

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Emma Kovalčíková

**Komplexné náhodné veličiny**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Rada by som sa na tomto mieste poďakovala vedúcej mojej bakalárskej práce, RNDr. Jitke Zichovej, Dr., za odborné rady a usmernenie pri písaní, pripomienky a za čas, ktorý mi venovala na konzultáciách.

Názov práce: Komplexné náhodné veličiny

Autor: Emma Kovalčíková

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci bakalárskej práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Táto bakalárska práca sa zaoberá komplexnými náhodnými veličinami a komplexnými náhodnými vektormi. Zavádzame komplexné normálne rozdelenie odvodením z mnohorozmerného normálneho rozdelenia a popisujeme maximálne vierohodné odhady parametrov rozdelenia vektora s komplexným normálnym rozdelením. V závere teoretickej časti práce popisujeme test nulovosti strednej hodnoty komplexného normálneho rozdelenia. Praktickú časť práce tvorí simulačná štúdia, v ktorej generujeme realizácie náhodných vektorov s komplexným normálnym rozdelením. Skúmame správanie sa odhadov parametrov komplexného normálneho rozdelenia a vlastnosti testu nulovosti strednej hodnoty pre rôzne rozsahy výberov a rôzne počty výberov. Empirické rozdelenie testových štatistík odvodených v teoretickej časti práce nakoniec porovnávame s príslušným teoretickým rozdelením.

Kľúčové slová: komplexné náhodné vektory, variančná matica, Gaussovský náhodný vektor, komplexné normálne rozdelenie.

Title: Complex random variables

Author: Emma Kovalčíková

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Jitka Zichová, Dr., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This bachelor thesis deals with complex random variables and complex random vectors. We introduce the complex normal distribution by deriving it from the multivariate normal distribution and we describe maximum likelihood estimators of mean and variance matrix of a vector with a complex normal distribution. We conclude the theoretical part by describing a test for the nullity of the mean of the complex normal distribution. The practical part of the thesis consists of a simulation study in which we generate realizations of random vectors with complex normal distribution. We investigate the behavior of the parameter estimates of the complex normal distribution and the properties of the test of nullity of the mean for different sample sizes and different numbers of samples. Finally, we compare the empirical distribution of the test statistics derived in the theoretical part of the paper with the corresponding theoretical distribution.

Keywords: complex random vectors, variance matrix, Gaussian random vector, complex normal distribution.

# Obsah

Úvod	2
<b>1 Komplexné matice</b>	<b>3</b>
1.1 Značenie . . . . .	3
1.2 Inverz komplexnej matice . . . . .	4
1.3 Reprezentácia komplexnej matice . . . . .	5
1.4 Hermitovské matice . . . . .	6
1.5 Variančná matica . . . . .	7
1.6 Rozšírená variančná matica . . . . .	13
<b>2 Komplexné normálne rozdelenie</b>	<b>15</b>
2.1 Základná teória . . . . .	15
2.2 Hustota komplexného normálneho rozdelenia . . . . .	17
2.3 Odhad strednej hodnoty a variančnej matice . . . . .	23
2.4 Test nulovosti strednej hodnoty . . . . .	26
<b>3 Simulačná štúdia</b>	<b>28</b>
3.1 Overenie rýchlosti konverencie odhadov . . . . .	29
3.2 Výberové smerodajné odchýlky odhadov . . . . .	32
3.3 Empirická hladina testu . . . . .	35
3.4 Empirická sila testu . . . . .	36
3.5 Histogramy F štatistík . . . . .	39
Záver	45
Zoznam použitej literatúry	46
Zoznam obrázkov	47
Zoznam tabuliek	48
<b>A Prílohy</b>	<b>49</b>
A.1 Prvá príloha . . . . .	49
A.2 Druhá príloha . . . . .	49

# Úvod

Cieľom práce je zaviesť komplexnú náhodnú veličinu, komplexný náhodný vektor, odvodiť komplexné normálne rozdelenie, maximálne vierohodné odhady parametrov tohto rozdelenia a následne v simulačnej štúdiu sledovať správanie sa týchto odhadov. Text práce je členený do troch kapitol, prvá a druhá kapitola sú teoretické, v tretej popisujeme simulačnú štúdiu a uvádzame výsledky simulácií.

Prvá kapitola je venovaná komplexným maticiam a podmienkam, za platnosti ktorých môže komplexná matica byť variančnou maticou komplexného náhodného vektora. Vlastnosti takejto matice ukážeme pomocou reprezentácie komplexnej matice dvojitou reálnou maticou. Definujeme strednú hodnotu komplexného náhodného vektora a následne jeho variančnú maticu. V závere prvej kapitoly zavedieme rozšírenú variančnú maticu, ktorú neskôr využijeme pri odvodení hustoty komplexného normálneho rozdelenia.

V druhej kapitole odvodíme komplexné normálne rozdelenie z mnohorozmerného normálneho rozdelenia a následne špeciálny prípad. Definujeme gaussovské komplexné náhodné veličiny a vektory. Následne uvedieme konkrétnu parametrizáciu variančnej matice vektora reálnych a imaginárnych častí gaussovského náhodného vektora a ukážeme hustotu komplexného náhodného vektora pri danej parametrizácii. Odvodíme maximálne vierohodné odhady parametrov komplexného normálneho rozdelenia a nakoniec popíšeme test nulovosti strednej hodnoty.

Teóriu zavedenú v prvej a druhej kapitole využijeme v praktickej časti tejto bakalárskej práce, ktorej je venovaná tretia a teda posledná kapitola. Generujeme výber vektorov reálnych a imaginárnych častí, z ktorých následne zostrojíme výber gaussovských náhodných vektorov. Pre rôzne počty výberov a rôzne rozsahy výberov spočítame maximálne vierohodné odhady parametrov komplexného normálneho rozdelenia a budeme sledovať rýchlosť konverencie k zvoleným teoretickým hodnotám parametrov. Ďalej spočítame empirickú hladinu a empirickú silu testu nulovosti strednej hodnoty, ktorý sme popísali v závere druhej kapitoly. Nakoniec porovnáme empirické rozdelenie odvodennej testovej štatistiky s jej teoretickým rozdelením vykreslením histogramov testových štatistík spolu s hustotou príslušného teoretického rozdelenia.

# 1. Komplexné matice

V úvodnej kapitole práce sa budeme zaoberať komplexnými maticami a ich reprezentáciou. Odvodíme podmienky, za ktorých komplexná matica môže byť variančnou maticou komplexného náhodného vektora. Pre potreby ďalších kapitol sa budeme taktiež venovať inverzii komplexnej matice. Uvedieme, za akých podmienok existuje a jej základné vlastnosti. Definície a tvrdenia v tejto kapitole budeme formulovať z práce Halliwell (2015).

## 1.1 Značenie

V práci budeme používať nasledujúce značenie:

- $i$ ... imaginárna jednotka
- $I_n$ ... jednotková matica rozmerov  $n \times n$
- $0_{n \times n}$ ... nulová matica rozmerov  $n \times n$
- $\mathbf{0}$ ... stĺpcový nulový vektor
- $\bar{Z}$ ... komplexne združená matica k matici  $Z$
- $Z^*$ ... hermitovsky združená matica k matici  $Z$
- $Z^\top$ ... transponovaná matica
- $\mathbb{R}^n$ ...  $n$ -rozmerný reálny priestor
- $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ... stĺpcový vektor
- $\mathbb{R}^{n \times n}$ ... priestor reálnych matíc rozmerov  $n \times n$
- $[\Gamma]_{jk}$ ... prvok matice  $\Gamma$  na pozícii  $(j,k)$
- $|\Gamma|$ ... determinant matice  $\Gamma$
- $tr(\Gamma)$ ... stopa matice  $\Gamma$
- $\|\mathbf{c}\|$ ... eukleidovská norma vektora  $\mathbf{c}$
- $Z$ ... náhodná veličina
- $\mathbf{Z}$ ... náhodný vektor
- $E \mathbf{Z}$ ... stredná hodnota náhodného vektora  $\mathbf{Z}$
- $\text{Var}(\mathbf{Z})$ ... variančná matica náhodného vektora  $\mathbf{Z}$
- $\text{cov}(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)$ ... kovariancia náhodných vektorov  $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2$ .

## 1.2 Inverz komplexnej matice

**Tvrdenie 1.1.** *Nech  $Z = X + iY$  je komplexná štvorcová matica rozmerov  $n \times n$ . Inverzná matica  $Z^{-1}$  k matici  $Z$  existuje práve vtedy, keď je reálna štvorcová matica*

$$\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

*regulárna. V takomto prípade  $Z^{-1} = A + iB$  a*

$$\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

*Dôkaz.* Uvažujme komplexnú štvorcovú maticu  $W = A + iB$  ako inverznú maticu k matici  $Z$ . Overíme platnosť (1.2) pre regulárnu maticu (1.1).

Musí platiť  $ZW = WZ = I_n$ . Potom

$$ZW = I_n = (X + iY)(A + iB).$$

Uvedený výraz roznásobíme a upravíme

$$I_n = XA + iXB - YB + iYA = (XA - YB) + i(XB + YA).$$

Vidíme, že musí platiť nasledovné

$$\begin{aligned} XA - YB &= I_n, \\ XB + YA &= 0_{n \times n}. \end{aligned}$$

Maticovým zápisom získavame

$$\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Kedže  $XB + YA = 0_{n \times n}$  je ekvivalentné  $-XB - YA = 0_{n \times n}$ , máme

$$\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_n \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Spojením (1.3), (1.4) dostávame

$$\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}.$$

Analogicky z predpokladu  $WZ = I_n$  plynie

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} = I_{2n}$$

a dokopy dostávame (1.2).

□

**Tvrdenie 1.2.** *Nech  $Z = X + iY$  je regulárna komplexná matica. Potom  $\bar{Z} = X - iY$  je regulárna a  $\bar{Z}^{-1} = \overline{Z^{-1}}$ .*

*Dôkaz.* Predpokladajme, že  $Z$  je regulárna komplexná matica,  $\bar{Z} = X - iY$ . Využijme značenie z tvrdenia 1.1  $Z^{-1} = W = A + iB$  a počítajme

$$\begin{aligned}\bar{Z} \bar{Z}^{-1} &= (X - iY)(A - iB) = XA - YB - i(XB + YA) \\ &= \overline{XA - YB + i(XB + YA)} = \overline{(X + iY)(A + iB)} \\ &= \overline{ZZ^{-1}} = \overline{I_n} = I_n.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Analogicky počítajme

$$\bar{Z}^{-1} \bar{Z} = (A - iB)(X - iY) = I_n$$

rovnakými úpravami ako v (1.5). Odtiaľ plynie, že  $\bar{Z}$  je regulárna a  $\bar{Z}^{-1} = \overline{Z^{-1}}$ .  $\square$

### 1.3 Reprezentácia komplexnej matice

V tejto podkapitole zavedieme reprezentáciu komplexnej matice motivovanou tvrdením 1.1. V ďalšom texte ukážeme vlastnosti variančnej matice pomocou jej reprezentácie.

**Definícia 1.1.** *Maticu tvaru*

$$\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix},$$

*kde  $X$  a  $Y$  sú reálne matice rovnakých rozmerov  $n \times m$ , nazveme dvojitou reálnou maticou.*

**Poznámka 1.1.** *Komplexnú maticu  $Z = X + iY$  rozmerov  $n \times m$  je možné podľa prác Halliwell (2015) a Goodman (1963) reprezentovať pomocou dvojitej reálnej matice*

$$\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}.$$

*Pre  $n = m$  dostávame maticu (1.1) z tvrdenia 1.1.*

V nasledujúcom tvrdení uvedieme vlastnosti reprezentácie komplexnej matice pomocou dvojitej reálnej matice.

**Tvrdenie 1.3.**

(a) *Nech  $Z_1 = X_1 + iY_1$ ,  $Z_2 = X_2 + iY_2$  sú komplexné matice rovnakých rozmerov  $n \times m$ . Potom súčet  $Z_1 + Z_2$  je možné reprezentovať pomocou súčtu dvojítých reálnych matíc*

$$\begin{pmatrix} X_1 & -Y_1 \\ Y_1 & X_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_2 & -Y_2 \\ Y_2 & X_2 \end{pmatrix}.$$

(b) Nech  $Z_1 = X_1 + iY_1$  je komplexná matica rozmerov  $n \times p$ ,  $Z_2 = X_2 + iY_2$  je komplexná matica rozmerov  $p \times m$ . Potom súčin  $Z_1 Z_2$  je možné reprezentovať súčinom dvojitých reálnych matíc

$$\begin{pmatrix} X_1 & -Y_1 \\ Y_1 & X_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 & -Y_2 \\ Y_2 & X_2 \end{pmatrix}.$$

*Dôkaz.*

(a) Počítajme

$$Z_1 + Z_2 = X_1 + iY_1 + X_2 + iY_2 = (X_1 + X_2) + i(Y_1 + Y_2).$$

Podľa poznámky 1.1 vieme tento súčet reprezentovať pomocou dvojitej reálnej matice. Dvojitá reálna matica reprezentujúca  $Z_1 + Z_2$  je

$$\begin{pmatrix} X_1 + X_2 & -Y_1 - Y_2 \\ Y_1 + Y_2 & X_1 + X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & -Y_1 \\ Y_1 & X_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_2 & -Y_2 \\ Y_2 & X_2 \end{pmatrix}.$$

(b) Druhý vzťah dokážeme analogicky. Počítajme

$$Z_1 Z_2 = (X_1 + iY_1)(X_2 + iY_2) = (X_1 X_2 - Y_1 Y_2) + i(X_1 Y_2 + Y_1 X_2).$$

Takúto maticu vieme reprezentovať pomocou dvojitej reálnej matice

$$\begin{pmatrix} X_1 X_2 - Y_1 Y_2 & -X_1 Y_2 - Y_1 X_2 \\ X_1 Y_2 + Y_1 X_2 & X_1 X_2 - Y_1 Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & -Y_1 \\ Y_1 & X_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 & -Y_2 \\ Y_2 & X_2 \end{pmatrix}.$$

□

## 1.4 Hermitovské matice

V ďalšom texte budeme využívať vlastnosti takzvaných hermitovských matíc. Zavedieme ich definíciu tak, ako je to popísané v práci Halliwell (2015, str. 9 - 10) a uvedieme niektoré ich vlastnosti.

**Definícia 1.2.** Nech  $Z$  je komplexná matica. Maticu  $Z^* = \overline{Z}^\top$  nazveme hermitovsky združenou maticou k matici  $Z$ .

**Definícia 1.3.** (a) Komplexnú maticu  $Z$  nazveme hermitovskou, ak  $Z^* = Z$ .

(b) Komplexnú štvorcovú maticu  $Z$  nazveme unitárnou, ak  $Z^* = Z^{-1}$ .

**Poznámka 1.2.** Zjavne platí

$$\overline{Z}^\top = \overline{(X + iY)}^\top = \overline{X}^\top + i\overline{Y}^\top = X^\top - iY^\top = (X - iY)^\top = \overline{(X + iY)}^\top = (\overline{Z})^\top.$$

**Poznámka 1.3.** (a) Pre komplexný stĺpcový vektor  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$  platí

$$\begin{aligned} (\mathbf{z}\mathbf{z}^*)^* &= ((\mathbf{x} + i\mathbf{y})(\mathbf{x} - i\mathbf{y})^\top)^* = \overline{((\mathbf{x} + i\mathbf{y})(\mathbf{x} - i\mathbf{y})^\top)^\top} \\ &= \overline{(\mathbf{x} - i\mathbf{y})(\mathbf{x} + i\mathbf{y})^\top} = (\mathbf{x} - i\mathbf{y})(\mathbf{x} + i\mathbf{y})^\top \\ &= (\mathbf{x} + i\mathbf{y})(\mathbf{x} + i\mathbf{y})^* = \mathbf{z}\mathbf{z}^*. \end{aligned}$$

(b) Pre komplexné stĺpcové vektory  $\mathbf{c}, \mathbf{z}$  platí

$$\begin{aligned} (\mathbf{z}^*\mathbf{c})^* &= ((\mathbf{x} + i\mathbf{y})^*(\mathbf{a} + i\mathbf{b}))^* = \overline{((\mathbf{x} + i\mathbf{y})^*(\mathbf{a} + i\mathbf{b}))^\top} \\ &= \overline{((\mathbf{x} - i\mathbf{y})^\top(\mathbf{a} + i\mathbf{b}))^\top} = \overline{(\mathbf{a} + i\mathbf{b})^\top(\mathbf{x} - i\mathbf{y})} \\ &= (\mathbf{a} - i\mathbf{b})^\top(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{a} + i\mathbf{b})^\top}(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) = \mathbf{c}^*\mathbf{z}. \end{aligned}$$

(c) Pre komplexnú štvorcovú maticu  $\mathbf{Z}$  a komplexný stĺpcový vektor  $\mathbf{c}$  platí

$$(\mathbf{Z}\mathbf{c})^* = \overline{(\mathbf{Z}\mathbf{c})^\top} = \overline{\mathbf{c}^\top\mathbf{Z}^\top} = \mathbf{c}^*\mathbf{Z}^*.$$

Pre hermitovské matice z definície 1.3 uvedieme lemmy z článku Giri (1965), ktoré následne využijeme v dôkazoch tvrdení v ďalšej kapitole.

**Lemma 1.1** (Giri (1965)). *Nech  $\mathbf{Z}$  je hermitovská matica rozmerov  $n \times n$ . Potom existuje unitárna matica  $\mathbf{U}$  rozmerov  $n \times n$  taká, že*

$$\mathbf{U}^*\mathbf{Z}\mathbf{U} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

kde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sú vlastné čísla matice  $\mathbf{Z}$ .

**Lemma 1.2** (Giri (1965)). *Každú hermitovskú pozitívne (semi)definitnú maticu  $\mathbf{Z}$  dokážeme jednoznačne vyjadriť ako  $\mathbf{Z} = \mathbf{B}\mathbf{B}^*$ , kde  $\mathbf{B}$  je hermitovská pozitívne (semi)definitná matica.*

Dôkazy sú uvedené v knihe MacDuffee (1946).

## 1.5 Variančná matica

Pripomeňme si vlastnosti variančnej matice reálneho náhodného vektora  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ . Označme  $\mathbf{W}$  variančnú maticu reálneho náhodného vektora  $\mathbf{X}$ .

$$\mathbf{W} = \text{Var}(\mathbf{X}) = \mathbf{E}[(\mathbf{X} - \mathbf{E}\mathbf{X})(\mathbf{X} - \mathbf{E}\mathbf{X})^\top]. \quad (1.6)$$

Je symetrická a pozitívne semidefinitná, to jest  $\mathbf{c}^\top\mathbf{W}\mathbf{c} \geq 0$  pre všetky vektory  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ . Ak má vektor  $\mathbf{X}$  napríklad mnohorozmerné normálne rozdelenie, potom je príslušná variančná matica regulárna a teda pozitívne definitná.

**Definícia 1.4.** *Komplexná štvorcová matica  $\Gamma$  je pozitívne semidefinitná, keď pre ľubovoľný komplexný stĺpcový vektor  $\mathbf{c}$  platí  $\mathbf{c}^*\Gamma\mathbf{c} \geq 0$ . Pri  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$  a ostrej nerovnosti je  $\Gamma$  pozitívne definitná.*

Variančnú maticu komplexného náhodného vektora zavedieme s využitím reprezentácie komplexnej štvorcovej matice  $\Gamma = X + iY$  pomocou dvojitej reálnej matice (1.1). Predpokladajme, že (1.1) je variančnou maticou s reálnymi hodnotami, musí byť teda symetrická a pozitívne semidefinitná.

**Poznámka 1.4.** *Matica*

$$\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}$$

je symetrická práve vtedy, keď

$$\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} X^\top & Y^\top \\ -Y^\top & X^\top \end{pmatrix}.$$

Odtiaľ vyplýva  $X = X^\top$ ,  $Y = -Y^\top$ . Potom zjavne  $Y$  má na hlavnej diagonále 0 a komplexná matica  $X + iY$  má na hlavnej diagonále reálne čísla.

**Poznámka 1.5.** Nech  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  sú reálne vektory a  $Y$  je matica rozmerov  $n \times n$  z poznámky 1.4. Potom

$$\mathbf{a}^\top Y \mathbf{b} = (\mathbf{a}^\top Y \mathbf{b})^\top = \mathbf{b}^\top Y^\top \mathbf{a} = \mathbf{b}^\top (-Y) \mathbf{a} = -\mathbf{b}^\top Y \mathbf{a}.$$

Zvolíme  $\mathbf{b} = \mathbf{a}$  a využijeme práve dokázaný vzťah.

Platí

$$\mathbf{a}^\top Y \mathbf{a} = (\mathbf{a}^\top Y \mathbf{a} + \mathbf{a}^\top Y \mathbf{a})/2 = (\mathbf{a}^\top Y \mathbf{a} - \mathbf{a}^\top Y \mathbf{a})/2 = 0.$$

**Tvrdenie 1.4.** Nech  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  sú reálne vektory,  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sú reálne matice. Potom

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{a} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{a} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

je pozitívne semidefinitná práve vtedy, keď

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (1.8)$$

a pozitívne definitná práve vtedy, keď pre  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} > 0.$$

*Dôkaz.* Matica (1.7) je podľa práce Halliwell (2015, str. 9) rovná

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

čo je matica  $2 \times 2$ , ktorú pre

$$m = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

vieme vyjadriť v tvare

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}.$$

Nech  $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Potom  $\mathbf{c}^\top M \mathbf{c} = (c_1^2 + c_2^2)m \geq 0$  platí práve vtedy, keď  $m \geq 0$ . Odtiaľ vyplýva tvrdenie. □

V definícii 1.1 položíme  $m = 1$  a podľa poznámky 1.1 máme reprezentáciu komplexného vektora  $\mathbf{a} + i\mathbf{b}$ , kde  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ , pomocou dvojitej reálnej matice

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{a} \end{pmatrix}.$$

**Tvrdenie 1.5.** *Dvojité reálna matica*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{a} \end{pmatrix}^\top$$

reprezentuje komplexný vektor  $(\mathbf{a} + i\mathbf{b})^*$  pre  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ .

*Dôkaz.* Zo zavedenia reprezentácie komplexného náhodného vektora pomocou dvojitej reálnej matice vidíme, že matica

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{a} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^\top & \mathbf{b}^\top \\ -\mathbf{b}^\top & \mathbf{a}^\top \end{pmatrix}$$

reprezentuje komplexný náhodný vektor  $\mathbf{a}^\top - i\mathbf{b}^\top$ . Pre tento vektor podľa poznámky 1.2 platí

$$\mathbf{a}^\top - i\mathbf{b}^\top = (\mathbf{a} - i\mathbf{b})^\top = \overline{(\mathbf{a} + i\mathbf{b})}^\top = \overline{(\mathbf{a} + i\mathbf{b})}^\top = (\mathbf{a} + i\mathbf{b})^*.$$

□

Z poznámky 1.1, tvrdenia 1.5 a tvrdenia 1.3 plynie nasledujúci dôsledok.

**Dôsledok 1.1.** *Dvojité reálna kvadratická forma*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{a} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{a} \end{pmatrix}$$

reprezentuje komplexnú kvadratickú formu

$$(\mathbf{a} + i\mathbf{b})^*(X + iY)(\mathbf{a} + i\mathbf{b}). \tag{1.9}$$

**Tvrdenie 1.6.** *Dvojité reálna matica*

$$\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}$$

je symetrická práve vtedy, keď je komplexná matica  $\Gamma = X + iY$  hermitovská.

*Dôkaz.* Z definícií 1.2, 1.3 a poznámky 1.2 máme pre hermitovskú maticu  $\Gamma$

$$\Gamma^* = (X + iY)^* = (X - iY)^\top = X^\top - iY^\top = X - i(-Y) = X + iY = \Gamma.$$

Štvrtá rovnosť platí podľa poznámky 1.4 práve vtedy, keď je dvojité reálna matica (1.1) reprezentujúca  $\Gamma$  symetrická. □

**Tvrdenie 1.7.** *Dvojitá reálna symetrická matica*

$$\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}$$

je pozitívne (semi)definitná práve vtedy, keď je komplexná matica  $\Gamma = X + iY$  rozmerov  $n \times n$  pozitívne (semi)definitná.

*Dôkaz.* Roznásobením a postupnými úpravami komplexnej kvadratickej formy (1.9) dostávame

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + i\mathbf{b})^*(X + iY)(\mathbf{a} + i\mathbf{b}) &= (\mathbf{a}^\top - i\mathbf{b}^\top)(X + iY)(\mathbf{a} + i\mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a}^\top X \mathbf{a} + i\mathbf{a}^\top Y \mathbf{a} - i\mathbf{b}^\top X \mathbf{a} \\ &\quad + \mathbf{b}^\top Y \mathbf{a} + i\mathbf{a}^\top X \mathbf{b} - \mathbf{a}^\top Y \mathbf{b} + \mathbf{b}^\top X \mathbf{b} + i\mathbf{b}^\top Y \mathbf{b} \\ &= \mathbf{a}^\top X \mathbf{a} + \mathbf{b}^\top Y \mathbf{a} - \mathbf{a}^\top Y \mathbf{b} + \mathbf{b}^\top X \mathbf{b} \\ &\quad + i(\mathbf{a}^\top Y \mathbf{a} - \mathbf{b}^\top X \mathbf{a} + \mathbf{a}^\top X \mathbf{b} + \mathbf{b}^\top Y \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Ak je matica (1.1) reprezentujúca  $\Gamma = X + iY$  symetrická, máme z poznámky 1.4  $X = X^\top$  a z poznámky 1.5  $\mathbf{a}^\top Y \mathbf{a} = \mathbf{b}^\top Y \mathbf{b} = 0$ . Teda

$$\mathbf{a}^\top X \mathbf{b} = (\mathbf{a}^\top X \mathbf{b})^\top = \mathbf{b}^\top X^\top \mathbf{a} = \mathbf{b}^\top X \mathbf{a}.$$

Odtiaľ dostávame, že imaginárna časť komplexnej kvadratickej formy (1.9) je rovná 0. Pre reálnu časť komplexnej kvadratickej formy (1.9) platí

$$\mathbf{a}^\top X \mathbf{a} + \mathbf{b}^\top Y \mathbf{a} - \mathbf{a}^\top Y \mathbf{b} + \mathbf{b}^\top X \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix},$$

čo je nezáporné práve vtedy, keď je matica (1.1) pozitívne semidefinitná. To znamená  $(\mathbf{a} + i\mathbf{b})^*(X + iY)(\mathbf{a} + i\mathbf{b}) \geq 0$  a teda podľa definície 1.4 pozitívnu semidefinitnosť komplexnej matice  $\Gamma = X + iY$ . Analogicky by sme vzťah ukázali pre pozitívnu definitnosť. □

**Poznámka 1.6.** *Podľa tvrdenia 1.4 a tvrdenia 1.7 je pozitívna (semi)definitnosť komplexnej matice  $\Gamma = X + iY$  ekvivalentná pozitívnej (semi)definitnosti dvojitej reálnej kvadratickej formy (1.7), ktorá podľa dôsledku 1.1 reprezentuje komplexnú kvadratickú formu (1.9).*

Uvažujme komplexný náhodný vektor

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n.$$

Označme

$$\Gamma = \text{Var}(\mathbf{Z})$$

a nech  $\Gamma = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$ .

**Poznámka 1.7.** Hermitovská pozitívne semidefinitná matica  $\Gamma = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$  je regulárna práve vtedy, keď je pozitívne definitná. Podľa poznámky 1.4 sú diagonálne prvky  $\Gamma$  reálne. Navyše, ak je  $\Gamma$  pozitívne semidefinitná, sú nezáporné. Ak je  $\Gamma$  pozitívne definitná, sú kladné a vlastné čísla matice  $\Gamma$  sú tiež kladné.

**Tvrdenie 1.8.** Nech  $\Gamma = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$  je hermitovská matica s prvkami  $\gamma_{kj}$ . Potom  $\gamma_{kj} = \overline{\gamma_{jk}}$  pre všetky dvojice  $(j,k)$ .

*Dôkaz.* Vzhľadom k tomu, že je  $\Gamma$  hermitovská, môžeme písať

$$\gamma_{kj} = [\Gamma]_{kj} = [\Gamma^*]_{kj} = [\overline{\Gamma^T}]_{kj} = [\overline{\Gamma}]_{jk} = \overline{[\Gamma]_{jk}} = \overline{\gamma_{jk}}.$$

□

**Dôsledok 1.2.** Položme  $\Gamma = \text{Var}(\mathbf{Z})$ .  $\Gamma$  je variančnou maticou komplexného náhodného vektora  $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ . Prvok  $\gamma_{kj}$  matice  $\Gamma$  predstavuje kovarianciu  $k$ -tej a  $j$ -tej zložky vektora  $\mathbf{Z}$  a

$$\text{cov}(Z_k, Z_j) = \overline{\text{cov}(Z_j, Z_k)}.$$

Pomocou lineariry strednej hodnoty definujeme strednú hodnotu komplexného náhodného vektora.

**Definícia 1.5.** Stredná hodnota komplexného náhodného vektora  $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ , je  $E\mathbf{Z} = E\mathbf{X} + iE\mathbf{Y}$ .

Teraz dokážeme správne zadefinovať variančnú maticu komplexného náhodného vektora a uviesť jej vlastnosti.

**Definícia 1.6.** Nech  $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$  je komplexný náhodný vektor,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ . Variančnú maticu vektora  $\mathbf{Z}$  definujeme predpisom

$$\Gamma = \text{Var}(\mathbf{Z}) = E[(\mathbf{Z} - E\mathbf{Z})(\mathbf{Z} - E\mathbf{Z})^*].$$

**Definícia 1.7.** Nech  $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2$  sú komplexné náhodné vektory. Ich kovarianciu definujeme ako

$$\text{cov}(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) = E[(\mathbf{Z}_1 - E\mathbf{Z}_1)(\mathbf{Z}_2 - E\mathbf{Z}_2)^*].$$

**Poznámka 1.8.** Vidíme, že variančnú maticu komplexného náhodného vektora  $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$  je možné definovať analogicky ako v prípade reálneho náhodného vektora, pričom transpozíciu nahradíme hermitovským združením podľa definície 1.2. Táto analógia sa uplatňuje aj v definícii 1.4.

Overíme, že takto definovaná variančná matica je hermitovská a pozitívne semidefinitná.

**Tvrdenie 1.9.** (a) Nech  $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$  je komplexný náhodný vektor,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ . Matica  $\Gamma = \text{Var}(\mathbf{Z})$  z definície 1.6 je hermitovská a pozitívne semidefinitná.

(b) Ak je matica  $\Gamma = \text{Var}(\mathbf{Z})$  hermitovská a pozitívne definitná, potom  $\Gamma^{-1}$  je taktiež hermitovská a pozitívne definitná.

*Dôkaz.*

(a) Ukážeme, že  $\Gamma$  je hermitovská. Píšeme

$$\begin{aligned}\Gamma^* &= \{E[(\mathbf{Z} - E\mathbf{Z})(\mathbf{Z} - E\mathbf{Z})^*]\}^* = E\{[(\mathbf{Z} - E\mathbf{Z})(\mathbf{Z} - E\mathbf{Z})^*]^*\} \\ &= E[(\mathbf{Z} - E\mathbf{Z})(\mathbf{Z} - E\mathbf{Z})^*] = \Gamma\end{aligned}$$

vzhľadom k poznámke 1.3 (a) a definícii 1.6. Matica  $\Gamma$  skutočne je hermitovská. Ďalej overíme, že  $\Gamma$  je pozitívne semidefinitná matica. Nech  $\mathbf{c}$  je komplexný stĺpcový vektor. Počítajme s využitím poznámky 1.3 (b)

$$\begin{aligned}\mathbf{c}^*(\mathbf{Z} - E\mathbf{Z})(\mathbf{Z} - E\mathbf{Z})^*\mathbf{c} &= [(\mathbf{Z} - E\mathbf{Z})^*\mathbf{c}]^*(\mathbf{Z} - E\mathbf{Z})^*\mathbf{c} \\ &= \|(\mathbf{Z} - E\mathbf{Z})^*\mathbf{c}\|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Ukázali sme, že  $(\mathbf{Z} - E\mathbf{Z})(\mathbf{Z} - E\mathbf{Z})^*$  je podľa definície 1.4 pozitívne semidefinitná matica. Aplikovaním strednej hodnoty túto vlastnosť matice nezmeníme. Matica  $\Gamma$  je teda hermitovská a pozitívne semidefinitná.

(b) Nech  $\Gamma = X + iY$ . Podľa poznámky 1.7 je regulárna a podľa tvrdenia 1.1 je matica (1.1) reprezentujúca  $\Gamma$  tiež regulárna. Z tvrdenia 1.6 a bodu (a) plynie, že matica (1.1) je symetrická. To znamená, že aj jej inverz

$$\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

je symetrická matica a opäť podľa tvrdenia 1.6 a bodu (a) je  $\Gamma^{-1} = A + iB$  hermitovská. Nech  $\mathbf{d}$  je komplexný stĺpcový vektor a položíme  $\mathbf{c} = \Gamma^{-1}\mathbf{d}$ . Potom podľa poznámky 1.3(c) je

$$\mathbf{d}^*\Gamma^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{d}^*\Gamma^{-1}\Gamma\Gamma^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{c}^*\Gamma\mathbf{c} > 0$$

pre pozitívne definitnú maticu  $\Gamma$ . Teda podľa definície 1.4 je matica  $\Gamma^{-1}$  pozitívne definitná. □

**Tvrdenie 1.10.** Nech  $\Gamma = \text{Var}(\mathbf{Z})$  je variančná matica komplexného náhodného vektora  $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$  z definície 1.6. Ďalej nech  $\alpha$  je ľubovoľný komplexný skalár. Potom

$$\text{Var}(\alpha\mathbf{Z}) = \alpha\bar{\alpha} \text{Var}(\mathbf{Z}).$$

*Dôkaz.* Uvažujme  $\alpha$  komplexný skalár. Podľa definície 1.6 píšeme

$$\begin{aligned}\text{Var}(\alpha\mathbf{Z}) &= \mathbb{E}[\alpha(\mathbf{Z} - \mathbb{E}\mathbf{Z})(\alpha(\mathbf{Z} - \mathbb{E}\mathbf{Z}))^*] = \alpha\bar{\alpha}\mathbb{E}[(\mathbf{Z} - \mathbb{E}\mathbf{Z})(\mathbf{Z} - \mathbb{E}\mathbf{Z})^*] \\ &= \alpha\bar{\alpha}\text{Var}(\mathbf{Z}).\end{aligned}$$

□

**Dôsledok 1.3.** Špeciálne pre  $\alpha = i$  dostávame z tvrdenia 1.10

$$\text{Var}(i\mathbf{Z}) = i\bar{i}\text{Var}(\mathbf{Z}) = i(-i)\text{Var}(\mathbf{Z}) = \text{Var}(\mathbf{Z}).$$

## 1.6 Rozšírená variančná matica

Na záver kapitoly 1 zavedieme pojmy, ktoré budeme následne využívať v kapitole 2. Definujeme takzvanú rozšírenú variančnú maticu, (v práci Halliwell (2015, str.15) *augmented variance*).

**Definícia 1.8.** Rozšírenú variančnú maticu definujeme ako variančnú maticu komplexného náhodného vektora  $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$  rozšíreného o vektor  $\bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{X} - i\mathbf{Y}$  pre  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ . To jest

$$\text{Var}\begin{pmatrix} \mathbf{Z} \\ \bar{\mathbf{Z}} \end{pmatrix}.$$

**Tvrdenie 1.11.** Pre rozšírenú variančnú maticu z definície 1.8 platí

$$\text{Var}\begin{pmatrix} \mathbf{Z} \\ \bar{\mathbf{Z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{cov}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) & \text{cov}(\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}) \\ \text{cov}(\bar{\mathbf{Z}}, \mathbf{Z}) & \text{cov}(\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\mathbf{Z}}) \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

*Dôkaz.* Bez ujmy na všeobecnosti položíme  $\mathbb{E}\mathbf{Z} = 0$ . Pomocou definície 1.6 píšeme

$$\begin{aligned}\text{Var}\begin{pmatrix} \mathbf{Z} \\ \bar{\mathbf{Z}} \end{pmatrix} &= \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{Z} \\ \bar{\mathbf{Z}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{Z} \\ \bar{\mathbf{Z}} \end{pmatrix}^*\right] = \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{Z} \\ \bar{\mathbf{Z}} \end{pmatrix}(\bar{\mathbf{Z}}^\top, \mathbf{Z}^\top)\right] \\ &= \mathbb{E}\begin{pmatrix} \mathbf{Z}\mathbf{Z}^* & \mathbf{Z}\mathbf{Z}^\top \\ \bar{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}^* & \bar{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^*) & \mathbb{E}(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\top) \\ \mathbb{E}(\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}^*) & \mathbb{E}(\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}^\top) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Jednotlivé bloky variančnej matice postupne upravíme. S využitím definície 1.6 a definície 1.7 počítajme

1.  $\mathbb{E}(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^*) = \text{Var}(\mathbf{Z}) = \text{cov}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$ ,
2.  $\mathbb{E}(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\top) = \mathbb{E}(\mathbf{Z}\bar{\bar{\mathbf{Z}}}^\top) = \mathbb{E}(\mathbf{Z}\bar{\mathbf{Z}}^*) = \text{cov}(\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}})$ ,
3.  $\mathbb{E}(\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}^*) = \text{cov}(\bar{\mathbf{Z}}, \mathbf{Z})$ ,
4.  $\mathbb{E}(\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}^\top) = \mathbb{E}(\bar{\mathbf{Z}}\bar{\mathbf{Z}}^*) = \text{Var}(\bar{\mathbf{Z}}) = \text{cov}(\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\mathbf{Z}})$ .

Dosadením upravených výrazov na príslušné miesta dostaneme (1.10).

□

**Poznámka 1.9.** Nech  $\mathbf{Z}$  je komplexný náhodný vektor,  $\overline{\mathbf{Z}}$  je vektor k nemu komplexne združený. Potom

$$E \begin{pmatrix} \mathbf{Z} \\ \overline{\mathbf{Z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \mathbf{Z} \\ E \overline{\mathbf{Z}} \end{pmatrix}.$$

**Tvrdenie 1.12.** Rozšírenú variančnú maticu je možné vyjadriť v tvare

$$\text{Var} \begin{pmatrix} \mathbf{Z} \\ \overline{\mathbf{Z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{cov}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) & \text{cov}(\mathbf{Z}, \overline{\mathbf{Z}}) \\ \text{cov}(\overline{\mathbf{Z}}, \mathbf{Z}) & \text{cov}(\overline{\mathbf{Z}}, \overline{\mathbf{Z}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma & \mathbf{C} \\ \overline{\mathbf{C}} & \overline{\Gamma} \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

kde

$$\Gamma = \text{Var}(\mathbf{Z}) = E[(\mathbf{Z} - E \mathbf{Z})(\mathbf{Z} - E \mathbf{Z})^*], \quad (1.12)$$

$$\mathbf{C} = \text{cov}(\mathbf{Z}, \overline{\mathbf{Z}}) = E[(\mathbf{Z} - E \mathbf{Z})(\mathbf{Z} - E \mathbf{Z})^\top]. \quad (1.13)$$

*Dôkaz.* Postupne ukážeme všetky vzťahy. Z definície 1.6 a definície 1.7 máme

$$\Gamma = \text{Var}(\mathbf{Z}) = \text{cov}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) = E[(\mathbf{Z} - E \mathbf{Z})(\mathbf{Z} - E \mathbf{Z})^*].$$

Z definície 1.7 dostávame

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \text{cov}(\mathbf{Z}, \overline{\mathbf{Z}}) = E[(\mathbf{Z} - E \mathbf{Z})(\overline{\mathbf{Z}} - E \overline{\mathbf{Z}})^*] = E[(\mathbf{Z} - E \mathbf{Z})\overline{(\mathbf{Z} - E \mathbf{Z})}^\top] \\ &= E[(\mathbf{Z} - E \mathbf{Z})(\mathbf{Z} - E \mathbf{Z})^\top], \\ \overline{\Gamma} &= E[\overline{(\mathbf{Z} - E \mathbf{Z})(\mathbf{Z} - E \mathbf{Z})^*}] = E[\overline{(\mathbf{Z} - E \mathbf{Z})} \overline{(\mathbf{Z} - E \mathbf{Z})}^\top] \\ &= E[(\overline{\mathbf{Z}} - E \overline{\mathbf{Z}})(\overline{\mathbf{Z}} - E \overline{\mathbf{Z}})^*] = \text{cov}(\overline{\mathbf{Z}}, \overline{\mathbf{Z}}), \\ \overline{\mathbf{C}} &= E[\overline{(\mathbf{Z} - E \mathbf{Z})(\mathbf{Z} - E \mathbf{Z})^\top}] = E[\overline{(\mathbf{Z} - E \mathbf{Z})} (\mathbf{Z} - E \mathbf{Z})^*] \\ &= E[(\overline{\mathbf{Z}} - E \overline{\mathbf{Z}})(\mathbf{Z} - E \mathbf{Z})^*] = \text{cov}(\overline{\mathbf{Z}}, \mathbf{Z}). \end{aligned}$$

□

**Poznámka 1.10.** Nech  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)^\top = (X_1 + iY_1, \dots, X_n + iY_n)^\top$  a predpokladajme  $E \mathbf{Z} = \mathbf{0}$ . Matica  $\Gamma$  má prvky

$$\gamma_{jk} = E[(X_j + iY_j)(X_k - iY_k)] = E(Z_j \overline{Z_k}) \quad \text{pre } j, k = 1, \dots, n.$$

Matica  $\mathbf{C}$  má prvky

$$c_{jk} = E[(X_j + iY_j)(X_k + iY_k)] = E(Z_j Z_k) \quad \text{pre } j, k = 1, \dots, n.$$

## 2. Komplexné normálne rozdelenie

V kapitole 1 sme postupne budovali teóriu komplexných matíc a ich reprezentáciu pomocou dvojitéch reálnych matíc. Poznáme podmienky, za akých je komplexná matica variančnou maticou komplexného náhodného vektora. Cieľom kapitoly 2 je definovať komplexné normálne rozdelenie. V úvode zavedieme potrebné značenie a pripomenieme tvrdenia dokázané v kapitole 1. Následne uvedieme tvrdenia o hustote komplexného normálneho rozdelenia a dokážeme ich.

### 2.1 Základná teória

Uvažujme reálny náhodný vektor  $(\mathbf{X}^\top, \mathbf{Y}^\top)^\top$ ,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$  z so strednou hodnotou  $(E \mathbf{X}^\top, E \mathbf{Y}^\top)^\top$  a variančnou maticou  $\Sigma$ , ktorá je tvaru

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{Var}(\mathbf{X}) & \text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \\ \text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) & \text{Var}(\mathbf{Y}) \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

**Poznámka 2.1.** Uvažujme komplexný náhodný vektor  $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ . Pre rozšírený vektor platí

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z} \\ \overline{\mathbf{Z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} + i\mathbf{Y} \\ \mathbf{X} - i\mathbf{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & i\mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & -i\mathbf{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

**Definícia 2.1.** Maticu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & i\mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & -i\mathbf{I}_n \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

nazveme *augmentačnou maticou*.

V nasledujúcom tvrdení uvedieme vlastnosť augmentačnej matice, ktorú následne využijeme pri odvodení hustoty komplexného normálneho rozdelenia.

**Tvrdenie 2.1.** Pre augmentačnú maticu platí  $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = 2\mathbf{I}_{2n}$

*Dôkaz.* Počítajme

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{A}^* &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & i\mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & -i\mathbf{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{I}_n \\ -i\mathbf{I}_n & i\mathbf{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n - i^2\mathbf{I}_n & \mathbf{I}_n + i^2\mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n + i^2\mathbf{I}_n & \mathbf{I}_n - i^2\mathbf{I}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\mathbf{I}_n & 0 \\ 0 & 2\mathbf{I}_n \end{pmatrix} = 2\mathbf{I}_{2n}. \end{aligned}$$

□

Priamo z tvrdenia 2.1 máme nasledujúci dôsledok.

**Dôsledok 2.1.** Pre inverz augmentačnej matice platí  $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\mathbf{A}^*$ .

V tvrdení 1.12 sme ukázali možné vyjadrenie rozšírenej variančnej matice. Ukážeme ešte jedno a to pomocou augmentačnej matice.

**Tvrdenie 2.2.** *Pre rozšírenú variančnú maticu z definície 1.8 platí*

$$\text{Var} \begin{pmatrix} \mathbf{Z} \\ \overline{\mathbf{Z}} \end{pmatrix} = \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^*.$$

*Dôkaz.* Uvažujme  $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$ ,  $\overline{\mathbf{Z}} = \mathbf{X} - i\mathbf{Y}$  komplexné náhodné vektory. Pri-  
pomeňme si vyjadrenie pre rozšírenú variančnú maticu z tvrdenia 1.12. Ukážeme,  
že platí

$$\mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \Gamma & \mathbf{C} \\ \overline{\mathbf{C}} & \overline{\Gamma} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Z definície 1.2 a definície 2.1 plynie

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{I}_n \\ -i\mathbf{I}_n & i\mathbf{I}_n \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Počítajme

$$\mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & i\mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & -i\mathbf{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Var}(\mathbf{X}) & \text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \\ \text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) & \text{Var}(\mathbf{Y}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & i\mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & -i\mathbf{I}_n \end{pmatrix}^*.$$

Matice medzi sebou vynásobíme a získavame blokovú maticu, ktorej bloky po-  
stupne upravíme. Bez ujmy na všeobecnosti uvažujme  $\mathbf{E} \mathbf{X} = 0$ ,  $\mathbf{E} \mathbf{Y} = 0$ .

1.

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{X}) + i \text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) - i \text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \text{Var}(\mathbf{Y}) &= \mathbf{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^\top) + i \mathbf{E}(\mathbf{Y}\mathbf{X}^\top) \\ &\quad - i \mathbf{E}(\mathbf{X}\mathbf{Y}^\top) + \mathbf{E}(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\top) = \mathbf{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^\top + i\mathbf{Y}\mathbf{X}^\top - i\mathbf{X}\mathbf{Y}^\top + \mathbf{Y}\mathbf{Y}^\top) \\ &= \mathbf{E}((\mathbf{X} + i\mathbf{Y})(\mathbf{X}^\top - i\mathbf{Y}^\top)) = \mathbf{E}(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^*) = \text{Var} \mathbf{Z} = \text{cov}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) = \Gamma \end{aligned}$$

podľa (1.12),

2.

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{X}) + i \text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) + i \text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \text{Var}(\mathbf{Y}) &= \mathbf{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^\top) + i \mathbf{E}(\mathbf{Y}\mathbf{X}^\top) \\ &\quad + i \mathbf{E}(\mathbf{X}\mathbf{Y}^\top) - \mathbf{E}(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\top) = \mathbf{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^\top + i\mathbf{Y}\mathbf{X}^\top + i\mathbf{X}\mathbf{Y}^\top - \mathbf{Y}\mathbf{Y}^\top) \\ &= \mathbf{E}((\mathbf{X} + i\mathbf{Y})(\mathbf{X}^\top + i\mathbf{Y}^\top)) = \mathbf{E}(\mathbf{Z}\overline{\mathbf{Z}}^\top) = \mathbf{E}(\mathbf{Z}\overline{\mathbf{Z}}^*) = \text{cov}(\mathbf{Z}, \overline{\mathbf{Z}}) = \mathbf{C} \end{aligned}$$

podľa (1.13),

3.  $\text{Var}(\mathbf{X}) - i \text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) - i \text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \text{Var}(\mathbf{Y}) = \overline{\mathbf{C}}$  vzhľadom k 2,

4.  $\text{Var}(\mathbf{X}) - i \text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) + i \text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \text{Var}(\mathbf{Y}) = \overline{\Gamma}$  vzhľadom k 1.

Po dosadení upravených vyjadrení na príslušné pozície získavame rovnosť (2.4). □

Pomocou tvrdenia 2.2 dokážeme sformulovať nasledujúci dôsledok.

**Dôsledok 2.2.** *Pre rozšírenú variančnú maticu podľa (2.4) platí*

$$\text{Var}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{Z} \\ \overline{\mathbf{Z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma & \mathbf{C} \\ \overline{\mathbf{C}} & \overline{\Gamma} \end{pmatrix}^{-1} = (\mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^*)^{-1} = (\mathbf{A}^*)^{-1}\Sigma^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

Odtiaľ dostávame vyjadrenie pre inverz variančnej matice

$$\Sigma^{-1} = \mathbf{A}^* \text{Var}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{Z} \\ \overline{\mathbf{Z}} \end{pmatrix} \mathbf{A}.$$

## 2.2 Hustota komplexného normálneho rozdelenia

Pripomeňme si hustotu mnohorozmerného normálneho rozdelenia. Nadalej uvažujeme reálny náhodný vektor  $(\mathbf{X}^\top, \mathbf{Y}^\top)^\top$ ,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$  ako v podkapitole 2.1, ktorý má normálne rozdelenie.

Hustota mnohorozmerného normálneho rozdelenia je tvaru

$$f_{\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\pi^n \sqrt{2^{2n} |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2} \left[ (\mathbf{x}^\top - \mathbb{E} \mathbf{X}^\top, \mathbf{y}^\top - \mathbb{E} \mathbf{Y}^\top) \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{x} - \mathbb{E} \mathbf{X} \\ \mathbf{y} - \mathbb{E} \mathbf{Y} \end{pmatrix} \right]}, \quad (2.6)$$

kde

$$\Sigma = \text{Var} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}$$

je regulárna.

Hustotu reálneho náhodného vektora  $(\mathbf{X}^\top, \mathbf{Y}^\top)^\top$  teda poznáme. Využitím tvrdení a dôsledkov z podkapitoly 2.1 je možné definovať hustotu komplexného náhodného vektora  $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$  tak, ako je uvedená v práci Halliwell (2015, str. 19 - 20).

**Definícia 2.2.** *Nech je matica (1.11) regulárna. Hustota komplexného náhodného vektora  $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$  s normálnym rozdelením je tvaru*

$$f_{\mathbf{Z}}(z) = \frac{1}{\pi^n \sqrt{\left| \begin{pmatrix} \Gamma & \text{C} \\ \text{C} & \bar{\Gamma} \end{pmatrix} \right|}} e^{-\frac{1}{2} \left[ (z^* - \mathbb{E} z^*, z^\top - \mathbb{E} z^\top) \begin{pmatrix} \Gamma & \text{C} \\ \text{C} & \bar{\Gamma} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z - \mathbb{E} z \\ \bar{z} - \mathbb{E} \bar{z} \end{pmatrix} \right]}. \quad (2.7)$$

Hustotu v definícii 2.2 je možné odvodiť nasledujúcim spôsobom. Do hustoty mnohorozmerného normálneho rozdelenia (2.6) dosadíme za  $\Sigma^{-1}$  vyjadrenie z dôsledku 2.2 a upravujeme

$$\begin{aligned} f_{\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{\pi^n \sqrt{2^{2n} |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2} \left[ (\mathbf{x}^\top - \mathbb{E} \mathbf{X}^\top, \mathbf{y}^\top - \mathbb{E} \mathbf{Y}^\top) \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{x} - \mathbb{E} \mathbf{X} \\ \mathbf{y} - \mathbb{E} \mathbf{Y} \end{pmatrix} \right]} \\ &= \frac{1}{\pi^n \sqrt{|2I_{2n}| |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2} \left[ (\mathbf{x}^\top - \mathbb{E} \mathbf{X}^\top, \mathbf{y}^\top - \mathbb{E} \mathbf{Y}^\top) \mathbf{A}^* \text{Var}^{-1} \left( \frac{\mathbf{Z}}{\bar{\mathbf{Z}}} \right) \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{x} - \mathbb{E} \mathbf{X} \\ \mathbf{y} - \mathbb{E} \mathbf{Y} \end{pmatrix} \right]}. \end{aligned}$$

S využitím dôsledku 2.1 a (2.5) ďalej máme

$$f_{\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\pi^n \sqrt{|\mathbf{A} \mathbf{A}^*| |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2} \left[ \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{x} - \mathbb{E} \mathbf{X} \\ \mathbf{y} - \mathbb{E} \mathbf{Y} \end{pmatrix} \right]^* \text{Var}^{-1} \left( \frac{\mathbf{Z}}{\bar{\mathbf{Z}}} \right) \left[ \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{x} - \mathbb{E} \mathbf{X} \\ \mathbf{y} - \mathbb{E} \mathbf{Y} \end{pmatrix} \right]}.$$

Teraz použijeme (2.2) a (2.3) a potom tvrdenie 2.2

$$\begin{aligned} f_{\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{\pi^n \sqrt{|\mathbf{A} \Sigma \mathbf{A}^*|}} e^{-\frac{1}{2} \left[ (z^* - \mathbb{E} z^*, z^\top - \mathbb{E} z^\top) \text{Var}^{-1} \left( \frac{\mathbf{Z}}{\bar{\mathbf{Z}}} \right) \begin{pmatrix} z - \mathbb{E} z \\ \bar{z} - \mathbb{E} \bar{z} \end{pmatrix} \right]} \\ &= \frac{1}{\pi^n \sqrt{|\text{Var} \left( \frac{\mathbf{Z}}{\bar{\mathbf{Z}}} \right)|}} e^{-\frac{1}{2} \left[ (z^* - \mathbb{E} z^*, z^\top - \mathbb{E} z^\top) \text{Var}^{-1} \left( \frac{\mathbf{Z}}{\bar{\mathbf{Z}}} \right) \begin{pmatrix} z - \mathbb{E} z \\ \bar{z} - \mathbb{E} \bar{z} \end{pmatrix} \right]}. \quad (2.8) \end{aligned}$$

Po dosadení z (1.11) získame (2.7).

**Poznámka 2.2.** Podľa práce Halliwell (2015, str. 18) platí

$$dV_z = dV_{xy},$$

kde

$$dV_z = \left| \prod_{j=1}^n dx_j (idy_j) \right|, \quad dV_{xy} = \left| \prod_{j=1}^n dx_j dy_j \right|.$$

Potom

$$f_Z(\mathbf{z}) dV_z = f\left(\begin{matrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{matrix}\right) dV_{xy}. \quad (2.9)$$

Preto je definícia 2.2 korektná a píšeme

$$f_Z(\mathbf{z}) = f_Z(\mathbf{z}) \cdot 1 = f_Z(\mathbf{z}) \frac{dV_z}{dV_{xy}} = f\left(\begin{matrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{matrix}\right) (\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Vzorec (2.8) uvádza hustotu gaussovského náhodného vektora v tvare, ktorý popisuje kovariančnú štruktúru medzi  $\mathbf{Z}$  a komplexne združeným vektorom  $\overline{\mathbf{Z}}$ , pretože obsahuje rozšírenú variančnú maticu (1.11).

Ak položíme vo vyjadrení (1.11)  $C = \text{cov}(\mathbf{Z}, \overline{\mathbf{Z}}) = 0$ , dostaneme pri regulárnej matici  $\Gamma$  postupnými úpravami (2.7)

$$\begin{aligned} f_Z(\mathbf{z}) &= \frac{1}{\pi^n \sqrt{\left| \begin{matrix} \Gamma & C \\ C & \overline{\Gamma} \end{matrix} \right|}} e^{-\frac{1}{2} \left[ (z^* - E Z^*, z^\top - E Z^\top) \begin{pmatrix} \Gamma & C \\ C & \overline{\Gamma} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z - E Z \\ \bar{z} - E \overline{Z} \end{pmatrix} \right]} \\ &= \frac{1}{\pi^n \sqrt{\left| \begin{matrix} \Gamma & 0 \\ 0 & \overline{\Gamma} \end{matrix} \right|}} e^{-\frac{1}{2} \left[ (z^* - E Z^*, z^\top - E Z^\top) \begin{pmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & \overline{\Gamma} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z - E Z \\ \bar{z} - E \overline{Z} \end{pmatrix} \right]} \\ &= \frac{1}{\pi^n \sqrt{\left| \begin{matrix} \Gamma & 0 \\ 0 & \overline{\Gamma} \end{matrix} \right|}} e^{-\frac{1}{2} \left[ (z^* - E Z^*, z^\top - E Z^\top) \begin{pmatrix} \Gamma^{-1} & 0 \\ 0 & \overline{\Gamma}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z - E Z \\ \bar{z} - E \overline{Z} \end{pmatrix} \right]} \\ &= \frac{1}{\pi^n \sqrt{|\Gamma| |\overline{\Gamma}|}} e^{-\frac{1}{2} \left[ (z^* - E Z^*) \Gamma^{-1} (z - E Z) + (z^\top - E Z^\top) \overline{\Gamma}^{-1} (\bar{z} - E \overline{Z}) \right]}. \end{aligned}$$

Podľa tvrdenia 1.2 je  $\overline{\Gamma}^{-1} = \overline{\Gamma^{-1}}$  a teda

$$f_Z(\mathbf{z}) = \frac{1}{\pi^n \sqrt{|\Gamma| |\overline{\Gamma}|}} e^{-\frac{1}{2} \left[ (z^* - E Z^*) \Gamma^{-1} (z - E Z) + \overline{(z^* - E Z^*) \Gamma^{-1} (z - E Z)} \right]}. \quad (2.10)$$

Ukážeme, že

$$(z^* - E Z^*) \Gamma^{-1} (z - E Z) \quad (2.11)$$

je reálna a teda je rovná svojej komplexne združenej veličine. Podľa lemy 1.1 pre hermitovskú maticu  $\Gamma$  rozmerov  $n \times n$  existuje unitárna matica  $U$  rozmerov  $n \times n$  taká, že

$$U^* \Gamma U = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

kde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sú vlastné čísla matice  $\Gamma$  a podľa definície 1.3 (b)  $U^* = U^{-1}$ . Označme  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Potom pre maticu  $\Gamma$  platí

$$\Gamma = (U^*)^{-1}DU^{-1} = UDU^*.$$

Zároveň  $D^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n})$ . Môžeme písať

$$\Gamma^{-1} = (UDU^*)^{-1} = UD^{-1}U^*$$

a po dosadení do (2.11) máme

$$(\mathbf{z}^* - E \mathbf{Z}^*) UD^{-1}U^* (\mathbf{z} - E \mathbf{Z}).$$

Označme  $\mathbf{v} = U^* (\mathbf{z} - E \mathbf{Z}) = \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$ , kde  $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ . Potom podľa poznámky 1.3 (c)

$$\mathbf{v}^* = (U^* (\mathbf{z} - E \mathbf{Z}))^* = (\mathbf{z} - E \mathbf{Z})^* U = \mathbf{v}_1^\top - i\mathbf{v}_2^\top.$$

Veličina (2.11) je teda tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^* D^{-1} \mathbf{v} &= (\mathbf{v}_1 - i\mathbf{v}_2)^\top D^{-1} (\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2) \\ &= \mathbf{v}_1^\top D^{-1} \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_1^\top D^{-1} \mathbf{v}_2 - i\mathbf{v}_2^\top D^{-1} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2^\top D^{-1} \mathbf{v}_2 \\ &= \mathbf{v}_1^\top D^{-1} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2^\top D^{-1} \mathbf{v}_2 + i [\mathbf{v}_1^\top D^{-1} \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2^\top D^{-1} \mathbf{v}_1]. \end{aligned}$$

Zjavne  $\mathbf{v}_1^\top D^{-1} \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2^\top D^{-1} \mathbf{v}_1$ . Imaginárna časť veličiny (2.11) je nulová a teda platí

$$(\mathbf{z}^* - E \mathbf{Z}^*) \Gamma^{-1} (\mathbf{z} - E \mathbf{Z}) = \overline{(\mathbf{z}^* - E \mathbf{Z}^*) \Gamma^{-1} (\mathbf{z} - E \mathbf{Z})}.$$

Pokračujeme v úpravách hustoty v tvare (2.10)

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) &= \frac{1}{\pi^n \sqrt{|\Gamma|}} e^{-\frac{1}{2}[(\mathbf{z}^* - E \mathbf{Z}^*) \Gamma^{-1} (\mathbf{z} - E \mathbf{Z}) + (\mathbf{z}^* - E \mathbf{Z}^*) \Gamma^{-1} (\mathbf{z} - E \mathbf{Z})]} \\ &= \frac{1}{\pi^n |\Gamma|} e^{-(\mathbf{z}^* - E \mathbf{Z}^*) \Gamma^{-1} (\mathbf{z} - E \mathbf{Z})} \\ &= \frac{1}{\pi^n |\Gamma|} e^{-(\mathbf{z} - E \mathbf{Z})^* \Gamma^{-1} (\mathbf{z} - E \mathbf{Z})}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Goodman v článku Goodman (1963) definuje gaussovskú náhodnú veličinu a vektor nasledovne.

**Definícia 2.3.** *Komplexnú náhodnú veličinu  $Z = X + iY$  nazveme gaussovskou náhodnou veličinou, ak vektor reálnej a imaginárnej časti  $(X, Y)^\top$  je dvojrozmerný normálny náhodný vektor.*

**Definícia 2.4.** *Gaussovským náhodným vektorom nazveme  $n$ -rozmerný komplexný náhodný vektor  $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)^\top$ , ak vektor reálnych a imaginárnych častí  $(X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n)^\top$  je  $2n$ -rozmerný normálny náhodný vektor.*

Neskôr uvádza konkrétnu parametrizáciu komplexného normálneho rozdelenia, v ktorej  $C = 0$ .

Uvažujme gaussovský náhodný vektor podľa definície 2.4,

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}, \text{ kde } \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n.$$

Jednotlivé zložky vektora  $\mathbf{Z}$  sú

$$Z_k = X_k + iY_k, \quad k = 1 \dots n.$$

Označme vektor reálnych a imaginárnych častí

$$\Psi = (X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n)^\top.$$

Predpokladajme, že  $E \Psi = \mathbf{0}$ . V takomto prípade platí

$$\begin{aligned} V = \text{Var}(\Psi) &= E [(\Psi - E \Psi)^\top (\Psi - E \Psi)] = E [\Psi \Psi^\top] \\ &= E [(X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n)^\top (X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n)]. \end{aligned}$$

To je matica rozmerov  $2n \times 2n$  tvaru

$$V = \begin{pmatrix} E(X_1 X_1) & E(X_1 Y_1) & \dots & E(X_1 X_n) & E(X_1 Y_n) \\ E(Y_1 X_1) & E(Y_1 Y_1) & \dots & E(Y_1 X_n) & E(Y_1 Y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ E(X_n X_1) & E(X_n Y_1) & \dots & E(X_n X_n) & E(X_n Y_n) \\ E(Y_n X_1) & E(Y_n Y_1) & \dots & E(Y_n X_n) & E(Y_n Y_n) \end{pmatrix}.$$

Môžeme si všimnúť, že matica  $V$  sa skladá z podmatíc tvaru

$$V_{jk} = \begin{pmatrix} E(X_j X_k) & E(X_j Y_k) \\ E(Y_j X_k) & E(Y_j Y_k) \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

kde  $j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, n$ .

Pre prípad  $j = k$  platí

$$V_{kk} = \begin{pmatrix} \text{Var}(X_k) & \text{cov}(X_k, Y_k) \\ \text{cov}(Y_k, X_k) & \text{Var}(Y_k) \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Goodman v článku Goodman (1963, str. 153) predpokladá pre podmatice (2.13) a (2.14) konkrétne tvary, ktoré uvedieme v nasledujúcej poznámke.

**Poznámka 2.3.** Pre podmatice matice  $V$  predpokladajme nasledovné

1.  $V_{jk} = \frac{1}{2} \sigma_j \sigma_k \begin{pmatrix} \alpha_{jk} & -\beta_{jk} \\ \beta_{jk} & \alpha_{jk} \end{pmatrix}$ ,
2.  $V_{kk} = \frac{1}{2} \sigma_k^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , to jest  $X_k, Y_k$  sú pre  $k = 1, \dots, n$  nekorelované a zároveň  $\text{Var}(X_k) = \text{Var}(Y_k) = \frac{\sigma_k^2}{2}$ .

**Tvrdenie 2.3.** Uvažujme komplexný náhodný vektor  $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Psi = (X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n)^\top$ . Nech  $E \Psi = \mathbf{0}$  a platia predpoklady z poznámky 2.3.

Potom  $C = \text{cov}(\mathbf{Z}, \overline{\mathbf{Z}}) = 0$ .

*Dôkaz.* Pripomeňme si z (1.13) vyjadrenie

$$C = \text{cov}(\mathbf{Z}, \overline{\mathbf{Z}}) = E \left[ (\mathbf{Z} - E \mathbf{Z})(\mathbf{Z} - E \mathbf{Z})^\top \right].$$

Pre  $E \Psi = \mathbf{0}$  je zjavne  $E \mathbf{Z} = \mathbf{0}$ ,

$$C = \text{cov}(\mathbf{Z}, \overline{\mathbf{Z}}) = E \left[ \begin{pmatrix} X_1 + iY_1 \\ X_2 + iY_2 \\ \vdots \\ X_n + iY_n \end{pmatrix} (X_1 + iY_1, X_2 + iY_2, \dots, X_n + iY_n) \right].$$

Vektory medzi sebou vynásobíme a výsledok zapíšeme ako súčet štyroch matíc

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} E(X_1 X_1) & \dots & E(X_1 X_n) \\ & \ddots & \\ E(X_n X_1) & \dots & E(X_n X_n) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E(Y_1 Y_1) & \dots & E(Y_1 Y_n) \\ & \ddots & \\ E(Y_n Y_1) & \dots & E(Y_n Y_n) \end{pmatrix} \\ & + i \begin{pmatrix} E(X_1 Y_1) & \dots & E(X_1 Y_n) \\ & \ddots & \\ E(X_n Y_1) & \dots & E(X_n Y_n) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} E(Y_1 X_1) & \dots & E(Y_1 X_n) \\ & \ddots & \\ E(Y_n X_1) & \dots & E(Y_n X_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tento súčet vyjadríme pomocou poznámky 2.3 a máme

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma_1^2 & \dots & \frac{1}{2}\sigma_1\sigma_n\alpha_{1n} \\ & \ddots & \\ \frac{1}{2}\sigma_n\sigma_1\alpha_{n1} & \dots & \frac{1}{2}\sigma_n^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma_1^2 & \dots & \frac{1}{2}\sigma_1\sigma_n\alpha_{1n} \\ & \ddots & \\ \frac{1}{2}\sigma_n\sigma_1\alpha_{n1} & \dots & \frac{1}{2}\sigma_n^2 \end{pmatrix} \\ & + i \begin{pmatrix} 0 & \dots & -\frac{1}{2}\sigma_1\sigma_n\beta_{1n} \\ & \ddots & \\ -\frac{1}{2}\sigma_1\sigma_n\beta_{n1} & \dots & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & \dots & \frac{1}{2}\sigma_1\sigma_n\beta_{1n} \\ & \ddots & \\ \frac{1}{2}\sigma_1\sigma_n\beta_{n1} & \dots & 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

□

**Tvrdenie 2.4.** *Nech platia rovnaké predpoklady ako v tvrdení 2.3. Potom platí*

1.  $E \mathbf{Z} = \mathbf{0}$ ,
2.  $E(Z_j \overline{Z}_k) = (\alpha_{jk} + i\beta_{jk})\sigma_j\sigma_k = \sigma_{jk}$  pre  $j \neq k$ , kde  $j = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,
3.  $E(Z_k \overline{Z}_k) = \sigma_k^2$  kde  $k = 1, \dots, n$ .

*Dôkaz.* Postupne dokážeme jednotlivé body tvrdenia.

1. Pre  $E \Psi = \mathbf{0}$  je zjavne  $E \mathbf{Z} = \mathbf{0}$ .
2. Pre  $j \neq k$  využitím poznámky 2.3 počítajme

$$\begin{aligned} E(Z_j \overline{Z}_k) &= E[(X_j + iY_j)(X_k - iY_k)] \\ &= E(X_j X_k) - iE(X_j Y_k) + iE(X_k Y_j) + E(Y_j Y_k) \\ &= \frac{1}{2}\alpha_{jk}\sigma_j\sigma_k + i\frac{1}{2}\beta_{jk}\sigma_j\sigma_k + i\frac{1}{2}\beta_{jk}\sigma_j\sigma_k + \frac{1}{2}\alpha_{jk}\sigma_j\sigma_k \\ &= \alpha_{jk}\sigma_j\sigma_k + i\beta_{jk}\sigma_j\sigma_k = (\alpha_{jk} + i\beta_{jk})\sigma_j\sigma_k. \end{aligned}$$

3. Pre  $j = k$  počítajme

$$\mathbb{E}(Z_k \overline{Z_k}) = \mathbb{E}[(X_k + iY_k)(X_k - iY_k)] = \mathbb{E} X_k^2 + \mathbb{E} Y_k^2.$$

Z predpokladu  $\mathbb{E} \Psi = \mathbf{0}$  máme  $\mathbb{E} X_k^2 = \text{Var}(X_k)$ ,  $\mathbb{E} Y_k^2 = \text{Var}(Y_k)$ . Opäť využijeme poznámku 2.3 a píšeme

$$\mathbb{E} X_k^2 + \mathbb{E} Y_k^2 = \frac{\sigma_k^2}{2} + \frac{\sigma_k^2}{2} = \sigma_k^2.$$

□

**Dôsledok 2.3.** *Za predpokladov tvrdenia 2.3 má podľa poznámky 1.10 a tvrdenia 2.4 komplexný náhodný vektor  $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ , variančnú maticu  $\text{Var}(\mathbf{Z}) = \Gamma$  s prvkami  $\gamma_{kk} = \sigma_k^2$  pre  $j = k$  a  $\gamma_{jk} = \sigma_{jk}$  pre  $j \neq k$ .*

**Veta 2.1** (Giri (1965)). *Za predpokladov tvrdenia 2.3 má gaussovský náhodný vektor  $\mathbf{Z}$  hustotu danú predpisom (2.12).*

*Dôkaz.* Vektor reálnych a imaginárnych častí  $\Psi = (X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n)^\top$  je podľa definície 2.4  $2n$ -rozmerný reálny normálne rozdelený náhodný vektor. Uvažujme  $\mathbb{E} \Psi = \mathbf{0}$ ,  $V = \text{Var}(\Psi)$ . Hustota vektora  $\Psi$  je podľa (2.6) tvaru

$$f_{\Psi}(\psi) = \frac{1}{\pi^n \sqrt{2^{2n} |V|}} e^{[-\frac{1}{2} \psi^\top V^{-1} \psi]} = \frac{1}{2^n \pi^n \sqrt{|V|}} e^{[-\frac{1}{2} \psi^\top V^{-1} \psi]}, \quad (2.15)$$

kde  $V$  je variančná matica vektora  $\Psi$ , je regulárna a pozitívne definitná. Podľa práce Goodman (1963, str. 158) je variančná matica  $\Gamma$  gaussovského náhodného vektora  $\mathbf{Z}$  izomorfná s dvojnásobkom variančnej matice  $V$  reálneho náhodného vektora  $\Psi$ . Označme to  $\Gamma \cong 2V$ .

V takomto prípade podľa práce Goodman (1963, str. 156 a 159) platí  $|2V| = |\Gamma|^2$  a  $\Gamma$  je regulárna a pozitívne definitná. Pre ľavú stranu rovnosti platí

$$|2V| = |2I_{2n} V| = 2^{2n} |V|$$

a teda  $\sqrt{|V|} = \frac{1}{2^n} |\Gamma|$ . Zároveň  $\Gamma^{-1} \cong \frac{1}{2} V^{-1}$  a podľa práce Goodman (1963, str. 157) dostávame

$$\psi^\top \left( \frac{1}{2} V^{-1} \right) \psi = \mathbf{z}^* \Gamma^{-1} \mathbf{z}.$$

Upravené výrazy dosadíme do (2.15) získavame predpis (2.12).

□

## 2.3 Odhad strednej hodnoty a variančnej matice

V predchádzajúcej podkapitole sme uvažovali  $E \Psi = \mathbf{0}$ , odkiaľ plynie  $E \mathbf{Z} = \mathbf{0}$ . Teraz budeme uvažovať nenulovú strednú hodnotu gaussovského náhodného vektora  $\mathbf{Z}$  a odvodíme maximálne vierohodné odhady strednej hodnoty a variančnej matice komplexného normálneho rozdelenia.

Uvažujme gaussovský náhodný vektor  $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$ , kde  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ . Predpokladajme, rovnako ako v práci Giri (1965, str. 664), že

$$E \mathbf{Z} = \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0},$$

$\text{Var}(\mathbf{Z}) = \Gamma = E[(\mathbf{Z} - E \mathbf{Z})(\mathbf{Z} - E \mathbf{Z})^*]$  je hermitovská pozitívne definitná variančná matica. Hustota gaussovského náhodného vektora  $\mathbf{Z}$  s regulárnou variančnou maticou  $\Gamma$  je podľa (2.12) tvaru

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = \frac{1}{\pi^n |\Gamma|} e^{-(\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu})^* \Gamma^{-1} (\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu})}.$$

**Veta 2.2** (Giri (1965)). *Uvažujme*

$$f(\mathbf{Z}) = k |\mathbf{Z}|^N e^{-tr(\mathbf{Z})},$$

kde  $\mathbf{Z}$  je pozitívne definitná hermitovská matica,  $k > 0$  je konštanta,  $N$  je prirodzené číslo. Potom  $f(\mathbf{Z})$  nabýva maximum pre  $\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{Z}} = N\mathbf{I}_n$ .

*Dôkaz.* Matica  $\mathbf{Z}$  je hermitovská pozitívne definitná. Z lemy 1.1 vieme, že existuje unitárna matica  $\mathbf{U}$  rozmerov taká, že platí

$$\mathbf{U}^* \mathbf{Z} \mathbf{U} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

kde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sú vlastné čísla matice  $\mathbf{Z}$  a zároveň z poznámky 1.7 platí  $\lambda_i > 0$  pre všetky  $i = 1, \dots, n$ . Platí

$$|\mathbf{U}^* \mathbf{Z} \mathbf{U}| = |\mathbf{U}^*| |\mathbf{Z}| |\mathbf{U}| = |\mathbf{U}^*| |\mathbf{U}| |\mathbf{Z}| = |\mathbf{U}^* \mathbf{U}| |\mathbf{Z}| = |\mathbf{U}^{-1} \mathbf{U}| |\mathbf{Z}| = |\mathbf{I}_n| |\mathbf{Z}| = |\mathbf{Z}|$$

a zároveň platí

$$tr(\mathbf{U}^* \mathbf{Z} \mathbf{U}) = tr(\mathbf{U}^* \mathbf{U} \mathbf{Z}) = tr(\mathbf{U}^{-1} \mathbf{U} \mathbf{Z}) = tr(\mathbf{I}_n \mathbf{Z}) = tr(\mathbf{Z}).$$

Môžeme teda písať

$$\begin{aligned} f(\mathbf{Z}) &= k |\mathbf{U}^* \mathbf{Z} \mathbf{U}|^N e^{-tr(\mathbf{U}^* \mathbf{Z} \mathbf{U})} = k |\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)|^N \exp[-tr(\text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n])] \\ &= k \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^N \exp\left[-\sum_{i=1}^n \lambda_i\right] = k \prod_{i=1}^n \left( \lambda_i \exp\left[-\frac{\lambda_i}{N}\right] \right)^N. \end{aligned}$$

Nájdeme maximálnu hodnotu  $i$ -tého činiteľa vzhľadom k  $\lambda_i$ . Pre jednoduchosť položíme  $\lambda_i = \lambda$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \lambda \exp\left[-\frac{\lambda}{N}\right] \right)^N &= N \left( \lambda \exp\left[-\frac{\lambda}{N}\right] \right)^{N-1} \left( \exp\left[-\frac{\lambda}{N}\right] + \lambda \exp\left[-\frac{\lambda}{N}\right] \left[-\frac{1}{N}\right] \right) \\ &= N \left( \lambda \exp\left[-\frac{\lambda}{N}\right] \right)^{N-1} \exp\left[-\frac{\lambda}{N}\right] \left[ 1 - \frac{\lambda}{N} \right] \\ &= N \lambda^{N-1} \exp\left[-\frac{\lambda}{N}(N-1)\right] \exp\left[-\frac{\lambda}{N}\right] \left[ 1 - \frac{\lambda}{N} \right] \\ &= N \lambda^{N-1} \exp\left[-\lambda\right] \left[ 1 - \frac{\lambda}{N} \right]. \end{aligned}$$

Zároveň platí

$$N\lambda^{N-1} \exp[-\lambda] > 0,$$

pretože všetky vlastné čísla matice  $Z$  sú kladné. Preto

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \lambda \exp\left[-\frac{\lambda}{N}\right] \right)^N = 0$$

práve vtedy, keď

$$1 - \frac{\lambda}{N} = 0$$

a teda  $\lambda = N$ . Dostávame, že  $f(\mathbf{Z})$  nabýva maximálnu hodnotu pre  $\lambda_1, \dots, \lambda_n = N$ . Vzhľadom k tomu, že  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sú vlastné čísla matice  $Z$ , je  $f(\mathbf{Z})$  maximálna pre  $Z = \hat{Z} = N\mathbf{I}_n$ . □

**Veta 2.3** (Giri (1965)). *Uvažujme náhodný výber  $\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_N$  z rozdelenia daného hustotou (2.12). Maximálne vierohodné odhady  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$  strednej hodnoty  $\boldsymbol{\mu}$  a  $\hat{\Gamma}$  variančnej matice  $\Gamma$  sú*

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}_{pr}, \quad \hat{\Gamma} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}_{pr})(\mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}_{pr})^* = \frac{1}{N} \mathbf{R}.$$

*Dôkaz.* Združená hustota náhodných vektorov  $\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_N$  je

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N) &= \prod_{i=1}^N \frac{1}{\pi^n |\Gamma|} e^{-(\mathbf{z}_i - \boldsymbol{\mu})^* \Gamma^{-1} (\mathbf{z}_i - \boldsymbol{\mu})} \\ &= \frac{1}{\pi^{Nn} |\Gamma|^N} \exp\left[-\sum_{i=1}^N (\mathbf{z}_i - \boldsymbol{\mu})^* \Gamma^{-1} (\mathbf{z}_i - \boldsymbol{\mu})\right] \end{aligned}$$

Môžeme písať

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (\mathbf{z}_i - \boldsymbol{\mu})^* \Gamma^{-1} (\mathbf{z}_i - \boldsymbol{\mu}) &= \text{tr} \left( \sum_{i=1}^N (\mathbf{z}_i - \boldsymbol{\mu})^* \Gamma^{-1} (\mathbf{z}_i - \boldsymbol{\mu}) \right) \\ &= \text{tr} \left( \sum_{i=1}^N \Gamma^{-1} (\mathbf{z}_i - \boldsymbol{\mu}) (\mathbf{z}_i - \boldsymbol{\mu})^* \right) \end{aligned}$$

Ďalej máme

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N (\mathbf{z}_i - \boldsymbol{\mu}) (\mathbf{z}_i - \boldsymbol{\mu})^* \\ &= \sum_{i=1}^N [(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{pr}) + (\mathbf{z}_{pr} - \boldsymbol{\mu})] [(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{pr}) + (\mathbf{z}_{pr} - \boldsymbol{\mu})]^* \\ &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{pr}) (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{pr})^* + \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i - N\mathbf{z}_{pr} \right) (\mathbf{z}_{pr} - \boldsymbol{\mu})^* \\ &\quad + (\mathbf{z}_{pr} - \boldsymbol{\mu}) \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i - N\mathbf{z}_{pr} \right)^* + N(\mathbf{z}_{pr} - \boldsymbol{\mu}) (\mathbf{z}_{pr} - \boldsymbol{\mu})^* \\ &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{pr}) (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{pr})^* + N(\mathbf{z}_{pr} - \boldsymbol{\mu}) (\mathbf{z}_{pr} - \boldsymbol{\mu})^*. \end{aligned}$$

Hľadáme

$$\arg \max_{\boldsymbol{\mu}, \Gamma} \frac{1}{\pi^{Nn} |\Gamma|^N} \exp\left(-tr\left[\Gamma^{-1} \sum_{i=1}^N (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{pr}) (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{pr})^*\right]\right) \exp\left(-tr\left[\Gamma^{-1} N (\mathbf{z}_{pr} - \boldsymbol{\mu}) (\mathbf{z}_{pr} - \boldsymbol{\mu})^*\right]\right)$$

Máme

$$tr\left[\Gamma^{-1} N (\mathbf{z}_{pr} - \boldsymbol{\mu}) (\mathbf{z}_{pr} - \boldsymbol{\mu})^*\right] = Ntr\left[(\mathbf{z}_{pr} - \boldsymbol{\mu})^* \Gamma^{-1} (\mathbf{z}_{pr} - \boldsymbol{\mu})\right] \geq 0,$$

pretože matica  $\Gamma^{-1}$  je pozitívne definitná podľa tvrdenia 1.9(b), teda podľa definície 1.4 pre  $\mathbf{z}_{pr} - \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$

$$(\mathbf{z}_{pr} - \boldsymbol{\mu})^* \Gamma^{-1} (\mathbf{z}_{pr} - \boldsymbol{\mu}) \geq 0$$

a

$$Ntr\left[(\mathbf{z}_{pr} - \boldsymbol{\mu})^* \Gamma^{-1} (\mathbf{z}_{pr} - \boldsymbol{\mu})\right] \geq 0.$$

Odtiaľ dostávame, že

$$\exp\left(-tr\left[\Gamma^{-1} N (\mathbf{z}_{pr} - \boldsymbol{\mu}) (\mathbf{z}_{pr} - \boldsymbol{\mu})^*\right]\right)$$

nabýva maximálu hodnotu 1 pre  $\boldsymbol{\mu} = \hat{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{z}_{pr}$  a ďalej stačí hľadať

$$\arg \max_{\Gamma} \frac{1}{\pi^{Nn} |\Gamma|^N} \exp\left(-tr\left[\Gamma^{-1} \mathbf{R}\right]\right),$$

kde

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{pr}) (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{pr})^*.$$

Matica  $\mathbf{R}$  je s pravdepodobnosťou 1 podľa poznámky 1.3(a) hermitovská a podľa poznámky 1.3(b) pozitívne definitná. Podľa lemy 1.2 potom s pravdepodobnosťou 1 platí  $\mathbf{R} = \mathbf{B}\mathbf{B}^*$ , kde  $\mathbf{B}$  je hermitovská pozitívne definitná matica. Odtiaľ

$$\frac{1}{|\Gamma|} = |\Gamma^{-1}| = |(\mathbf{B}\mathbf{B}^*)^{-1} \mathbf{B}\mathbf{B}^* \Gamma^{-1}| = |(\mathbf{B}\mathbf{B}^*)^{-1}| |\mathbf{B}\mathbf{B}^* \Gamma^{-1}| = |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|^{-1} |\mathbf{K}|,$$

kde  $\mathbf{K} = \mathbf{B}^* \Gamma^{-1} \mathbf{B}$ . To znamená, že hľadáme

$$\arg \max_{\mathbf{K}} \frac{1}{\pi^{Nn} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|^N} |\mathbf{K}|^N \exp\left(-tr\left[\Gamma^{-1} \mathbf{B}\mathbf{B}^*\right]\right) = \arg \max_{\mathbf{K}} \frac{1}{\pi^{Nn} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|^N} |\mathbf{K}|^N \exp\left(-tr[\mathbf{K}]\right).$$

Zjavne s pravdepodobnosťou 1

$$\frac{1}{\pi^{Nn} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|^N} > 0$$

a  $K$  je podľa definície 1.4, poznámky 1.3(c) a tvrdenia 1.9(b) pozitívne definitná. Ukážeme, že matica  $K$  je hermitovská

$$K^* = (B^*\Gamma^{-1}B)^* = \overline{(B^*\Gamma^{-1}B)^\top} = \overline{B^\top(\Gamma^{-1})^\top(B^*)^\top} = B^*(\Gamma^{-1})^*B = B^*\Gamma^{-1}B$$

vzhľadom k tvrdeniu 1.9(b). Matica  $K$  teda splňuje predpoklady vety 2.2 a preto

$$\arg \max_K \frac{1}{\pi^{Nn} |BB^*|^N} |K|^N \exp(-tr[K]) = \hat{K} = NI_n.$$

Vzhľadom k tomu, že  $K = B^*\Gamma^{-1}B$ , platí pre odhad variančnej matice  $\Gamma$  rovnosť

$$NI_n = \hat{K} = B^*\hat{\Gamma}^{-1}B,$$

z ktorej dostaneme

$$N(B^*)^{-1}B^{-1} = \hat{\Gamma}^{-1}$$

a

$$\hat{\Gamma} = \frac{1}{N}BB^* = \frac{1}{N}R = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{pr})(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{pr})^*.$$

Maximálne virohodné odhady pre  $\boldsymbol{\mu}$  a  $\Gamma$  sú

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i = \mathbf{z}_{pr}, \quad \hat{\Gamma} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{pr})(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{pr})^* = \frac{1}{N}R.$$

□

## 2.4 Test nulovosti strednej hodnoty

Nadalej uvažujme náhodný výber  $\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_N$  z rozdelenia daného hustotou (2.12) ako vo vete 2.3. Budeme testovať hypotézu

$$H_0 : \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$$

proti alternatíve

$$H_1 : \boldsymbol{\mu}^*\Gamma^{-1}\boldsymbol{\mu} > 0.$$

Dovoľme si pripomenúť, že  $\mathbf{E} \mathbf{Z} = \boldsymbol{\mu}$ .

Aplikujeme test pomerom virohodností. Označme

$$\lambda = \frac{\max_{H_1} f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N)}{\max_{H_0} f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N)},$$

kde v čitateli máme virohodnosť za platnosti alternatívy  $H_1$  a v menovateli virohodnosť za platnosti hypotézy  $H_0$ . Označme ako vo vete 2.3

$$R = \sum_{i=1}^N (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{pr})(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{pr})^*$$

a predpokladajme, že matica  $R$  je regulárna. V práci Giri (1965) je uvedené, že platí

$$\lambda = \left(1 + N \mathbf{z}_{pr}^* R^{-1} \mathbf{z}_{pr}\right)^N.$$

a autor navrhuje za testovú štatistiku zvolit

$$T^2 = N \mathbf{Z}_{pr}^* R^{-1} \mathbf{Z}_{pr} \quad (2.16)$$

a odvodzuje jej rozdelenie.

**Tvrdenie 2.5.** *Za platnosti alternatívy  $H_1$  má testová štatistika  $T^2$  rozdelenie*

$$\frac{\chi_{2n}^2(2N \boldsymbol{\mu}^* \Gamma^{-1} \boldsymbol{\mu})}{\chi_{2(N-n)}^2},$$

kde  $\chi_{2n}^2(2N \boldsymbol{\mu}^* \Gamma^{-1} \boldsymbol{\mu})$  je necentrálne  $\chi$ -kvadrát rozdelenie s  $2n$  stupňami voľnosti a parametrom necentrality  $(2N \boldsymbol{\mu}^* \Gamma^{-1} \boldsymbol{\mu})$ ,  $\chi_{2(N-n)}^2$  je centrálné  $\chi$ -kvadrát rozdelenie s  $2(N-n)$  voľnosti.

*Dôkaz.* Dôkaz tvrdenia je uvedený v práci Giri (1965, str. 667). □

**Dôsledok 2.4.** *Náhodná veličina*

$$F = \frac{2(N-n)}{2n} T^2 \quad (2.17)$$

*má za platnosti hypotézy  $H_0$   $F$  - rozdelenie so stupňami voľnosti  $2n, 2(N-n)$ .*

*Dôkaz.* Za predpokladu platnosti hypotézy  $H_0$  máme  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ . Potom pre parameter necentrality platí  $(2N \boldsymbol{\mu}^* \Gamma^{-1} \boldsymbol{\mu}) = 0$ . Testová štatistika  $T^2$  má v takom prípade rozdelenie

$$\frac{\chi_{2n}^2}{\chi_{2(N-n)}^2}.$$

Potom platí

$$\frac{2(N-n)}{2n} T^2 = \frac{2(N-n)}{2n} \frac{\chi_{2n}^2}{\chi_{2(N-n)}^2} = \frac{\frac{\chi_{2n}^2}{2n}}{\frac{\chi_{2(N-n)}^2}{2(N-n)}} \sim F_{2n, 2(N-n)}.$$

□

### 3. Simulačná štúdia

Cieľom záverečnej kapitoly tejto práce je generovanie realizácií náhodných vektorov z komplexného normálneho rozdelenia. Budeme skúmať správanie sa odhadov, ktoré boli odvodené v podkapitole 2.3, a vlastnosti testu nulovosti strednej hodnoty, ktorý bol popísaný v podkapitole 2.4.

Položíme  $n = 2$ , teda  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^2$ . Podľa definície 2.4 budeme generovať výber vektorov reálnych a imaginárnych častí  $\Psi_1, \dots, \Psi_N$  z mnohorozmerného normálneho rozdelenia so strednou hodnotou  $\mathbf{E} \Psi$  a variančnou maticou  $V$ , pre ktorú platí parametrizácia z článku Goodman (1963, str. 153) ako sme ju uviedli v poznámke 2.3. Pre  $k = 1, \dots, N$  je

$$\Psi_k = (X_{k,1}, Y_{k,1}, X_{k,2}, Y_{k,2})^\top.$$

Z vektorov  $\Psi_1, \dots, \Psi_N$  dostaneme simulovaný výber  $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N$  z komplexného normálneho rozdelenia so strednou hodnotou  $\mathbf{E} \mathbf{Z} = \boldsymbol{\mu}$  a  $\text{Var}(\mathbf{Z}) = \Gamma$ . Pre  $k = 1, \dots, N$  máme

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{x}_k + i\mathbf{y}_k = \begin{pmatrix} x_{k,1} \\ x_{k,2} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y_{k,1} \\ y_{k,2} \end{pmatrix}.$$

Položíme  $\mathbf{E} \Psi = \mathbf{0}$ . V takomto prípade  $\mathbf{E} \mathbf{Z} = \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ . Parametre vo variančnej matici  $V$  volíme tak, aby bola regulárna a pozitívne definitná. Zvolili sme  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ,  $\beta_{12} = 0$  a  $\alpha_{12} = \frac{1}{2}$ . V takomto prípade je variančná matica  $V$  rozmerov  $2 \times 2$  regulárna, pretože determinant matice  $V$  je  $0.035 \neq 0$  a vlastné čísla matice  $V$  sú  $0.75, 0.75, 0.25, 0.25$  a teda kladné. Pre takúto voľbu parametrov máme

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Vzhľadom k (2.13) a (2.14) sú v našom prípade dvojice  $(X_i, Y_j)$  pre  $i, j = 1, 2$  nekorelované.

Pre variančnú maticu  $\Gamma$  podľa tvrdenia 2.4 a dôsledku 2.3 pre konkrétnu voľbu parametrov platí

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Takýchto výberov  $(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N)$  o rozsahu  $N = 10, 20, 50, 100, 500$  budeme generovať  $P = 100, 1000$ . Pre každý z  $P$  výberov určíme maximálne vierohodný odhad  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$  strednej hodnoty  $\boldsymbol{\mu}$  a maximálne vierohodný odhad  $\hat{\Gamma}$  variančnej matice  $\Gamma$  podľa vety 2.3. Máme teda

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{z}_{pr}, \quad \hat{\Gamma} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{pr})(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{pr})^* = \frac{1}{N} \mathbf{R}.$$

### 3.1 Overenie rýchlosti konvergenzie odhadov

Pre overenie rýchlosti konvergenzie odhadov spočítame pre odhady stredných hodnôt z  $P$  výberov ich priemer

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{PR} = \frac{1}{P} \sum_{r=1}^P \mathbf{z}_{pr}^r = \left( \frac{\frac{1}{P} \sum_{r=1}^P x_{pr,1}^r}{\frac{1}{P} \sum_{r=1}^P x_{pr,2}^r} \right) + i \left( \frac{\frac{1}{P} \sum_{r=1}^P y_{pr,1}^r}{\frac{1}{P} \sum_{r=1}^P y_{pr,2}^r} \right) \quad (3.3)$$

kde

$$\mathbf{z}_{pr}^r = \begin{pmatrix} x_{pr,1}^r \\ x_{pr,2}^r \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y_{pr,1}^r \\ y_{pr,2}^r \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i^r \quad (3.4)$$

pre  $r = 1, \dots, P$ , teda maximálne vierohodný odhad strednej hodnoty v  $r$ -tom výbere. Očakávame, že pre väčší rozsah výberu  $N$  a väčší počet výberov sa bude priemer odhadov  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{PR}$  blížiť k zvolenej teoretickej strednej hodnote  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ . Hodnoty zložiek  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{PR}$  pre konkrétne rozsahy výberov  $N$  a počty výberov  $P$  uvedieme v tabuľke 3.1.

Počet výberov	Rozsah výberov	Priemer odhadov strednej hodnoty
100	10	$\begin{pmatrix} 0.0350 \\ 0.0436 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0.0094 \\ 0.0149 \end{pmatrix}$
100	20	$\begin{pmatrix} 0.0139 \\ 0.0195 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -0.0024 \\ -0.0257 \end{pmatrix}$
100	50	$\begin{pmatrix} -0.0200 \\ -0.0118 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -0.0083 \\ -0.0287 \end{pmatrix}$
100	100	$\begin{pmatrix} 0.0054 \\ 0.0135 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -0.0001 \\ -0.0057 \end{pmatrix}$
100	500	$\begin{pmatrix} 0.0050 \\ 0.0045 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -0.0024 \\ -0.0036 \end{pmatrix}$
1000	10	$\begin{pmatrix} -0.0008 \\ 0.0126 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0.0078 \\ -0.0028 \end{pmatrix}$
1000	20	$\begin{pmatrix} 0.0015 \\ 0.0084 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -0.0043 \\ -0.0058 \end{pmatrix}$
1000	50	$\begin{pmatrix} -0.0026 \\ -0.0014 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0.0012 \\ -0.0046 \end{pmatrix}$
1000	100	$\begin{pmatrix} 0.0022 \\ -0.0002 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0.0044 \\ 0.0001 \end{pmatrix}$
1000	500	$\begin{pmatrix} -0.0010 \\ 0.0006 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -0.0004 \\ 0.0009 \end{pmatrix}$

Tabuľka 3.1: Priemery maximálne vierohodných odhadov stredných hodnôt

V tabuľke 3.1 môžeme sledovať, že už pre rozsah výberu  $N = 10$  sú všetky zložky reálnej a imaginárnej časti  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{PR}$  blízke 0, pri väčšom počte výberov  $P$  a väčšom rozsahu generovaných výberov  $N$  je toto priblíženie ešte výraznejšie-

Rovnako ako v prípade odhadov strednej hodnoty, aj v prípade odhadov prvkov variančnej matice overíme rýchlosť konvergencie k zvoleným hodnotám kovariancií a rozptylov. Pre overenie rýchlosti konvergencie odhadov spočítame

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_{PR} &= \frac{1}{P} \sum_{r=1}^P \hat{\Gamma}^r = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{PR,11} & \hat{\gamma}_{PR,12} \\ \hat{\gamma}_{PR,12} & \hat{\gamma}_{PR,22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{PR,11} & c_{PR,1} + ic_{PR,2} \\ c_{PR,1} - ic_{PR,2} & \hat{\gamma}_{PR,22} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3.5)$$

kde

$$\hat{\Gamma}^r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{z}_i^r - \mathbf{z}_{pr}^r)(\mathbf{z}_i^r - \mathbf{z}_{pr}^r)^* = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{11}^r & \hat{\gamma}_{12}^r \\ \hat{\gamma}_{12}^r & \hat{\gamma}_{22}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{11}^r & c_1^r + ic_2^r \\ c_1^r - ic_2^r & \hat{\gamma}_{22}^r \end{pmatrix}$$

Očakávame, že pre väčší rozsah výberu  $N$  a väčší počet výberov sa bude priemer odhadov v každom prvku  $\hat{\Gamma}_{PR}$  blížiti k zvolenej teoretickej hodnote. Hodnoty pre konkrétne rozsahy výberov  $N$  a počty výberov  $P$  uvedieme v tabuľke 3.2.

Počet výberov	Rozsah výberov	Priemer odhadov variančnej matice
100	10	$\begin{pmatrix} 0.9275 + 0.0000i & 0.4831 - 0.0059i \\ 0.4831 + 0.0059i & 0.9347 + 0.0000i \end{pmatrix}$
100	20	$\begin{pmatrix} 0.9953 + 0.0000i & 0.4863 + 0.0029i \\ 0.4863 - 0.0029i & 0.9315 + 0.0000i \end{pmatrix}$
100	50	$\begin{pmatrix} 0.9956 + 0.0000i & 0.4970 + 0.0079i \\ 0.4970 - 0.0079i & 0.9817 + 0.0000i \end{pmatrix}$
100	100	$\begin{pmatrix} 1.0011 + 0.0000i & 0.5023 + 0.0048i \\ 0.5023 - 0.0048i & 0.9815 + 0.0000i \end{pmatrix}$
100	500	$\begin{pmatrix} 1.0024 + 0.0000i & 0.5028 - 0.0049i \\ 0.5028 + 0.0049i & 1.0014 + 0.0000i \end{pmatrix}$
1000	10	$\begin{pmatrix} 0.9002 + 0.0000i & 0.4479 + 0.0011i \\ 0.4479 - 0.0011i & 0.8973 + 0.0000i \end{pmatrix}$
1000	20	$\begin{pmatrix} 0.9573 + 0.0000i & 0.4799 - 0.0008i \\ 0.4799 + 0.0008i & 0.9477 + 0.0000i \end{pmatrix}$
1000	50	$\begin{pmatrix} 0.9839 + 0.0000i & 0.4922 - 0.0003i \\ 0.4922 + 0.0003i & 0.9830 + 0.0000i \end{pmatrix}$
1000	100	$\begin{pmatrix} 0.9913 + 0.0000i & 0.4941 + 0.0018i \\ 0.4941 - 0.0018i & 0.9894 + 0.0000i \end{pmatrix}$
1000	500	$\begin{pmatrix} 0.9955 + 0.0000i & 0.4974 + 0.0003i \\ 0.4974 - 0.0003i & 0.9983 + 0.0000i \end{pmatrix}$

Tabuľka 3.2: Priemery maximálne vierohodných odhadov variančných matíc

Pripomeňme, že teoretická variančná matice je tvaru (3.2). V tabuľke môžeme sledovať pri fixnom počte výberov  $P = 100$  a narastajúcom rozsahu výberu, že pri rozsahu výberu  $N = 100$  sa k teoretickým hodnotám variančnej matice dostaneme najbližšie s výnimkou prvku na pozícii (2,2). Pre rozsah výberu  $N = 500$  k prvku na pozícii (2,2) teoretickej variančnej matice ešte dokážeme priblížiť, ale v prípade prvkov na ostatných pozíciách sa k teoretickým hodnotám už viac priblížiť nedokážeme. Pri fixnom počte výberov  $P = 1000$  a narastajúcom rozsahu výberu môžeme sledovať, že jednotlivé prvky priemeru odhadov variančnej matice skutočne konvergujú k hodnotám na príslušných pozíciách teoretickej variančnej matice.

## 3.2 Výberové smerodajné odchýlky odhadov

Na doplnenie štúdie presnosti odhadov spočítame ich výberové smerodajné odchýlky. Očakávame, že pre väčší počet výberov  $P$  a väčší rozsah výberov  $N$  sa budú smerodajné odchýlky znižovať. Hodnoty pre pre konkrétne rozsahy výberov  $N$  a počty výberov  $P$  uvedieme v tabuľkách. Pre prípad výberovej smerodajnej odchýlky odhadov strednej hodnoty (3.4) máme s využitím (3.3) po zložkách

$$s_{x1} = \left[ \frac{1}{P-1} \sum_{r=1}^P \left( x_{pr,1}^r - \frac{1}{P} \sum_{r=1}^P x_{pr,1}^r \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$s_{x2} = \left[ \frac{1}{P-1} \sum_{r=1}^P \left( x_{pr,2}^r - \frac{1}{P} \sum_{r=1}^P x_{pr,2}^r \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$s_{y1} = \left[ \frac{1}{P-1} \sum_{r=1}^P \left( y_{pr,1}^r - \frac{1}{P} \sum_{r=1}^P y_{pr,1}^r \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$s_{y2} = \left[ \frac{1}{P-1} \sum_{r=1}^P \left( y_{pr,2}^r - \frac{1}{P} \sum_{r=1}^P y_{pr,2}^r \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Hodnoty jednotlivých zložiek uvedieme v tabuľke 3.3.

Počet výberov	Rozsah výberov	$s_{x1}$	$s_{x2}$	$s_{y1}$	$s_{y2}$
100	10	0.2253	0.2117	0.2216	0.2165
100	20	0.1505	0.1517	0.1585	0.1650
100	50	0.0992	0.1091	0.0977	0.0977
100	100	0.0663	0.0739	0.0667	0.0685
100	500	0.0312	0.0320	0.0342	0.0327
1000	10	0.2183	0.2173	0.2181	0.2217
1000	20	0.1581	0.1615	0.1544	0.1534
1000	50	0.0969	0.0999	0.1011	0.0998
1000	100	0.0683	0.0722	0.0682	0.0694
1000	500	0.0317	0.0320	0.0324	0.0323

Tabuľka 3.3: Výberové smerodajné odchýlky odhadov strednej hodnoty

Pri fixnom počte výberov  $P = 100$  vidíme, že sa narastajúcim rozsahom výberov sa hodnoty jednotlivých zložiek skutočne znižujú. Keď však zmeníme počet výberov na  $P = 1000$  taktiež vidíme, že sa hodnoty jednotlivých zložiek znižujú. Počet výberov  $P$  nemá na hodnoty výberových smerodajných odchýliek výrazný vplyv.

Pre prípad výberovej smerodajnej odchýlky odhadov variančnej matice  $\hat{\Gamma}^r$  máme s využitím (3.5) po prvkoch

$$s_{\gamma,11} = \left[ \frac{1}{P-1} \sum_{r=1}^P (\hat{\gamma}_{1,1}^r - \hat{\gamma}_{PR,11})^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$s_{c1} = \left[ \frac{1}{P-1} \sum_{r=1}^P (c_1^r - c_{PR,1})^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$s_{c2} = \left[ \frac{1}{P-1} \sum_{r=1}^P (c_2^r - c_{PR,2})^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$s_{\gamma,22} = \left[ \frac{1}{P-1} \sum_{r=1}^P (\hat{\gamma}_{2,2}^r - \hat{\gamma}_{PR,22})^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Hodnoty jednotlivých smerodajných odchýliek uvedieme v tabuľke 3.4.

Počet výberov	Rozsah výberov	$s_{\gamma,11}$	$s_{c1}$	$s_{c2}$	$s_{\gamma,22}$
100	10	0.3289	0.2949	0.2216	0.1890
100	20	0.2326	0.1800	0.1178	0.2065
100	50	0.1430	0.1215	0.0800	0.1431
100	100	0.1166	0.0833	0.0642	0.0881
100	500	0.0483	0.0382	0.0284	0.0473
1000	10	0.3075	0.2530	0.1868	0.3171
1000	20	0.2185	0.1706	0.1327	0.2174
1000	50	0.1370	0.1084	0.0819	0.1398
1000	100	0.0996	0.0795	0.0623	0.0983
1000	500	0.0441	0.0352	0.0274	0.0442

Tabuľka 3.4: Výberové smerodajné odchýlky odhadov prvkov variančnej matice

Pri fixnom počte výberov  $P = 100$  vidíme, že s narastajúcim rozsahom výberov sa hodnoty smerodajných odchýliek skutočne znižujú a počet výberov  $P$  nemá zásadný vplyv. Je to analogické prípadu smerodajných odchýliek odhadov strednej hodnoty v tabulke 3.3. Napríklad pre rozsah výberu  $N = 10$  sa pri zmene počtu výberov z  $P = 100$  na  $P = 1000$  znížia hodnoty všetkých smerodajných odchýliek okrem  $s_{\gamma,22}$ . Ak zvýšime rozsah výberu na  $N = 500$ , potom sa hodnoty všetkých smerodajných odchýliek pri zmene počtu výberov z  $P = 100$  na  $P = 1000$  nepatrne znížia.

### 3.3 Empirická hladina testu

Pre každý z  $P$  výberov určíme testovú štatistiku (2.16) podľa práce Giri (1965). Využitím dôsledku 2.4 dopočítame v každom výbere testovú štatistiku (2.17) s  $F$  - rozdelením so stupňami voľnosti 4, 2 ( $N - 2$ ). Generovali sme výbery z komplexného normálneho rozdelenia, kde  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{E} \mathbf{Z} = \mathbf{0}$ . Teraz chceme určiť empirickú hladinu testu  $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ . Označme  $n_P$  počet výberov, v ktorých bola zamietnutá hypotéza  $H_0$ . Sú to teda výbery, pre ktoré platí

$$F^r \geq F_{4,2(N-2)}(0.95),$$

kde  $F^r$  je testová štatistika  $r$  - tého výberu pre  $r = 1, \dots, P$ .

Bude nás zaujímať relatívna četnosť výberov, v ktorých bola hypotéza  $H_0$  zamietnutá, napriek tomu, že platí, teda  $n_P/P$ . Očakávame, že pre väčší rozsah výberu a väčší počet výberov by mal byť tento pomer približne 0.05. Hodnoty pre konkrétne rozsahy výberov  $N$  a počty výberov  $P$  uvedieme v tabuľke 3.5. Môžeme vidieť, že pomer počtu výberov, v ktorých bola hypotéza  $H_0$  zamietnutá k celkovému počtu výberov  $P$  sa pri väčšom počte výberov a väčšom rozsahu pohybuje okolo očakávanej hodnoty 0.05.

Počet výberov	Rozsah výberov	Počet výberov so zamietnutou $H_0$	Pomer $n_P/P$
100	10	3	0.03
100	20	4	0.04
100	50	6	0.06
100	100	7	0.07
100	500	6	0.06
1000	10	47	0.047
1000	20	46	0.046
1000	50	47	0.047
1000	100	48	0.048
1000	500	56	0.056

Tabuľka 3.5: Empirická hladina testu hypotézy  $H_0$

### 3.4 Empirická sila testu

Teraz budeme generovať výber vektorov reálnych a imaginárnych častí  $\Psi_1, \dots, \Psi_N$  z mnohorozmerného normálneho rozdelenia so strednou hodnotou

$$\mathbf{E} \Psi = \mathbf{E} (X_1, Y_1, X_2, Y_2)^\top \neq \mathbf{0}$$

a variančnou maticou (3.1). Z vektorov  $\Psi_1, \dots, \Psi_N$  dostaneme výber  $z_1, \dots, z_N$  z komplexného normálneho rozdelenia so strednou hodnotou  $\mathbf{E} \mathbf{Z} = \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$  a variančnou maticou (3.2).

Analogicky ako v prípade  $\mathbf{E} \Psi = \mathbf{E} (X_1, Y_1, X_2, Y_2)^\top = \mathbf{0}$  budeme takýchto výberov  $z_1, \dots, z_N$  o rozsahu  $N = 10, 20, 50, 100, 500$  generovať  $P = 100, 1000$  a pre každý z  $P$  výberov spočítame testovú štatistiku  $T^2$  podľa vzorca (2.16) a následne  $F$  - štatistiku (2.17).

Na určenie empirickej sily testu  $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$  proti alternatíve  $H_1 : \boldsymbol{\mu}^* \Gamma^{-1} \boldsymbol{\mu} > \mathbf{0}$  použijeme počet výberov, v ktorých bola zamietnutá hypotéza  $H_0$ . Označme ho opäť  $n_P$ . Bude nás zaujímať relatívna četnosť výberov, v ktorých bola hypotéza  $H_0$  zamietnutá v prípade, že neplatí, teda  $n_P/P$ . Očakávame, že pre väčší rozsah výberu a väčší počet výberov by sa mal tento pomer zväčšovať. Hodnoty pre konkrétne rozsahy výberov  $N$  a počty výberov  $P$  uvedieme pre rôzne voľby stredných hodnôt v tabuľkách 3.6 - 3.9.

Počet výberov	Rozsah výberov	Počet výberov so zamietnutou $H_0$	Pomer $n_P/P$
100	10	14	0.14
100	20	25	0.25
100	50	52	0.52
100	100	86	0.86
100	500	100	1
1000	10	111	0.111
1000	20	213	0.213
1000	50	494	0.494
1000	100	853	0.853
1000	500	1000	1

Tabuľka 3.6: Empirická sila testu hypotézy  $H_0$  pre  $\mathbf{E} X_1 = \mathbf{E} Y_1 = 1/8$ ,  $\mathbf{E} X_2 = 1/10$  a  $\mathbf{E} Y_2 = -1/10$

Počet výberov	Rozsah výberov	Počet výberov so zamietnutou $H_0$	Pomer $n_P/P$
100	10	28	0.28
100	20	59	0.59
100	50	98	0.98
100	100	100	1
100	500	100	1
1000	10	264	0.264
1000	20	556	0.556
1000	50	967	0.967
1000	100	1000	1
1000	500	1000	1

Tabulka 3.7: Empirická sila testu hypotézy  $H_0$  pre  $E X_1 = E Y_1 = 1/4$ ,  $E X_2 = 1/8$  a  $E Y_2 = -1/8$

Počet výberov	Rozsah výberov	Počet výberov so zamietnutou $H_0$	Pomer $n_P/P$
100	10	38	0.38
100	20	82	0.82
100	50	100	1
100	100	100	1
100	500	100	1
1000	10	403	0.403
1000	20	779	0.779
1000	50	1000	1
1000	100	1000	1
1000	500	1000	1

Tabulka 3.8: Empirická sila testu hypotézy  $H_0$  pre  $E X_1 = E Y_1 = E X_2 = 1/4$  a  $E Y_2 = -1/4$

Počet výberov	Rozsah výberov	Počet výberov so zamietnutou $H_0$	Pomer $n_P/P$
100	10	82	0.82
100	20	100	1
100	50	100	1
100	100	100	1
100	500	100	1
1000	10	821	0.821
1000	20	997	0.997
1000	50	1000	1
1000	100	1000	1
1000	500	1000	1

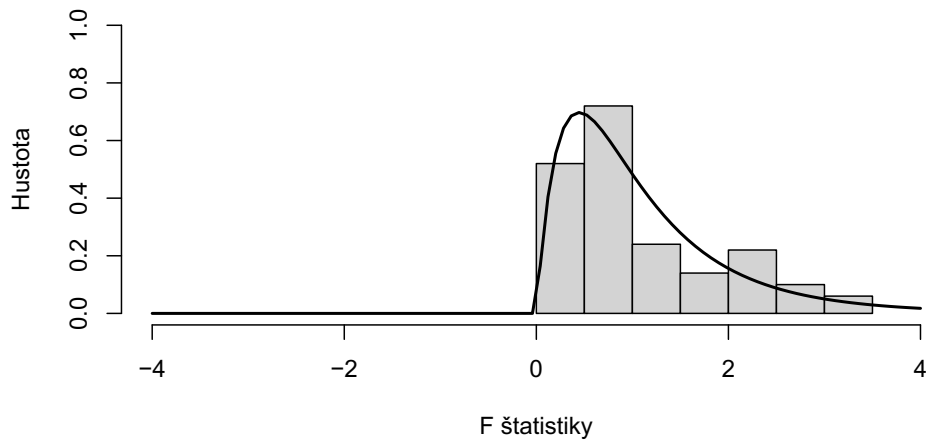
Tabuľka 3.9: Empirická sila testu hypotézy  $H_0$  pre  $E X_1 = E Y_1 = 1/2$ ,  $E X_2 = 1/4$  a  $E Y_2 = -1/4$

V tabuľkách 3.6 - 3.9 vidíme, že empirická sila testu sa zväčšuje s rastúcim rozsahom výberu, počet výberov na ňu nemá výrazný vplyv. Zároveň môžeme pozorovať, ako sa sila testu zvyšuje pri stredných hodnotách vzdialenejších od nuly.

### 3.5 Histogramy F štatistík

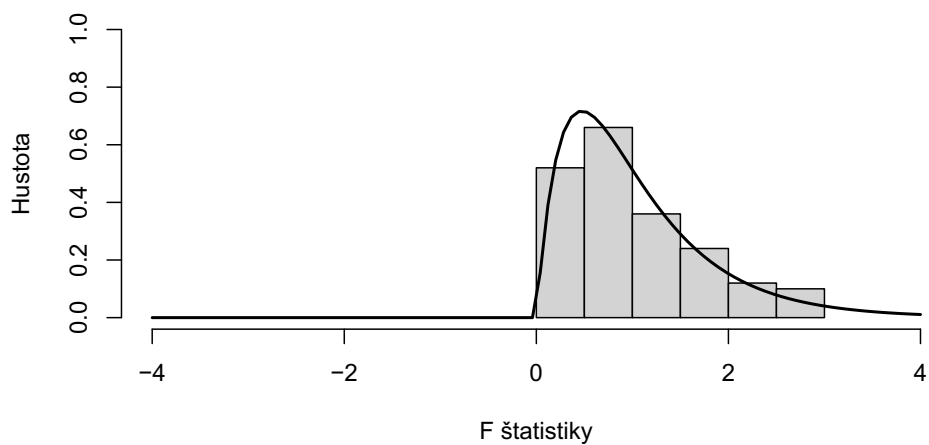
Na záver porovnáme empirické rozdelenie testovej štatistiky (2.17) s jej teoretickým  $F$  - rozdelením so stupňami voľnosti 4,  $2(N-2)$ . Pre uvažované kombinácie počtu generovaných výberov  $P$  a rozsahu výberu  $N$  vykreslíme histogramy napočítaných štatistík  $F^r$  pre  $r = 1, \dots, P$  spolu s hustotou príslušného  $F$  - rozdelenia. Porovnanie pre jednotlivé histogramy s hustotou môžeme sledovať na obrázkoch 3.1 až 3.10. Všimnime si napríklad histogram pre  $P = 100$  a  $N = 20$  na obrázku 3.2 a porovnajme ho s histogramom pre  $P = 1000$  a  $N = 20$  na obrázku 3.7. Pri zvýšení počtu výberov na  $P = 1000$  sa hustote  $F$  - rozdelenia so stupňami voľnosti 4 a 36 priblížime výraznejšie ako je to v prípade  $P = 100$ .

**Histogram F štatistik pre P = 100 a N = 10**



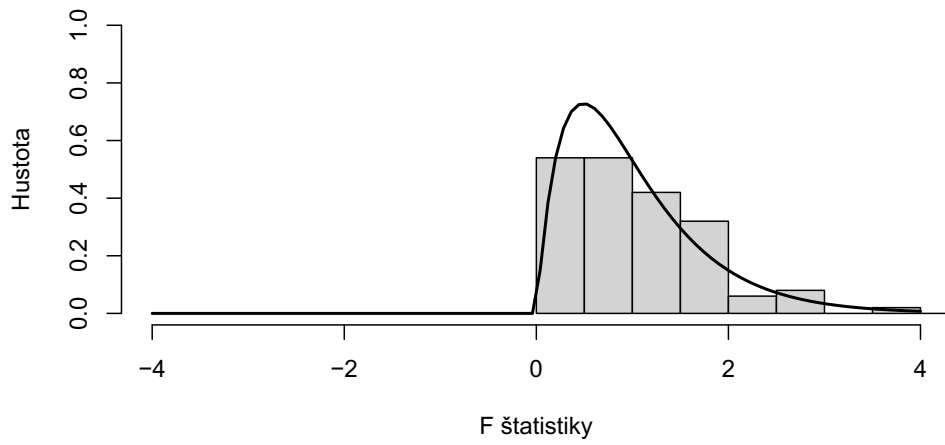
Obr. 3.1: Histogram F štatistik pre P = 100 a N = 10

**Histogram F štatistik pre P = 100 a N = 20**



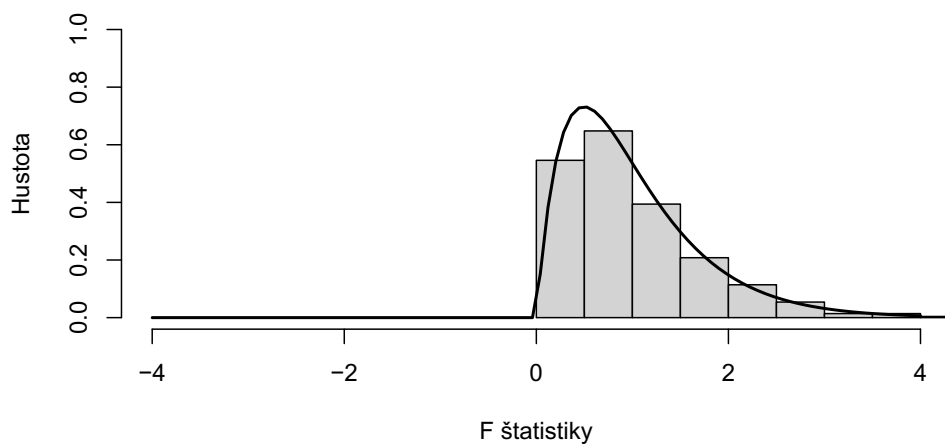
Obr. 3.2: Histogram F štatistik pre P = 100 a N = 20

**Histogram F štatistik pre P = 100 a N = 50**



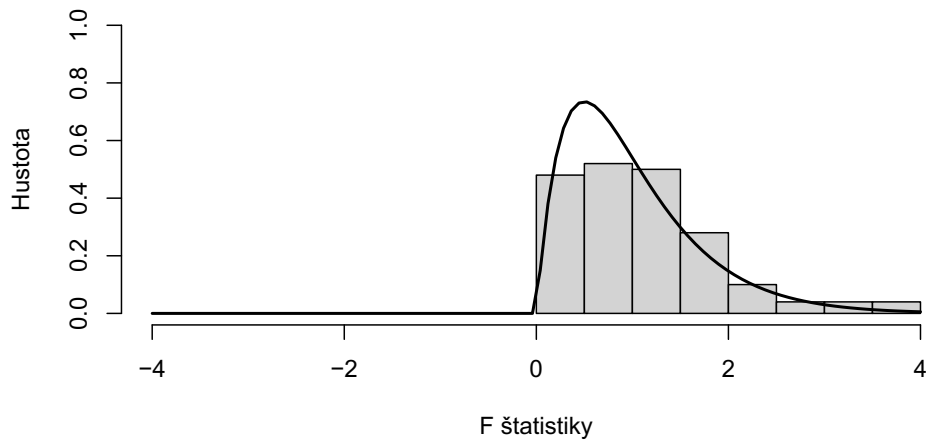
Obr. 3.3: Histogram F štatistik pre P = 100 a N = 50

**Histogram F štatistik pre P = 100 a N = 100**



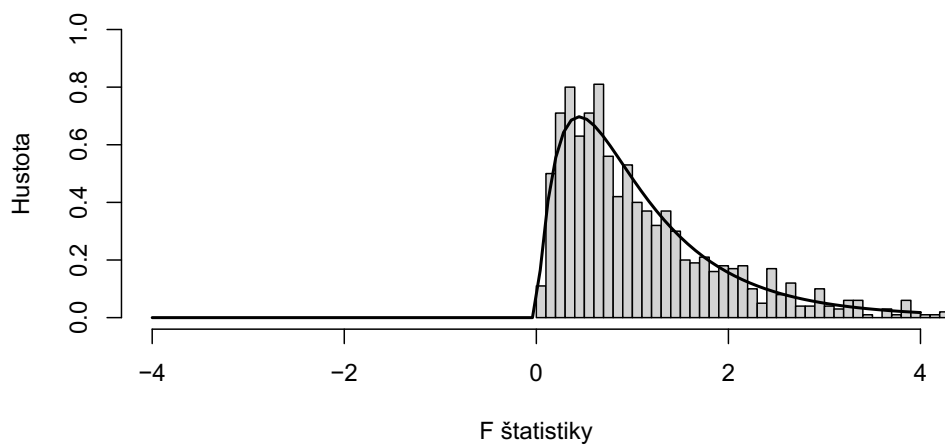
Obr. 3.4: Histogram F štatistik pre P = 100 a N = 100

**Histogram F štatistik pre  $P = 100$  a  $N = 500$**



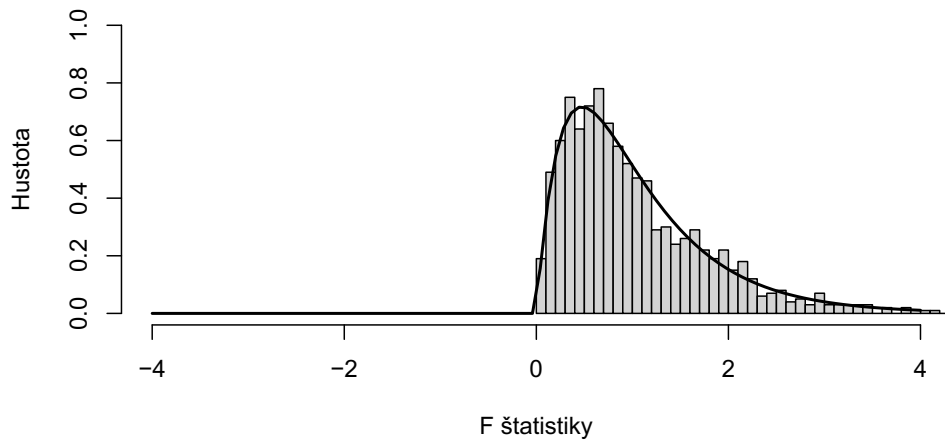
Obr. 3.5: Histogram F štatistik pre  $P = 100$  a  $N = 500$

**Histogram F štatistik pre  $P = 1000$  a  $N = 10$**



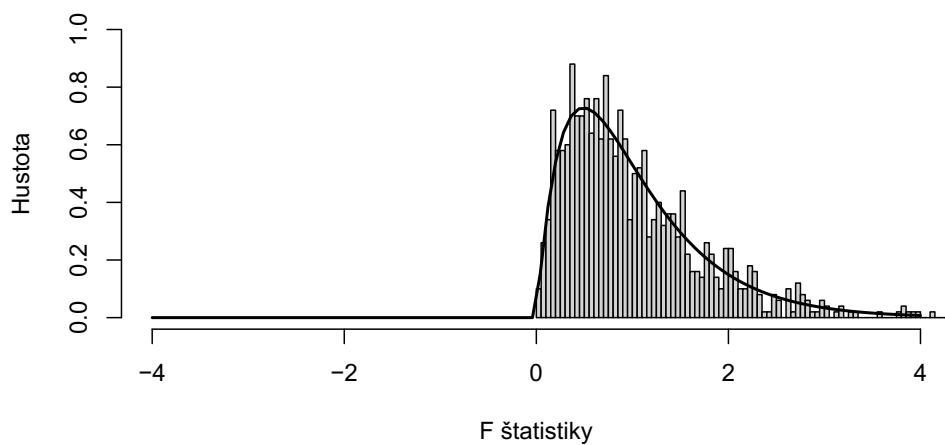
Obr. 3.6: Histogram F štatistik pre  $P = 1000$  a  $N = 10$

**Histogram F štatistik pre P = 1000 a N = 20**



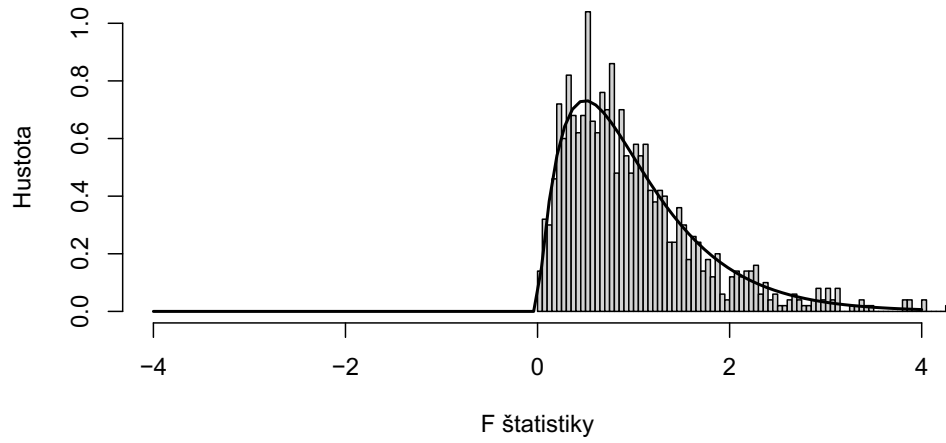
Obr. 3.7: Histogram F štatistik pre P = 1000 a N = 20

**Histogram F štatistik pre P = 1000 a N = 50**



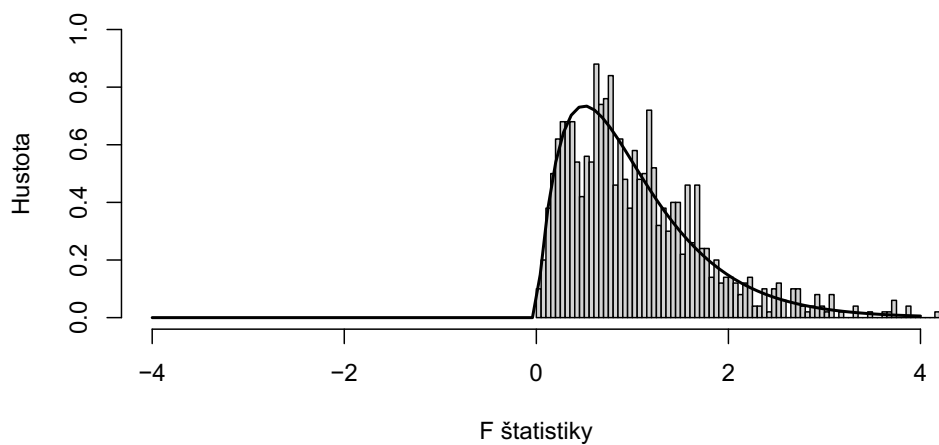
Obr. 3.8: Histogram F štatistik pre P = 1000 a N = 50

**Histogram F štatistik pre P = 1000 a N = 100**



Obr. 3.9: Histogram F štatistik pre P = 1000 a N = 100

**Histogram F štatistik pre P = 1000 a N = 500**



Obr. 3.10: Histogram F štatistik pre P = 1000 a N = 500

# Záver

V práci sme sa venovali komplexným náhodným veličinám a komplexným náhodným vektorom. Definovali sme strednú hodnotu a variančnú maticu komplexného náhodného vektora, kovarianciu komplexných náhodných vektorov. Uviedli sme vlastnosti variančnej matice komplexného náhodného vektora a dokázali sme ich. V závere prvej kapitoly sme definovali rozšírenú variančnú maticu a uviedli sme spôsob, akým môžeme túto maticu vyjadriť.

Odvodili sme hustotu komplexného normálneho rozdelenia z hustoty mnohorozmerného normálneho rozdelenia reálneho náhodného vektora, pričom sme využili už dokázané vzťahy a vyjadrenia pre rozšírenú variančnú maticu a augmentačnú maticu.

V simulačnej štúdii sme predpokladali, že so zvyšujúcim sa počtom výberov a zvyšujúcim sa rozsahom výberov sa budú priemery odhadov parametrov komplexného normálneho rozdelenia blížiť k zvoleným teoretickým hodnotám. Výsledky sme sledovali v tabulkách. V prípade priemerov odhadov strednej hodnoty sa náš predpoklad potvrdil. Ukázalo sa, že v prípade priemerov odhadov variančnej matice má na priblíženie sa k teoretickým hodnotám zásadnejší vplyv rozsah výberov než počet výberov.

V prípade odhadov smerodajných odchýliek odhadov strednej hodnoty a variančnej matice sme očakávali, že so zvyšujúcim sa počtom výberov a zvyšujúcim sa rozsahom výberov sa budú hodnoty jednotlivých zložiek znižovať. Ukázalo sa však, že počet výberov nemá na hodnoty smerodajných odchýliek zásadný vplyv. Ale s narastajúcim rozsahom výberov sa hodnoty skutočne znížili.

Pre uvažované kombinácie počtu generovaných výberov a rozsahu výberov sme vypočítali empirickú hladinu testu nulovosti strednej hodnoty. Zistili sme, že hladina testu sa pohybuje okolo zvolenej hladiny 5%. Empirickú silu testu sme pozorovali pre rôzne voľby nenulových stredných hodnôt.

Pre uvažované kombinácie počtu generovaných výberov a rozsahu výberov sme vykreslili histogramy napočítaných štatistík spolu s hustotou príslušného rozdelenia. Predpokladali sme, že s vyšším počtom generovaných výberov a väčším rozsahom výberov sa hustote príslušného rozdelenia priblížime výraznejšie. Sledovali sme, že počet výberov má na priblíženie k hustote rozdelenia skutočne vplyv, naopak rozsah výberu nemá v tomto prípade zásadný vplyv.

# Zoznam použitej literatúry

- GIRI, N. C. (1965). On the complex analogues of  $t^2$ - and  $r^2$ -tests. *Annals of Mathematical Statistics*, **36**, 664–670.
- GOODMAN, N. R. (1963). Statistical analysis based on a certain multivariate complex gaussian distribution. *Proceedings of the IEEE*.
- HALLIWELL, L. J. (2015). Complex Random Variables. *Casualty Actuarial Society E-Forum*.
- MACDUFFEE, C. C. (1946). *The Theory of Matrices*. Chelsea, New York, NY, USA.

# Zoznam obrázkov

3.1	Histogram F štatistík pre $P = 100$ a $N = 10$ . . . . .	40
3.2	Histogram F štatistík pre $P = 100$ a $N = 20$ . . . . .	40
3.3	Histogram F štatistík pre $P = 100$ a $N = 50$ . . . . .	41
3.4	Histogram F štatistík pre $P = 100$ a $N = 100$ . . . . .	41
3.5	Histogram F štatistík pre $P = 100$ a $N = 500$ . . . . .	42
3.6	Histogram F štatistík pre $P = 1000$ a $N = 10$ . . . . .	42
3.7	Histogram F štatistík pre $P = 1000$ a $N = 20$ . . . . .	43
3.8	Histogram F štatistík pre $P = 1000$ a $N = 50$ . . . . .	43
3.9	Histogram F štatistík pre $P = 1000$ a $N = 100$ . . . . .	44
3.10	Histogram F štatistík pre $P = 1000$ a $N = 500$ . . . . .	44

# Zoznam tabuliek

3.1	Priemery maximálne vierohodných odhadov stredných hodnôt . . .	29
3.2	Priemery maximálne vierohodných odhadov variančných matíc . . .	31
3.3	Výberové smerodajné odchýlky odhadov strednej hodnoty . . . . .	32
3.4	Výberové smerodajné odchýlky odhadov prvkov variančnej matice	33
3.5	Empirická hladina testu hypotézy $H_0$ . . . . .	35
3.6	Empirická sila testu hypotézy $H_0$ pre $E X_1 = E Y_1 = 1/8$ , $E X_2 = 1/10$ a $E Y_2 = -1/10$ . . . . .	36
3.7	Empirická sila testu hypotézy $H_0$ pre $E X_1 = E Y_1 = 1/4$ , $E X_2 = 1/8$ a $E Y_2 = -1/8$ . . . . .	37
3.8	Empirická sila testu hypotézy $H_0$ pre $E X_1 = E Y_1 = E X_2 = 1/4$ a $E Y_2 = -1/4$ . . . . .	38
3.9	Empirická sila testu hypotézy $H_0$ pre $E X_1 = E Y_1 = 1/2$ , $E X_2 = 1/4$ a $E Y_2 = -1/4$ . . . . .	39

# A. Prílohy

## A.1 Prvá príloha

Prvá elektronická príloha obsahuje RMD súbor s nagenrovanými výbermi pre nulovú strednú hodnotu vektora reálnych a imaginárnych častí a následne prácu s nimi v programe R.

## A.2 Druhá príloha

Druhá elektronická príloha obsahuje RMD súbor s nagenrovanými výbermi pre nenulovú strednú hodnotu vektora reálnych a imaginárnych častí a následne prácu s nimi v programe R.