[u,i],r} + \frac{1}{4} g^{jk} g_{uj} g_{uk,r} g_{ui,r} - \frac{1}{4} g^{jk} g_{uk,r} \left(g_{ij,u} - 2 g_{u[i,j]} \right), \\
R_{ijkl} &\equiv {}^{S}R_{ijkl}, \\
R_{uijk} &= g_{i[j,u\ \ k]} - g_{u[j,k]\ \ i} - \frac{1}{2} g_{i[j,u} g_{uk],r} + g_{u(i\ \ [j)} g_{uk],r}, \\
R_{uiuj} &= g_{u(i,u\ \ j)} - \frac{1}{2} g_{uu\ \ ij} - \frac{1}{2} g_{ij,uu} + \frac{1}{4} g_{ij,u} g_{uu,r} + \frac{1}{4} g^{kl} g_{ik,u} g_{jl,u} \\
&\quad + g^{kl} g_{u[i,(k]} g_{j)l,u} - \frac{1}{4} g_{ui,r} g_{uj,r} g_{uu} + \frac{1}{2} g_{uu,(i} g_{uj),r} - \frac{1}{2} g_{u(i\ \ j)} g_{uu,r} \\
&\quad + g^{kl} g_{u[i,k]} g_{u[j,l]} - \frac{1}{2} g^{kl} g_{uk} g_{u(i,r} g_{j)l,u} + g^{kl} g_{uk} g_{u(i,r} g_{u[j),l]} \\
&\quad + \frac{1}{4} g^{kl} g_{uk} g_{ul} g_{ui,r} g_{uj,r}, \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

kde ${}^{S}R_{ijkl}$ označuje ***prostorový*** Riemannův tenzor, který náleží ***prostorové metrice*** g_{ij}, a   značí kovariantní derivaci na transverzálním prostoru s konexí ${}^{S}\Gamma^{k}{}_{ij}$.

V našem případě tedy je

$$
\begin{aligned}
g_{uu\ ij} &= g_{uu,ij} - {}^{S}\Gamma^{k}{}_{ij} g_{uu,k}, \\
g_{ui\ j} &= g_{ui,j} - {}^{S}\Gamma^{k}{}_{ij} g_{uk}, \\
g_{ui,j\ k} &= g_{ui,jk} - {}^{S}\Gamma^{l}{}_{ik} g_{ul,j} - {}^{S}\Gamma^{l}{}_{jk} g_{ui,l}, \\
g_{ij\ k} &= g_{ij,k} - {}^{S}\Gamma^{l}{}_{ik} g_{jl} - {}^{S}\Gamma^{l}{}_{jk} g_{il}.
\end{aligned}
$$

Symetrický Ricciho tenzor je dán kontrakcí Riemannova tenzoru (1.6). Pro D dimenzionální ***Kundtovu geometrii***, tedy pro metriku (2.9), nabývají jeho komponenty podobu

$$
\begin{aligned}
R_{rr} &= 0, \\
R_{ri} &= R_{ruri}, \\
R_{ru} &= R_{ruru} - g^{ij} g_{uj} R_{riru} + g^{ij} R_{riuj}, \\
R_{ij} &= 2R_{r(ij)u} + {}^{S}R_{ij}, \\
R_{ui} &= -R_{ruui} - g^{jk} g_{uj} R_{riuk} - g^{jk} g_{uj} R_{ruik} + \left(g^{jk} g_{uj} g_{uk} - g_{uu}\right) R_{ruri} + g^{jk} R_{ujik}, \\
R_{uu} &= \left(g^{ij} g_{ui} g_{uj} - g_{uu}\right) R_{ruru} - 2g^{ij} g_{ui} R_{ruuj} + g^{ij} R_{uiuj},
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

kde ${}^{S}R_{ij} \equiv g^{kl} R_{kilj}$ vyjadřuje Ricciho tenzor prostorové metriky g_{ij}. Po dosazení komponent Riemannova tenzoru (4.7) dostáváme

$$
\begin{aligned}
R_{rr} &= 0, \\
R_{ri} &= -\frac{1}{2} g_{ui,rr}, \\
R_{ru} &= -\frac{1}{2} g_{uu,rr} + \frac{1}{2} g^{ij} g_{ui,r} g_{uj,r} + \frac{1}{2} g^{ij} g_{ui} g_{uj,rr} + \frac{1}{2} g^{ij} g_{iu,r\ j}, \\
R_{ij} &= -g_{u(i,r\ j)} - \frac{1}{2} g_{ui,r} g_{uj,r} + {}^{S}R_{ij}, \\
R_{ui} &= \frac{1}{2} g_{ui,ur} - \frac{1}{2} g_{uu,ri} + \frac{1}{2} g_{ui,rr} g_{uu} - \frac{1}{2} g^{jk} g_{uj} g_{uk} g_{ui,rr} + g^{jk} g_{uj} g_{u[k,i]r} \\
&\quad - \frac{1}{2} g^{jk} g_{uj} g_{ui,r\ k} - \frac{1}{2} g^{jk} g_{uj} g_{uk,r} g_{ui,r} + g^{jk} g_{j[i,u\ k]} - g^{jk} g_{u[i,j]\ k} \\
&\quad + \frac{1}{2} g^{ij} g_{uj,r} g_{uk\ i} - \frac{1}{2} g^{jk} g_{ui,r} g_{uj\ k} + \frac{1}{4} g^{ij} g_{ij,u} g_{ui,r}, \\
R_{uu} &= \frac{1}{2} g_{uu} g_{uu,rr} - \frac{1}{2} g^{ij} g_{ui,r} g_{uj,r} g_{uu} - \frac{1}{2} g^{ij} g_{ui} g_{uj} g_{uu,rr} + g^{ij} g_{ui} g_{uj,ur} - g^{ij} g_{ui} g_{uu,rj} \\
&\quad + g^{ij} g_{ui,u\ j} - \frac{1}{2} g^{ij} g_{uu\ ij} - \frac{1}{2} g^{ij} g_{ij,uu} - \frac{1}{2} g^{ij} g_{ui\ j} g_{uu,r} + \frac{1}{4} g^{ij} g_{ij,u} g_{uu,r} \\
&\quad + \frac{1}{2} g^{ij} g_{ui,r} g_{uu,j} - \frac{1}{2} g^{ij} g^{kl} g_{ui} g_{uk} g_{uj,r} g_{ul,r} + 2g^{ij} g^{kl} g_{uk} g_{ui,r} g_{u[j,l]} \\
&\quad + \frac{1}{2} g^{ij} g^{kl} g_{uk} g_{ul} g_{ui,r} g_{uj,r} + \frac{1}{4} g^{ij} g^{kl} g_{ik,u} g_{jl,u} + g^{ij} g^{kl} g_{ik,u} g_{u[j,l]} \\
&\quad + g^{ij} g^{kl} g_{u[i,k]} g_{u[j,l]}.
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Odkud je nakonec možné spočítat ***Ricciho skalár*** jako kontrakci (1.7), kdy v našem případě je

$$
R = -2R_{ru} + 2g^{ij} g_{uj} R_{ri} + g^{ij} R_{ij}, \tag{4.10}
$$

takže po dosazení (4.9) dostaneme

$$R = g_{uu,rr} - 2g^{ij} g_{uj} g_{ui,rr} - 2g^{ij} g_{iu,r\ j} - \frac{3}{2} g^{ij} g_{uj,r} g_{ui,r} + {}^{S}R. \tag{4.11}$$

Zde opět ${}^{S}R \equiv g^{ij\,S}R_{ij}$ značí Ricciho skalár prostorové metriky g_{ij}.

4.2 Polní rovnice

Abychom sestavili polní rovnice EGB teorie (3.7), je ještě potřeba spočítat členy, které k teorii Einsteinovy gravitace přidává Gaussovo–Bonnetovo rozšíření. Tyto výpočty jsou již zcela původní, protože oproti předchozímu článku [31] se zde zabýváme obecným případem, kdy $g_{ui} = 0$.

Začneme u komponent, které mají triviální příspěvek skaláru L_{GB} (tedy rr a ri komponentu), a postupně se dopracujeme ke složitějším komponentám. Z důvodu velkého množství členů byly následující zdlouhavé výpočty provedeny za pomoci programu Mathematica s rozšířením xAct, a to následujícím způsobem. Nejprve byly symbolicky spočteny jednotlivé kontrakce (3.6) a (3.5) v řeči obecných netriviálních komponent $R_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu\kappa\lambda}$, které byly následně manuálně zjednodušeny za pomoci Einsteinovy sumační konvence a různých substitucí. V posledním kroku byl dosazením nových vztahů spolu s (4.7), (4.8), (4.10) a omezením z polních rovnic do (3.5) spočten člen $H_{\mu\nu}$. Dospěli jsme tak k následujícím výsledkům:

4.2.1 rr komponenta

Příslušná komponenta Ricciho tenzoru R_{rr} i metrická funkce g_{rr} jsou nulové. K polním rovnicím (3.7) tak mohou přispívat pouze kvadratické členy. Tyto příspěvky mají podobu

$$R_{r\mu} R_r{}^{\mu} = g^{ij} R_{ri} R_{rj}, \tag{4.12}$$

$$R_{r\mu r\nu} R^{\mu\nu} = -2g^{ij} R_{ri} R_{rurj}, \tag{4.13}$$

$$R_{r\mu\nu\kappa} R_r{}^{\mu\nu\kappa} = -2g^{ij} R_{ruri} R_{rurj}, \tag{4.14}$$

avšak dosazením do (3.5) obdržíme jednoduchý výsledek

$$H_{rr} = 0. \tag{4.15}$$

Je tedy vidět, že i v případě zcela obecné Kundtovy metriky s $g_{ui} = 0$ je příslušná polní rovnice EGB teorie gravitace v libovolné dimenzi $D > 4$ ***triviálně splněna***.

4.2.2 ri komponenta

Pro tuto komponentu je též metrická funkce $g_{ri} = 0$, ovšem tentokrát je složka Ricciho tenzoru $R_{ri} = 0$. Jednotlivé kvadratické členy v (3.5) nabývají podobu

$$R_{r\mu} R_i{}^{\mu} = -R_{ru} R_{ri} + g^{jk} R_{ij} R_{rk} + g^{jk} g_{uj} R_{ri} R_{rk}, \tag{4.16}$$

$$R_{r\mu i\nu} R^{\mu\nu} = -R_{ru} R_{ruri} + g^{jk} R_{rj} R_{rkui} - g^{jk} R_{rj} R_{ruik} + g^{ij} g_{uj} R_{rk} R_{ruri}, \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned} R_{r\mu\nu\kappa} R_i{}^{\mu\nu\kappa} = &-2R_{ruri} R_{ruru} - 2g^{jk} R_{riuj} R_{rurk} \\ &-2g^{jk} R_{ruij} R_{rurk} + 4g^{jk} g_{uj} R_{rurk} R_{ruri}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

a po jejich kombinaci danou (3.5) obdržíme výsledek

$$H_{ri} = -\tfrac{1}{2}\,{}^{S}\!R\,g_{ui,rr} + {}^{S}\!R_{i}{}^{j}\,g_{uj,rr}. \tag{4.19}$$

Příslušná polní rovnice (3.7) má po dosazení $R_{ri} = -\frac{1}{2}g_{ui,rr}$ z (4.9) tvar

$$\left(1 + 2k\,{}^{S}\!R\right) g_{ui,rr} = 4k\,{}^{S}\!R_{i}{}^{j}\,g_{uj,rr}. \tag{4.20}$$

To je zcela nová rovnice, protože v dříve studovaném případě [31] byl učiněn apriorní předpoklad $g_{ui} = 0$, pro který je rovnice (4.20) triviálně splněna.

Pomocí malé úpravy obdržíme vztah

$$G_{i}{}^{j}\,g_{uj,rr} = 0, \tag{4.21}$$

kde jsme definovali veličinu G_{ij} jako

$$G_{ij} \equiv \left(1 + 2k\,{}^{S}\!R\right) g_{ij} - 4k\,{}^{S}\!R_{ij}, \tag{4.22}$$

neboli

$$G_{ij} \equiv g_{ij} + 2k\left({}^{S}\!R\,g_{ij} - 2\,{}^{S}\!R_{ij}\right) \tag{4.23}$$

a

$$G_{i}{}^{j} \equiv G_{ik}\,g^{jk}, \tag{4.24}$$

Jde o „ryze prostorovou“ veličinu, která byla poprvé identifikována v práci [31] ve tvaru

$$Q_{ij} = -\frac{1}{2}G_{ij}. \tag{4.25}$$

Je určena pouze metrikou g_{ij} a tedy ***nezávisí na souřadnici*** r. Její klíčová vlastnost spočívá ve skutečnosti, že pro Einsteinovu teorii gravitace ($k = 0$) platí jednoduchý vztah $G_{ij} = g_{ij}$. Během tohoto přechodu tak zůstává po formální stránce tvar polních rovnic do jisté míry zachován.

Stopa $G \equiv g^{ij}G_{ij}$ je dána

$$G \equiv (D-2) + 2k\,(D-4)\,{}^{S}\!R, \tag{4.26}$$

a je tedy jednoznačně určena prostorovým Ricciho skalárem ${}^{S}\!R$ a dimenzí D.

Při dalších výpočtech je nutné rozlišovat ***čtyři případy*** řešení rovnice (4.21) :

1. Pokud $G_{ij} = 0$ je libovolné, musí být v obecném případě splněna podmínka $g_{ui,rr} = 0$ a funkce g_{ui} tak musí být nanejvýš lineární v r, tedy

   $$g_{ui} = f_i\,(x,u)\;r + e_i\,(x,u)\,. \tag{4.27}$$

   Tato situace nastává zejména v Einsteinově teorii, kdy rovnice (4.21) přechází do tvaru

   $$\delta_{i}{}^{j}\,g_{uj,rr} = 0. \tag{4.28}$$

V rámci Einsteinovy–Gaussovy–Bonnetovy teorie do této třídy spadá také obecný případ *pp*-vln, pro které musí být splněna podmínka $g_{\mu\nu,r} = 0$, či obecné VSI prostoročasy, pro které $g_{ij} = \delta_{ij}$, viz sekce 4.3.

Přestože $G_{ij} = 0$, může nastat zajímavá situace, kdy stopa $G = 0$ zanikne. V takovém případě je díky (4.26) Ricciho skalár plně určen konstantou

$$ {}^{S}R = -\frac{D-2}{2k\,(D-4)}. \tag{4.29}$$

To ovšem znamená, že prostorová metrika g_{ij} má ***konstantní skalární křivost***, přičemž z (4.22) plyne, že

$$ G_{ij} = -\frac{2}{D-4}\,g_{ij} - 4\,{}^{S}R_{ij}. \tag{4.30}$$

Z výše uvedených vztahů je však zřejmé, že tato situace ***nemůže v Einsteinově teorii nastat*** a nemá smysl ani pro $D = 4$.

2. V případě kdy naopak $G_{ij} = 0$, mohou být funkce $g_{ui,rr}$ a tím i g_{ui} (zatím) libovolně zvolené. Transverzální $(D-2)$-rozměrný prostor popsaný metrikou $\mathrm{d}\sigma^2 = g_{ij}\,(x,u)\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$ je kvůli (4.22) svázaný silnou podmínkou

$$ {}^{S}R_{ij} = \left(\frac{1}{4k} + \frac{1}{2}\,{}^{S}R\right) g_{ij}, \tag{4.31}$$

a jde tedy o tzv. ***Einsteinův prostor***. Ricciho skalár je následně zcela určen vztahem (4.29), takže

$$ {}^{S}R_{ij} = \frac{{}^{S}R}{D-2}\,g_{ij} = -\frac{1}{2k\,(D-4)}\,g_{ij}. \tag{4.32}$$

Obě podmínky jsou tedy konzistentní a situace $G_{ij} = 0$ může skutečně nastat.

3. Ve speciálním případě, kdy také $g_{ui,rr} = 0$, musí spolu s (4.31) a (4.29) platit také (4.27). Dochází tak k ***nejjednodušší situaci***, kdy současně nastává 1. i 2. případ.

4. Nakonec ***nejsložitější situace*** nastane, pokud $G_{ij} = 0$ a $g_{ui,rr} = 0$. Jde o zcela obecný případ vedoucí na značně komplikované řešení.

4.2.3 ru komponenta

Nyní je potřeba spočítat netriviální Gaussův–Bonnetův člen (3.6), neboť skalární veličiny, včetně Ricciho křivosti R a kosmologického členu $\Lambda_0\,g_{\mu\nu}$, již přispívají polním rovnicím (3.4) pro ru komponentu.

Příslušné skaláry, které jsou tvořeny kvadráty Riemmanova a Ricciho tenzoru (3.3) mají tvar

$$\begin{aligned} R^2_{\mu\nu} = {} & 2R_{ru}R_{ru} - 4g^{ij}R_{ri}R_{uj} - 4g^{ri}R_{ri}R_{ru} + 4g^{ij}g^{rk}R_{ri}R_{jk} \\ & + 2g^{ri}g^{rj}R_{ri}R_{rj} + g^{ij}g^{kl}R_{ik}R_{jl} + 2g^{ij}g^{rr}R_{ri}R_{rj}, \end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned} R^2_{\mu\nu\kappa\lambda} = {} & 4R_{ruru}R_{ruru} + 16g^{ij}R_{ruri}R_{ruuj} - 16g^{ri}R_{ruri}R_{ruru} - 16g^{ij}g^{rk}R_{ruri}R_{rkuj} \\ & + 16g^{ij}g^{rk}R_{ruik}R_{rurj} + 16g^{ri}g^{rj}R_{ruri}R_{rurj} + 8g^{ij}g^{kl}R_{riuk}R_{rluj} \\ & - 4g^{ij}g^{kl}R_{ruik}R_{rujl} - 8g^{ij}g^{rr}R_{ruri}R_{rurb} + {}^{S}R^2_{ijkl}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Jejich kombinací danou (3.6), obdržíme po úpravě vztah

$$
\begin{aligned}
L_{GB} = {}^S\!L_{GB} &+ 2\,{}^S\!R\, g_{uu,rr} - 4\left({}^S\!R\, g^{ij} - 2\,{}^S\!R^{ij}\right) g_{ui,r\ j} \\
&- \left(3\,{}^S\!R\, g^{ij} - 4\,{}^S\!R^{ij}\right) g_{ui,r} g_{uj,r} - 4\left({}^S\!R\, g^{ij} - 2\,{}^S\!R^{ij}\right) g_{ui} g_{uj,rr} \\
&+ 4 g^{ij} g^{kl} \Big[-g_{u[i,rk]} g_{u[j,rl]} + g_{ui,r\ [j} g_{uk],r\ l} + g_{ui,r\ [j} g_{uk],r} g_{ul,r} \\
&+ \left(2 g_{i[j,u\ k]} - 2 g_{u[j,k]\ i} - g_{i[j,u} g_{uk],r} + 2 g_{u(i\ [j)} g_{uk],r}\right) g_{ul,rr} \Big] ,
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

kde

$$
{}^S\!L_{GB} \equiv {}^S\!R^2_{ijkl} - 4\,{}^S\!R^2_{ij} + {}^S\!R \tag{4.36}
$$

značí Gaussův–Bonnetův člen na transverzálním prostoru s metrikou g_{ij}.

V případě ru komponenty, kdy je příslušná metrická funkce $g_{ru} = -1$ konstantní, lze díky (3.5) tento skalár jednoduše kombinovat se zbylými kvadratickými členy, které jsou pro tuto komponentu dány

$$
R_{r\mu} R_u^{\ \mu} = - R_{ru} R_{ru} + g^{ij} R_{ri} R_{uj} + g^{ri} R_{ri} R_{ur}, \tag{4.37}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{r\mu u\nu} R^{\mu\nu} = & R_{ru} R_{ruru} - g^{ij} R_{ri} R_{ruuj} + g^{ij} R_{ui} R_{rurj} + g^{ri} R_{ri} R_{ruru} \\
& + g^{ri} R_{ru} R_{ruri} + g^{ij} + g^{ij} g^{rk} R_{ri} R_{rjuk} + g^{ij} g^{rk} R_{ri} R_{rkuj} \\
& - g^{ij} g^{rk} R_{ik} R_{rurj} + g^{kl} R_{ik} R_{riul} - g^{ij} g^{rr} R_{ri} R_{rurj},
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{r\mu\nu\kappa} R_u^{\ \mu\nu\kappa} = & R_{ruru} R_{ruru} - 6 g^{ij} R_{rurri} R_{ruuj} + 6 g^{ri} R_{ruri} R_{ruru} + 4 g^{ij} g^{rk} R_{ruri} R_{rkuj} \\
& - 4 g^{ij} g^{rk} R_{ruri} R_{rujk} - 2 g^{ij} g^{kl} R_{riuk} R_{rluj} + g^{ij} g^{kl} R_{ruik} R_{rujl} \\
& + 2 g^{ij} g^{rr} R_{ruri} R_{rurj}.
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

Dosadíme-li tyto veličiny do (3.5) a využijeme-li vztahů (4.2), (4.7), (4.9), (4.11) a (4.35), dostaneme poměrně jednoduchý výraz

$$
\begin{aligned}
H_{ru} = & -\frac{1}{2}\left({}^S\!R\, g^{ij} - 2\,{}^S\!R^{ij}\right) g_{ui,r\ j} - \frac{1}{4}\left({}^S\!R\, g^{ij} - 2\,{}^S\!R^{ij}\right) g_{ui,r} g_{uj,r} \\
& - \frac{1}{2}\left({}^S\!R\, g^{ij} - 2\,{}^S\!R^{ij}\right) g_{ui} g_{uj,rr} + \frac{1}{4}\,{}^S\!L_{GB},
\end{aligned}
\tag{4.40}
$$

Příslušná polní rovnice (3.4) má tedy po dosazení (4.40), (4.9) a (4.11) tvar

$$
{}^S\!R - 2\Lambda_0 + k\,{}^S\!L_{GB} = \frac{1}{2} G^{ij}\left(2\, g_{ui,r\ j} + g_{ui,r} g_{uj,r} + 2 g_{ui} g_{uj,rr}\right), \tag{4.41}
$$

a s využitím (4.21) se vztah dále zjednoduší na

$$
{}^S\!R - 2\Lambda_0 + k\,{}^S\!L_{GB} = \frac{1}{2} G^{ij}\left(2\, g_{ui,r\ j} + g_{ui,r} g_{uj,r}\right). \tag{4.42}
$$

Položíme-li nyní $g_{ui} = 0$, obdržíme jednoduchou podmínku nalezenou v [31], tedy

$$
{}^S\!R - 2\Lambda_0 + k\,{}^S\!L_{GB} = 0. \tag{4.43}
$$

Ta svazuje Ricciho křivost ${}^S\!R$ transverzálního prostoru s kosologickou konstantnou Λ_0 a konstantou kvadratické teorie gravitace k. Ve zcela obecném případě tato rovnice spolu s (4.20) nesvazuje pouze transverzální prostor, ale také gyratonové členy g_{ui}. Lze provést následující diskuzi:

1. V případě, že $G_{ij} = 0$ a $g_{ui,rr} = 0$, tedy $g_{ui} = f_i\, r + e_i$ viz (4.27), se rovnice (4.42) zjednoduší na

$$ {}^{S}R - 2\Lambda_0 + k\, {}^{S}L_{GB} = G^{ij} \left(f_{i\ j} + \frac{1}{2}\, f_i f_j \right). \tag{4.44} $$

   Rovnice nám tedy klade *omezení na funkce* f_i. Pokud bychom nyní uvažovali limitu Einsteinovy teorie $k \to 0$, kdy $G_{ij} \to g_{ij}$, obdržíme výsledek

$$ {}^{S}R - 2\Lambda_0 = f^{i}_{\ \ i} + \frac{1}{2} f^i f_i, \tag{4.45} $$

   kde $f^i \equiv g^{ij} f_j$, který je znám z předchozích prací (viz. rovnice (67) v [22]).

   Je zajímavé si všimnout, že pro rr, ri a ru komponenty lze *formálním* přechodem $g_{ij} \to G_{ij}$ a ${}^{S}R \to {}^{S}R + k\, {}^{S}L_{GB}$ přejít od Einsteinovy teorie gravitace k EGB teorii. Veličinu G_{ij} tak lze do jisté míry chápat jako *„zobecněnou metriku“*, zatímco ${}^{S}R + k\, {}^{S}L_{GB}$ lze chápat jako *„zobecnění“ Ricciho skalární křivosti*.

   Pro gauss–bonnetovské *pp*-vlny a další podobné podtřídy, pro které je $f_i = 0$ takže $g_{ui} = e_i\,(x,u)$, se ru komponenta polních rovnic redukuje na (4.43) a dostáváme tedy stejnou podmínku jako v případě $g_{ui} = 0$ studovaném v [31].

2. Pokud $G_{ij} = 0$, jsou příspěvky od gyratonových členu g_{ui} v rovnici (4.42) triviální a rovnice se opět zjednoduší na (4.43). Funkce g_{ui} tak stále mohou být libovolné, ale dostáváme další silné omezení na transverzální prostor popsaný metrikou g_{ij}, který musí být díky podmínkám (4.31) a (4.32) Einsteinovým prostorem.

4.2.4 ij komponenta

Pro ij komponentu polních rovnic nabývají příslušné kvadratické členy tvar

$$ R_{i\mu} R_j^{\ \mu} = -\, 2R_{r(i} R_{uj)} + R_{ik} R_j^{\ k} + 2R_{r(i} R_{j)}^{\ k}\, g_{uk} + g^{rr} R_{ri} R_{rj}, \tag{4.46} $$

$$ \begin{aligned} R_{i\mu j\nu} R^{\mu\nu} &= 2R_{ru} R_{r(iuj)} + 2g^{kl} R_{rk} R_{u(ij)k} + R^{kl}\, {}^{S}R_{ikjl} \\ &\quad - 2g^{rk} R_{rk} R_{r(iuj)} - 2\, {}^{S}R^{k}_{\ (ij)}{}^{l}\, R_{rk}\, g_{ul}, \end{aligned} \tag{4.47} $$

$$ \begin{aligned} R_{i\mu\nu\kappa} R_j^{\ \mu\nu\kappa} &= 4R_{rur(i} R_{ruuj)} + {}^{S}R_{iklm}\, {}^{S}R_j^{\ klm} + 4g^{kl} R_{rku(i} R_{rj)ul} \\ &\quad - 2g^{kl} R_{ruik} R_{rujl} - 4g^{rk} R_{rku(i} R_{rurj)} - 4g^{rk} R_{ruk(i} R_{rurj)} \\ &\quad - 2g^{rr} R_{ruri} R_{rurj}. \end{aligned} \tag{4.48} $$

Metrická funkce g_{ij} není konstantní (v předchozí rovnici bylo $g_{ru} = -1$) a kvadratické členy (4.46)–(4.48) tak nelze ve vztahu (3.5) jednoduchým způsobem zkombinovat s Gaussovým–Bonnetovým skalárem (4.35). Využijeme-li však vztahů (4.2), (4.7), (4.9) a (4.11), lze po delší úpravě obdržet výsledek

$$
\begin{aligned}
H_{ij} = {}^S\!H_{ij} &- \frac{1}{2}\left({}^S\!R\, g_{ij} - 2\,{}^S\!R_{ij}\right) g_{uu,rr} - \left({}^S\!R\, \delta^k_{(i}\delta^l_{j)} - 2\,{}^S\!R^k{}_{(i}\delta^l_{j)}\right) g_{u(k,r\ \ l)} \\
&- \frac{1}{2}\left({}^S\!R\, \delta^k_{(i}\delta^l_{j)} - 2\,{}^S\!R^k{}_{(i}\delta^l_{j)}\right) g_{uk,r} g_{ul,r} + \frac{1}{2}\left({}^S\!R\, g_{ij} - 2\,{}^S\!R_{ij}\right) g^{kl} g_{uk,r} g_{ul,r} \\
&+ \frac{1}{2}\left({}^S\!R\, g_{ij} - 2\,{}^S\!R_{ij} - Q_{ij}{}^{kl}\right)\left(2\, g_{u(k,r\ \ l)} + 2\, g_{uk} g_{ul,rr} + g_{uk,r} g_{ul,r}\right) \\
&+ \left(g^{kl} g^{mn} g_{ij} - g^{kl}\delta^m_{(i}\delta^n_{j)} - \delta^k_{(i}\delta^l_{j)} g^{mn}\right)\Big[g_{u[k,rm]} g_{u[l,rn]} - g_{uk,r\ \ [l} g_{um],r\ \ n} \\
&- g_{uk,r\ \ [l} g_{um],r} g_{un,r} + \Big(2 g_{k[l,u\ \ m]} - 2 g_{u[l,m]\ \ k} - g_{k[l,u} g_{um],r} \\
&+ 2 g_{u(k\ \ [l)} g_{um],r}\Big) g_{un,rr}\Big]\,.
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

Zde jsme zavedli ***prostorový kvadratický člen***

$$
{}^S\!H_{ij} \equiv {}^S\!R\, {}^S\!R_{ij} - 2\,{}^S\!R_{ikjl}\, {}^S\!R^{kl} + {}^S\!R_{iklm}\, {}^S\!R_j{}^{klm} - 2\,{}^S\!R_{ik}\, {}^S\!R_j{}^k - \frac{1}{4} g_{ij}\, {}^S\!L_{GB}, \tag{4.50}
$$

a novou „ryze prostorovou“ veličinu

$$
Q_{ijkl} \equiv 2\left({}^S\!R_{ij} g_{kl} - {}^S\!R_{k(i} g_{j)l} + {}^S\!R_{k(ij)l}\right), \tag{4.51}
$$

jejíž částečná stopa je rovna

$$
g^{kl} Q_{klij} = \frac{1}{k}\left(G_{ij} - g_{ij}\right) = 2\left({}^S\!R\, g_{ij} - 2\,{}^S\!R_{ij}\right). \tag{4.52}
$$

Dosazením vztahu (4.49), spolu s ij komponentou Ricciho tenzoru z (4.9) a Ricciho skalárem (4.11), do polních rovnic (3.4) dostaneme podmínku

$$
\begin{aligned}
{}^S\!R_{ij} &- \frac{1}{2}\,{}^S\!R\, g_{ij} + \Lambda_0\, g_{ij} + 2k\,{}^S\!H_{ij} - \frac{1}{2} G_{ij} g_{uu,rr} - G_{(i}{}^k \delta_{j)}{}^l\, g_{u(k,r\ \ l)} - \frac{1}{2} G_{(i}{}^k \delta_{j)}{}^l\, g_{uk,r} g_{ul,r} \\
&+ \frac{1}{4} G_{ij} g^{kl} g_{uk,r} g_{ul,r} + \frac{1}{2}\left(g_{ij} G^{kl} - 2k\, Q_{ij}{}^{kl}\right)\left(2\, g_{u(k,r\ \ l)} + 2\, g_{uk} g_{ul,rr}\right. \\
&\left. + g_{uk,r} g_{ul,r}\right) + 2k\left(g^{kl} g^{mn} g_{ij} - g^{kl}\delta^m_{(i}\delta^n_{j)} - \delta^k_{(i}\delta^l_{j)} g^{mn}\right)\Big[g_{u[k,rm]} g_{u[l,rn]} \\
&- g_{uk,r\ \ [l} g_{um],r\ \ n} - g_{uk,r\ \ [l} g_{um],r} g_{un,r} + \Big(2 g_{k[l,u\ \ m]} - 2 g_{u[l,m]\ \ k} - g_{k[l,u} g_{um],r} \\
&+ 2 g_{u(k\ \ [l)} g_{um],r}\Big) g_{un,rr}\Big] = 0,
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

kterou lze využitím ru komponenty polních rovnic (4.41) dále upravit do podoby

$$
\begin{aligned}
{}^S\!R_{ij} &+ \frac{1}{2}\,{}^S\!R\, g_{ij} - \Lambda_0\, g_{ij} + 2k\,{}^S\!H_{ij} + k\,{}^S\!L_{GB}\, g_{ij} - G_{(i}{}^k \delta_{j)}{}^l\, g_{u(k,r\ \ l)} - \frac{1}{2} G_{(i}{}^k \delta_{j)}{}^l\, g_{uk,r} g_{ul,r} \\
&- \frac{1}{2} G_{ij} g_{uu,rr} + \frac{1}{4} G_{ij} g^{kl} g_{uk,r} g_{ul,r} - k\, Q_{ij}{}^{kl}\left(2\, g_{u(k,r\ \ l)} + 2\, g_{uk} g_{ul,rr} + g_{uk,r} g_{ul,r}\right) \\
&+ 2k\left(g^{kl} g^{mn} g_{ij} - g^{kl}\delta^m_{(i}\delta^n_{j)} - \delta^k_{(i}\delta^l_{j)} g^{mn}\right)\Big[g_{u[k,rm]} g_{u[l,rn]} - g_{uk,r\ \ [l} g_{um],r\ \ n} \\
&- g_{uk,r\ \ [l} g_{um],r} g_{un,r} + \Big(2 g_{k[l,u\ \ m]} - 2 g_{u[l,m]\ \ k} - g_{k[l,u} g_{um],r} \\
&+ 2 g_{u(k\ \ [l)} g_{um],r}\Big) g_{un,rr}\Big] = 0.
\end{aligned}
\tag{4.54}
$$

Pokud bychom nyní zanedbali gyratonové členy (tedy předpokládali $g_{ui} = 0$), lze rovnici (4.54) ekvivalentně vyjádřit ve tvaru nalezeném v práci [31], a to konkrétně

$$
{}^S\!R_{ij} + 2k\,{}^S\!H_{ij} + \frac{1}{2} k\,{}^S\!L_{GB}\, g_{ij} + Q_{ij}\, g_{uu,rr} = 0. \tag{4.55}
$$

Klíčová veličina Q_{ij}, pomocí které byly v práci identifikovány tři hlavní podtřídy, se až na faktor $-1/2$ shoduje s veličinou G_{ij} viz (4.25). Klasifikace pomocí obou veličin jsou tedy ***ekvivalentní***.

Stopa ij komponenty polních rovnic (4.54) je ve zcela obecné situaci dána

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(D-2)\,{}^{S}R-(D-4)\,\Lambda_0+\frac{1}{2}k\,D\,{}^{S}L_{GB}-\frac{1}{2}G\,g_{uu,rr}+\frac{1}{4}G\,g^{ij}g_{ui,r}g_{uj,r}\\
&\quad+\left(g^{ij}-G^{ij}\right)\left(2\,g_{ui,r\ \ j}+2\,g_{ui}g_{uj,rr}+g_{ui,r}g_{uj,r}\right)\\
&\quad+2k\ (D-4)\,g^{ij}g^{kl}\Big[g_{u[i,rk]}g_{u[j,rl]}-g_{ui,r\ \ [j}g_{uk],r\ \ l}-g_{ui,r\ \ [j}g_{uk],r}g_{ul,r}\\
&\quad+\left(2g_{i[j,u\ \ k]}-2g_{u[j,k]\ \ i}-g_{i[j,u}g_{uk],r}+2g_{u(i\ \ [j)}g_{uk],r}\right)g_{ul,rr}\Big]=0.
\end{aligned}\tag{4.56}$$

Rovnice (4.54) resp. (4.56) tedy určují závislost funkce g_{uu} na souřadnici r, kterou lze získat např. přímou integrací vztahu

$$\begin{aligned}
g_{uu,rr}=&\frac{D-2}{G}\,{}^{S}R-2\frac{(D-4)}{G}\Lambda_0+\frac{k\,D}{G}\,{}^{S}L_{GB}+\frac{1}{2}\,g^{ij}g_{ui,r}g_{uj,r}\\
&+\frac{1}{G}\left(g^{ij}-G^{ij}\right)\left(4\,g_{ui,r\ \ j}+4\,g_{ui}g_{uj,rr}+2g_{ui,r}g_{uj,r}\right)\\
&+\frac{4k\ (D-4)}{G}g^{ij}g\,\Big[g_{u[i,rk]}g_{u[j,rl]}-g_{ui,r\ \ [j}g_{uk],r\ \ l}-g_{ui,r\ \ [j}g_{uk],r}g_{ul,r}\\
&+\left(2g_{i[j,u\ \ k]}-2g_{u[j,k]\ \ i}-g_{i[j,u}g_{uk],r}+2g_{u(i\ \ [j)}g_{uk],r}\right)g_{ul,rr}\Big]\,,
\end{aligned}\tag{4.57}$$

kde G je dáno vzorcem (4.26), tedy $G=(D-2)+2k\ (D-4)\,{}^{S}R$.

Jednotlivé situace podrobněji probereme v následující diskuzi:

1. Pokud $G_{ij}=0$, takže $g_{ui}=f_i\,r+e_i$ viz (4.27), přechází vztah (4.56) do podoby

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(D-2)\,{}^{S}R-(D-4)\,\Lambda_0+\frac{1}{2}k\,D\,{}^{S}L_{GB}\\
&\quad-\frac{1}{2}G\,g_{uu,rr}+\frac{1}{4}G\,f_if_i+\left(g^{ij}-G^{ij}\right)\left(2\,f_{i\ \ j}+f_if_j\right)\\
&\quad+2k\ (D-4)\,g^{ij}g^{kl}\left(f_{[i,k]}f_{[j,l]}-f_{i\ \ [j}f_{u]\ \ l}-f_{i\ \ [j}f_{k]}f_l\right)=0.
\end{aligned}\tag{4.58}$$

Je tedy nutné dále rozlišovat případy, kdy $G=0$ a $G=0$.

1.1 Je-li ***stopa*** $G=0$ ***netriviální***, lze z rovnice (4.58) přímou integrací určit funkci g_{uu}, která musí být nutně ***kvadratická*** v r, tedy

$$g_{uu}=a\,(x,u)\ r^2+b\,(x,u)\ r+c\,(x,u)\,,\tag{4.59}$$

kde b a c jsou (zatím) libovolné funkce závislé pouze na souřadnicích x a u, zatímco funkce a je pevně určena vztahem

$$\begin{aligned}
a\,(x,u)=&\frac{D-2}{2G}\,{}^{S}R-\frac{(D-4)}{G}\Lambda_0+\frac{k\,D}{2G}\,{}^{S}L_{GB}+\frac{1}{4}\,f^if_i\\
&+\frac{1}{G}\left(g^{ij}-G^{ij}\right)\left(2\,f_{i\ \ j}+f_if_j\right)\\
&+\frac{2k\ (D-4)}{G}g^{ij}g^{kl}\left(f_{[i,k]}f_{[j,l]}-f_{i\ \ [j}f_{k],\ \ l}-f_{i\ \ [j}f_{k]}f_l\right).
\end{aligned}\tag{4.60}$$

Dosadíme-li tuto funkci zpět do původní rovnice (4.54)

$$\begin{aligned}
&{}^{S}R_{ij} + \frac{1}{2}\,{}^{S}R\,g_{ij} - \Lambda_0\,g_{ij} + 2k\,{}^{S}H_{ij} + k\,{}^{S}L_{GB}\,g_{ij} = \\
&\quad \frac{1}{2}G_{(i}{}^{k}\delta_{j)}{}^{l}\left(2\,f_{(k\ l)} + f_k f_l\right) + \frac{1}{4}G_{ij}\left(4\,a - f^k f_k\right) \\
&\quad + k\,Q_{ij}{}^{kl}\left(2\,f_{(k\ l)} + f_k f_l\right) - 2k\,\left(g^{kl}g^{mn}g_{ij} - g^{kl}\delta^m_{(i}\delta^n_{j)} - \delta^k_{(i}\delta^l_{j)}g^{mn}\right) \\
&\quad \left(f_{[k,m]}f_{u[l,n]} - f_{k\ [l}f_{m]\ n} - f_{k\ [l}f_{m]}f_{un}\right),
\end{aligned} \tag{4.61}$$

obdržíme v kombinaci s (4.60) další podmínku, která svazuje transverzální prostor s gyratonovými členy.

Vztah (4.60) je možné dále zjednodušit pomocí ru komponenty polních rovnic (4.41). Tato úprava se však pro různé potřídy značně liší a vede na zcela odlišná vyjádření. Je tedy vhodné ji provést pro každý případ zvlášť:

- V klasické Einsteinově teorii, pro kterou $k = 0$, $G_{ij} = g_{ij}$ a $G = D - 2$, přechází funkce a ihned do tvaru

  $$a\,(x,u) = \frac{1}{2}\,{}^{S}R - \frac{D-4}{D-2}\,\Lambda_0 + \frac{1}{4}\,f^i f_i, \tag{4.62}$$

  který se přesně shoduje s rovnicí (2.61) pro speciální případ bez elektromagnetického pole (pro $F = 0 = Q$ z práce [22]).
  Dosadíme-li nyní tento vztah do rovnice (4.61)

  $${}^{S}R_{ij} + \frac{1}{2}\,{}^{S}R\,g_{ij} - \Lambda_0\,g_{ij} = f_{(i\ j)} + \frac{1}{2}f_i f_j + g_{ij}\,a - \frac{1}{4}g_{ij}f^k f_k, \tag{4.63}$$

  obdržíme jednoduchou podmínku (viz rovnice (66) v [22])

  $${}^{S}R_{ij} = \frac{2\,\Lambda_0}{D-2}\,g_{ij} + f_{(i\ j)} + \frac{1}{2}f_i f_j, \tag{4.64}$$

  která se v případě $f_i = 0$, tedy v případě $g_{ui} = e_i$ nebo také nulových gyratonů $g_{ui} = 0$ redukuje na

  $${}^{S}R_{ij} = \frac{2\,\Lambda_0}{D-2}\,g_{ij}. \tag{4.65}$$

  Transverzální prostor tedy v daném případě ***musí být Einsteinův prostor***.
  Připomeňme, že pro předchozí komponenty polních rovnic bylo možné formálním přechodem $g_{ij} \to G_{ij}$ a ${}^{S}R \to {}^{S}R + k\,{}^{S}L_{GB}$ přejít od Einsteinovy teorie zpět do EGB teorie. V případě ij komponenty je tento přechod s mírnou modifikací možný pouze částečně. Budeme-li chápat člen ${}^{S}R_{ij} \to {}^{S}R_{ij} + 2k\,{}^{S}H_{ij} + \frac{1}{2}k\,{}^{S}L_{GB}$ jako Gaussovo-Bonnetovo zobecnění Ricciho tenzoru, modifikujeme kvadráty $g_{ij}g_{kl} \to G_{ij}g_{kl} - 2k\,Q_{ijkl}$, a přičteme-li k rovnici vhodnou funkci $F\,(g_{ij})\,H\,(L_{GB})$, kde v tomto konkrétním případě $F\,(g_{ij}) = g^{kl}g^{mn}g_{ij} - \delta^k_i\delta^l_j g^{mn} - g^{kl}\delta^m_i\delta^n_j$, lze opět z ij komponenty Einsteinových rovnic (1.13) obdržet přibližný tvar rovnice (4.53).

- V situaci, kdy jsou lineární členy nulové, $f_i = 0$, tedy v případě kdy $g_{ui} = e_i$ nebo také nulových gyratonů $g_{ui} = 0$ diskutovaném v [31], má funkce (4.60) z (4.59) jednoduchý tvar

$$a\,(x,u) = \frac{D-2}{2G}\,{}^{S}\!R - \frac{(D-4)}{G}\Lambda_0 + \frac{k\,D}{2G}\,{}^{S}\!L_{GB}, \tag{4.66}$$

  který lze pomocí podmínky $k\,{}^{S}\!L_{GB} = 2\Lambda_0 - {}^{S}\!R$ (4.43) zjednodušit do podoby

$$a = \frac{4\Lambda_0 - {}^{S}\!R}{(D-2) + 2k\,(D-4)\,{}^{S}\!R}. \tag{4.67}$$

  Původní rovnice (4.61) se tak redukuje na podmínku

$${}^{S}\!R_{ij} + 2k\,{}^{S}\!H_{ij} = \frac{1}{2G}\,(G\,g_{ij} - 2\,G_{ij})\,{}^{S}\!R - \frac{1}{G}\,(G\,g_{ij} - 4\,G_{ij})\,\Lambda_0, \tag{4.68}$$

  svazující transverzální prostor. Pokud bychom nyní uvažovali Einsteinovu limitu ($k \to 0$, $G_{ij} \to g_{ij}$, $G \to D-2$), dostali bychom opět vztah (4.65); jedná se o Einsteinův prostor.

- V případech, kdy jsou funkce f_i a e_i z (4.27) zcela obecné, by také mohlo být výhodné funkci a upravit do podoby

$$\begin{aligned} a\,(x,u) = {} & \frac{D-6}{2G}\,{}^{S}\!R - \frac{(D-8)}{G}\Lambda_0 + \frac{k\,(D-4)}{2G}\,{}^{S}\!L_{GB} \\ & + \frac{1}{4}\,f^i f_i + \frac{1}{G}\left(2\,f^i{}_{\ i} + f^i f_i\right) \\ & + \frac{2k\,(D-4)}{G} g^{ij} g^{kl}\left(f_{[i,k]}f_{[j,l]} - f_{i\ [j}f_{k],\ l} - f_{i\ [j}f_{k]}f_l\right). \end{aligned} \tag{4.69}$$

1.2 Pokud je ***stopa*** $G = 0$ ***nulová***, nelze z rovnice (4.58) určit závislost funkce g_{uu} na souřadnici r. V tomto případě je ale Ricciho skalár plně určen konstantami D a k vztahem (4.29) a dostáváme tak podmínku

$$\begin{aligned} D\,k\,{}^{S}\!L_{GB} = {} & -(D-2)\,{}^{S}\!R + 2\,(D-4)\,\Lambda_0 - 4\left(g^{ij} - 2G^{ij}\right)\left(f_{i\ j} + f_i f_j\right) \\ & - 4k\,(D-4)\,g^{ij}g^{kl}\left(f_{[i,k]}f_{[j,l]} - f_{i\ [j}f_{u]\ l} - f_{i\ [j}f_{k]}f_l\right), \end{aligned} \tag{4.70}$$

která určuje závislost prostorové veličiny ${}^{S}\!L_{GB}$ (a tím i závislost skalárů ${}^{S}\!R^2_{ij}$ a ${}^{S}\!R^2_{ijkl}$) na gyratonových členech a konstantách k, Λ_0 a D. Zdůrazněme, že tato situace ***nemůže v Einsteinově teorii nastat***, neboť parametry $k = 0$ ani $D - 4 > 0$ nesmí být nulové.

Ve ***speciálním případě***, kdy $f_i = 0$, tedy v případě $g_{ui} = e_i$, je Gaussův–Bonnetův skalár již určen ru komponentou polních rovnic (4.43). Po další úpravě vzorce (4.70) tak dostáváme pro tuto situaci jednoduchý vztah

$${}^{S}\!R = 4\Lambda_0, \tag{4.71}$$

který nám spolu s (4.58) pevně svazuje všechny tři parametry, a to

$$\Lambda_0 = -\frac{D-2}{8k\,(D-4)}. \tag{4.72}$$

Je tedy patrné, že kosmologická konstanta Λ_0 a konstanta EGB teorie k musí mít vzájemně opačná znaménka a žádná z nich nesmí být nulová (viz také [31]).

Původní rovnice (4.54), které musí být splněny pro libovolné ij, tak v kombinaci s (4.70) či (4.71) opět určují závislost funkce g_{uu} na souřadnici r, která musí být v obou případech kvadratická. Všechny ryze prostorové komponenty polních rovnic musí jednoznačně vést na stejnou funkci a ze vztahu (4.59).

2. Pokud jsou funkce $G_{ij} = 0$ triviální a tím i $G = 0$, lze polní rovnice (4.56) využitím (4.41) upravit do tvaru

$$\begin{aligned} {}^S\!R - 4\Lambda_0 = {} & g^{ij}\left(2\, g_{ui,r\ j} + 2\, g_{ui}g_{uj,rr} + g_{ui,r}g_{uj,r}\right) \\ & + 2k\,(D-4)\, g^{ij}g^{kl}\Big[g_{u[i,rk]}g_{u[j,rl]} - g_{ui,r\ [j}g_{uk],r\ l} - g_{ui,r\ [j}g_{uk],r}g_{ul,r} \\ & + \left(2g_{i[j,u\ k]} - 2g_{u[j,k]\ i} - g_{i[j,u}g_{uk],r} + 2g_{u(i\ [j)}g_{uk],r}\right) g_{ul,rr}\Big]\,. \end{aligned} \tag{4.73}$$

Příslušné kombinace gyratonových členů tak musí být konstantní, neboť prostorový Ricciho skalár je dán (4.29). Tento vztah v kombinaci s původní rovnicí

$$\begin{aligned} & {}^S\!R_{ij} - \frac{1}{2}\,{}^S\!R\, g_{ij} + \Lambda_0\, g_{ij} + 2k\,{}^S\!H_{ij} - Q_{ij}{}^{kl}\left(2\, g_{u(k,r\ l)} + 2\, g_{uk}g_{ul,rr} + g_{uk,r}g_{ul,r}\right) \\ & \quad + 2k\,\left(g^{kl}g^{mn}g_{ij} - g^{kl}\delta^m_{(i}\delta^n_{j)} - \delta^k_{(i}\delta^l_{j)}g^{mn}\right)\Big[g_{u[k,rm]}g_{u[l,rn]} - g_{uk,r\ [l}g_{um],r\ n} \\ & \quad - g_{uk,r\ [l}g_{um],r}g_{un,r} + \left(2g_{k[l,u\ m]} - 2g_{u[l,m]\ k} - g_{k[l,u}g_{um],r}\right. \\ & \quad \left. + 2g_{u(k\ [l)}g_{um],r}\right) g_{un,rr}\Big] = 0, \end{aligned} \tag{4.74}$$

svazuje prostorové kvadratické členy ${}^S\!H_{ij}$ s konstantami a gyratonovými členy.

V situaci, kdy jsou gyratonové členy $g_{ui} = e_i$ (nebo-li $f_i = 0$), se stopa rovnic (4.56) opět redukuje na (4.71), ovšem tentokrát díky (4.32) dostáváme navíc podmínku

$${}^S\!R_{ij} = \frac{4\Lambda_0}{D-2}\, g_{ij}. \tag{4.75}$$

Rovnice (4.54), která má v této situaci tvar

$${}^S\!R_{ij} + 2k\,{}^S\!H_{ij} + \frac{1}{2}k\,{}^S\!L_{GB}\, g_{ij} = 0, \tag{4.76}$$

opět svazuje prostorové kvadratické členy ${}^S\!H_{ij}$ (bez skaláru L_{GB}) s kosmologickou konstantou Λ_0 skrze (4.75).

3. Pokud bychom uvažovali lineární závislost $g_{ui} = f\,(x,u)\ r + e_i$ na r a pokud by zároveň byly veličiny $G_{ij} = 0 \quad G = 0$ triviální, přechází polní rovnice (4.73) pomocí (4.41) do tvaru

$$\begin{aligned} {}^S\!R - 4\Lambda_0 = {} & 2\, f^i{}_{\ i} + f^i f_i \\ & + 2k\,(D-4)\, g^{ij}g^{kl}\left(f_{[i,k]}f_{[j,l]} - f_{i\ [j}f_{k]\ l} - f_{i\ [j}f_{k]}f_l\right), \end{aligned} \tag{4.77}$$

zatímco rovnice (4.54) je

$$
{}^{S}R_{ij} + 2k\,{}^{S}H_{ij} + \frac{1}{2}k\,{}^{S}L_{GB}\,g_{ij} - Q_{ij}{}^{kl}\left(2\,f_{(k\ l)} + f_k f_l\right) + 2k\,\left(g^{kl}g^{mn}g_{ij}\right.
$$

$$
\left. - g^{kl}\delta^m_{(i}\delta^n_{j)} - \delta^k_{(i}\delta^l_{j)}g^{mn}\right)\left(f_{[k,m]}f_{[l,n]} - f_{k\ [l}f_{m]\ n} - f_{k\ [l}f_{m]}f_n\right) = 0. \quad (4.78)
$$

Význam obou podmínek je analogický obecné situaci 2.

4.2.5 *ui* komponenta

V této fázi již začínají být polní rovnice velmi složité a vyjádříme si je tak jen ve vší obecnosti. Jejich úplný tvar a rozbor bude předmětem následujících prací.

Kvadratické členy, které přispívají ui komponentě polních rovnic, jsou

$$
\begin{aligned}
R_{u\mu}R_i{}^{\mu} = &- R_{ur}R_{ui} - R_{uu}R_{ri} + g^{jk}R_{ij}R_{uk} + g^{rj}R_{ij}R_{ru} \\
&+ g^{rj}R_{ri}R_{uj} + g^{rr}R_{ri}R_{ru}, && (4.79) \\
R_{u\mu i\nu}R^{\mu\nu} = &R_{uu}R_{ruri} + R_{ru}R_{ruui} + g^{jk}R_{riuj}R_{uk} + g^{jk}R_{ruij}R_{uk} \\
&+ g^{ij}R_{uiuj}R_{rk} - g^{jk}g^{lm}R_{jli}R_{km} + g^{rj}R_{riuj}R_{ru} \\
&+ g^{rj}R_{Rruij}R_{ru} - g^{rj}R_{ruui}R_{rj} - 2g^{rj}R_{ruri}R_{uj} \\
&- g^{rj}g^{rk}R_{riuj}R_{rk} - g^{rj}g^{rk}R_{ruij}R_{rk} + g^{rj}g^{rk}R_{ruri}R_{jk} \\
&- g^{jk}g^{rl}R_{riuj}R_{kl} - g^{jk}g^{rl}R_{ruij}R_{kl} - 2g^{jk}g^{rl}R_{u(jl)i}R_{rk} \\
&- 2g^{rr}R_{ruri}R_{ru} - g^{jk}g^{rr}R_{riuj}R_{rk} - g^{jk}g^{rr}R_{ruij}R_{ra} \\
&+ 2g^{rr}g^{rj}R_{ruri}R_{rj}, && (4.80) \\
R_{u\mu\nu\kappa}R_i{}^{\mu\nu\kappa} = &2R_{ruru}R_{ruui} + R_{ujkl}{}^{S}R_i{}^{jkl} + 2g_{uj}R_{rkul}{}^{S}R_i{}^{jkl} - 2g_{uj}R_{rukl}{}^{S}R_i{}^{jkl} \\
&+ 2\,g_{uj}g_{ul}R_{rurk}{}^{S}R_i{}^{jkl} + g^{jk}R_{rjui}R_{ruub} - 2\,g^{jk}R_{ruij}R_{ruuk} \\
&+ 2\,g^{jk}R_{uiuj}R_{rurk} + 2\,g^{jk}g^{lm}R_{ujli}R_{ukum} + g^{jk}g^{lm}R_{uijl}R_{rukm} \\
&- 2\,g^{rj}R_{rjui}R_{ruru} + 2\,g^{rj}R_{ruij}R_{ruru} + 2\,g^{rj}R_{ruri}R_{rurj} \\
&- 2\,g^{rj}R_{ruui}R_{rurj} - 2\,g^{rj}g^{rk}R_{ruij}R_{rurk} + 4\,g^{rj}g^{rk}R_{rju[i}R_{rurk]} \\
&+ 2\,g^{jk}g^{rl}R_{riuj}R_{rluk} + 2\,g^{jk}g^{rl}R_{rjui}R_{rukl} + 2\,g^{jk}g^{rl}R_{ruij}R_{rluk} \\
&+ 4\,g^{jk}g^{rl}R_{u(ij)l}R_{rurk} - 2\,g^{rr}R_{ruri}R_{ruru} - 4\,g^{jk}g^{rr}R_{r(iuj)}R_{rurk} \\
&+ 2\,g^{rj}g^{rr}R_{ruri}R_{rurj}, && (4.81)
\end{aligned}
$$

a jejich příslušná kombinace

$$
H_{ui} \equiv RR_{ui} - 2R_{u\kappa i\lambda}R^{\kappa\lambda} + R_{u\kappa\lambda\alpha}R_i{}^{\kappa\lambda\alpha} - 2R_{u\kappa}R_i{}^{\kappa} - \frac{1}{4}g_{ui}L_{GB}, \quad (4.82)
$$

kde zbylé veličiny jsou dány vztahy (4.9), (4.11) a (4.35).

Polní rovnice pro *ui* komponentu mají tvar

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}g_{ui,ur} - \frac{1}{2}g_{uu,ri} + \frac{1}{2}g_{ui,rr}g_{uu} - \frac{1}{2}g^{jk}g_{uj}g_{uk}g_{ui,rr} + g^{jk}g_{uj}g_{u[k,i]r} \\
&\quad - \frac{1}{2}g^{jk}g_{uj}g_{ui,r\ \ k} - \frac{1}{2}g^{jk}g_{uj}g_{uk,r}g_{ui,r} + g^{jk}g_{j[i,u\ \ k]} - g^{jk}g_{u[i,j]\ \ k} \\
&\quad + \frac{1}{2}g^{ij}g_{uj,r}g_{uk\ \ i} - \frac{1}{2}g^{jk}g_{ui,r}g_{uj\ \ k} + \frac{1}{4}g^{ij}g_{ij,u}g_{ui,r} \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(g_{uu,rr} - 2g^{ij}g_{uj}g_{ui,rr} - 2g^{ij}g_{iu,r\ \ j} - \frac{3}{2}g^{ij}g_{uj,r}g_{ui,r} + {}^{S}R\right)g_{ui} \\
&\quad + \Lambda_0\, g_{ui} + 2k\, H_{ui} = 0.
\end{aligned}
\tag{4.83}
$$

V klasické Einsteinově teorii ($k = 0$) jsou funkce g_{ui} (4.27) a g_{uu} (4.59) polynomiální v r a proto musí být rovnice (4.83) (podobně i (4.92)) splněna pro každou mocninu zvlášť. Konkrétně pro *ui* komponentu dostáváme dvě podmínky, které dávají další omezení na funkce b, e_i, f_i a svazují je s kosmologickou konstantnou Λ_0 (viz podrobněji *ui* komponenta v práci [22]). Lze tedy očekávat, že podobná situace nastane i v EGB teorii pokud $G_{ij} = 0$ a $g_{ui,rr} = 0$. Příslušné polní rovnice již však nemusí být díky kvadratickým členům pouze lineární a mohou tedy obsahovat dodatečné podmínky, které jsou v Einsteinově teorii triviálně splněny.

Pro speciální případ $g_{ui} = 0$ v EGB teorii byl v práci [31] odvozen plný tvar polních rovnic (4.83) v podobě

$$
Q_i^j\left(g_{uu,rj} - 2\,g^{kl}g_{k[j,u\ \ l]}\right) - 2k\left(2\,{}^{S}R^{kl}\delta_i^j - {}^{S}R_i^{klj}\right)g_{k[l,u\ \ j]} = 0. \tag{4.84}
$$

Připomeňme, že $Q_{ij} = -\frac{1}{2}G_{ij}$.

Podobně jako ve zcela obecném případě $g_{ui} = 0$, je i s nulovými gyratony $g_{ui} = 0$ nutné v diskuzi rozlišit případ $Q_{ij} = 0$ a $Q_{ij} = 0$ (viz (4.54)):

1. Pokud $Q_{ij} = 0$, rozpadá se rovnice (4.84) v různých mocninách r na

   $$
   Q_i{}^j a_{,j} = 0, \tag{4.85}
   $$

   a

   $$
   Q_i^j\left(b_{,j} - 2\,g^{kl}g_{k[j,u\ \ l]}\right) - 2k\left(2\,{}^{S}R^{kl}\delta_i^j - {}^{S}R_i^{klj}\right)g_{k[l,u\ \ j]} = 0. \tag{4.86}
   $$

   První podmínka je triviálně splněna v důsledku předchozích rovnic a Bianchiho identit, zatímco druhá rovnice určuje prostorovou závislost funkce b

2. V případě, že $Q_{ij} = 0$, musí být splněna podmínka

   $$
   \left(2\,{}^{S}R^{kl}\delta_i^j - {}^{S}R_i^{klj}\right)g_{k[l,u\ \ j]} = 0. \tag{4.87}
   $$

S dalšími podrobnostmi se odkazujeme na předchozí práci [31].

4.2.6 uu komponenta

Nakonec pro nejsložitější uu komponentu polních rovnic mají příslušné kvadratické členy tvar

$$
\begin{aligned}
R_{u\mu}R_u{}^{\mu} &= -\,2\,R_{uu}R_{ur} + g^{ij}R_{ui}R_{uj} + 2\,g^{ri}R_{ru}R_{ui} + g^{rr}R_{ru}R_{ru}, &(4.88)\\
R_{u\mu u\nu}R^{\mu\nu} &= R_{uu}R_{ruru} + 2\,g^{ij}R_{ruui}R_{uj} + g^{ij}g^{kl}R_{uiuk}R_{jl} + 2\,g^{ri}R_{ruui}R_{ru}\\
&\quad -\,2\,g^{ri}R_{ruru}R_{ui} + g^{ri}g^{rj}R_{ruru}R_{ij} - 2\,g^{ri}g^{rj}R_{ruui}R_{rj}\\
&\quad -\,2\,g^{ij}g^{rk}R_{ruui}R_{jk} + 2\,g^{ij}g^{rk}R_{uiuk}R_{rj} - 2\,g^{rr}R_{ruru}R_{ru}\\
&\quad -\,2\,g^{ij}g^{rr}R_{ruui}R_{rj} + 2\,g^{ri}g^{rr}R_{ruru}R_{ri}, &(4.89)\\
R_{u\mu\nu\kappa}R_u{}^{\mu\nu\kappa} &= -\,2\,g^{ij}R_{ruui}R_{Ruuj} - 4\,g^{ij}g^{kl}R_{riuk}R_{ujul} + g^{ij}g^{kl}g^{mn}R_{uikm}R_{ujln}\\
&\quad +\,4\,g^{ri}R_{ruri}R_{ruru} - 4\,g^{ri}g^{rj}R_{riuj}R_{ruru} - 4\,g^{ri}g^{rj}R_{ruri}R_{ruuj}\\
&\quad -\,2\,g^{ij}g^{kl}g^{rm}R_{ruik}R_{umjl} + 8\,g^{ij}g^{kl}g^{rm}R_{u[im]k}R_{rjul}\\
&\quad +\,4\,g^{ri}g^{rj}g^{rk}R_{riuj}R_{rurk} - 2\,g^{ij}g^{rk}g^{rl}R_{riuk}R_{rjul}\\
&\quad +\,4\,g^{ij}g^{rk}g^{rl}R_{riuk}R_{rujl} + 4\,g^{ij}g^{rk}g^{rl}R_{ruri}R_{rukjl}\\
&\quad -\,2\,g^{rr}R_{ruru}R_{ruru} - 4\,g^{ij}g^{rr}R_{ruri}R_{ruuj} + 2\,g^{ij}g^{kl}g^{rr}R_{riuk}R_{rjul}\\
&\quad -\,g^{ij}g^{kl}g^{rr}R_{ruik}R_{rujl} + g^{ri}g^{rr}R_{ruri}R_{ruru}\\
&\quad -\,2\,g^{ri}g^{rj}g^{rr}R_{ruri}R_{rurj} + 8\,g^{ij}g^{rk}g^{rr}R_{r(iuk)}R_{ruuj}\\
&\quad +\,4\,g^{ij}g^{rk}g^{rr}R_{ruri}R_{ujuk} - 4\,g^{ij}g^{rk}g^{rr}R_{ruri}R_{rjuk}\\
&\quad -\,4\,g^{ij}g^{rk}g^{rr}R_{ruri}R_{rujk} + 2\,g^{ij}g^{rr}g^{rr}R_{ruri}R_{rurj}. &(4.90)
\end{aligned}
$$

Pomocí jejich kombinace

$$
H_{uu} \equiv RR_{ui} - 2R_{u\kappa u\lambda}R^{\kappa\lambda} + R_{u\kappa\lambda\alpha}R_u{}^{\kappa\lambda\alpha} - 2R_{u\kappa}R_u{}^{\kappa} - \frac{1}{4}g_{uu}L_{GB}, \tag{4.91}
$$

a využitím (4.9), (4.11) a (4.35), lze obdržet uu komponentu polních rovnic ve tvaru

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}g_{uu}g_{uu,rr} - \frac{1}{2}g^{ij}g_{ui,r}g_{uj,r}g_{uu} - \frac{1}{2}g^{ij}g_{ui}g_{uj}g_{uu,rr} + g^{ij}g_{ui}g_{uj,ur} - g^{ij}g_{ui}g_{uu,rj}\\
&\quad + g^{ij}g_{ui,u\ j} - \frac{1}{2}g^{ij}g_{uu\ ij} - \frac{1}{2}g^{ij}g_{ij,uu} - \frac{1}{2}g^{ij}g_{ui\ j}g_{uu,r} + \frac{1}{4}g^{ij}g_{ij,u}g_{uu,r}\\
&\quad + \frac{1}{2}g^{ij}g_{ui,r}g_{uu,j} - \frac{1}{2}g^{ij}g^{kl}g_{ui}g_{uk}g_{uj,r}g_{ul,r} + 2g^{ij}g^{kl}g_{uk}g_{ui,r}g_{u[j,l]}\\
&\quad + \frac{1}{2}g^{ij}g^{kl}g_{uk}g_{ul}g_{ui,r}g_{uj,r} + \frac{1}{4}g^{ij}g^{kl}g_{ik,u}g_{jl,u} + g^{ij}g^{kl}g_{ik,u}g_{u[j,l]}\\
&\quad + g^{ij}g^{kl}g_{u[i,k]}g_{u[j,l]} - \frac{1}{2}\Big(g_{uu,rr} - 2g^{ij}g_{uj}g_{ui,rr} - 2g^{ij}g_{iu,r\ j}\\
&\quad - \frac{3}{2}g^{ij}g_{uj,r}g_{ui,r} + {}^{S}R\Big)\,g_{uu} + \Lambda_0\,g_{uu} + 2k\,H_{uu}.
\end{aligned} \tag{4.92}
$$

V Einsteinově teorii je tato rovnice ***kvadratická*** v r a rozpadá se tak na tři podmínky, které dále omezují funkce a, b, c, e_i, f_i, a g_{ij} (viz uu komponenta [22]).

V EGB teorii s nulovými gyratonovými členy $g_{ui} = 0$ má dle [31] rovnice (4.92) tvar

$$
\begin{aligned}
&Q^{ij}\left(g_{uu\ ij} + g_{ij,uu} - \frac{1}{2}g_{uu,r}g_{ij,u} - \frac{1}{2}g^{kl}g_{ik,u}g_{jl,u}\right)\\
&\qquad + 2k\,g^{ij}\left(g^{km}g^{ln} - 2g^{kl}g^{mn}\right)g_{k[l,u\ i]}g_{m[n,u\ j]} = 0.
\end{aligned} \tag{4.93}
$$

Při jejím řešení je opět potřeba rozlišovat dva případy:

1. Pokud $Q_{ij} = 0$, dostáváme celkem tři podmínky
$$Q^{ij} a_{\ ij} = 0, \tag{4.94}$$
a
$$Q^{ij} \left(b_{\ ij} - a\, g_{ij,u} \right) = 0, \tag{4.95}$$
a
$$\begin{aligned} Q^{ij} & \left(c_{\ ij} + g_{ij,uu} - \frac{1}{2} b\, g_{ij,u} - \frac{1}{2} g^{kl} g_{ik,u} g_{jl,u} \right) \\ & + 2k\, g^{ij} \left(g^{km} g^{ln} - 2 g^{kl} g^{mn} \right) g_{k[l,u\ i]} g_{m[n,u\ j]} = 0. \end{aligned} \tag{4.96}$$
První rovnice je opět triviálně splněna, zatímco zbylé dvě funkce omezují profilovou funkci gravitační vlny g_{uu} prostřednictvím b a c.

2. V případě, že $Q_{ij} = 0$, dostáváme další omezení na transverzální prostor
$$g^{ij} \left(g^{km} g^{ln} - 2 g^{kl} g^{mn} \right) g_{k[l,u\ i]} g_{m[n,u\ j]} = 0. \tag{4.97}$$

Zůstává tedy otevřená otázka, jakým způsobem se tyto podmínky zobecňují pro případ $g_{ui} = 0$.

4.3 Významné podtřídy řešení

Na závěr se podíváme na dvě velmi zajímavé a velice důležité podtřídy Kundtovy třídy v EGB teorii. Nejprve se budeme věnovat *pp*-vlnám, které jsou definované pomocí kovariantně konstantního vektorového pole, a následně se přesuneme k VSI prostoročasům, jejíž transversální prostor g_{ij} má nulovou křivost, tedy $g_{ij} = \delta_{ij}$.

4.3.1 Obecné EGB pp-vlny

Pro nulovou tetrádu (2.11) je kovariantní derivace privilegovaného vektorového pole $\boldsymbol{k} = \partial_{\boldsymbol{r}}$ dána $k_{\mu;\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu,r}$. Aby bylo toto pole kovariantně konstantní, nesmí žádná metrická funkce (2.9) záviset na souřadnici r, tedy
$$g_{ui} \equiv e_i\,(x,u) \qquad\qquad g_{uu} \equiv c\,(x,u)\,. \tag{4.98}$$
To ovšem znamená, že EGB *pp*-vlny musí být nutně podtřídou metrik (4.117), pro které $G_{ij} = 0$, $g_{uu,r} = 0$, nebo metrik (4.119), kdy $G_{ij} = 0$ a $g_{ui,rr} = 0$.

V předchozí sekci jsme ukázali, že polní rovnice pro rr, ri, ru a ij komponentu jsou v případě konstantních členů g_{ui} *ekvivalentní* polním rovnicím bez gyratonových členů. Rovnice pro rr (4.15) a ri (4.20) komponentu jsou tedy triviálně splněny, zatímco ru komponenta dává podmínku (4.43).

Protože je funkce $a = 0$ triviální (viz (4.59)), dává stopa ij komponenty polních rovnic (4.56) jednoduchý vztah
$${}^{S}\!R = 4\Lambda_0. \tag{4.99}$$

Transverzální prostor tedy musí mít konstantní Ricciho skalární křivost danou přímo kosmologickou konstantou.

Po dosazení do původních rovnic dostáváme podmínku

$$ {}^{S}R_{ij} + 2k\,{}^{S}H_{ij} + \frac{1}{2}k\,{}^{S}L_{GB}\,g_{ij} = 0. \tag{4.100} $$

Obě tyto podmínky odpovídají speciálnímu případu $G_{ij} = 0$ s triviálními gyratonovými členy (4.71), (4.75).

Polní rovnice pro ui komponentu (4.83) se v kombinaci s (4.43) a (4.99) redukuje na tvar

$$ \left(G_i^j g^{kl} - 4k\,{}^{S}R^{kl}\delta_i^j - 2k\,{}^{S}R_i^{klj}\right)\left(g_{k[l,u\ \ j]} + e_{[j,l]\ \ k}\right) = 0. \tag{4.101} $$

Dostáváme tedy omezení, které svazuje funkce e_i s prostorovou metrikou g_{ij}.

Dosadíme-li veškerá výše zmíněná omezení do uu komponenty polních rovnic (4.92), obdržíme podmínku

$$ \begin{aligned} &\frac{1}{4}G^{ij}\left(-2\,c_{\ \ ij} - 2\,g_{ij,uu} + 4e_{(i,u\ \ j)} + 4\,g^{kl}e_{[i,k]}\,g_{[j,l]} + g^{kl}g_{ik,u}\,g_{jl,u} + 4g^{kl}e_{[i,(k]}\,e_{j)l,u}\right) \\ &\quad + 2k\,g^{ij}\left(g^{km}g^{ln} - 2g^{kl}g^{mn}\right)\left(g_{k[l,u\ \ i]} + e_{[i,l]\ \ k}\right)\left(g_{m[n,u\ \ j]} + e_{[j,n]\ \ m}\right) = 0, \end{aligned} \tag{4.102} $$

která určuje prostorovou závislost profilové funkce c, ve které je mimo jiné obsažena informace o amplitudě gravitační vlny.

Nyní krátce zmíníme několik zajímavých podpřípadů:

- V Einsteinově teorii, kdy $k = 0$ a $G_{ij} = g_{ij}$, jsou rovnice (4.43) a (4.99) kompatibilní právě když $\Lambda_0 = 0$ (a tím i ${}^{S}R = 0$, $R_{ij} = 0$ díky (4.100)). Toto však již ***neplatí*** v EGB teorii, kdy ***kosmologická konstanta může být libovolná***.

  Zbylé polní rovnice v tomto případě dávají podmínky

  $$ g^{jk}\left(g_{j[k,u\ \ i]} + e_{[i,k]\ \ j}\right) = 0, \tag{4.103} $$

  pro ui komponentu, a díky uu komponentě také

  $$ \begin{aligned} &\frac{1}{4}g^{ij}\left(-2\,c_{\ \ ij} - 2\,g_{ij,uu} + 4e_{(i,u\ \ j)} + 4\,g^{kl}e_{[i,k]}\,e_{[j,l]}\right. \\ &\qquad \left. + g^{kl}g_{ik,u}\,g_{jl,u} + 4g^{kl}e_{[i,(k]}\,g_{j)l,u}\right) = 0. \end{aligned} \tag{4.104} $$

- Jsou-li gyratonové členy $g_{ui} = 0$ triviální, redukují se podmínky (4.101) a (4.102) na tvar nalezený v [31], konkrétně

  $$ G_i^j g^{kl} g_{k[j,u\ \ l]} - 2k\left(2\,{}^{S}R^{kl}\delta_i^j - {}^{S}R_i^{klj}\right) g_{k[l,u\ \ j]} = 0, \tag{4.105} $$

  a

  $$ \begin{aligned} &\frac{1}{4}G^{ij}\left(-2\,c_{\ \ ij} - 2\,g_{ij,uu} + g^{kl}g_{ik,u}\,g_{jl,u}\right) \\ &+ 2k\,g^{ij}\left(g^{km}g^{ln} - 2g^{kl}g^{mn}\right) g_{k[l,u\ \ i]}\,g_{m[n,u\ \ j]} = 0. \end{aligned} \tag{4.106} $$

- V případě, že $g_{ij} = \delta_{ij}$, musí být všechny tenzory křivosti transverzálního prostoru triviální. Tato situace však pro *pp*-vlny může nastat pouze pokud je kosmologická konstanta nulová, $\Lambda_0 = 0$ (viz (4.43) a (4.99)). Obdržíme tak podtřídu VSI prostoročasů reprezentující gravitační rovinné vlny, které se šíří plochým prostoročasem.

  Pro tuto významnou podtřídu dávají ui a uu komponenty polních rovnic (4.101) a (4.102) jednoduché podmínky

$$\delta^{jk} e_{[i,k]\ \,j} = 0, \tag{4.107}$$

  a

$$\frac{1}{4}\delta^{ij}\left(-2\,c_{\ ij} + 4\,e_{(i,u\ \,j)}\right) + 2k\,\delta^{ij}\left(\delta^{km}\delta^{ln} - 2\delta^{kl}\delta^{mn}\right) e_{[i,l]\ \,k} e_{[j,n]\ \,m} = 0. \tag{4.108}$$

4.3.2 Obecné EGB VSI a CSI prostoročasy

Požadujeme-li, aby transverzální prostor g_{ij} měl nulovou křivost, musí být splněna podmínka $g_{ij} = \delta_{ij}$ a tím zaniknou všechny skalární invarianty. Pro prostorové veličiny tak platí následující vztahy:

$${}^S R_{ijkl} = 0, \qquad {}^S R_{ij} = 0, \qquad {}^S R = 0, \tag{4.109}$$

$${}^S H_{ij} = 0, \qquad {}^S L_{GB} = 0, \tag{4.110}$$

$$Q_{ijkl} = 0, \qquad G_{ij} = \delta_{ij}, \qquad G = D - 2. \tag{4.111}$$

Je tedy zřejmé, že úplná třída VSI prostoročasů v EGB teorii je podtřídou metrik (4.117), pro které $G_{ij} = 0$. Funkce g_{ui} je tedy dána (4.27), zatímco g_{uu} (4.59).

Polní rovnice pro ru komponentu (4.41) nyní dává podmínku

$$-2\Lambda_0 = \frac{1}{2}\left(2\,f^i_{\ \,i} + f^i f_i\right), \tag{4.112}$$

odkud ihned plyne, že pro gyratonové členy $g_{ui} = e_i$ nezávislé na r (tedy s $f_i = 0$, jako např. v případě EGB *pp*-vln diskutovaném výše, musí být kosmologická konstanta nutně nulová $\Lambda_0 = 0$.

Funkce a (4.59) je následně určena vztahem (4.60) ve tvaru

$$\begin{aligned} a\,(x,u) = {} & \frac{D-4}{4\,(D-2)}\left(2\,f^i_{\ \,i} + f^i f_i\right) + \frac{1}{4} f^i f_i \\ & + \frac{2k\,(D-4)}{D-2}\delta^{ij}\delta^{kl}\left(f_{[i,k]} f_{[j,l]} - f_{i\ \,[j} f_{k],\ l} - f_{i\ \,[j} f_{k]} f_l\right), \end{aligned} \tag{4.113}$$

který spolu s ij komponentou polních rovnic (4.54) danou

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left(2\,f_{(i\ \,j)} + f_i f_j\right) + \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(2\,a - f^k_{\ \,k} - f^k f_k\right) - 2k\,\left(\delta^{kl}\delta^{mn}\delta_{ij}\right. \\ & \quad \left. - \delta^{kl}\delta^m_{(i}\delta^n_{j)} - \delta^k_{(i}\delta^l_{j)} g^{mn}\right)\left(f_{[k,m]} f_{u[l,n]} - f_{k\ \,[l} f_{m]\ \,n} - f_{k\ \,[l} f_{m]} f_{un}\right) = 0, \end{aligned} \tag{4.114}$$

svazuje funkce f_i.

V klasické Einsteinově teorii (k=0) se tyto podmínky zjednoduší do tvarů

$$a\,(x,u) = \frac{D-4}{4\,(D-2)}\left(2\,f^{i}{}_{i} + f^{i}f_{i}\right) + \frac{1}{4}f^{i}f_{i} \tag{4.115}$$

a

$$2\,f_{(i\;j)} + f_{i}f_{j} + \delta_{ij}\left(2\,a - f^{k}{}_{k} - f^{k}f_{k}\right) = 0. \tag{4.116}$$

Lze tedy učinit závěr, že na rozdíl od EGB *pp*-vln, které navíc připouští i nenulovou kosmologickou konstantu, se EGB VSI prostoročasy od svého klasického protějšku v hrubých rysech příliš neliší.

Shrnutí a závěr

V této práci jsme studovali rozsáhlou Kundtovu třídu prostoročasů (která připouští nulovou kongruenci neexpandujících geodetik bez twistu a shearu generovanou $\boldsymbol{k} = \partial_r$) danou obecně metrikou (2.9). Díky čistě geometrické formulaci nezávisí její definice na volbě dimenze D ani na konkrétní teorii gravitace. Hlavní známé poznatky pro případ $D = 3$, $D = 4$ a $D > 4$ v Einsteinově teorii byly shrnuty ve druhé kapitole. Je z nich patrné, že v libovolné dimenzi D mají po formální stránce metrické funkce podobný tvar, a to konkrétně lineární závislost g_{ui} a kvadratickou závislost g_{uu} na souřadnici r, viz (4.27) a (4.59).

Následně jsme pro obecnou metriku Kundtovy třídy (2.9) spočetli příslušné tenzory křivosti (4.7), (4.9) a (4.11), pomocí nichž jsme postupně odvodili všechny vakuové polní rovnice EGB teorie pro zcela obecnou Kundtovu třídu prostoročasů, které připouští také gyratonové členy g_{ui} a kosmologickou konstantu Λ_0. Identifikovali jsme fundamentální, ryze prostorovou veličinu G_{ij} (4.22), díky které se řešení dělí na ***čtyři různé podtřídy***. Naše poznatky značně zobecňují předchozí práci [31], jež předpokládala $g_{ui} = 0$.

Hlavní výsledky, které jsou podrobněji rozebrány ve čtvrté kapitole této práce, lze shrnout takto:

1. V obecném případě, kdy $G_{ij} = 0$, má metrika tvar

   $$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j - 2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}u + 2\,(f_i\,r + e_i)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x^i + \Big(a\,r^2 + b\,r + c\Big)\,\mathrm{d}u^2, \quad (4.117)$$

   kde funkce a, b, c, e_i, f_j a g_{ij} již ***nezávisí*** na souřadnici r. Je-li stopa (4.26) veličiny G_{ij} navíc netriviální, $G = 0$, je kvadratický člen a plně určen vztahem (4.60). V opačném případě je tato závislost dána složitějšími rovnicemi (4.54) v kombinaci s podmínkou (4.70).

2. Pokud $G_{ij} = 0$, musí být $(D - 2)$-rozměrný transverzální prostor, pro který platí (4.29) a (4.32), nutně ***Einsteinův prostor***. Díky této silné podmínce lze metriku napsat ve formě

   $$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j - 2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}u + 2\,g_{ui}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x^i + g_{uu}\,\mathrm{d}u^2\,, \quad (4.118)$$

   kde g_{uu} je stále libovolná funkce všech souřadnic, zatímco funkce $g_{ui}\,(r,x,u)$ a $g_{ij}\,(x,u)$ jsou jednotlivě svázány podmínkami (4.73) a (4.74).

   Tento případ ***nemůže v Einsteinově teorii nastat***, neboť vztah (4.32) má smysl pouze pro $k = 0$ a $D > 4$.

3. Ve speciální situaci, kdy $G_{ij} = 0$ ***a zároveň*** $g_{ui,rr} = 0$, má metrika tvar

   $$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j - 2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}u + 2\,(f_i\,r + e_i)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x^i + g_{uu}\,\mathrm{d}u^2\,. \quad (4.119)$$

   Veličiny $g_{uu}\,(r,x,u)$, e_i jsou opět libovolné, ale $g_{ij}\,(x,u)$, $f_i\,(x,u)$ musí splňovat rovnice (4.77) a (4.78).

4. Nejsložitější případ nastává, pokud $G_{ij} = 0$ a $g_{ui,rr} = 0$. Metriku je možné v této situaci napsat ve zcela obecné formě

   $$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j - 2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}u + 2\,g_{ui}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x^i + g_{uu}\,\mathrm{d}u^2\,, \quad (4.120)$$

kde funkce $g_{ij}(x,u)$, $g_{ui}(r,x,u)$ a $g_{uu}(r,x,u)$ jsou svázány polními rovnicemi (4.20), (4.41), (4.54) a (4.56). Pokud je navíc stopa $G = 0$ netriviální, lze závislost funkce g_{uu} na souřadnici r plně určit přímou integrací vztahu (4.57).

Veličiny, které vystupují v metrikách (4.117)–(4.120) jsou dále omezeny podmínkami (4.83), (4.92).

Na základě odvozených polních rovnic (4.20), (4.41) a (4.53) lze učinit zajímavé pozorování: Formální záměnou $g_{ij} \to G_{ij}$, $g_{ij}g_{kl} \to G_{ij}g_{kl} - 2k\,Q_{ijkl}$ (viz (4.51)), ${}^S\!R \to {}^S\!R + k\,{}^S\!L_{GB}$, ${}^S\!R_{ij} \to {}^S\!R_{ij} + 2k\,{}^S\!H_{ij} + \frac{1}{2}k\,{}^S\!L_{GB}$ a přičtením vhodné funkce $F(g_{\mu\nu})\,H(L_{GB})$, lze do značné míry přejít od Einsteinovy teorie gravitace do EGB teorie. Tento přechod je zcela přesný pro rr, ri a ru komponentu, zatímco u ij komponenty již dochází k jistým odchylkám. Je však zřejmé, že veličinu G_{ij} lze v určitém smyslu chápat jako Gaussovo–Bonnetovo zobecnění metriky. Podobně lze také chápat výraz ${}^S\!R + k\,{}^S\!L_{GB}$ jako zobecněnou Ricciho skalární křivost, zatímco člen ${}^S\!R_{ij} + 2k\,{}^S\!H_{ij} + \frac{1}{2}k\,{}^S\!L_{GB}$ jako zobecnění prostorového Ricciho tenzoru.

V závěrečné části práce jsme diskutovali speciální případy obecných *pp*-vln a VSI prostoročasů, které mají v EGB teorii následující vlastnosti:

- Metriku úplné třídy EGB *pp*-vln lze zapsat v Brinkmannově tvaru

  $$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j - 2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}u + 2\,e_i\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x^i + c\,\mathrm{d}u^2\,, \tag{4.121}$$

  kde metrické funkce $c(x,u)$, $e_i(x,u)$ a $g_{ij}(x,u)$ jsou omezeny podmínkami (4.101), (4.102) a transverzální prostor popsaný metrikou g_{ij} musí mít navíc nutně konstantní skalární křivost ${}^S\!R = 4\Lambda_0$. Tato podmínka, poprvé objevená v [31] pro speciální případ bez gyratonů, otevírá v EGB teorii cestu zcela novým třídám řešení, neboť Einsteinova teorie vyžaduje ${}^S\!R = 4\Lambda_0 = 0$, tedy nulovou kosmologickou konstantu.

  Poznamenejme, že obecná metrika EGB *pp*-vln je speciální případ metriky (4.117) či (4.119) v závislosti na funkci G_{ij} (4.22).

- Obecnou metriku VSI prostoročasů lze napsat ve tvaru

  $$\mathrm{d}s^2 = \delta_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j - 2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}u + 2\,(f_i\,r + e_i)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x^i + \left(a\,r^2 + b\,r + c\right)\mathrm{d}u^2, \tag{4.122}$$

  kde funkce $a(x,u)$, $b(x,u)$, $c(x,u)$, $e_i(x,u)$ a $f_i(x,u)$ jsou omezeny polními rovnicemi (4.112), (4.113), (4.114), (4.83) a (4.92). Pokud jsou navíc gyratonové členy lineární v r nulové ($f_i = 0$), musí být nutně nulová i kosmologická konstanta Λ_0. Jde o speciální případ metriky (4.117).

  Pokud bychom vzali speciální podtřídu, kdy $\Lambda_0 = 0$ a žádná metrická funkce nezávisí na souřadnici r, tedy $a = b = f_i = 0$, zatímco funkce e_i a c splňují (4.107) a (4.108), obdržíme metriku

  $$\mathrm{d}s^2 = \delta_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j - 2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}u + 2\,e_i\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x^i + c\,\mathrm{d}u^2\,, \tag{4.123}$$

  která popisuje gravitační rovinné *pp*-vlny šířící se Minkowského pozadím.

  Je tedy zřejmé že se EGB VSI prostoročasy od svého klasického protějšku (2.80) příliš neliší.

Můžeme tedy závěrem konstatovat, že obecná Kundtova třída prostoročasů v EGB teorii obsahuje klasické řešení (4.117), které má stejný tvar (4.27), (4.59) jako v Einsteinově teorii, ale také tři zcela nové situace (4.118), (4.119) a (4.120), které v Einsteinově teorii ***nemohou nastat***. Svážeme-li transversální prostor s metrikou g_{ij} dostatečně silnou podmínkou, dostaneme větší libovůli při volbě funkcí g_{ui} a g_{uu} než v Einsteinově teorii gravitace.

Seznam použité literatury

[1] Bonnor, W. B. (1970). Spinning null fluid in general relativity. *International Journal of Theoretical Physics*, **3**, 257–266.

[2] Brinkmann, H. (1925). Einstein spaces which are mapped conformally on each other. *Mathematische Annalen*, **94**, 119–145.

[3] Carter, B. (1968). Hamilton-Jacobi and Schrodinger Separable Solutions of Einstein's Equations. *Communications in Mathematical Physics*, **10**, 280–310.

[4] Coley, A., Milson, R., Pelavas, N., Pravda, V., Pravdová, A. a Zalaletdinov, R. (2003). Generalizations of *pp*-wave spacetimes in higher dimensions. *Physical Review D*, **67**, 104020.

[5] Coley, A., Milson, R., Pravda, V. a Pravdová, A. (2004). Vanishing scalar invariant spacetimes in higher dimensions. *Classical and Quantum Gravity*, **21**, 5519–5542.

[6] Díaz, A. G. a Plebański, J. F. (1981). All nontwisting N's with cosmological constant. *Journal of Mathematical Physics*, **22**, 2655–2658.

[7] Edgar, S. B. a Ludwig, G. (1997). All conformally flat pure radiation metrics. *Classical and Quantum Gravity*, **14**, L65–L68.

[8] Edgar, S. B. a Ludwig, G. (1997). Integration in the GHP formalism II: An operator approach for spacetimes with Killing vectors, with applications to twisting type N Spaces. *General Relativity and Gravitation*, **29**, 19–59.

[9] Frolov, V. P. a Fursaev, D. V. (2005). Gravitational field of a spinning radiation beam pulse in higher dimensions. *Physical Review D*, **71**, 104034.

[10] Griffiths, J. B., Docherty, P. a Podolský, J. (2003). Generalized Kundt waves and their physical interpretation. *Classical and Quantum Gravity*, **21**, 207–222.

[11] Griffiths, J. B. a Podolský, J. (2009). *Exact Space-Times in Einstein's General relativity*. Cambridge University Press, Cambridge. ISBN 978-0-521-88927-8.

[12] Hruska, O. a Podolsky, J. (2017). Kundt spacetimes in the Gauss-Bonnet Gravity. *WDS'16 Proceedings of Contributed Papers*, pages 66–71.

[13] Kinnersley, W. (1969). Type D vacuum metrics. *Journal of Mathematical Physics*, **10**, 1195–1203.

[14] Kundt, W. (1961). The plane-fronted gravitational waves. *Zeitschrift für Physik*, **163**, 77–86.

[15] Kundt, W. (1962). Exact solutions of the field equations: twist-free pure radiation fields. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, **270**, 328–334.

[16] Lovelock, D. (1971). The Einstein tensor and its generalizations. *Journal of Mathematical Physics*, **12**, 498–501.

[17] Ortaggio, M., Pravda, V. a Pravdová, A. (2012). Algebraic classification of higher dimensional spacetimes based on null alignment. *Classical and Quantum Gravity*, **30**, 013001.

[18] Ozsváth, I., Robinson, I. a Rózga, K. (1985). Plane-fronted gravitational and electromagnetic waves in spaces with cosmological constant. *Journal of Mathematical Physics*, **26**, 1755–1761.

[19] Plebański, J. F. (1975). A class of solutions of Einstein–Maxwell equations. *Annals of Physics*, **90**, 196–255.

[20] Plebański, J. a Demiański, M. (1976). Rotating, charged, and uniformly accelerating mass in general relativity. *Annals of Physics*, **98**, 98–127.

[21] Podolský, J. a Papajčík, M. (2022). All solutions of Einstein–Maxwell equations with a cosmological constant in $2+1$ dimensions. *Physical Review D*, **105**, 064004.

[22] Podolský, J. a Žofka, M. (2009). General Kundt spacetimes in higher dimensions. *Classical and Quantum Gravity*, **26**, 105008.

[23] Podolský, J., Švarc, R. a Maeda, H. (2018). All solutions of Einstein's equations in $2+1$ dimensions: Λ-vacuum, pure radiation, or gyratons. *Classical and Quantum Gravity*, **36**, 015009.

[24] Podolský, J. a Ortaggio, M. (2003). Explicit Kundt type II and N solutions as gravitational waves in various type D and O universes. *Classical and Quantum Gravity*, **20**, 1685–1701.

[25] Podolský, J. a Švarc, R. (2014). Algebraic structure of Robinson–Trautman and Kundt geometries in arbitrary dimension. *Classical and Quantum Gravity*, **32**, 015001.

[26] Podolský, J., Švarc, R., Pravda, V. a Pravdová, A. (2020). Black holes and other exact spherical solutions in quadratic gravity. *Physical Review D*, **101**, 024027.

[27] Pravda, V., Pravdová, A. a Ortaggio, M. (2007). Type D Einstein spacetimes in higher dimensions. *Classical and Quantum Gravity*, **24**, 4407–4428.

[28] Siklos, S. (1985). Galaxies, axisymmetric systems and relativity. In *Lobatchevski plane gravitational waves*, pages 247–274. Cambridge University Press Cambridge.

[29] Stephani, H., Kramer, D., MacCallum, M., Hoenselaers, C. a Herlt, E. (2003). *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. Cambridge University Press, Cambridge. ISBN 978-0521467025.

[30] Wils, P. (1989). Homogeneous and conformally Ricci flat pure radiation fields. *Classical and Quantum Gravity*, **6**, 1243–1251.

[31] Švarc, R., Podolský, J. a Hruška, O. (2020). Kundt spacetimes in the Einstein–Gauss–Bonnet theory. *Physical Review D*, **102**, 084012.