

UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

**Vývoj maturitní zkoušky na našem území
na příkladu logaritmů**

Eliška Straková

vedoucí práce: Mgr. Kristýna Nižňanská.
studijní program: Specializace v pedagogice
studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

2023

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Vývoj maturitní zkoušky na našem území na příkladu logaritmů potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 17. dubna 2023

Eliška Straková

Chtěla bych poděkovat svému Bohu za Jeho pomoc a požehnání v mém životě i v celém studiu i za zdárné sepsání a dokončení této práce. Také Panně Marii, Matce Božího Milosrdenství, za Její mocné přímluvy. Dále bych chtěla poděkovat své vedoucí práce za její velmi ochotné rady, a za veškerý její tomuto dílu obětovaný čas. Ráda bych také vyjádřila své díky členům katedry KMDM – obzvláště jejímu vedení – za všechnu jejich laskavost, ochotu a čas navíc, který obzvláště mně věnovali. Svoje poděkování chci věnovat i své paní studijní referentce za všechnu její pomoc během studia.

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce pojednává o historii maturitní zkoušky a zaměřuje se především na změny, týkající se maturit z matematiky. Cílem této práce je zmapovat vývoj maturit z matematiky na našem území a pro tento účel je také zvoleno konkrétní téma – logaritmus, na kterém se následně ilustruje rozdíl obsahu dřívějších a dnešních maturit. První část práce se zabývá tím, jaká pravidla od zavedení maturitní zkoušky platila pro maturity z matematiky, objasňuje, kdy žáci měli povinnost z matematiky maturovat a kdy tato povinnost nebyla. Druhá část práce popisuje vznik státních maturit a jejich změny až do letošního roku. Vysvětluje navíc také, co to byla a jak se vyvíjela zkouška Matematika+ a její dnešní obdobu v nepovinné maturitní zkoušce společné části s názvem matematika rozšiřující. Ve třetí části této práce porovnáváme zavádění logaritmu ve starších dobách s tím, jak se logaritmus na školách zavádí dnes. Poté jsou předloženy maturitní úlohy z dřívějších dob ověřující znalosti žáků v učivu o logaritmech. Úlohy jsou rozčleněny do dvou podkapitol, podle toho, zda se daný typ úloh může i dnes objevit v maturitním didaktickém testu z matematiky či nikoliv. Podkapitoly jsou ještě rozčleněny do skupin dle různých typů úloh. Každou skupinu stručně porovnáváme se současností a doplňujeme názorně vyřešeným příkladem.

KLÍČOVÁ SLOVA

Vývoj maturitní zkoušky, maturitní zkouška z matematiky, logaritmus

ABSTRACT

This bachelor thesis deals with the history of the leaving exam and focuses mainly on the changes concerning the school leaving exam in mathematics. The aim of this thesis is to map the development of mathematic leaving exams in our country and for this purpose a specific topic is also chosen – logarithm, which is used to illustrate the difference in the content of former and present school leaving exams. The first part of the thesis deals with the rules that have applied to mathematic school leaving exam since the introduction of the school leaving exam, explaining when pupils were obliged to matriculate in mathematic and when they were not. The second part of the thesis describes the origin of the state leaving exams and their changes up to this year. In addition, it explains what the Mathematics+ exam was and how it evolved and it also describes its present-day equivalent in an optional school leaving exam of the common part called Mathematics Extension. The third part of this paper compares the introduction of the logarithm in earlier times with the way the logarithm is introduced in schools today. Then school leaving exam problems from earlier times, which are testing pupils' knowledge of the logarithm, are presented. The problems are divided into two groups of problems, according to whether or not the type of problem can still appear in a mathematic didactic test today. The groups are further divided into subgroups according to the different types of problems. Each subgroup is briefly compared with the present and supplemented with an illustrative example.

KEYWORDS

Development of school leaving exams, school leaving exam in Mathematics, logarithm

Obsah

Úvod	8
1 Z historie maturitní zkoušky	11
1.1 Název a účel	11
1.2 Počátky	12
1.3 Proměny maturitní zkoušky z matematiky	13
1.4 Tabulky maturit z matematiky	19
2 Současná maturitní zkouška z matematiky	21
2.1 Zavádění státní maturity – dvě úrovně obtížnosti?	21
2.2 Maturitní zkouška jak ji známe dnes	22
2.3 Otázka zavedení povinné maturity z matematiky	23
2.4 Maturitní zkouška v roce 2023	24
2.5 Matematika rozšiřující (Matematika+)	25
3 Logaritmus	29
3.1 Zavedení logaritmu	29
3.1.1 Logaritmus – zavedení dnes	30
3.1.2 Logaritmus – zavedení dříve	31
3.2 Logaritmus v maturitní zkoušce	32
3.2.1 Úlohy, které se mohou ve státní MZ objevit i dnes . . .	36
3.2.2 Úlohy, které se nyní ve státní MZ neobjeví	43
Závěr	53
Seznam použitých informačních zdrojů	54
Přílohy	65

Přehled použitých zkratk

M+	Matematika+
MZ	maturitní zkouška
ŠVP	školní vzdělávací program
RVP	rámcový vzdělávací program
VŠ	vysoká škola

Úmluva

Nebude-li uvedeno jinak, je slovem *ministerstvo*, resp. *ministerstvo školství* rozuměno příslušné ministerstvo školství, dle toho, jak se zrovna v daném období nazývalo.

Nebude-li uvedeno jinak, budeme nadále maturitní zkouškou rozumět maturitní zkoušku při ukončování středního vzdělání běžných žáků posledního ročníku denního studia v českém jazyce.

Nebude-li uvedeno jinak, při zmínce, že maturitní zkouška se odehrála v nějakém konkrétním roce, bude myšlena maturita, která poprvé proběhla v létě uvedeného roku. Například, bude-li uvedeno „předpisy pro MZ v roce 2023“, budou tím myšleny předpisy pro maturitní zkoušku ve školním roce 2022/2023, podle kterých ji maturanti skládají poprvé v létě, dále na podzim a dále do té doby, než jsou předpisy nahrazeny jinými.¹

Některé zdroje pojednávající o maturitě z matematiky do tohoto pojmu zahrnují i maturitu z deskriptivní geometrie. Vzhledem k tomu, že dnes se deskriptivní geometrie na většině středních škol nevyučuje, rozhodli jsme se maturitní zkoušku z ní konanou nepovažovat za maturitu z matematiky, nebude-li uvedeno jinak.

Přejímáme ze zdrojů, z kterých jsme čerpali, označení *tradiční maturitní zkouška* pro maturitní zkoušku, která byla v našich zemích od počátku až do zavedení státních maturit ve školním roce 2010/2011.

¹ Chceme zde na to konkrétně upozornit, protože jsme se velice často setkali s tím, že oním uvedeným rokem byly ve skutečnosti myšleny různé *školní* roky a to dokonce v těch samých dílech. Vznikly pak z toho mnohé zavádějící informace, o kterých se ještě později budeme zmiňovat. Při hledání dat v této oblasti je nutno mít vždy na zřeteli, co autor daného díla oním datem myslí.

Úvod

Cílem této práce je zmapovat vývoj maturitní zkoušky z matematiky. Počet let, který maturitní zkouška probíhá, je již značně vysoký, vždyt' příští rok bude výročí 175 let od zavedení maturit na gymnáziích. Je tedy pochopitelné, že během století a tři čtvrtě prodělala jejich podoba značné změny. O těchto změnách bychom rádi v naší práci pojednali. Protože je však toto téma tolik obsáhlé a nebylo by správné zabývat se jím jen tak ze široka, v další části naší práce vezmeme za konkrétní příklad téma logaritmů, na kterém budeme sledovat, jak konkrétně se mohla maturita dřívější lišit od státních maturit, zadávaných v době dnešní.

Celkově se naše práce skládá se ze tří částí. První část si vytkla za cíl pojednat obecně o maturitě na našem území, zaměřuje se konkrétně na maturitní zkoušku z matematiky. Zde chceme objasnit, jak to bylo s povinností maturovat z matematiky od doby zavedení maturitních zkoušek až k tomu, než byla tradiční maturita zrušena. Původně jsme vlastně naši práci chtěli vést na trochu jiné téma na jehož začátku pouze o historii maturit stručně pojednat. Bylo nám známo, že v několika závěrečných prací na téma maturit se o historii maturitních zkoušek psalo. Rozhodli jsme se z nich sestavit stručný přehled. Z čím více zdrojů jsme však při jeho sestavování čerpali, tím více se nám před očima objevovalo nejasností, protože jsme zjistili, že ony práce si protiřečí. Když už míra toho byla opravdu neúnosná tak, že jsme se nemohli už spolehnout s klidným svědomím na téměř žádný fakt, který tyto práce uváděly (co kdyby zrovna právě onen byl nepravdivý), rozhodli jsme se, že stojí za to, odhalit, jaká byla skutečnost doopravdy. Poznali jsme, že by mohlo být prospěšným dílem vytvořit fakticky přesný a správný přehled o tom, jak to s maturitami z matematiky ve kterém roce bylo.

Naši myšlenku jsme se rozhodli uvést ve skutečnost. Chtěli jsme si pokud možno všechny možné pochybné informace, které jsme se ze závěrečných prací dozvěděli, ověřit i z jiných zdrojů. Tím jsme ovšem začali odhalovat opět nové a nové zavádějící informace. V průběhu tvorby naší práce jsme narazili na publikaci F. Morkese (2003): *Historický přehled postavení maturitní zkoušky a analýza jejích funkcí*. Tato publikace sice neobsahovala ani tak faktické chyby, ale i ona pojednávala a zjednodušovala takovým způsobem, že to vedlo k mylným domněnkám a závěrům. To nás ještě více podnítilo k tomu zjistit, jak se to vlastně s tou maturitou z matematiky mělo doopravdy. Zjistit, ve kterých letech z ní vlastně žáci museli maturovat a jakým to bylo způsobem, zda platila pouze povinnost písemné či ústní zkoušky, nebo zda bylo potřeba vykonat nejen jednu z nich, ale obě. Začali jsme tedy procházet staré věstníky ministerstva školství a hledat v nich předpisy, které byly vydávány pro maturitní zkoušky. Takto jsme chtěli zaručit, že všechny naše informace v této bakalářské práci budou pravdivé. O tom, co jsme se dozvěděli, jaké byly odpovědi na naše otázky, pak tedy v této první části pojednáváme.

Druhá část naší práce pak pokračuje tématem zavádění státních maturit. Poučujeme o dlouhém procesu jejich přípravy, o tom, jak konečně byly spuštěny a zda, a případně jak, se jejich podoba do dnešní doby změnila. Přířnos naší práce spatřujeme také v tom, že na jednom místě se zde snažíme sepsat všechny změny, které se až do letošního roku udály v organizaci státních MZ v matematice. Není nám známo, že by někdo jiný takový podrobný přehled sestavil. V závěrečných pracích, které se zabývají mj. také tímto tématem, jednak chybí úplnost, a těm, které by se daly za podrobné považovat, zase chybí aktuálnost.

O tomto tématu jsme chtěli více pojednat také proto, že z vlastních zkušeností víme, že povědomí o tom, že ani pravidla státních maturitních zkoušek nezůstala beze změny, se mezi dnešní mladou generací pomalu vytrácí. My osobně jsme jen z doslechu slyšeli něco ve smyslu, že kdysi snad bývaly dvě úrovně obtížnosti, avšak nic bližšího nám známo nebylo. A ani tímto jsme si nebyli jisti a měli v tom spoustu zmatků, protože např. na stránkách `cermat.cz` a podobných jsme při přípravě na maturitní zkoušku ani nenašli na to, že by tomu tak kdysi být mohlo. Také nám osobně vůbec – ani přibližně – nebylo známo, zda to tak třeba nebylo vždycky, že zadání maturit zadával stát a pokud ne, tak od kterého roku státní maturity byly spuštěny.

Dnes se již tolik nedivíme naší neznalosti toho, jak to bývalo se dvěma úrovněmi obtížnosti. Ověřili jsme si totiž, že opravdu se o tom příliš nemluví. Maturantům je např. dosti známá internetová stránka `statnimaturita-matika.cz`, kde mohou najít didaktické testy z matematiky od maturitní generálky 2010. Avšak pro roky 2010, 2011, 2012 je zde pro daný termín jen jeden test, jako by byla úroveň obtížnosti pouze jedna. Je to test základní úrovně. Osobu, která by to však nevěděla, by ani nenapadlo, že ještě mohla být nějaká vyšší úroveň. Na současných oficiálních stránkách CERMATu zadání z těch let ani není zveřejněno. Proto také jako součást práce chceme rozvést a vysvětlit, jak to bylo s tím, že maturanti mohli mít dvě úrovně obtížnosti. Jaká byla pravidla apod. Že právě s tím pak souvisí vznik zkoušky Matematika+ a její pokračovatelky matematiky rozšiřující, o jejichž vzniku v naší práci také pojednáváme. Než se však začneme jejich vznikem zabývat, ještě krátce informujeme o tom, jak se plánovalo zavedení *povinné* státní maturitní zkoušky z matematiky a jak z toho sešlo. Také o tom, jaká jsou pravidla pro maturitní zkoušku, především z matematiky, v roce 2023.

Třetí část práce se pak již přímo zabývá obsahem maturit dřívějších dob. Protože je toto téma tak široké, že by vystačilo i na několik dizertačních prací, zaměřuje se naše práce jen na jednu z mnoha tematických oblastí, které se v maturitách v průběhu let objevily. Na příkladě logaritmů, učivu, které se v maturitních zkouškách vyskytuje od jejich zavedení až po současnost, chceme ukázat, jak konkrétně se např. mohla maturita dřívějšíka lišit od státních maturit, zadávaných v době dnešní. Na úvod porovnáváme, jak se zavádí logaritmus v dnešních učebnicích, s tím, jak se zaváděl dříve. Poté

již přímo píšeme o logaritmu v maturitní zkoušce. Vysvětlujeme zde, proč je téma logaritmu tak zajímavé. Rozebíráme dále, jaké znalosti v učivu logaritmů museli žáci tehdy mít, a porovnáváme s tím, jak je to dnes. Názorně zde ukazujeme vzorové úlohy z různých okruhů, kterými lze znalost práce s logaritmem ověřit. Z každého okruhu vždy jednu úlohu uvádíme i se vzorovým řešením. Pro lepší přehlednost jsme třetí kapitolu rozdělili do dvou podkapitol. V první z nich uvádíme ukázkou úloh z okruhů, které žáky dříve mohly při maturitách čekat, které také ale mohou čekat žáky i dnes. Ve druhé z podkapitol zde uvádíme úlohy, které se dnes již ve státní maturitní zkoušce neobjeví. S těmito úlohami by však přesto mohli být dnešní žáci seznamováni přinejmenším na volitelných matematických seminářích. Vědomosti o tom, jak i dosti složité příklady mohou vyřešit i když u sebe nebudou mít žádnou elektroniku by mohly zvýšit jejich celkový zájem o učivo logaritmů.

Doufáme, že se nám v naší práci podaří osvětlit a uvést na pravou míru dosud nejasné a příliš zjednodušené informace, které byly uváděny o maturitní zkoušce z matematiky v našich zemích. Také, že vytvoříme kvalitní přehled o tom, jaké se v historii zadávaly maturitní úlohy na téma logaritmu a jaké zůstaly i do dnešních dob.

Jako službu všem zájemcům o znalosti v oblasti maturit z matematiky, se pokusíme v naší práci upozornit alespoň na některé nepřesné informace, na které jsme při procházení výše zmíněných závěrečných prací narazili. Tím bychom rádi jiné varovali, aby také nebyli zavedeni tak daleko od pravdy, jako se to nejdříve stalo nám. Chceme tak napomoci mimo jiné i všem dalším studentům, kteří by ve svých (nejen) závěrečných pracích chtěli o historii maturit pojednat. Je běžné, že některá závěrečná práce cituje jinou, smutné ale je, když z ní cituje nepravdivé informace, které pak třeba odcituje ještě práce další. S jistým zděšením jsme se totiž stali svědky toho, že ony nepravdivé informace se citují od jedné závěrečné práce k druhé a tím se stává čím dál více pravděpodobné, že se ony omyly ještě více rozšíří. Tomu bychom rádi alespoň do té míry, do jaké jsme schopni, zabránili. Považujeme tedy za přínosné, alespoň na některé chyby upozornit. Tato upozornění budeme nejčastěji psát do poznámek pod čarou. Do nich budeme vepisovat i spoustu dalších zajímavostí, kterými bychom rádi naši práci ještě obohatili a zpestřili.

V příloze pak uvedeme vícero závěrečných prací pojednávajících na téma *historie maturitních zkoušek a maturita z matematiky*. S těmito pracemi jsme se setkali a je procházeli a rádi bychom na ně upozornili. Chceme vytvořit stručný přehled, o čem konkrétně ony práce pojednávají. Tento přehled může být přínosný každému, kdo by se rozhodl psát závěrečnou práci na téma maturit, informuje o tom, co již vzniklo, o čem již se psalo. Spolu s dalšími námi zde uvedenými zdroji se tak náš souhrn může stát užitečnou pomůckou pro všechny, kdo se také budou zabývat nějakou částí našeho tématu.

V naší práci narážíme na mnohé otevřené otázky k dalšímu hlubšímu bádání. Tyto mohou být inspirací pro další závěrečné práce. I k tomu by konečně naše práce ráda posloužila.

1 Z historie maturitní zkoušky

1.1 Název a účel

Nejprve vymezíme pojem maturitní zkoušky. Maturita, oficiálním termínem maturitní zkouška, je zkouška, která ukončuje studium na středních školách a jiných školách středoškolské úrovně (Průcha et al., 2009). Slovo „maturita“, má svůj původ v latinském slově *maturitas* = zralost (Skutil, 2008). Není tedy příliš překvapivé, že mnoho let oficiálním názvem maturitní zkoušky bylo: *zkouška dospělosti*.

Jak tedy název příhodně naznačuje, jejím hlavním úkolem mělo být prokázání žákovy zralosti na konci jeho středoškolských studií. Jednak ve smyslu zralosti pro studium na vysoké škole, jednak ve smyslu formální schopnosti samostatného úsudku. O. Chlup (1935) uvádí, že maturita vždy byla zkouškou vědomostí a dovedností, které žák nasbíral v průběhu svého dosavadního studia. Pravdou však je, že vymezení účelu maturitní zkoušky se v různých letech dosti značně odlišovalo.

Zajímavé je seznámit se s tím, jak se vytyčuje účel této zkoušky v díle J. Auerhana a kolektivu (1913):

... jednak mají touto zkouškou nezralí žáci od studia vysokoškolského býti zdrženi, jednak má tím býti dána škole pravidelná příležitost, aby se před úřady představenými vykážala, pokud svého úkolu dosáhla (s. 497).

O několik desetiletí později však nacházíme účel dosti odlišný:

Účel závěrečné zkoušky ve IV. třídě střední školy je zjistit, jaké úrovně uceleného základního vzdělání dosáhl žák v době své povinné školní docházky, jaká je jeho ideově politická i mravní vyspělost i jeho poměr k našemu lidově demokratickému zřízení a jaké předpoklady mu škola dala pro budoucí povolání nebo pro další studium. Závěrečnou zkouškou vyvrcholuje pomoc školy při rozmístění patnáctiletého dorostu podle hospodářských potřeb státu (Věstník, 1953, s. 25).

Ve skutečnosti její účel a smysl vždycky (pouze s výjimkou prvního desetiletí trvání MZ) byl a stále je v průběhu celého jejího dosavadního vývoje a trvání neustále diskuze vzněcující (Morkeš, 2003).

1.2 Počátky

V českých zemích byla maturitní zkouška² zavedena v roce 1849, v rakouské němčině se pro naši zkoušku užíval termín *Maturitätsprüfung* (Jahresbericht, 1900), a to jako povinná zkouška na gymnáziích, která se stala podmínkou přijetí na vysoké školy. Na reálných gymnáziích byla nepovinná, ale jen do roku 1869, kdy se na Moravě i na nich stává povinnou, v Čechách pak v roce 1874 (Auerhan et al., 1913). Při svém vzniku se maturita skládala ze zkoušek ze všech předmětů, počet předmětů se však v průběhu její historie velice měnil. Jedním z důvodů bylo, že se s postupem času začaly ozývat hlasy o přetěžování žáků (Chlup, 1935).

Zavedení maturit bylo na začátku přijímáno veřejností dosti kladně. Avšak po uplynutí několika prvních desetiletí se téma maturit stalo neustálým předmětem diskuzí a polemik a tato situace přetrvala až do dnešních dob. Tak např. se hned o roku 1908 píše:

Maturita byla do roku 1908 (a částečně dosud jest) hlavní příčinou útoků veřejnosti proti střední škole. Tak bylo i na vídeňské anketě středoškolské roku 1908. Někteří řečníci, zvláště lékaři, vytýkali maturitě, že způsobuje hysterii a nervositu, o čemž svědčí děsivé sny maturitní až do nejpozdnějšího věku. Má-li prý maturita býti kontrolou učitelů, neměli by žáci za učitele pykati. Jiní řečníci však naproti tomu dokazovali nezbytnost této zkoušky. Kdyby byla odstraněna, jistě by došlo zase na přijímací zkoušky na školách vysokých, jež by byly ještě obtížnější (. . .). Kromě toho jest maturita vhodnou přípravou pro obtížnější ještě zkoušky vy-

² Není-li uvedeno jinak, závěrečné zkoušky na středních školách – maturity, o kterých zde pojednáváme, se týkají především gymnázií a jim podobným školám, po jejichž absolvování bylo možné a většinou i běžné pokračovat studiem na vysoké školy. Důvodem je mj. nejednoznačnost pojmu střední škola. Do roku 1948 se střední školou označovala pouze gymnázia a reálky (Kavanová, 2007; Kabrdová, 2022). Velké množství škol, které bychom dnes označili za střední, právo k vykonání maturitní zkoušky neměly. Obecně platí, jak zde naznačujeme, že nejdříve právo konat maturitní zkoušku měla gymnázia, dále pak reálky a z těchto časem vzniklá reálná a reformní reálná gymnázia. Postupně škol s právem konat maturity přibývalo, tím se však v této práci podrobněji nezabýváme. Pojednání o analýze všech typů škol, na kterých od roku 1849 maturity postupně začaly probíhat, a podobě těchto zkoušek by mnohonásobně přesáhlo rozsah této práce. Případné zájemce odkazujeme na F. Morkese (2003), kde se mohou seznámit alespoň s některými pravidly platnými na učitelských ústavech a odborných školách. Odborné školy, učitelské ústavy, obchodní akademie, střední odborná učiliště, konzervatoře, dívčí lycea atp. měly v historii své zvláštnosti, které se lišily dle typu jednotlivých škol. Jen takovýto přehled o maturitních řádech na všech těchto vzdělávacích institucích a jejich změnách by mohl být předmětem další závěrečné práce. Podrobný přehled a informace o středních všeobecně vzdělávacích školách (rozumíme tím ty, které byly od počátků maturit a ke kterým se nejvíce vztahujeme, tj. gymnázia, reálná gymnázia, reformních reálná gymnázia a reálky neboli reálné školy) lze dohledat v práci L. Ottové (2011) spolu s počtem vyučovaných hodin matematiky, kterým se na nich vyučovalo.

sokoškolské. Jest velice důležitě pro vývoj charakteru i ducha, aby mladý muž byl jednou přinucen své vědění shrnouti (Auerhan et al., 1913, s. 497).

V „Časopise pokrokového studentstva“ (1907) se píše:

My na těchto místech měli jsme již mnohdy příležitost vyslovit se o stanovisku, které zaujímá k této otázce veškerá veřejnost pokroková. Spatřujeme ve zkouškách maturitních pedagogický přežitek středověký,³ který dnes nemůže již obstát před moderními pedagogy. Jestliže osmiletá výchova není důkazem zralosti žáka, pak jistě hodinová zkouška nemůže nám poskytnouti záruku vyspělosti abiturienta (s. 109).

Nejen počet předmětů, ale také průběh i samotná organizace maturit prošly časem dosti zásadními změnami, které vždy měly přímou či nepřímou souvislost mimo jiné s aktuální politikou, složením ministerstva, náladou osob ve vedeních škol a školských zařízeních či „hlasem veřejnosti“.

Co může být překvapivé je například to, že maturita nebyla vždy známkována. Auerhan a kolektiv (1903) uvádějí:

Výsledek zkoušky nevyslovuje se, jako dříve, známkami z každého předmětu zvláště, nýbrž posuzuje se jen celková zralost žákova. Zralým se prohlašuje kandidát buď je většinou hlasů, tj. i když v některém předmětu plně nevyhověl, anebo všemi hlasy. V tomto případě může být přiznána zralost s vyznamenáním, je-li pro to alespoň polovina členů komise. Není-li kandidát uznán zralým, tedy většinou hlasů se usnese, má-li býti reprobován na půl roku anebo na celý rok. V této podobě maturita pozbyla své hrůzyplnosti a vyhoví (...) přece svým účelům (s. 499).

Avšak i toto „pokrokové“ ustanovení bylo jen dočasné.

1.3 Proměny maturitní zkoušky z matematiky

Maturity prošly od svého počátku mnoha změnami. Něco se zavedlo, aby se to o pár let později zase zrušilo a posléze znovu uvedlo v platnost. Protože je tedy toto téma velice obsáhlé, zaměříme se především na změny v maturitě z matematiky, která nás v tuto chvíli nejvíce zajímá.

Při zavedení MZ v roce 1849 byla maturita z matematiky povinná a to jak v písemné, tak v ústní části. V zadání se však lišila škola od školy, podoba zkoušky nebyla tedy rozhodně taková, jakou ji známe dnes, kdy na

³ Srovnajme s rokem zavedení MZ!

všech školách jsou didaktické testy stejné. Písemná část tehdy trvala 4 hodiny (Auerhan et al., 1913).

Toto ustanovení o maturitních zkouškách platilo 60 let. Jediná menší změna v matematice byla v tom, že písemná práce od roku 1867 trvala už jen 3 hodiny (Kabele, 2015).

Při prvních maturitách z matematiky se zadávaly vždy právě tři úlohy, od poloviny 80. let 19. století se jejich počet zvýšil na čtyři. Pro zajímavost se můžeme seznámit s ministerskými pokyny pro gymnázia, jak o nich píše J. Sommer a V. Hübner (1905) ve sbírce maturitních příkladů. Z nich si totiž můžeme udělat bližší představu o tom, jak maturitní zkouška začátkem 20. století vypadala.

K písemné zkoušce maturitní se doporučuje po jedné úloze 1. z arithmetiky, 2. z trigonometrie, 3. ze stereometrie a 4. z analytické geometrie. Vhodným výběrem příkladů jest se přesvědčit! i o znalosti pouček planimetrických.

Při ústní zkoušce maturitní budiž žádána jmenovitě jistota v řešení rozmanitých rovnic, znalost logaritmických tabulek a těch partií z arithmetiky, jež pro třídu VII. (gymn.) jsou předepsány; dále úlohy z trigonometrie, analytické geometrie a řešení problémů stereometrických, zvláště co se týče povrchů a obsahů. K počítání číselnému jest i při ústní maturitě míti náležitý zřetel.

Již však rok 1908 přinesl tehdejším maturantům mnoho změn, což zapříčinila tzv. Marchetova⁴ reforma (Bečvářová, 1999b). První nařízení o změnách maturitních zkoušek vyšlo 29. 2. 1908, upraveno pak bylo třemi dalšími nařízeními, dvěma z téhož roku, jedním z roku následujícího.⁵ Roku 1910 byla předepsána ministerským nařízením maturita na reálných a reformních reálných gymnáziích. V případě maturitní zkoušky z matematiky se změna týkala písemné části, která se od roku 1908 již nekonala. Nicméně povinná ústní zkouška zůstala⁶ (Auerhan et al., 1913) a zůstala i při reformách v roce 1922 (Věstník, 1922).⁷ Za zmínku také stojí změna názvu maturitních zkoušek, od zavedení Marchetovy reformy se začíná používat název *zkouška dospělosti* (Bečvářová, 1999b).

Další rok plný změn, který se dotkl maturit z matematiky, byl rok 1931.

⁴ Gustav Marchet = tehdejší ministr vyučování

⁵ Odtud pramení množství nejednotností a zmatků v různých zdrojích v tom, který maturitní rok považovat za rok zásadní změny.

⁶ J. Kabele (2015) mylně uvádí, že nezůstala, lze to ale také ověřit např. i v Národních listech (1908).

⁷ Zde je potřeba upozornit na mylnou informaci v práci J. Kabele (2015), kterou cituje i E. Kreklová. J. Kabele totiž uvádí tříhodinovou písemnou práci z matematiky. Tato informace však není správná, věstník ministerstva o tom nic neví, přestože se na něj J. Kabele odkazuje. Na základě procházení dalších čísel věstníků a jiných zdrojů jsme ověřili, že námi podané informace a citované zdroje jsou skutečně správné.

Tehdy poprvé bylo možné na gymnáziu odmaturovat, aniž by žák složil maturitu z matematiky! Ústní maturita z matematiky se totiž zařazuje jen mezi předměty povinně volitelné, je možno místo ní maturovat z fyziky, zoologie či botaniky. O tom, zda je žák povinen maturovat z matematiky⁸ na gymnáziích reálných se rozhoduje dle vysvědčení za první pololetí posledního ročníku. Žák musí vždy maturovat buď z matematiky nebo z latiny. Z matematiky bude maturovat, pokud má z ní za první pololetí poslední třídy lepší známku než z latiny. V opačném případě ho čeká maturita z latiny. Kdyby však nastala situace, že by měl sice lepší známku z matematiky, ale z písemné zkoušky z latiny známku nedostatečnou, koná zkoušku z latiny. Na reformních gymnáziích platí něco podobného, akorát se zde porovnává prospěch z matematiky a francouzštiny. Při rovnosti známek rozhoduje zkušební komise. Na reálkách je povinnost maturovat z matematiky bez výjimky (Věstník, 1931). Nové předpisy pro maturity z roku 1938 tuto podobu zkoušky z matematiky jen potvrzují (Věstník, 1938).

Za protektorátu vychází v roce 1942 nové (dvojjazyčné!) předpisy o maturitních zkouškách. Matematika se stává předmětem pouze volitelným (Věstník, 1942).

Po skončení druhé světové války platí opět předválečné předpisy o maturitních zkouškách – z roku 1938 (od roku 1945) (Věstník, 1945; Věstník, 1946). Obecně však prestiž maturitních zkoušek po válce klesá. Maturitní zkouška přestává být postačující podmínkou pro přijetí na vysoké školy (Morkeš, 2003).

Následující desetiletí výrazně zahýbají s podobou maturitních zkoušek. Tak hned rok 1949 přináší mnoho nového. Už jen název nese změnu, pro maturity se již nepoužívá termínu *zkoušky dospělosti*⁹ (první dva roky se název zkouška dospělosti – ve Věstníku v názvu článku jednajícím o změnách v maturitách – uvádí v závorkách, pak již ani to ne), ale *závěrečné zkoušky*. Celkové hodnocení začíná být podobné, jaké známe dnes, místo prohlášení za dospělého (příp. s vyznamenáním) se uvádí, že žák prospěl (příp. s vyznamenáním).¹⁰ Mimo jiné se také zavádějí změny v písemné části maturit.

⁸ Pro zajímavost – požadavky v matematice jsou následující: „Kandidát má prokázat takovou znalost matematického učiva a takovou míru matematického myšlení, aby dovedl samostatně řešit jednodušší úlohy teoretické i praktické, a měl zároveň potřebnou zručnost v počítání numerickém a v užívání příslušných tabulek. Vedle toho má projevit pochopení významu početních vztahů pro praxi. Kandidátu budtež předloženy zpravidla dva příklady, které nebyly počítány ve škole; při volbě těchto příkladů jest hleděti k tomu, aby jejich látka zasahovala do různých oborů matematiky a řešení jich vyžadovalo různých metod. Vedle určitých příkladů lze kandidátovi předložiti také přehledné otázky z důležitých částí matematického učiva, zvláště takových, jež mají význam praktický“ (Věstník, 1931, s. 42).

⁹ Rádi bychom upozornili na nepřesnost J. Vrtílkové (2014), která chybně uvádí, že termín *zkoušky dospělosti* se užíval pouze do začátku druhé světové války.

¹⁰ Také ale není pravda zjednodušení, že od toho roku platí třístupňové hodnocení *prospěl s vyznamenáním, prospěl nebo neprospěl*, které uvádí L. Ottová (2011) ve své práci. Např. v 80. letech bylo hodnocení čtyřstupňové, jak se později v této práci bude uvádět.

Písemná zkouška se totiž skládá z českého a ruského jazyka a také – z matematiky, avšak ta jen na technických větvích reálných a reformních reálných gymnázií (Věstník, 1949). (Protože byly stanoveny předpisy, které sjednotily střední vzdělání na 4 roky, reálné školy již dále neexistují.) Délka této zkoušky byla stanovena na 3 hodiny. Dále znova začíná na technické větvi reálných gymnázií povinná ústní maturita z matematiky. Rok 1950 (Věstník, 1950) opět přináší další změny. Maturita z matematiky není povinná pro nikoho. V roce 1952 je znova povinná maturita z matematiky, ale jen ústní (Věstník, 1952).¹¹

Rok 1953 je v historii školství naší země dosti známý. Toho roku totiž došlo k zrušení gymnázií, školy poskytující střední vzdělání byly najednou jednotné a byly na tři roky.¹² Tento stav platil až do školního roku 1969/1970, kdy jsou znova zavedena gymnázia a to čtyřletá (Zákon, 1968).

Jak se změnila podoba maturitní zkoušky? Na jeden rok – ve školním roce 1952/1953 dochází k zavedení povinné písemné i ústní maturitní zkoušky z matematiky pro všechny žáky. Písemná zkouška sestává z jedné úlohy z geometrie a dvou úloh z aritmetiky. Tato zkouška nahradila písemnou zkoušku z latiny, délka opět 3 hodiny (Věstník, 1953).¹³ Ovšem již následujícího roku 1954 se písemná maturita z matematiky ruší. Za zmínku stojí také další změna, od roku 1954 se totiž přestává používat (v oficiálních dokumentech – ve věstnících ministerstva školství) pro maturitní zkoušku název *závěrečná zkouška*, začíná se místo toho používat název *maturitní zkouška* a pojem *závěrečná zkouška* nabyde najednou jiného významu (Věstník, 1954).¹⁴

Od roku 1965 platí opět nová směrnice o maturitních zkouškách (Věstník, 1965a).¹⁵ Směrnice vyšla už na konci roku 1964 – 21. 12. Ještě před

¹¹ Pro upozornění: J. Kabele (2015) o matematice na reálných větvích vůbec nepíše. Pro roky následující po 1951 pak mylně zobecňuje povinnost maturity z matematiky.

¹² Roku 1953 se tak na mnoho let naposled skládaly MZ na gymnáziích, od nového školního roku už gymnázia neexistovala. Proto tehdy skládali MZ žáci jak osmého (v květnu), tak sedmého ročníku (na konci prázdnin), více o tom píše F. Mores (2003)).

¹³ Tento rok je obecně ve většině nám známých zdrojích často zahrnován nepřesně. Někteří ho označují jako rok, ve kterém matematika nebyla povinná. Někde se zahrnuje mezi roky, ve kterých byla povinná MZ z matematiky, pouze však ústní, např. u F. Morkese (2003). Někde, např. u L. Ottové (2011) v tabulce, se uvádí, že od toho roku je povinná písemná i ústní a zapomíná se, že hned od následujícího roku je to jinak. Většina nám známých zdrojů je proto dosti zavádějící a není nejlepší se na ně spoléhat a odkazovat na ně i v jiných údajích kvůli možnosti dalších omylů.

¹⁴ Tyto zmínky o změnách názvů jsou dosti podstatné. Při vyhledávání v pramenech přepsaných na počítači by tato neznalost mohla být příčinnou mnohých potíží. Nebylo by například možné nic o těchto zkouškách ve starých předpisech dohledat.

¹⁵ Zde bychom chtěli ještě varovat před dalšími možnými omyly. J. Kabele (2015) ve své práci totiž odkazuje na věstník ministerstva, ale chybně uvádí zdroj, jedná se o číslo věstníku 2. Dále upozorňujeme, že vůbec neuvádí, že zde byla od roku 1953 povinná ústní maturita z matematiky, uvádí ji až od roku 1964. Zvláštní také je, že E. Kreklová (2021) uvádí správně rok 1954 jako rok s povinnou, ale jen ústní, maturitou z matematiky a přitom se odkazuje na J. Kabele, (2015), který o ničem takovém nepíše. Chtěl snad, ale udělal překlep a místo roku 1954 uvedl 1964?

tím vyšla podrobnější směrnice ohledně maturitních zkoušek pro rok 1965 – totiž 20. 10. 1964 (Věstník, 1964). Pro matematiku však nepřináší tento rok nic nového. V roce 1967¹⁶ dochází k dalším změnám, které se dotknou maturantů v roce 1968. S maturitou z matematiky se to má takto: na přírodovědné větvi škol je písemná zkouška povinná ve speciálních třídách pro žáky nadané v matematice a fyzice (místo ruštiny), zároveň si ji mohou i ostatní žáci vybrat dobrovolně, dále je povinnost ústní zkoušky. Na humanitní větvi škol písemná zkouška není a ústní je pro žáky volitelná (Věstník, 1967). V nových předpisech pro maturity roku 1969 se pro matematiku prakticky opakuje to stejné (Věstník, 1969). V roce 1971 se novým výnosem stanovuje v písemné části povinnost maturity z ruského jazyka, nicméně na přírodovědné větvi všeobecně vzdělávacích škol se zaměřením na matematiku a fyziku povinnost maturovat písemně z matematiky zůstává – jako třetího maturitního předmětu (Věstník, 1971).¹⁷ Ústní maturitní zkouška z matematiky je stále pro všechny všeobecně vzdělávací školy přírodovědné větve povinná.¹⁸

Nová směrnice o maturitních zkouškách vyšla v roce 1981 (platnosti nabyla 1. 9.). Dle ní byli povinni konat písemnou maturitní zkoušku žáci ve třídách na gymnáziích se zaměřením na matematiku a fyziku. Dostal-li z ní žák známku nedostatečnou, bez výjimky musel vykonat ústní zkoušku. Témata písemné zkoušky stanovilo ministerstvo, před začátkem konání zkoušky měl ředitel školy s nimi seznámit učitele dozoru v konkrétních třídách. Učitelé pak tato témata napsali buď na tabuli nebo je měli možnost rozdat rozmnožená. Čas na vypracování byl ponechán z předchozích let v délce 4 hodin. Uvádí se zde nově i kalkulačka mezi povolenými pomůckami – v případě, že s ní žáci v průběhu studia pracovali a má každý svoji k dispozici. Vypracovanou práci hodnotil a klasifikoval vyučující podle zvláštního předpisu.

Ústní zkouška z matematiky se stala povinně volitelnou v kombinaci s jedním či dvěma předměty pro žáky gymnázií pedagogického zaměření, se zaměřením na biologii a chemii a se zaměřením na programování a obsluhování počítačích strojů. Ostatní žáci gymnázií ji měli povinnou, ředitel školy vždy však měl pravomoc povolit její nahrazení některým z několika dalších předmětů. Ostatní školy ji zpravidla povinnou neměly či ji měly jen povinně

¹⁶ E. Kreklová (2021) chybně uvádí, že změny byly v roce 1966. Tento omyl cituje od J. Kabele (2015), který zase cituje M. Skutila (2008). M. Skutil se však zmýlil. Rok 1966 všeobecně vzdělávacím školám žádnou změnu nepřinesl, v žádném z vydání věstníků ministerstva z roku 1965 ani 1966 se nic nepíše, což jinak vždy se děje, viz také obsahy těchto dvou ročníků (Věstník, 1965b; Věstník, 1966).

¹⁷ Dle vyhlášky z roku 1971 (Věstník, 1971) je povinná písemná maturita z matematiky také na školách, kde se ve všech ročnících nevyučuje ruskému jazyku povinně a to na místě maturity z ruštiny. Nejistili jsme, o jaké školy se jedná a jaký mohl být jejich počet.

¹⁸ Důležitě je proto upozornění na nepřesnost ohledně toho u J. Kabele (2015), kterou cituje i E. Kreklová (2021). Pro jistotu uvádíme všechny čtyři letopočty, některé zdroje je směšují do jedné. F. Morkes (2003) směšuje změny z let 1967, 1969 a 1971 nepřehledně tak trochu do jednoho.

volitelnou. Celkové hodnocení mohlo být: prospěl s vyznamenáním, prospěl velmi dobře, prospěl, neprospěl (stejně i v předešlém období) (Věstník, 1981). V roce 1983 vychází směrnice pro experimentální třídy gymnázií, ty mají povinně písemnou matematiku, ústní jen v případě klasifikace písemné zkoušky jako nedostatečné (Věstník, 1983).

Rok 1987¹⁹ ruší všechna předešlá ustanovení a přináší další změny. Povinně přichází písemná maturita z matematiky pro všechny žáky gymnázií. Klasifikaci navrhuji vyučující. Ústní zkouška povinně ve třídách zaměřených na matematiku, na jiných gymnáziích však není a to ani jako ani volitelná. Opět závěrečná klasifikace: prospěl s vyznamenáním, prospěl velmi dobře, prospěl, neprospěl. Témata pro jednotlivé předměty a části zkoušky stanovoval ředitel s uvedením povolených pomůcek. Na gymnáziích se ustanovilo, že zkouška z matematiky bude sestávat z šestice úloh zadaných předmětovou komisí. Vyhláška nabyla platnosti 1. 6. 1987 (Věstník, 1987).

Dne 17. 10. 1989 byla ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy ČSSR vydána vyhláška s novými pravidly pro maturity, která nabyla účinnosti od 1. 1. 1990. Co se týče matematiky, je stále povinně pro všechna gymnázia²⁰ v ústní formě, pro zaměření studijního oboru 01, 02, 38 (speciální třídy) se koná také písemná zkouška.²¹ Celkové hodnocení maturit je naposledy ještě čtyřstupňové. Všechna témata pro maturitní předměty (s výjimkou písemné zkoušky z matematiky zaměření 01, jejíž téma určovalo ministerstvo, měla zde vždy být šestice úloh) stanovoval s uvedením povolených pomůcek na návrh příslušné předmětové komise ředitel školy. Tedy mohli ředitelé škol kromě té jediné výjimky určovat i obsah maturit z matematiky. Zvláštní je, že žáci žádného typu školy si nemohly vybrat matematiku jako volitelný předmět (Vyhláška, 1989).

Hned 24. 10. 1991 přichází nové celkem velké změny.²² Celkový prospěch je již přesně takový, jaký známe dnes: prospěl s vyznamenáním, prospěl, neprospěl. Tato nepříliš známá vyhláška však přece jen v matematice dosti mění – maturita z matematiky je od té doby pro všechna gymnázia s výjimkou gymnázií se zaměřením na matematiku a fyziku pouze

¹⁹ Upozorníme, že J. Kabele (2015) a po něm E. Kreklová (2021) o tomto vůbec nepojednávají, oba označují jako poslední právní úpravu z doby normalizace směrnicí z roku 1981!

²⁰ Ze svědectví pamětníka však víme, že přinejmenším na nějakém gymnáziu se toho roku z matematiky nematurovalo. Snad to bylo kvůli porevolučním zmatkům.

²¹ 01 – zaměření na matematiku, 02 – zaměření na matematiku a fyziku, 38 – zaměření na programování (Vyhláška, 1985)

²² Proto je velice zvláštní, že se žádný ze zdrojů, ze kterých jsme čerpali (ani dílo F. Morkese (2003), ani žádná jiná publikace či závěrečná práce) o tomto nezmiňuje. Kdyby to bylo tak, jak tyto zdroje, pojednávají-li o tom, uvádějí, znamenalo by to, že by platily předpisy z roku 1981, resp. 1987, resp. 1989 a před rokem 2011 by tak bylo pro všechny gymnazisty povinné maturovat z matematiky. My jsme však věděli, že tomu tak nebylo, nevěděli jsme však odkdy. Toto datum jsme dohledali až po značně dlouhém procházení starých věstníků ministerstva. Kdybychom výše zmíněnou znalost neměli, vůbec by nás nenapadlo, že ony zdroje nemusí mít pravdu.

dobrovolná a to až do dnes. Na gymnáziích se zaměřením na programování, kde byla povinnost maturovat buď z matematiky nebo z programování a na gymnáziích zaměřených na matematiku a na matematiku a fyziku, měla tato zkouška formu jednak písemnou, jednak ústní. Písemná část obsahovala dvě určené úlohy, které žák musel vyřešit, dále byl dán soubor čtyř úloh, z nichž měl vyřešit dvě. Maximální délka zkoušky byla stanovena na 4 hodiny. Při ústní zkoušce si žák vylosoval jeden ze zadaných 25 – 30 souborů témat.

Ředitelé obdrželi pravomoc volit všechna témata MZ a také, z jakých dalších předmětů, povinných i povinně volitelných je možno za určitých podmínek maturovat. Maturitní zkouška na gymnáziu se skládala povinně ze zkoušky z českého jazyka a literatury, z cizího jazyka a zkoušky z dalších dvou povinně volitelných předmětů. Maturitní zkouška na středních odborných školách ze zkoušky z českého jazyka a literatury, z teoretické zkoušky a praktické zkoušky z odborných předmětů a z povinně volitelného předmětu. Maturitní zkouška na středních uměleckých školách ze zkoušky z českého jazyka a literatury, z cizího jazyka, z dějin výtvarné kultury a z vyučovacích odborných předmětů. Maturitní zkouška na středním odborném učilišti ze zkoušky z českého jazyka a literatury, teoretické zkoušky z odborných předmětů a praktické zkoušky z odborného výcviku, z povinně volitelného předmětu. Celkem se vždy jednalo o povinný počet 4 předmětů (Vyhláška, 1991).

Jak je možné si všimnout ze změn v druhé polovině 80. let a první polovině 90. let minulého století, ředitelé škol začali dostávat čím dál více pravomocí v rozhodování o MZ pro své vlastní školy, v maturitních zkouškách se tak škola od školy čím dál více lišila. Následující zhruba dvacetileté období se tedy výstižně nazývá obdobím školních maturit.

1.4 Tabulky maturit z matematiky

Nyní bychom rádi nejdůležitější výše zmíněné informace o tom, jak to bylo s maturitou z matematiky, pomocí dvou tabulek shrnuli.

V tabulce 1 bychom rádi přehledně ukázali, ve kterých letech platila povinnost maturovat z matematiky a jaké části (písemné, ústní) se to týkalo. Tabulka je pro zjednodušení vytvořena *pro klasická (všeobecná) gymnázia*. Týká se to tedy gymnázií bez zvláštních zaměření.²³ Jsou zde uvedené letopočty, ve kterých předpisy platily, kolik to bylo celkově let, zda bylo nutné maturovat v písemné nebo ústní části.

²³ Přesto – pro období 1968 – 1980 jsme museli uvést povinnost ústní zk. – přírodovědná větev. Není tím myšleno, že tato povinnost platila na gymnáziích se zvláštním zaměřením, je to kvůli tomu, že každé gymnázium nutně muselo spadat do jedné z kategorií, buď humanitní, nebo přírodovědné.

období	počet let	povinná pís. zk.	povinná ústní zk.
1849 – 1907	59	ano	ano
1908 – 1930	23	–	ano
1931 – 1951	21	–	–
1952	1	–	ano
1953	1	ano	ano
1954 – 1967	14	–	–
1968 – 1980	13	–	přírodovědná větev
1981 – 1986	6	–	ano
1987 – 1991	5	ano	–
1992 –	31 +	–	–

Tabulka 1: Vývoj maturit z matematiky na gymnáziu

V tabulce č. 2 bychom rádi ukázali, kolik celkově let trvá maturitní zkouška v porovnání s počtem let, kdy platila povinnost maturity z matematiky alespoň v jedné formě (písemné nebo ústní), kolik let platila celkově povinnost písemné zkoušky z matematiky, kolik celkově let povinnost ústní zkoušky a kolik let nebylo nutné ani jedním způsobem maturitu z matematiky skládat. Čísla bez závorek značí počet let bez zahrnutí přírodovědné větve, čísla v závorkách platí na přírodovědné větvi.

celkem	min. 1 forma	písemná zk.	ústní zk.	nepovinná
174	95 (108)	65	90 (103)	66 (79)

Tabulka 2: Celkový souhrn let dle povinnosti MZ z matematiky

2 Současná maturitní zkouška z matematiky

2.1 Zavádění státní maturity – dvě úrovně obtížnosti?

Na přelomu 80. a 90. let se u nás začalo poprvé mluvit o zavedení tzv. státních maturit. Důvodů pro zrušení tradiční maturitní zkoušky a zavedení státní maturity, které byly postupem času udávány, bylo několik. Mezi hlavní patřily tyto: možnost porovnávání znalostí žáků z různých středních škol, možnost srovnání škol, stanovení jednotných požadavků, dokonce také očekávané zvýšení motivace žáků. Jako přínos se bralo i to, že se ČR dostane na úroveň zemí EU, které takovou maturitu již mají. To vysvětluje také to, proč se tato otázka začala probírat právě v této době – přípravné době na vstup do EU (Vychoňová, 2011).

V roce 1999 bylo Centrum pro reformu maturitní zkoušky (CERMAT) Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy pověřeno připravit reformovanou maturitní zkoušku. Odborné rozpravy ohledně podoby nové maturity vyvrcholily prvním pokusem o uzákonění nové maturitní zkoušky, tento pokus byl však neúspěšný (Vrtílková, 2014).

V roce 2004 vyšel nový školský zákon 561/2004 Sb, který vytvořil podmínky pro zavedení státních maturit. Tento zákon zavedl mj. systém kurikulárních dokumentů: Národní program vzdělávání, RVP, ŠVP. Opět upravil předpisy o maturitní zkoušce. Konkrétně stanovuje, že MZ se skládá ze společné a profilové části. Společná část je společná pro všechny maturanty konající maturitní zkoušku. Ve společné části zůstává povinná maturita z češtiny a cizího jazyka, dále je možné konat jednu písemnou dobrovolnou zkoušku buď z matematiky, občanského základu, přírodovědně technického základu nebo informačně technologického základu. V profilové části je nutno konat tři zkoušky, jejichž nabídku určuje ředitel školy (Zákon, 2004).

Na základě výše zmíněného zákona k 1. 1. 2006 bylo zřízeno Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání (CZVV, v současnosti zodpovídá za organizaci MZ (O nás, c2019)). Bylo stanoveno, že státní maturita začne ve školním roce 2007/2008. V červnu roku 2007 však byly státní maturity odsunuty až na rok 2010. Konečná podoba plánované zkoušky se určila teprve v roce 2008 novelou školského zákona (Vrtílková, 2014). Stanovila mimo jiné dvě úrovně obtížnosti – základní a vyšší. Žák si mohl vybrat, kterou úroveň si zvolí. Co se týče zkoušek ve školní (profilové části), jejich povinný počet ustanoven nebyl. Povinnými předměty byl český jazyk a literatura a cizí jazyk, novelou zákona bylo stanoveno, že žák, který má konat maturitní zkoušku ve školním roce 2009/2010 nebo 2010/2011, může místo zkoušky z cizího jazyka konat zkoušku z matematiky (Zákon, 2008).

V červnu roku 2009 vyšla nová vyhláška o bližších podmínkách ukončování vzdělávání na středních školách maturitní zkouškou. Stanovila mimo jiné délky didaktických testů, pro matematiku základní úroveň to bylo 90 minut, pro úroveň vyšší to bylo 120 minut (Vyhláška, 2009).

K dalšímu odkladu státních MZ došlo na podzim 2009, jejich spuštění bylo stanoveno na školní rok 2010/2011. Prvnímu zavedení předcházela na podzim roku 2010²⁴ tzv. maturitní generálka, ve které si žáci mohli vyzkoušet „maturitu nanečisto“. Zároveň byla prověřována logistická a organizační stránka průběhu maturit (Kabele, 2015).

Následující jaro 2011 skutečně dlouho očekávaná státní maturita poprvé proběhla. Teprve po sedmi letech se poprvé maturovalo podle platné legislativy. Zkouška nebyla poprvé od roku 1849 rozdělena na písemnou a ústní, nýbrž na společnou část – kontrolovanou státem – a profilovou část, kterou si zařizovaly jednotlivé školy samy. Pro všechny žáky bylo povinné složit zkoušku z českého jazyka a literatury a podle žákovy volby buď z matematiky nebo cizího jazyka. Z českého i cizího jazyka zkouška sestávala ze 3 dílčích částí: z didaktického testu (v cizím jazyce včetně poslechové části), písemné práce a ústní zkoušky. Žák měl možnost konat nepovinnou zkoušku z téhož předmětu, z něhož se již zkoušku chystal složit, nebo měl na výběr tyto předměty: fyziku, chemii, biologii, dějepis, zeměpis, občanský a společenskovední základ a dějiny umění (Kabele, 2015). Co se týče následujícího roku 2012, původně měla být zavedena povinná maturita z jazyka, ale nakonec byl odsouhlasen roční odklad, takže v tomto roce proběhla zkouška podobně jak v roce předchozím. Jedinou větší změnou bylo to, že žák nemohl konat nepovinnou zkoušku z předmětu, z kterého konal zkoušku povinnou (Vrtílková, 2014).

2.2 Maturitní zkouška jak ji známe dnes

Maturita roku 2013 skutečně doznala změny, ne však výše plánované. Co se týče zkoušených předmětů, zůstalo vše beze změny (pouze bylo omezeno množství nepovinných zkoušek, lze již vybírat jen ze stejné nabídky, která platí pro povinnou část), stále platila povinnost maturovat ve společné části ze dvou předmětů, byly ale zrušeny dvě úrovně obtížnosti, zkouška pak vycházela z katalogu požadavků pro základní úroveň. V profilové části byly stanoveny 2 nebo 3 povinné zkoušky (Kabele, 2015).

Jaký byl průběh společné MZ z matematiky? Byla, stejně jako při svém zavedení v roce 2011, pouze v podobě didaktického testu. Na jeho řešení měli žáci původně 90 minut, od roku 2013 k nim ale nově přibylo dalších 15 minut na výběr postupu řešení (Vyhláška, 2012).²⁵ Během této doby měl žák k dispozici testový sešit na zapisování poznámek, a záznamový arch, do kterého zatím psát nesměl. Maximální počet bodů, kterých bylo možno dosáhnout, stejně jako v letech předcházejících, byl 50 bodů a hranice úspěšnosti byla

²⁴ L. Bindzarová mylně uvádí rok 2009. Vždyť i na internetu lze volně dohledat onen test z „maturitní generálky“ – datovaný do roku 2010.

²⁵ Pro zajímavost připomínáme, že v historii byly pro písemnou zkoušku vyhrazeny nejčastěji 3 až 4 šedesátiminutové hodiny. Např. ve Francii i v dnešní době trvá maturita z matematiky tři, resp. čtyři hodiny, dle typu školy (Březinová, 2013).

nastavena na 33 %. Za špatnou odpověď se (nikdy) body neodečítaly. Celkový počet úloh byl 26, z čehož úlohy č. 16 – 26 byly uzavřené, tj. obsahovaly nabídku odpovědí. Oproti předešlému roku obsahoval zadaný test v roce 2013 i několik široce otevřených úloh, u nichž se hodnotil celý postup řešení. Povolnými pomůckami byly (a stále do dneška jsou) rýsovací potřeby, kalkulačka bez grafického režimu, bez řešení rovnic a úprav algebraických výrazů a dále matematicko-fyzikální a chemické tabulky pro střední školy (Zadání základní úroveň, 2011; Zadání vyšší úroveň, 2011; Zadání, 2013)

Od roku 2013 maturita z matematiky nedoznala příliš velikých změn.²⁶ Novinkou roku 2014 bylo, že v tomto roce začalo pokusné ověřování obsahu, formy, organizace a hodnocení výběrové zkoušky ze středoškolské matematiky, kterou bylo možno konat jako nepovinnou zkoušku profilové části maturitní zkoušky – *Matematiky+* (Vyhlášení, 2013b; Maturitní zpravodaj, 2014). Více o tomto pojednáme v samostatné podkapitole.

Za další zmínku by mohlo stát, že od roku 2016 přestal být zvláštní čas na výběr postupu řešení, ale celková doba zkoušky byla stanovena na 105 minut (Maturitní zpravodaj, 2015a). V roce 2019 pak byla celková délka navýšena o 15 minut, tedy na 120 minut (Maturitní zpravodaj, 2019). Poslední časové navýšení se uskutečnilo v roce 2021, kdy byl čas na řešení testu prodloužen o dalších 15 minut na 135 minut. Pro tento rok také došlo na základě opatření obecné povahy k úpravě hodnocení, hranice úspěšnosti se tímto opatřením snížila ze 33 % na 27 % (14 bodů).

Zmínit můžeme ještě změnu od školního roku 2020/2021, a totiž to, že se již didaktické testy nehodnotí ve známkách, ale pouze v procentech, která se pak objeví i na vysvědčení místo známky (Maturitní zkouška 2013–2020, 2021)

Poslední drobná změna je z roku 2022. Oproti všem dosavadním didaktickým testům (můžeme do toho započítat i didaktické testy z roku 2011, 2012 základní úroveň) z matematiky se počet úloh se snížil na 25 (z 26) o jednu otevřenou úlohu. Jedna přiřazovací úloha byla nahrazena standardní uzavřenou úlohou s několika odpověďmi a u dvou dalších uzavřených úloh došlo ke snížení počtu nabízených odpovědí (Maturitní zkouška 2013 – 2022, 2022).

2.3 Otázka zavedení povinné maturity z matematiky

Nyní se zde ještě jen krátce zastavíme nad jistou ještě v nedávné době velice diskutovanou skutečností ohledně plánovaného zavedení povinnosti složit maturitu z matematiky na vybraných školách. V roce 2016 byla schválena novela obsahující následující odstavec (Zákon, 2016):

„Vláda stanoví nařízením obory vzdělání, v nichž je matematika zkušebním předmětem společné části maturitní zkoušky.“

²⁶ Letos je tedy možné připomenout si 10 let výročí.

Mělo to vejít v platnost pro vybrané střední školy od školního roku 2020/2021. Tato skutečnost vzbuzovala velké diskuze, byla označována jako povinná maturita z matematiky, přestože znamenala zrušení výběru mezi matematikou a cizím jazykem, tudíž znamenala pro žáky vybraných škol i povinnou maturitní zkoušku z cizího jazyka.

Po tom, co jsme se seznámili s tím, kolik let platila povinnost maturity z matematiky, je ona nelibost veřejnosti vlastně dosti překvapivá. Myslíme, že je to dáno hlavně neznalostí toho, že tradičně – větší počet let – matematika jako povinný maturitní předmět *byla*. Naopak hlasy o tom, že se zavádí povinná maturita z cizího jazyka se ani moc neozývaly.

V roce 2020 však nakonec došlo k zrušení plánované povinnosti maturity z matematiky a tak dodnes dle platného školského zákona (Zákon, 2022) zůstala dosavadní možnost volby mezi matematikou a cizím jazykem. Nyní je tak stále matematika volitelnou částí společné části maturitní zkoušky (Šefl, 2022).

2.4 Maturitní zkouška v roce 2023

Jak tedy bude ve školním roce 2022/2023 maturitní zkouška, především z matematiky, vypadat?

Je pravdou, že maturitu z matematiky mohou žáci složit ve společné části, v profilové části nebo v obou. Zkoušku v profilové části si mohou jednotlivé školy sestavovat různě, proto se jí zde zabývat nebudeme, můžeme jen poznamenat, že zpravidla je tato zkouška konaná ústní formou. Zajímat nás bude zkouška společná všem těm maturantům, kteří si matematiku vyberou jako svůj maturitní předmět ve společné části.

Nejprve stručně poznamenejme některé podstatné informace o všech zkouškách ve společné části. Stejně jako v předešlých letech mají žáci kromě povinnosti maturovat z českého jazyka a literatury na výběr maturovat buď z matematiky nebo z cizího jazyka (anglického, francouzského, německého, ruského nebo španělského). Dále se může žák přihlásit až ke 2 nepovinným zkouškám ze zbývajících nevybraných předmětů. Jedním z těchto předmětů může být i matematika rozšiřující, o které více v podkapitole 2.5 (Maturitní zkouška 2023, c2019).

Všechny povinné i nepovinné zkoušky společné části jsou sestavovány tak, aby vyhovovaly katalogům požadavků. Současný katalog požadavků zkoušek společné části MZ pro matematiku je platný od školního roku 2015/2016 (Katalog požadavků: Matematika, 2014). Všechny se konají formou didaktického testu, který se hodnotí slovně „uspěl(a)“ nebo „neuspěl(a)“ s procentuálním vyjádřením úspěšnosti. Maturitní zkouška je úspěšně složena, prospěje-li žák ze všech povinných zkoušek společné a profilové části (Maturitní zkouška 2023, c2019).

Nenastanou-li ještě nějaké neočekávané změny, očekává se, že maturitní zkouška z matematiky ve společné části bude mít tuto podobu: Bude to

didaktický test s různými typy úloh uzavřených (s možnostmi na výběr), otevřených i tzv. široce otevřených, u kterých bude požadován i celý postup řešení. Maximální počet bodů, bude ve shodě s předešlými roky 50 (Maturitní zpravodaj, 2022). Také všechna další pravidla, která platila v předešlém roce, by měla zůstat beze změny (hranice úspěšnosti 33 %, počet úloh: 25, čas na vypracování: 135 minut) (Státní maturitní zkouška společná část – matematika, c2019).

2.5 Matematika rozšiřující (Matematika+)

Jak již jsme výše zmínili, pro rok 2013 a všechny následující roky zanikla možnost konat zkoušky, a bude nás to zajímat hlavně pro matematiku, ve dvou úrovních obtížnosti. Od tohoto maturitního ročníku byly zkoušky konány pouze na *základní* úrovni obtížnosti. To však nevyvolalo na všech místech úplnou spokojenost. Mimo jiných se to dotklo vysokých škol zajišťující vzdělání v oborech přírodovědného zaměření (Hodnotící zpráva, 2014). Nespokojenost nastala, protože znalosti žáků, které by vyhovovaly pouze požadavkům matematiky státní úrovně, avšak ničemu navíc, by zmíněné vysoké školy vůbec nehodnotily jako dostatečné. Na některé vysoké školy tohoto zaměření se totiž bylo možné hlásit v předcházejících dvou ročnících státních MZ pouze při splnění maturitní zkoušky z matematiky vyšší obtížnosti. Za takovou náhradu matematiky na vyšší úrovni by se dal považovat vznik matematiky rozšiřující. S jejím vznikem se to mělo následně:

Na konci roku 2013 vyhlásilo ministerstvo v rámci nepovinných zkoušek profilové části MZ pokusné ověřování vědomostí a dovedností podle katalogu požadavků pro výběrovou zkoušku ze středoškolské matematiky pod označením „Matematika+“. Účelem mělo být zvýšení celkové úrovně matematické gramotnosti žáků středních škol. Tato zkouška měla ověřit takové vědomosti žáka, které jsou důležitým předpokladem pro úspěšné zvládnutí studia VŠ směru matematického, technického, přírodovědného a ekonomického.

Zkouška byla zavedena v podobě pouze didaktického testu, na jehož vypracování bylo ustanoveno 150 minut. Povolené pomůcky byly stejné jako u matematiky ve společné části, stejný byl i maximální počet bodů i hranice úspěšnosti – 33 % (17 bodů). Stejný byl tudíž i jako matematika vyšší obtížnosti z let 2011, 2012, se kterou měl navíc i shodný celkový počet úloh (23) i z celkového počtu počet úloh uzavřených (11). Jako u všech didaktických testů předchozích i následujících se za špatnou odpověď body neodečítaly. Bylo stanoveno, že žáci budou skládat Matematiku+ na spádových školách.

Při zavedení maturitní zkoušky Matematika+ v roce 2014 se určilo, že její výsledek se na vysvědčení vůbec neobjeví. Žák tak dostal pouze výpis výsledků didaktického testu obsahující bodovou úspěšnost u jednotlivých úloh, procentuální úspěšnost a percentilové umístění (Vyhlášení, 2013a). Teprve v následujícím roce byla poprvé užita i klasifikační stupnice 1 – 5 (Dodatek, 2015). K tomu je potřeba obecně poznamenat, jaký byl vztah M+

k ostatním maturitním předmětům. Při vydání dokumentu, kterým se vyhlášovalo pokusné ověřování M+ (Vyhlášení, 2013a) se vyhlášovalo „ověřování obsahu, formy, organizace a hodnocení výběrové zkoušky ze středoškolské matematiky, kterou lze konat jako *nepovinnou zkoušku profilové části maturitní zkoušky*“. Pravdou však je, že v roce 2014 ještě tato zkouška jako zkouška nepovinná profilová nemohla být zařazena, tento rok byl totiž jen označen jako rok pilotního testování. Až následující dva roky mohla být dle rozhodnutí ředitele být zavedena jako profilová (Vyhlášení, 2013a; Hodnotící zpráva, 2020). Nicméně v letech 2016 – 2020 toto opět neplatilo, tato zkouška mohla být konána jen jako *výběrová nepovinná zkouška z matematiky* ne jako zkouška nesoucí název maturitní²⁷ (Vyhlášení, 2016).

Lze prohlásit, že zkouška základní záměr, se kterým byla připravena, splnila. V roce 2014 se k ní přihlásilo 4 tisíce žáků, což byl dvakrát více, než počet přihlášených v roce 2012 ke zkoušce na vyšší úrovni z matematiky (Hodnotící zpráva, 2014).

Hned v roce zavedení se některé školy rozhodly zohlednit dobrý výsledek v této zkoušce při přidělování jednorázových stipendií (Maturitní zpravodaj, 2014). Již v příštím roce 2015 byl na oficiálním portálu maturitní zkoušky uveden seznam fakult vysokých škol, které rozhodly, že zohlední výsledek zkoušky Matematika+ u přijímacího řízení nebo v rámci stipendijního programu (Maturitní zpravodaj, 2015b). Od té doby se počet škol, které se rozhodly vykonání M+ zohledňovat, postupně navyšuje.²⁸

Čím přesahovala Matematika+ požadavky ke zkoušce ze státní matematiky?

Jednalo se o tyto okruhy (Karásková, 2015; Hodnotící zpráva, 2014):

- číselné obory – navíc komplexní čísla;
- rovnice a nerovnice, funkce – rovnice s neznámou pod odmocninou, kvadratické nerovnice a jejich soustavy; mocninné funkce, lineární lomené funkce, goniometrické rovnice a nerovnice;
- posloupnosti – limita posloupnosti a nekonečná geometrická řada;
- stereometrie – polohové a metrické vlastnosti útvarů v prostoru; složitější komolá tělesa
- analytická geometrie – vektorový součin, souřadnice bodu a vektoru v prostoru, kuželosečky;
- rozšíření znalostí kombinatoriky, pravděpodobnosti a statistiky

²⁷ Chceme na tomto místě ubezpečit, že ačkoliv na oficiálních stránkách (Matematika+, c2019) se píše, jako kdyby Matematika+ byla zavedena až v roce 2017, ve skutečnosti opravdu byla již od roku 2014, viz také seznam vzorových testů z M+ (Didaktické testy Matematika+, c2019).

²⁸ Na naší fakultě pro program Matematika se zaměřením na vzdělávání bylo poprvé možné prominutí přijímacích zkoušek při úspěšném složení M+ ve školním roce 2016/2017.

Hodnotící zpráva z roku 2014 (Hodnotící zpráva, 2014) odůvodňuje zařazení těchto okruhů, které se ve státní MZ z matematiky nevyskytují, takto: učivo nepožadované k maturitní zkoušce z matematiky ve společné části, se na mnohých školách objevuje ve výuce jen okrajově a zájem žáků o vyšší než požadovanou úroveň vzdělání je velice nízký. Chce se tedy zařazením těchto okruhů zvýšit kvalita vzdělání žáků a přimět učitele, aby se i těmito okruhy v hodinách zabývali.

V roce 2020 bylo naposledy možné složit nepovinnou výběrovou zkoušku Matematika+. V tomto roce totiž skončilo pokusného ověřování zkoušky M+. Od následujícího roku, tj. od školního roku 2020/2021, je namísto toho zavedena nepovinná zkouška *matematika rozšiřující*.

Zkoušku matematika rozšiřující lze složit ve *společné části* MZ. Koná se na škole, na které žák skládá i ostatní maturitní zkoušky. Tato zkouška svým obsahem a formou navazuje na zkoušku M+. Současný Katalog požadavků zkoušky společné části MZ matematika rozšiřující je platný od školního roku 2020/2021 (Katalog požadavků: Matematika rozšiřující, 2020). Na oficiálních stránkách Centra pro zjišťování výsledků vzdělávání je k dispozici seznam univerzit a vysokých škol zohledňujících výsledek nepovinné maturitní zkoušky z matematiky rozšiřující, ke dni 29. 11. 2022 je to 13 univerzit/VŠ, 27 fakult (Seznam, 2022). Patří mezi ně i naše fakulta. I na ní je dnes možnost přijetí bez přijímacích zkoušek pro program Matematika se zaměřením na vzdělávání, doloží-li uchazeč potvrzení o tom, že uspěl v didaktickém testu nepovinné zkoušky profilové části maturitní zkoušky Matematika+ nebo v matematice rozšiřující.

Jaké jsou ještě rozdíly matematiky rozšiřující a Matematiky+? Rozdíl je jednak v přihlašování. U matematiky rozšiřující totiž stačí, aby žák na přihlášce zaškrtnl matematiku rozšiřující jako nepovinnou zkoušku společné části, není tedy nutná registrace a podání zvláštní elektronické přihlášky, jak tomu bylo dříve. Další rozdíl spočívá v tom, že u nynější zkoušky se již vždy bude uvádět výsledek na maturitním vysvědčení, dříve u M+ tomu tak vždy nebylo. (Státní maturitní zkouška společná část – matematika rozšiřující, c2019) Odlišný je však také počet úloh. Přestože Maturitní zpravodaj z roku 2021, který informuje o mj. o matematice rozšiřující, prohlašuje, že v testu bude 23 úloh, z toho 11 uzavřených a 12 otevřených, ve skutečnosti se ve všech dosavadních testech zkoušky matematika rozšiřující objevilo pouze 22 úloh (11 uzavřených a 11 otevřených).

Na závěr bychom zmínili, že pokud by si žáci chtěli vyzkoušet nějaký didaktický test z Matematiky+ či matematiky rozšiřující, mají možnost dostat se k zadání z předchozí let na internetových stránkách CERMATu (Testy a zadání, c2019). Je zde uveřejněn test z každého roku Matematiky+ včetně ilustračního testu. Dále jsou zde v současné době uveřejněny didaktické testy z matematiky rozšiřující pro jarní období 2021 a 2022 a pro podzimní období z roku 2021. Záhadou nám ovšem zůstává, proč zde nejsou uveřejněny také další testy. Lze zjistit z maturitních zpravodajů, že přinejmenším v ně-

kterých letech byl i podzimní termín Matematiky+ (Maturitní zpravodaj, 2016). Je nám také známo, že v roce 2021 byl i mimořádný termín a v roce 2022 podzimní termín nepovinné maturitní zkoušky z matematiky rozšiřující pro ty žáky, kteří se nemohli dostavit na jarní termín. Že však existují, s největší pravděpodobností odlišná, další zadání, to opět tyto, ale i všechny jiné nám známé internetové stránky, přechází hlubokým mlčením. Málokoho by tedy napadlo, že se ještě konává jiný než jarní termín. Rozluštit tuto záhadu však ponecháváme jiným.

3 Logaritmus

3.1 Zavedení logaritmu

Ukažme si na začátek, jak se logaritmus²⁹ zavádí ve vyučování dnes a porovnejme to s tím, jak se zaváděl dříve. Zjistěme, zda se ony způsoby zavedení liší a pokud ano, pokusme se odhadnout, čím to může být dáno.

V dnešní základní sadě učebnic pro gymnázia (Matematika pro gymnázia),³⁰ se žáci s tím, co to logaritmus vůbec je, poprvé setkají v díle Funkce. Představuje se jakožto inverzní funkce k funkci exponenciální.³¹ V nynější době (jak se brzy dozvíme – navzdory dlouholeté tradici) se nejprve zavádí logaritmická funkce a pak až teprve logaritmus jako takový. To, že např. „ $\log 0 = -\infty$ “ nebo „ $\log \infty = \infty$ “ má vyplývat z vlastností této funkce.

Dříve tomu tak nebylo, logaritmus byl zaváděn čistě algebraicky. O logaritmu jako funkci dlouhá desetiletí ani nebyla řeč. To, že např. „ $\log 0 = -\infty$ “ a „ $\log \infty = \infty$ “ se definovalo v učebnicích přímo v zavedení, brzy budeme mít možnost to porovnat.

Rozdílnost zavádění logaritmů je dána hlavně účelem jeho používání. Dříve se s logaritmy žáci učili zacházet mnohem více. V době, kdy neexistovaly kalkulačky, počítače a podobné přístroje, bylo umění práce s logaritmy a logaritmickými tabulkami považováno za dosti důležité a hlavně mělo praktické využití, které bylo všem žákům známo.

Toto větší či přinejmenším pro žáka srozumitelnější využití pak mohlo žáky více nadchnout než učivo dnešní. Dnes ani mnozí žáci nemusí vědět, v čem by se v reálných situacích mohl logaritmus používat,³² a proto jejich zájem o toto učivo nebývá zrovna největší. Neví, že ještě jejich dosud žijící předci pomocí znalosti logaritmů dokázali bez kalkulačky pouze za pomoci běžných logaritmických tabulek vyčíslit např. následující výraz:

$$\sqrt[11]{\frac{965,2 \cdot \sqrt[4]{3}}{17 \cdot \sqrt[3]{5}}}$$

Abychom si mohli udělat lepší představu o rozdílnosti zavedení, uveďme si nyní přímo ukázkou z učebnice dnešní (Matematika pro gymnázia – Funkce) a následně, pro porovnání, z učebnice dřívější (Matematické vzorce, 1905), která se využívala na „opakování maturitní a vůbec pro potřebu studujících škol středních“ (Sommer & Hübner, 1905, s. 140).

²⁹ Slovo logaritmus je řeckého původu, vytvořeno ze slov logos (poměr) a arithmos (číslo), doslova tedy znamená „číslo poměru“ (Přistoupilová, 2010; Tulis, 2018).

³⁰ J. Zuzáková (2014) uvádí, že podle této sady učebnic probíhá výuka matematiky na většině českých středních škol.

³¹ J. Zuzáková (2014) se ve své práci pozastavuje nad tím, nakolik se dnešní zavedení liší od toho, kvůli čemu logaritmus vlastně vznikl.

³² O některých dnešních příkladech aplikací logaritmů, které je možné žákům předložit, se pojednává mj. V závěrečných pracích J. Zuzákové (2014), a P. Přistoupilové (2010).

3.1.1 Logaritmus – zavedení dnes

Logaritmická funkce o základu a

Logaritmická funkce o základu a je funkce, která je inverzní k exponenciální funkci $y = a^x$; a je libovolné kladné číslo různé od jedné.

Uvažujme exponenciální funkci $f : y = a^x$. Pro hodnotu funkce f^{-1} , která je přiřazena číslu x , se volí speciální označení „ $\log_a x$ “, čteme „logaritmus x o základu a “ nebo „logaritmus o základu a čísla x “. V souladu s tímto označením budeme logaritmickou funkci f^{-1} o základu a zapisovat ve tvaru

$$y = \log_a x.$$

Definičním oborem logaritmické funkce f^{-1} je množina $(0, +\infty)$; to plyne z toho, že obor hodnot funkce $f : y = a^x$ je $(0, +\infty)$.

Logaritmus čísla r o základu a

Logaritmus čísla r o základu a je takové číslo v , pro které platí $a^v = r$.

$$\log_a r = v, \text{ právě když } a^v = r.$$

Věty o logaritmech

1) Pro každé $a > 0$, $a \neq 1$ a pro všechna kladná reálná čísla r , s je

$$\log_a(r \cdot s) = \log_a r + \log_a s.$$

„Logaritmus součinu dvou kladných čísel je roven součtu logaritmů jednotlivých činitelů.“

2) Pro každé $a > 0$, $a \neq 1$ a pro všechna kladná reálná čísla r , s je

$$\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s.$$

„Logaritmus podílu dvou kladných čísel je roven rozdílu logaritmů dělence a dělitele (v tomto pořadí).“

3) Pro každé $a > 0$, $a \neq 1$ a pro všechna $r \in \mathbb{R}^+$ a pro všechna $s \in \mathbb{R}$ je

$$\log_a r^s = s \cdot \log_a r.$$

„Logaritmus mocniny kladného čísla je roven součinu mocnitele a logaritmu základu mocniny.“

(Odvárko, 2011, s. 134, 139, 141 – 142)

3.1.2 Logaritmus – zavedení dříve

Logarithmy

Logarithmem nějakého čísla pro stálý základ je mocnitel, na který nutno povýšit základ, aby povstalo číslo, jehož logaritmus se hledá.

$$0^0 = 1;^{33} \quad \log 1 = 0$$

Logarithmem jednotky je v každé logaritmické soustavě nulla.

$$\log 0 = -\infty$$

Logarithmem nully je nekonečnost.

$$\log \infty = \infty$$

Logaritmus čísla nekonečného jest opět nekonečnost.

$$\log ab = \log a + \log b$$

Logaritmus součinu je rovný součtu logaritmů jednotlivých činitelů.

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

Logaritmus zlomku (podílu) je rovný rozdílu logaritmů čitatele a jmenovatele.

$$\log a^n = n \log a$$

Logaritmus mocniny je rovný součinu z mocnitele a logaritmu mocněnce.

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{\log a}{n}$$

Logaritmus odmocniny je rovný logaritmu odmocněnce lomenému odmocnitelem.

$$b^2 = ac; \quad \log b = \frac{\log a + \log c}{2}$$

Logaritmus střední geometrické úměrné mezi dvěma čísly je rovný střední arithmetické úměrné mezi logaritmy obou těchto čísel.

$$\log a^{-n} = \log \frac{1}{a^n} = \log 1 - n \log a = -n \log a$$

(Sochor, 1906, s. 11 – 12)

³³ Skutečně je zde 0^0 a ne 10^0 , jak by se dalo čekat Nula navíc je označena jako nula, takže nemůže být pochyb, že třeba jednička se jen při tisku ztratila.

3.2 Logaritmus v maturitní zkoušce

Úlohy na logaritmy se vyskytovaly v maturitní zkoušce od jejího zavedení. Nebyly však vždy prověřovány stejné znalosti a dovednosti. Jedním z takových okruhů úloh, které do dnes zůstaly v maturitní zkoušce jsou např. logaritmické rovnice. L. Ottová (2015) procházela velké množství maturitních zadání z různých okruhů učiva od prvních maturit až do poloviny 20. století a rozdělila úlohy tematicky do 25 skupin. Jednou ze skupin byly exponenciální a logaritmické rovnice. Zajímavé je, že úlohy na toto téma pak převelice často označují za úlohy, které byly mezi těmi nejčastěji zadávanými.

I v současné době jsou úlohy na logaritmy v didaktických testech z matematiky čteně zastoupeny. Podle L. Bindzarové (2021) se žákovy znalosti logaritmů ověřovaly v devíti testech státní maturitní zkoušky z matematiky z desíti za období jarních termínů maturit mezi lety 2010 a 2020. Pouze v jarním termínu roku 2013 byla úloha na logaritmy nahrazena exponenciální rovnicí. (Uvedené informace jsme také sami ověřili.) Tyto úlohy na logaritmy byly nejčastěji obodovány dvěma až čtyřmi body, a, jak dále L. Bindzarová uvádí, právě tyto body mohou být často stěžejní při konečném hodnocení a mohou tak rozhodnout o úspěšnosti maturitní zkoušky. Píše, že z dostupných informací, které získala na internetovém portálu výsledků maturit, vyplývá, že právě v oblasti logaritmů dochází k chybám, které zapříčiňují neúspěch u maturitní zkoušky z matematiky.

Seznamme se nyní souhrnně s tím, jaké vědomosti předpokládají katalogy požadavků pro současnou státní maturitní zkoušku z matematiky a matematiky rozšiřující. Vědomosti, které má žák umět z oblasti logaritmů pro zkoušku z *matematiky* jsou stanoveny ve čtvrté kapitole katalogu požadavků s názvem *Funkce*. Zde je podkapitola *4.4 Exponenciální a logaritmické funkce, jednoduché rovnice*, ve které se píše, že má žák umět (Katalog požadavků: Matematika, 2014, s. 10):

- určit exponenciální funkci, stanovit definiční obor a obor hodnot, sestrojít graf;
- určit logaritmickou funkci, stanovit definiční obor a obor hodnot, sestrojít graf, užít definici logaritmické funkce;
- vysvětlit význam základu a v předpisech obou funkcí, monotonie;
- užít logaritmu, věty o logaritmech, řešit jednoduché exponenciální a logaritmické rovnice, užít logaritmování při řešení exponenciální rovnice;
- upravovat výrazy obsahující exponenciální a logaritmické funkce a stanovit jejich definiční obor;
- použít poznatky o exponenciálních a logaritmických funkcích v jednoduchých praktických úlohách.

V práci M. Tulise (2018) se porovnávají tyto požadavky s očekávanými výstupy RVP. Dochází se k zásadnímu rozporu. Přestože v katalogu se nachází užití logaritmu, řešení logaritmických rovnic či logaritmování při řešení exponenciálních rovnic, v RVP pro gymnázia jsou jen zahrnuty v seznamu učiva, ne však v očekávaných výstupech žáků. V RVP pro střední školy (všech oborů) není pak užití logaritmu ani řešení rovnic vůbec zastoupeno.

Maturitní zkouška *matematika rozšiřující* má požadavky ještě trochu rozšířené, jak už její název napovídá. Logaritmy jsou zde zařazeny pod kapitolu Funkce do podkapitoly 4.6 *Exponenciální a logaritmické funkce, rovnice a nerovnice* (Katalog požadavků: Matematika rozšiřující, 2020, s.10), ve které se píše, že má žák umět:

- určit exponenciální funkci a sestrojit její graf;
- užívat s porozuměním pojmu inverzní funkce pro definování logaritmické funkce, určit logaritmickou funkci a sestrojit její graf;
- stanovit definiční obor a obor hodnot u obou funkcí, určit typ monotonie v závislosti na hodnotě základu;
- řešit exponenciální a logaritmické rovnice a jednoduché nerovnice, užít logaritmus a jeho vlastnosti;
- aplikovat poznatky o exponenciálních a logaritmických funkcích při řešení reálných problémů.

Na základě procházení starých maturitních úloh jsme zjistili, že v oblasti logaritmu nebyly vždy ověřovány stejné dovednosti. V následující části naší práce bychom proto chtěli uvést ukázky různých úloh, jaké mohly žáky při maturitní zkoušce potkat. Objevili jsme totiž, že se dříve zadávaly také úlohy, které se již dnes v maturitním testu zcela jistě neobjeví (to se samozřejmě netýká jen učiva o logaritmech, zabývejme se ale nyní jen jimi). Budeme také porovnávat starší okruhy učiva logaritmu s výše uvedenými platnými předpisy – jednotlivými body.

Když jsme tedy zjistili, že se dříve zadávaly i úlohy, které se již dnes v maturitním testu zcela jistě neobjeví, mohlo by být otázkou, zda se naopak v dnešních státních maturitách neobjevuje nějaké téma navíc, které se dříve nezadávalo. Jako jediné takové téma, na které jsme narazili, když jsme procházeli staré maturitní úlohy a porovnávali je s katalogem požadavků pro matematiku a matematiku rozšiřující, lze uvést jen logaritmické nerovnice. Ve starých maturitních sbírkách ani úlohách jsme se neseťkali ani s jednou logaritmickou nerovnicí. Ty se však v dnešní maturitě mohou (dle katalogů požadavků) objevit pouze v matematice rozšiřující. Katalog požadavků k této zkoušce se však spokojuje s tím, že žák bude umět řešit pouze *jednoduché* logaritmické nerovnice. Z dosavadních 11 zveřejněných didaktických testů (včetně ilustračního testu) z Matematiky+ a z matematiky rozšiřující se na

stránkách CERMATu (Testy a zadání, c2019) úloha na nerovnice objevila však pouze jednou (v roce 2019).

Skutečnost, že se ony úlohy dnes již ve státní maturitní zkoušce neobjeví je dána mimo jiné dnes všeobecně rozšířeným používáním kalkulačky. S tím, jak kalkulačka pracuje, jsou žáci seznamováni v průběhu svého vzdělání a její používání je i při samotné maturitní zkoušce povoleno. Kdyby však kalkulačka povolena nebyla, jen těžko kdo z žáků by byl schopen ony dřívější maturitní úlohy vyřešit. Dnes se totiž žáci většinou při výuce nedozví nic o tom, jak s logaritmickými tabulkami pracovat a k čemu všemu se to může hodit. Vědomosti o tom, že lze např. vyřešit jen za použití logaritmických tabulek úlohu: „ $\log x = 1,07918$ “ nebo: „ $\log 694,33 = x$ “ pomalu, ale jistě, upadají v zapomnění.³⁴

Uvedeme nyní tedy na ukázkou několik maturitních úloh z různých okruhů, které mají prověřit znalosti práce s logaritmem. U každého okruhu bychom pro ilustraci vždy vysvětlili řešení první úlohy. Je možné udělat si přitom úsudek, nakolik se obtížnost úloh v celém vývoji MZ mohla měnit a porovnat si to s obtížností maturitních úloh jak jsou zadávány dnes. Nejprve uvádíme úlohy, které by se mohly v maturitním didaktickém testu objevit i v současnosti, poté ty, u nichž to již možné není. Záměrně zde neumístujeme příklady úloh, které se v didaktických testech vyskytují dnes a to hlavně z důvodu úspory místa a času. Jednak předpokládáme přehled a vlastní zkušenosti v této problematice u těch, kteří budou tuto práci procházet, jednak nechceme zbytečně opakovat. Na toto téma, totiž jak se logaritmy v maturitní zkoušce z předmětu matematika od roku 2010 do roku 2020 vyskytují, vznikla samostatná bakalářská práce L. Bindzarové (2021), o jejíž existenci jsme se již výše zmínili.

Na tomto místě bychom si předem dovolili ještě několik poznámek. Jednak – při volbě níže uvedených úloh jsme se pokusili býti objektivní a upřednostnit jejich větší rozmanitost a neopakovat neustále stejný typ. Proto, kdykoliv jsme objevili nějakým trochu jiným způsobem zadanou úlohu, která se ve starších zdrojích, které jsme prošli, neobjevovala, snažili jsme se ji uvést. Vycházeli jsme z předpokladu, že do té doby se takovým způsobem nezadávala a ukazujeme to tedy zde jako historický posun. Nemusí to být úplně přesné, ale je to názorné a my na to nyní upozorňujeme. Zároveň se při zařazení úlohy snažíme vyhnout opakování takových úloh, které jsou stejné či dosti podobné, a tak šetřit čas i místo. Za úlohou vždy v závorce následuje letopočet, který má upřesnit, kdy asi byla (mohla být)

³⁴ Jak najít hodnotu v logaritmických tabulkách a také jaké další logaritmické pomůcky se používaly a jak fungovaly, se píše v práci P. Přistoupilové (2010). S tím, jak používat logaritmické tabulky, tj. také jak vyřešit tyto dvě úlohy se můžeme také dočíst v samotných tabulkách (ale pravděpodobně jen některých), např. (Brož et al., 1980). O tom, jak pracovat s logaritmickými tabulkami, přehledně a na vícero příkladech pojednává také M. Tulis (2018). Uvádí, že logaritmické tabulky původně vznikly pro usnadnění početních operací, zejména násobení, dělení, umocňování a odmocňování. Ke všem těmto operacím uvádí řešený příklad. Také vysvětluje práci s logaritmickým pravítkem.

úloha zadaná. Pro lepší přehlednost zde neuvádíme celé zdroje, jen letopočty. Tyto uvedené roky by měli každému dát rychlý odhad, v jaké době asi daná maturitní úloha byla zadána. Proto letopočet někdy neodpovídá roku vydání. Pod uvedenými letopočty je třeba rozumět následující:

- 1872 – (Wallentin, 1908) – sbírka maturitních otázek z let 1872 – 1878,
- 1905 – (Sommer & Hübner, 1905),
- 1906 – (Borovanský, 1907) – ukázka maturitních úloh z roku 1906,
- 1922 – (Hrubý & Kott, 2012) – ukázka maturitních úloh z roku 1922,
- 1945 – (Maška, 1945),
- 1959 – (Benda, 1959),³⁵
- 1968 – (Benda et al., 1968),
- 1983 – (Benda, 1983).

Chceme ještě také upozornit na nedostatek, kterého jsme se dopustili tím, že jako maturitní úlohy zde uvádíme nejen ty, které se skutečně v maturitní zkoušce vyskytovaly, ale také ty, které se tam jen mohly vyskytovat, které jsme však ve skutečnosti posbírali ze sbírek maturitních příkladů. Z těchto sbírek pak ony úlohy mohly být skutečně vybírány pro maturitní zkoušky,³⁶ avšak nemusely. Nebo mohly být vybírány pro ústní zkoušku a tudíž je to trochu nepřesné porovnávat to s písemnou státní maturitní zkouškou dneška. Tak např. v roce 1922 je zřetelné, že ony úlohy mohly být jen k ústní zkoušce, když toho roku písemná zkouška se nekonala. Ze skutečných písemných maturitních zadání, anebo z díla s vytyčeným cílem připravit na písemnou maturitu, mohou být vlastně pouze první dva uvedené zdroje, další jsou z let, kdy písemná zkouška nebyla, nebo byla jen na menším počtu středních škol. Nicméně soustředit se jen na první dva zdroje a pak hned přejít k současné maturitě by bylo ochuzení o bohatou historii.

Třetí věc, která s výše napsaným trochu souvisí a kterou je třeba ještě jednou připomenout, je ta skutečnost, že my porovnáваме dřívější maturitní

³⁵ Jedná se o Sbíрку maturitních příkladů, která byla poprvé vydána v roce 1959. Dočkala se 10 vydání (1959, 1961, 1966, 1968, 1971, 1974, 1979, 1983, 1986, 1988). Některá vydání zůstala beze změny, některá byla upravená. Mezi roky 1959 a 1968 nastala, co se týče učiva logaritmu jen ta změna, že se ve sbírce nachází téměř dvakrát více úloh na užití logaritmu. Možná je to ale jen tím, že sbírka je celkově rozšířena. Nejdůležitější změna pak spočívá v tom, že v roce 1968 sbírka již obsahuje integrál (na logaritmus). Dále zde jsou již i úlohy na limity a derivace (ale ne na logaritmus). Sbířka 1971 zůstává prakticky beze změny, jen se změnil název jedné kapitoly – místo kapitoly Infinitesimalní počet se stejná kapitola jmenuje Úvod do matematické analýzy. Nejvíc se sbírka proměnila v roce 1983. Najednou zde byly vypuštěny úlohy vázané na rozsáhlé užití logaritmických tabulek, chybí kapitola Užití logaritmu, úlohy na limity, derivace, integrály se schovávají pod název Teorie funkcí a posloupností. Proběhla celková změna struktury sbírky. Vydání z let 1986, 1988 pak zůstávají prakticky beze změny (Benda, 1959; Benda et al. 1968, 1971, 1979; Benda, 1983, 1986, 1988).

³⁶ Speciálně ve sbírce z roku 1905 se to uvádí, že „sbírka úloh jest sestavena a) jako pomocná kniha k opakování matematiky na středních školách v třídě nejvyšší; b) pro zkoušení při písemné i ústní maturitě.“

zkoušky pouze s dnešní státní maturitou (která je pouze v písemné formě), jako by žádná jiná dnes ani nebyla. Má to svůj důvod. Ovšem, žák může také dnes složit i ústní zkoušku z matematiky, její pravidla se však mohou na různých školách zásadně odlišovat. Jednak obsahem učiva, jednak i pravidly. Není cílem této práce dělat jakousi analýzu mezi školami ČR, jak na nich maturitní zkouška z matematiky probíhá, jaké je obtížnosti atd., kteréžto téma by celé mohlo být předmětem nové závěrečné práce. Proto zde téma ústních zkoušek nyní chceme úplně pominout a srovnání provádíme pouze se státní MZ, která je všem dnešním žákům, kteří si jí vyberou jako maturitní předmět, společná.

Pro lepší přehlednost, srozumitelnost a úpravu jsme podobu zadání sjednotili, některé úlohy jsme museli přepsat do současné podoby. Například dříve se někdy psala místo desetinné čárky tečka uprostřed řádku (pozor, někde se to příliš nelišilo od znaménka krát a bylo potřeba z kontextu odvodit, co ona tečka znamená) nebo log se někde značil lg.

3.2.1 Úlohy, které se mohou ve státní MZ objevit i dnes

ROVNICE EXPONENCIÁLNÍ

Rovnice exponenciální zde zařazujeme, protože ve většině případů je na jejich vyřešení potřeba umět pracovat s logaritmem. Záměrně zde vybíráme ony exponenciální rovnice, v nichž je logaritmus v exponentu, vyskytovaly se ale samozřejmě neméně často rovnice, které v exponentu logaritmus neměly, ale který stejně bylo nutno následně použít pro úspěšné vyřešení úlohy.

Co se historického vývoje týče, rádi bychom poznamenali následující: Exponenciální rovnice se v maturitní zkoušce vyskytovaly již od samého počátku (od zavedení MZ) a jako jedna z mála oblastí, na kterých je prověřována znalost logaritmů, vydržela po celou dobu až do dnes. I v současnosti se žák může s exponenciálními rovnicemi v maturitním didaktickém testu z matematiky setkat. Ovšem v katalogu požadavků společné části MZ předmětu matematika je uvedeno: „Žák dovede (...) řešit jednoduché exponenciální a logaritmické rovnice, užít logaritmování při řešení exponenciální rovnice.“ Skutečně, má-li se již exponenciální rovnice vyskytnout, není v žádné přílišné obtížnosti a rozhodně se neočekává, že by s ní žák strávil mnoho času. Vždyť jak jsme uvedli, stačí, aby žák řešil *jednoduché* exponenciální rovnice. Dáno je to však jistě také odlišnou podobou dnešních maturit. Dříve bylo zadáváno např. 6 úloh na 4 hodiny, dnes 25 úloh na 135 minut. Dnes se tedy nemohou prověřovat znalosti tak do hloubky.

V katalogu požadavků pro matematiku rozšiřující se uvádí, že má umět „řešit exponenciální a logaritmické rovnice a jednoduché nerovnice“, tedy zde by již mohla být očekávána vyšší obtížnost. Je tím ale myšleno i to, že by žák měl být schopen vyřešit také všechny zde uvedené úlohy? Že i tyto všechny (obzvláště myslíme na ty obtížnější) by se mohly ve zkoušce objevit? Nám se to moc pravděpodobně nezdá.

$$5^{\log x} + 2^{1-\log(2x)} \cdot 10^{\log(2x)} = 25 \quad (1872)$$

$$2x^{2\log x} + 3x^{\log x} + 3x^{-\log x} + 2x^{-2\log x} = 230,32 \quad (1872)$$

$$10000x^{[(\log x)^3 - 5\log x]} = 1 \quad (1872)$$

$$\sqrt{8 + x^{-4+3\log x}} = 1 + \sqrt{3 + x^{-4+3\log x}} \quad (1905)$$

$$x^{2\log x} \cdot \sqrt[n]{x} = x^{4n} \cdot \sqrt[\log x]{x^2} \quad (1906)$$

$$x^{\log x} \cdot \sqrt[n]{x} = x^n \cdot \sqrt[\log x]{x} \quad (1922)$$

$$(2x + 1)^{\log(2x+1)-3} = \frac{1}{100} \quad (1922)$$

$$x^{\log x} + 10x^{-\log x} = 11 \quad (1959)$$

$$x^{3+4\log x} = 10 \cdot x^6 \quad (1959)$$

$$\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10 \quad (1983)$$

$$x^{3\log x - 5} = x^{4-7\log x} \quad (1983)$$

ŘEŠENÍ ÚLOHY: $5^{\log x} + 2^{1-\log(2x)} \cdot 10^{\log(2x)} = 25$

Platí:

$$10^{\log 2x} = 5^{\log 2x} \cdot 2^{\log 2x}$$

Rovnici si můžeme přepsat:

$$5^{\log x} + 2 \cdot 2^{-\log 2x} \cdot 5^{\log 2x} \cdot 2^{\log 2x} = 25$$

$$5^{\log x} + 2 \cdot 5^{\log 2x} = 25$$

$$5^{\log x}(1 + 2 \cdot 5^{\log 2}) = 25$$

$$5^{\log x} = 25 : (1 + 2 \cdot 5^{\log 2})$$

$$\log x \cdot \log 5 = \log(25 : (1 + 2 \cdot 5^{\log 2}))$$

$$\log x = \log(25 : (1 + 2 \cdot 5^{\log 2})) : \log 5$$

$$10^{\log x} = 10^{\log(25:(1+2 \cdot 5^{\log 2})):\log 5}$$

$$x \doteq \underline{\underline{12,6317}}$$

Pro vysvětlení: výraz $10^{\log 2x}$ jsme v rovnici nahradili, tím nám pak vznikla jednička z výrazů $2^{-\log 2x}$ a $2^{\log 2x}$. Pak dořešíme za pomoci znalostí vět o logaritmech a znalosti vztahu $a^{\log_a x} = x$.

Z předposledního řádku na poslední se dostat je dnes s běžnou kalkulačkou otázka několika vteřin. Běžná kalkulačka vypočte toto číslo s přesností na 8 desetinných míst. Dříve to ovšem bylo složitější s každým dalším desetinným místem navíc. Žáci, jak již jsme výše nastínili, k výsledku dospěli několikanásobným použitím logaritmických tabulek.

ROVNICE LOGARITMICKÉ

Co jsme výše výše uvedli pro rovnice exponenciální, vztahuje se taktéž na rovnice logaritmické. I pro ně totiž platí, že se vyskytovaly již od zavedení maturit a dodnes se tyto úlohy zadávat nepřestaly. Na základě práce L. Ottové (2011) a vlastních zkušeností z procházení množství dřívějších materiálů si můžeme všimnout, že v dnešní maturitní zkoušce rozhodně úroveň (např. úlohy níže uvedené třetí v pořadí) žák čekat nemusí a to ani v matematice rozšiřující. Jaké jsou požadavky – to již uvedeno u rovnic exponenciálních.

Můžeme si všimnout, že některé z úloh vedou na užití vět o logaritmech, jiné na celkové pochopení toho, jak logaritmus funguje, jiné zase např. na použití substituce. Při procházení starých zadání maturit si můžeme všimnout, že nejčastěji se počítá s logaritmem o základě 10, přirozený logaritmus se používá málo. Pozastavuje se nad tím i Ottová (2011) ve své diplomové práci.

$$\log(x+2) + \log(x+3) = \log(x-1) + \log x \quad (1872)$$

$$\log \sqrt{x-1} + \log 2 = 1,2 - \log \sqrt{x + \frac{1}{2}} \quad (1872)$$

$$\log \sqrt[3]{12x(3x-1) + 5(x-6)} - \frac{2}{3}\sqrt{x-1} = \frac{2}{3} \quad (1872)$$

$$\frac{1}{2} \log x^3 + \log \frac{10}{x} - \log \sqrt{x} = 0 \quad (1905)$$

$$\log(x+1) - \log(x^3+1) + \log 13 + \log x = 2 \log 2 \quad (1905)$$

$$\log(1-x) - \log a = \log 2 + \log(1+x) - \log(1+a^2) \quad (1945)$$

$$n \log^2 x - (n^2 + 1) \log x + n = 0 \quad (1959)$$

$$\ln 2x + \ln x^2 - \ln \sqrt[3]{x} = 1 + \ln 2 - \ln x^{-3} \quad (1983)$$

$$\log_4 x + \log_4^{-1} x = 2 \quad (1983)$$

$$1 + \log_7 x^3 = 10 \cdot (\log_7 x)^{-1} \quad (1983)$$

ŘEŠENÍ ÚLOHY: $\log(x+2) + \log(x+3) = \log(x-1) + \log x$

Platí:

$$\begin{aligned} \log(x+2)(x+3) &= \log(x^2-x) \\ (x+2)(x+3) &= (x^2-x) \\ 6x+6 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Protože však $x = -1$ nenáleží do definičního oboru zadaných logaritmů, rovnice nemá řešení. Tato úloha na svoji dobu celkem udivuje svoji jednoduchostí. Zvláštní ovšem je, že v řešení se uvádí, že výsledkem je $x = -1$. Je to snad způsobeno tím, že tehdy se ještě logaritmus jako funkce vůbec nezaváděl...?

FUNKCE – DEFINIČNÍ OBOR

V maturitních testech se dnes objevují úlohy na logaritmickou funkci dosti běžně, žák by určitě měl umět nakreslit nějaký jednoduchý graf, vědět, jak se liší graf logaritmu o základu menším než jedna od toho, který má základ větší než jedna apod. V požadavcích pro maturitní zkoušku z matematiky ve společné části se dočteme, že žák by měl umět určit logaritmickou funkci, stanovit definiční obor a obor hodnot, sestrojít graf, užít definici logaritmické funkce; vysvětlit význam základu a . Matematika rozšiřující pak požaduje schopnost užívání s porozuměním pojmu inverzní funkce pro definování logaritmické funkce, určení logaritmické funkce a sestrojení jejího grafu; stanovení definičního oboru a oboru hodnot, určení typu monotonie v závislosti na hodnotě základu.

Nebylo tomu tak však vždy, že by se žáci museli obávat, že v maturitní zkoušce dostanou úlohu týkající se logaritmické funkce. Kdybychom chtěli procházet staré maturitní písemky z doby habsburské monarchie a hledat v nich úlohy na funkce, např. právě na onu naši logaritmickou, namáhaly bychom se nadarmo, nic bychom nenašly. V té době se totiž funkce na středních školách vůbec nevyučovaly! Poprvé se o nich žáci začaly dovídat až po roce 1908, kdy toto učivo začíná být zaváděno do škol Manchetovou reformou (Ottová, 2011). A samozřejmě ještě trvalo, než se mu dal prostor i v maturitách a začalo se zkoušet, nehledě na to, že v té době písemná zkouška z matematiky už vůbec není. Zkouší-li se již pak i funkce, opět trvá nějakou dobu, než se dostane i na funkci logaritmickou, ze začátku to totiž jsou pouze funkce lineární resp. kvadratické.

První úlohy, které by bylo již možno zařadit mezi ty, které ověřují znalosti z funkcí logaritmických jsou úlohy, ve kterých má žák za úkol stanovit definiční obor logaritmu či logaritmické funkce. Později přicházejí různé variace tohoto zadání, jako např. že žák má porovnat definiční obor oné funkce s funkcí jinou či že má onen definiční obor umět zakreslit na číselnou osu. Tyto úlohy se od dnešních příliš neliší, i dnes žáky takové úlohy v didaktických testech potkávají. Jako příklad úloh, ve kterých žák má umět stanovit definiční obor mohou posloužit následující zadání:

$$y = \log(2x^2 + 4x - 6) \quad (1959)$$

$$y = \log \frac{3x - 6}{5} \quad (1959)$$

$$y = \sqrt{x^2 - 3x - 4} \quad (1983)$$

$$y = \log(5x^2 - 8x - 4) \quad (1983)$$

$$y = \log(|x| + |x - 1| - 1) \quad (1983)$$

ŘEŠENÍ ÚLOHY: $y = \log(2x^2 + 4x - 6)$

Pro funkci $y = \log a$ musí platit $a > 0$. Proto se vlastně jedná o to vyřešit nerovnici $2x^2 + 4x - 6 > 0$.

Lze užít například následující postup. Nejdříve zjistíme pomocí diskriminantu, pro která x platí $2x^2 + 4x - 6 = 0$.

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 64$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 2}$$

Vidíme, že $x_1 = -3$, $x_2 = 1$. Protože pro nulu by nám vyšlo záporné číslo ($x = -6$), vidíme, že řešením nerovnice, a tím celé úlohy, je interval $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$.

Můžeme si všimnout, že není potřeba znát mnoho poznatků o logaritmické funkci. Skoro by se tato úloha mohla zařadit spíše mezi algebraické úlohy než mezi úlohy z matematické analýzy.

FUNKCE – GRAF

Přestože to může být dosti nečekaně, kreslit graf logaritmické funkce v maturitní zkoušce je záležitostí posledních zhruba 50 let. My jsme na takový typ úloh narazili až v maturitní sbírce staré 40 let, tedy z roku 1983. Tato v té době asi nejrozšířenější sbírka měla vícero dřívějších vydání, která jsme prošli, ale až v tomto roce dochází k nové úpravě a změně úloh, které mohou být při maturitní zkoušce požadovány. Samotná tato sbírka vysvětluje onu změnu vydáním nových učebnic z roku 1980, ve kterých k těmto změnám učiva dochází.

Zde se tedy můžeme již setkat s úlohami, které vyžadují znalosti o tom, jak se logaritmická funkce chová, jaké má vlastnosti, jak vypadá atd. Po zácích se chce kromě zakreslení grafu zadané logaritmické funkce také často popsat její průběh, pak dokonce mají i pomocí grafu řešit rovnice (poslední zde uvedená úloha) a nerovnice – ta zde však žádná na logaritmus není. Pro přibližné načrtnutí některých grafů (viz úloha v pořadí druhá) je zapotřebí použít derivace. Dnešní požadavky týkající se grafu logaritmu jsou již uvedeny v oddíle o definičním oboru funkcí.

Za příklad výše jmenovaných funkcí, jejichž průběh má žák určit, můžeme uvést např. tyto:

$$y = |\log |x||$$

$$y = \log x^{\sqrt{x}} \quad (1983)$$

$$y = \log x \text{ na int. } \langle 0, 1; 10 \rangle$$

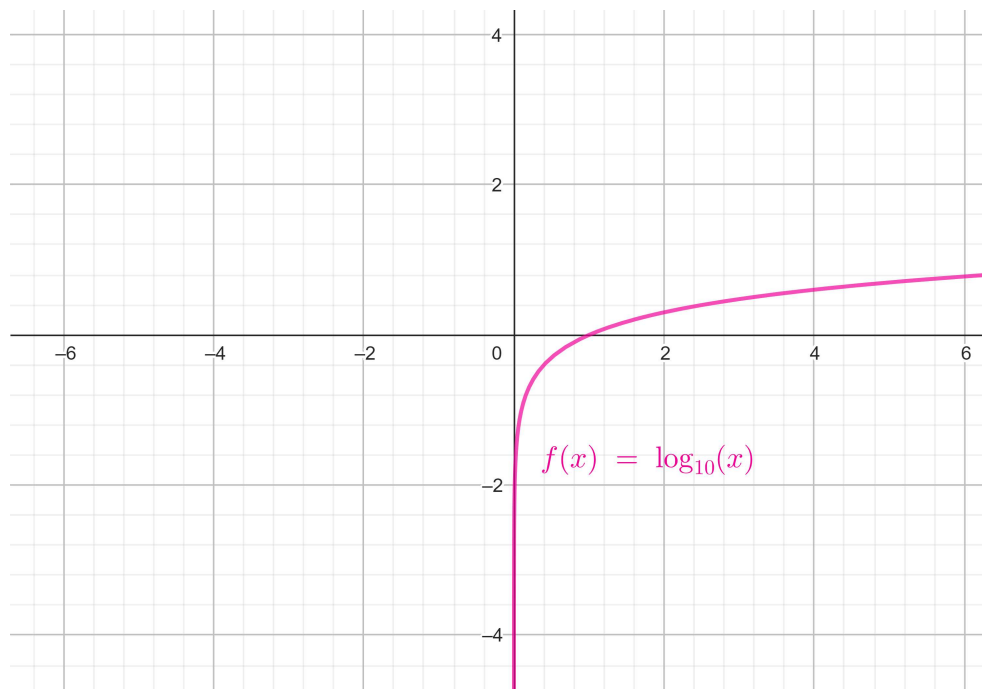
$$y = 5 \cdot \log 10x + 3$$

$$y = \operatorname{sgn} |\log x| \quad (1983)$$

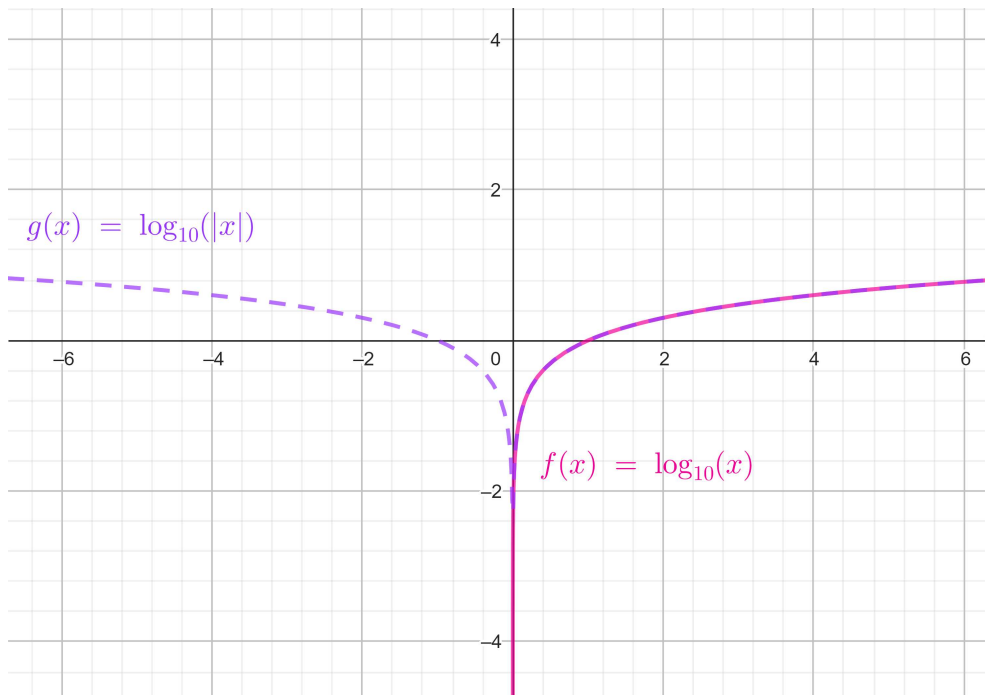
$$\log x + \log(4 - x) = 1 \quad (1983)$$

ŘEŠENÍ ÚLOHY: $y = |\log |x||$

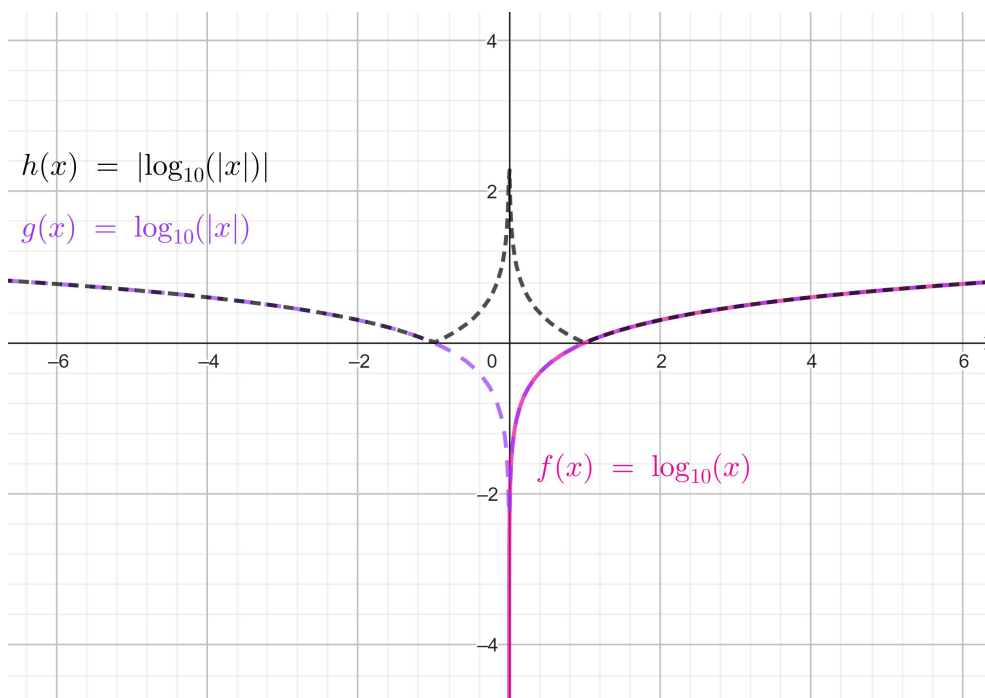
Postupně si zakreslíme (obrázek 1, obrázek 2, obrázek 3), jak se bude graf funkce měnit oproti základní funkci logaritmu.



Obrázek 1: Graf funkce $\log x$



Obrázek 2: Graf funkce $\log x, \log |x|$



Obrázek 3: Graf funkce $\log x, \log |x|, |\log |x||$

3.2.2 Úlohy, které se nyní ve státní MZ neobjeví

SOUSTAVY EXPONENCIÁLNÍCH A LOGARITMICKÝCH ROVNIC

Ve skupině úloh ověřující žákovy znalosti, které se dříve běžně v maturitní zkoušce zadávaly, ale které již dnes žák k maturitě nevyužije, jsou například úlohy na soustavy exponenciálních a logaritmických rovnic. Skutečně, ani katalog požadavků pro matematiku rozšiřující se tímto tématu nevěnuje, žáci na běžných školách se s ním dnes nesebkají. Vrchol znalostí v současnosti spočívá v tom, aby žák uměl vyřešit jednu rovnici. Také G. Svobodová (2012) se ve své práci pozastavuje nad tím, že dnešní učebnice nezařazuje ani jednu úlohu na soustavu exponenciálních rovnic. Dříve byly soustavy exponenciálních a logaritmických rovnic oblíbeným tématem a v těch nejstarších maturitních sbírkách na ně běžně narazíme, například ve sbírce z roku 1945 se ještě objeví, sbírka z roku 1959 již tyto úlohy úplně vypustila. Ve sbírce z roku 1983 se pak sice ještě nějaké soustavy objeví, ale již ne logaritmické, nýbrž jen čistě exponenciální.

Kdo by rád věděl, jak by ve dřívějších maturitách uspěl, může si vyzkoušet například následující úlohy:

$$\begin{aligned}5^{\log x} + 3^{\log y} &= 32 \quad (1872) \\5^{\log x} \cdot 3^{\log y} &= 135\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{y}} &= 11\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{y}} - 6 \quad (1872) \\y &= 2 - \log x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2^{\log x} \cdot 3^{\log y} &= \sqrt{54} \quad (1872) \\\log x + \log y &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_b a - \log_a b &= \frac{8}{3} \quad (1905) \\ab &= 16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log(x + y + z) &= 1 \quad (1905) \\\log(x + y + z) - \log z &= 0 \\4^x \cdot 3^y \cdot 2^z &= 10368\end{aligned}$$

ŘEŠENÍ ÚLOHY:

$$\begin{aligned}5^{\log x} + 3^{\log y} &= 32 \\5^{\log x} \cdot 3^{\log y} &= 135\end{aligned}$$

Tuto úlohu vyřešíme pomocí substituce. Nechť např. $5^{\log x} = a$ a $3^{\log y} = b$. Pak platí:

$$\begin{aligned}a + b &= 32 \\a \cdot b &= 135\end{aligned}$$

Z první rovnice si můžeme vyjádřit a a dosadit ho do rovnice druhé. Pak budeme mít:

$$(32 - b) \cdot b = 135$$

Upravíme a převedeme na jednu stranu:

$$b^2 - 32b + 135 = 0$$

$$D = (-32)^2 - 4 \cdot 135 = 484$$

$$b_{1,2} = \frac{32 \pm 22}{2}$$

Kořeny této kvadratické rovnice jsou $b_1 = 27$, $b_2 = 5$. Pokud $b_1 = 27$, pak $a_1 = 5$ a naopak, pokud $b_2 = 5$, pak $a_2 = 27$.

Podíváme se tedy nejprve na řešení $b_1 = 27$, $a_1 = 5$.

Platí:

$$\begin{array}{ll} 5^{\log x} = 5 & 3^{\log y} = 27 \\ \log x = \log(5) : \log(5) & \log y = \log(27) : \log(3) \\ x_1 = 10 & y_1 = 10^3 = 1000 \end{array}$$

Pro řešení $a_2 = 27$, $b_2 = 5$ platí:

$$\begin{array}{ll} 5^{\log x} = 27 & 3^{\log y} = 5 \\ \log x = \log(27) : \log(5) & \log y = \log(5) : \log(3) \\ x_2 = 10^{\log(27) : \log(5)} \doteq 111,64 & y_2 = 10^{\log(5) : \log(3)} \doteq 29,17 \end{array}$$

Všimneme si, že první řešení by se dalo uhádnout i z hlavy, v tomto případě by ale mohlo dojít k omylu, protože by se zapomělo zkontrolovat, zda není i další řešení.

Ukázali jsme si, že tato úloha nemá příliš vysokou obtížnost, že by ji dnešní žáci nemohli zvládnout. Myslíme, že by mohla být i v současném maturitním testu. Domníváme se, že i toto téma by mohlo být zařazeno do katalogu požadavků pro matematiku.

ÚPRAVA VÝRAZŮ

V požadavcích k dnešní maturitní zkoušce z matematiky i z matematiky rozšiřující se uvádí, že žák má umět použít poznatky o exponenciálních a logaritmických funkcích v jednoduchých praktických úlohách, jistě tím však nejsou myšleny typy úloh, které jsme nazvaly Úprava výrazů a Číselné výrazy. Jedná se totiž o učivo, se kterým se dnes žáci středních škol nesebkají a to kvůli používání kalkulaček.

Do skupiny Úprava výrazů jsme zařadily úlohy ze sbírky 1945, která se na ně specializuje především, ovšem tuto dovednost museli žáci umět již

od začátku a ještě mnoho let po tom. Žák měl zadanou např. první ze zde uvedených úloh. Kdyby mu v tuto chvíli někdo řekl, kolik je a , kolik b a kolik c , vzhledem k tomu, že kalkulačku neznal, trvalo by mu hodně dlouho, než by mohl uvést dostatečně přesný výsledek. A i tak by pravděpodobně musel postupovat jako v obecném případě. Tehdy se totiž všechny takové úlohy vyčíslovaly pomocí logaritmů. Proto jeho úkolem, který byl požadován, bylo přepsat tento výraz pomocí logaritmů. Tento postup měl umět i na opačnou stranu a to po něm požaduje druhá zde uvedená úloha.

$$x = \frac{\sqrt[3]{a\sqrt{b}}}{\frac{3}{4}\sqrt{\frac{ab}{2}}\sqrt[3]{\frac{1}{c}}} \quad (1945)$$

$$x = 2 \log 3 - 2 \log c + \frac{1}{5} \log a - \frac{\log d}{10} + \frac{3 \log b}{2} - \frac{5 \log e}{2} \quad (1945)$$

ŘEŠENÍ ÚLOHY:
$$x = \frac{\sqrt[3]{a\sqrt{b}}}{\frac{3}{4}\sqrt{\frac{ab}{2}}\sqrt[3]{\frac{1}{c}}}$$

Obě strany rovnice zlogaritmuje, dále za pomocí vět o logaritmech dáme exponenty před logaritmy, když ony věty nadále několikrát použijeme a odstraníme závorky, získáme požadovaný výraz.

$$\begin{aligned} \log x &= \frac{1}{3} \left(\log a + \frac{1}{2} \log b \right) - \left(\log \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \log \frac{ab}{2} + \frac{1}{3} \log \frac{1}{c} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\log a + \frac{1}{2} \log b \right) - \left[\log 3 - \log 4 + \frac{1}{2} (\log a + \log b - \log 2) + \frac{1}{3} (\log 1 - \log c) \right] \\ &= \frac{1}{3} \log a + \frac{1}{6} \log b - \log 3 + 2 \log 2 - \frac{1}{2} \log a - \frac{1}{2} \log b + \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{3} \log c \\ &= \frac{1}{3} \log c - \frac{1}{6} \log a - \frac{1}{3} \log b - \log 3 + \frac{5}{2} \log 2 \end{aligned}$$

ČÍSELNÉ VÝRAZY

Běžněji, než řešit takové úlohy obecně, měl žák umět řešit tyto úlohy s konkrétními čísly, tato znalost byla ověřována od zavedení maturit. Vymizela však se začátkem používání kalkulaček a to tak úspěšně, že dnes se o ní mezi žáky běžně vůbec neví. Dřívější žák si pomocí logaritmů (a logaritmických tabulek) mohl spočítat kdejakou odmocninu, poslední námi zde uvedená úloha poukazuje na to, že pomocí logaritmů si mohli žáci ušetřit práci také s písemným dělením. K čemu ještě dalšímu se dříve používaly logaritmy jsme se však již zmiňovaly výše.

$$x = \frac{3472^5 \sqrt[3]{0,4} \cdot \sqrt[5]{0,01}}{2,13^3 \sqrt[4]{0,05}} \quad (1872)$$

$$x = \sqrt[10]{\frac{7856 \cdot \sqrt[4]{5}}{15 \cdot \sqrt[3]{2}}} \quad (1922)$$

$$x = \sqrt[5]{\frac{47,65 + 7,8 \sqrt[3]{656,8^2}}{586,48}} \quad (1945)$$

$$x = \frac{0,54839 - 2}{0,745} \quad (1945)$$

Jiný typ číselných výrazů³⁷

$$x = \log_3^2(\sqrt{3}^{-1}) + \log_3 9^{-2} \quad (1983)$$

$$x = \log(2^1 \cdot \operatorname{tg} 1^\circ) + \log(2^3 \cdot \operatorname{tg} 3^\circ) + \log(2^5 \cdot \operatorname{tg} 5^\circ) + \dots + \log(2^{89} \cdot \operatorname{tg} 89^\circ) \quad (1983)$$

$$x = \pi^{-2,3}, \quad x = (1\frac{1}{25})^{25}, \quad x = 10^{0,42}, \quad x = \sqrt[5]{0,072} \quad (1983)$$

$$x = \log_2(1 + \log_4 \sqrt{2} + \log_{\sqrt{2}} 4 - 1,25) \quad (1983)$$

$$x = \log_5 \left[\frac{\log_5 5 - \log_5 1}{-\log_5 0,2 - \log_5 \sqrt[3]{25}} + 2 \right] \quad (1983)$$

³⁷ Pravdou je, že i dnes se na středních školách učí úpravy výrazů, související s logaritmy, jenže to jsou již jiné výrazy. Jsou to výrazy přímo uvnitř logaritmů, kdy žák má používat věty o logaritmech a také umět převádět na logaritmus o jiném základě. Tuto znalost uměli i žáci dřívější, bralo se to však za takovou samozřejmost, že by úlohy na toto téma nikoho mezi maturitní úlohy zařadit nenapadlo. V každém případě ani takové úlohy se v dnešních didaktických testech neobjevují. Dáno je to tím, že žáci při nich dnes již používají kalkulačky, jejichž použití takové úlohy činí bezpředmětnými. Protože jsme však ve sbírce maturitních (!) úloh z roku 1983 na tyto úlohy narazili, také je zde uvádíme.

$$\text{\textsc{ŘEŠENÍ ÚLOHY:}} \quad x = \left(\frac{3472^5 \sqrt[3]{0,4} \cdot \sqrt[5]{0,01}}{2,13^3 \sqrt[4]{0,05}} \right)^{\frac{1}{6}}$$

Nejprve rovnici zlogaritmujeme. Podobně jako v předchozí úloze poté pomocí vět o logaritmech upravíme:

$$\begin{aligned} \log x &= \frac{1}{6} \cdot \log \left(\frac{3472^5 \sqrt[3]{0,4} \cdot \sqrt[5]{0,01}}{2,13^3 \sqrt[4]{0,05}} \right)^{\frac{1}{6}} \\ \log x &= \frac{1}{6} \left(5 \log 3472 + \frac{1}{3} \log 0,4 + \frac{1}{5} \log 0,01 - 3 \log 2,13 - \frac{1}{4} \log 0,05 \right) \\ x &= 10^{\frac{1}{6} (5 \log 3472 + \frac{1}{3} \log 0,4 + \frac{1}{5} \log 0,01 - 3 \log 2,13 - \frac{1}{4} \log 0,05)} \doteq 564,58 \end{aligned}$$

Nejnáročnější na této úloze ovšem v tehdejší maturitě asi nebyl ani tak tento postup, jak na zadaný výraz uplatnit logaritmus, ale celkové vyčíslení, kolik se x rovná. A to nejnáročnější hlavně z hlediska času. Bylo potřeba, aby se žák dobře a rychle orientoval v logaritmických tabulkách. Kde lze najít informace o tom, jak s nimi pracovat, viz výše v textu.

Poslední řádek, který mi dnes napíšeme a snadno dosadíme do kalkulačky, se ovšem žákovi na papíře neobjevil. Žák zůstal u předposledního řádku, vyčísлил si, kolik se rovná $\log x$ a toto číslo hledal v tabulkách, aby zjistil, kolik se x rovná.

INTEGRÁL, LIMITY, DERIVACE

Již jsme zmínili, že logaritmická funkce se začala v maturitní zkoušce objevovat mnohem později než jiné učivo o logaritmech a že to souvisí s tím, že před 120 lety se funkce na školách ještě vůbec neprobíraly. Ve dvacátém století ale učivo matematiky doznalo dosti změn, takže ve 30. letech je již běžně probírán také integrální počet, limity a derivace (Chlup, 1935). Odráží se to pak i v tom, že pomalu, avšak jistě, se tato témata zařazují mezi okruhy učiva, které se může objevit i v maturitní zkoušce.

Ovšem, jak se toto učivo mezi to, které je zkoušeno, zařadilo, tak také se vyškrtlo, a to nejen z požadavků maturitních, ale rovněž z výuky většiny středních škol a dosti gymnázií. RVP s tímto učivem vůbec nepočítá. Je-li toto učivo dnes při maturitách zkoušeno, děje se tak pouze v ústní části některých gymnázií a technicky zaměřených středních škol.

Podívejme se, jaké typy úloh dříve měli žáci středních škol umět řešit:

$$\int x^3 \ln x \, dx = ? \quad (1968)$$

$$\int (x^2 + x - 2) \ln x \, dx = ? \quad (1968)$$

$$y = \log(x^2 + 1), \quad y' = ? \quad (1983)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |\log x| = ? \quad (1983)$$

ŘEŠENÍ ÚLOHY: $\int x^3 \ln x \, dx = ?$

Použijeme metodu „per partes“.

$$\begin{aligned} \int x^3 \ln x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v = \frac{x^4}{4} & v' = x^3 \end{array} \right| = \frac{x^4}{4} \ln x - \int \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{x^4}{4} \right) dx = \\ &= \frac{x^4}{4} \ln x - \int \left(\frac{x^3}{4} \right) dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + c \end{aligned}$$

Vypočítání tohoto integrálu nevyžaduje příliš složitý postup, u funkce logaritmu se uplatnění metody „per partes“ přímo nabízí. Jenže vzhledem k tomu, že většina středoškolařů se s pojmem integrál vůbec nesetká, nebyla by schopna tuto úlohu vůbec vyřešit.

PRÁCE S PARAMETREM

Učivo, které po žácích, co se týče oblasti logaritmů, nepožaduje dnes ani katalog požadavků k maturitě z matematiky ani k maturitě z matematiky rozšiřující. Toto učivo se vyskytuje ve sbírce z roku 1983, dříve ne, jak jsme zmínili, dříve se znalosti co se týče grafu logaritmu nevyžadovaly.

Zobrazte graf několika funkcí, popište průběh pro všechny přípustné hodnoty parametru funkce: $y = \log_k x$.

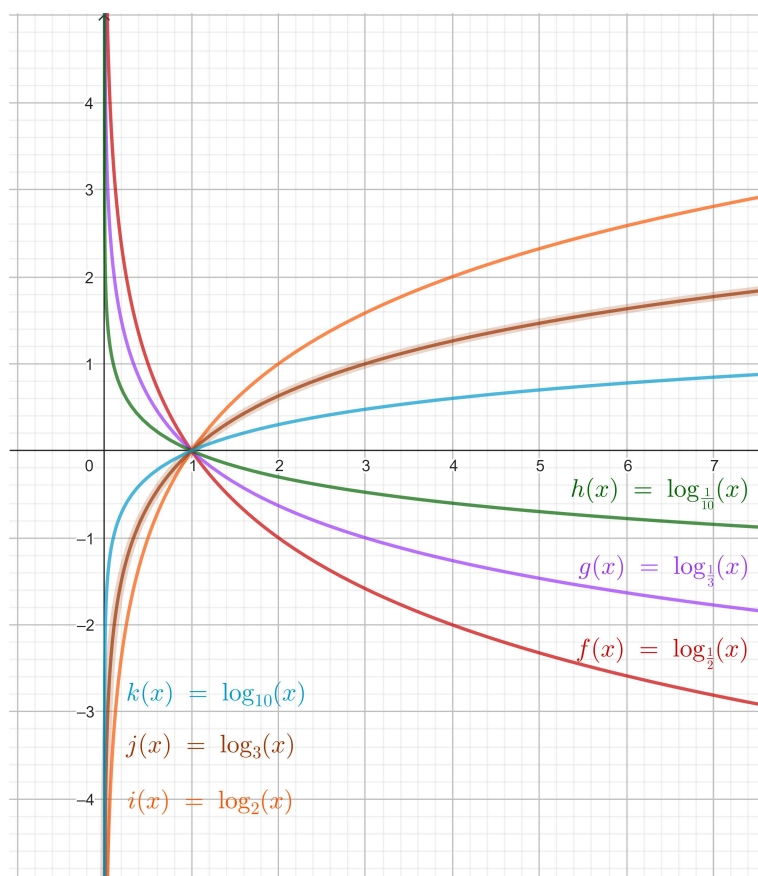
Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ pro které funkce $y = \log_a x$ zobrazuje interval $\langle 0, 5; 5 \rangle$ do intervalu $\langle -2, 1 \rangle$.

V parametrickém systému $y = a \log x + b$ určete všechny funkce, které:

- a) obsahují uspořádané dvojice $[10, 3]$, $[1000, 5]$,*
- b) zobrazují interval $\langle 1; 10 \rangle$ do intervalu $\langle 3; 5 \rangle$,*
- c) obsahují alespoň 1 dvojici typu $[k; k]$.*

ŘEŠENÍ ÚLOHY: Zobrazte graf několika funkcí, popište průběh pro všechny přípustné hodnoty parametru funkce: $y = \log_k x$.

Zakreslíme barevně do jednoho obrázku (obrázek 4).



Obrázek 4: Graf parametrické funkce logaritmu

Přípustné hodnoty jsou $k \in \mathbb{R}^+ - 0$. Pro $0 < k < 1$ je funkce klesající, prostá, neomezená, s definičním oborem $(0, \infty)$. Pro $k > 1$ je funkce rostoucí, prostá, neomezená, s definičním oborem $(0, \infty)$.

SLOVNĚ ZADANÉ ÚLOHY NA VYUŽITÍ LOGARITMU

Skupina hojně zadávaných úloh, hlavně dříve (ve sbírkách bývaly kapitoly s názvem „Užití logaritmu“ se spoustou zadání, ve sbírce z roku 1983 však již tato kapitola zcela vypuštěna). Tyto úlohy se objevily již v nejstarších maturitních zadáních. Dříve se, zdá se, kladl mnohem větší důraz na praktické využívání logaritmu. Kromě užití pro vyčíslení složitých číselných výrazů pak maturitní příklady a sbírky obsahují velké množství úloh zadaných slovně, v nichž se znalosti z logaritmu uplatňují. Jednak do této skupiny úloh patří ty, ve kterých prostě žák potřebuje něco spočítat, třeba nějakou odmocninu, a sám odhalí, že logaritmus musí použít. Dále jsou to také využití při počítání s geometrickými řadami, především tyto úlohy zde na ukázkou uvedeme:

Z geometrickady známe první člen a_1 , kvocient q a součet s_n , jaký je počet členů a jaký je poslední člen této řady? Obecně a konkrétně pro $a_1 = 1$, $q = \frac{3}{2}$, $s_n = 13\frac{3}{16}$. (1872)³⁸

Je-li z geometrické řady s kvocientem $\frac{1}{2}$ a posledním členem $\frac{3}{8}$ součet všech členů $\frac{1533}{8}$, jaká je velikost prvního členu a počet členů této řady? (Proveďte obecně a konkrétně.) (1872)

V logaritmické soustavě je logaritmus čísla 450 větší než logaritmus čísla 40 o 1,16395. Jaké je základ této soustavy a jak se nazývají logaritmy těchto dvou čísel? (1872)

Jest stanoviti pátý člen výrazu $(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[5]{b^3})^x$, pro ten případ, že x jest číslem celým, vyhovujícím rovnici: $\frac{x^{\log x + 2}}{10} = x^{3 - \log x}$. (1906)

Dokažte, že $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$. (1945)

Určete 3% z výrazu: $8,315^3 \cdot \sin \sqrt{\cos \frac{\alpha}{2}}$, je-li $\alpha = 52^\circ 32'$. (1959)

V geometrické posloupnosti je $a_1 = 0,284$, člen a_8 je 33% členu a_1 . Určete přibližnou hodnotu kvocientu. (1959)

Kolik procent obsahu kruhu tvoří pravidelný šestiúhelník jemu vepsaný a opsaný? (1959)

ŘEŠENÍ ÚLOHY: Z geometrické řady známe první člen a_1 , kvocient q a součet s_n , jaký je počet členů a jaký je poslední člen této řady? Obecně a konkrétně pro $a_1 = 1$, $q = \frac{3}{2}$, $s_n = 13\frac{3}{16}$.

Nejprve obecně:

Pro geometrickou řadu platí: $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$. Můžeme si z tohoto vzorce také stručně odvodit vzorec pro a_n (poslední člen posloupnosti).

Platí:

$$\begin{aligned} s_n \cdot (q - 1) &= a_1 \cdot (q^n - 1) \\ s_n \cdot (q - 1) + a_1 &= a_1 \cdot q^n \end{aligned}$$

³⁸ Uvedený zdroj je psán německy, překlad této i následujících úloh vytvořen výhradně pro potřebu této práce.

Také platí:

$$\begin{aligned}a_1 \cdot q^{n-1} &= a_n \\ a_1 \cdot q^n &= a_n \cdot q\end{aligned}$$

Proto

$$\begin{aligned}s_n \cdot (q - 1) + a_1 &= a_n \cdot q \\ \frac{s_n \cdot (q - 1) + a_1}{q} &= a_n\end{aligned}$$

Pokud chceme zjistit n (počet členů), můžeme to udělat např. z rovnice $a_1 \cdot q^n = a_n \cdot q$.

$$\begin{aligned}a_1 \cdot q^n &= a_n \cdot q \\ n \cdot \log q &= \log a_n + \log q - \log a_1 \\ n &= \frac{\log a_n + \log q - \log a_1}{\log q}\end{aligned}$$

Pro zadané hodnoty:

Pokud $a_1 = 1$, $q = \frac{3}{2}$, $s_n = 13\frac{3}{16}$, stačí pouze dosadit do výše připravených vzorců:

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{s_n \cdot (q - 1) + a_1}{q} = \frac{13\frac{3}{16} \cdot (\frac{3}{2} - 1) + 1}{\frac{3}{2}} = \frac{81}{16} \\ n &= \frac{\log a_n + \log q - \log a_1}{\log q} = \frac{\log \frac{81}{16} + \log \frac{3}{2} - \log 1}{\log \frac{3}{2}} = 5\end{aligned}$$

Je ovšem také možno postupovat jinak, např. v řešení k této maturitní úloze se vychází rovnou z rovnice $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ a pro n se pak tedy uvádí $n = \frac{\log[s_n(q - 1) + a_1] - \log a_1}{\log q}$.
Nám se zdálo první řešení snazší, neboť a_n jsme stejně museli dopočítat.

Závěr

V této práci pojednáváme o vývoji maturitní zkoušky na příkladu logaritmů. Nejprve jsme se zabývali obecnou historií maturitních zkoušek z matematiky. Zde jsme zjistili velké množství nepřesných informací v mnoha závěrečných pracích, které o tomto pojednávali, a tak jsme se pokusili zjistit, přímo pomocí procházení dřívějších nařízeních ohledně konání MZ, jaký byl vývoj maturitní zkoušky z matematiky, ve kterém roce platila či neplatila povinnost z ní maturovat a jaké pro tuto maturitu byly případně podmínky. Posloužilo nám to k utvrzení se v přesvědčení o tom, jak nutné je dávat pozor na to, že i v mnoha dílech citované informace mohou být mylné, a všechny poznatky se raději důkladně snažit ověřovat, jak jen to bude možné.

Ve druhé části jsme popsali vznik státních maturit a její změny až do letošního roku 2023. Také jsme pojednali o tom, jak vznikla maturitní zkouška matematika rozšiřující a o zkoušce, která jí předcházela (Matematice+).

Ve třetí části jsme se již maturit dotkli zblízka. Z celé šíře učiva, které je třeba k maturitě z matematiky umět, jsme se omezili na oblast logaritmů. Nejprve vysvětlujeme rozdíl mezi zavedením logaritmu dnes a v minulosti, potom pojednáváme o tomto učivu a jeho výskytu v maturitní zkoušce. Ve dvou podkapitolách uvádíme maturitní úlohy dřívějších dob, nejprve takové, jaké by se obsahem učiva mohly v maturitách objevit, poté ty, které se již neobjeví. Podkapitoly jsme rozčlenili podle okruhů učiva, o kterém zde pojednáváme. Pro každý okruh zde uvádíme vždy vzorově vyřešenou úlohu. Grafy funkcí jsme vytvořili pomocí GeoGebry.

Celkově tak vznikla práce, která podrobně mapuje vývoj maturitní zkoušky na příkladu logaritmů za celou dobu vykonávání maturitních zkoušek. Dalo by se skoro říci, že tak naše dílo odráží to, jak se vyvinulo používání logaritmů za posledních téměř 175 na našich českých středních školách.

Cíle stanovené v úvodu se, jak se domníváme, podařilo naplnit. Za největší přínos považujeme odhalení a ujasnění dosud velice a často zjednodušovaných informací, které popisovaly historii maturitní zkoušky, především co se oblasti matematiky týče. Další přínos naší práce spočívá v porovnání výskytu učiva v oblasti logaritmů v maturitních zkouškách s učivem, které obsahují dnešní didaktické testy z matematiky a matematiky rozšiřující. Jistě nemálo zajímavou věcí jsou zde uveřejněné úlohy ze starých maturit a maturitních sbírek. Je možné je zkusit předložit žákům i na dnešních školách a vysvětlit jim řešení těch úloh, se kterými by si nevěděli rady. Myslíme, že by to pro ně mohlo být velice zajímavé. V každém okruhu učiva jsme zde uvedli vždy jednu úlohu vzorově vyřešenou s komentářem, mj. aby bylo možné seznámit se alespoň s některými postupy řešení úloh, které se dnes již běžně neřeší.

Nedostatkem naší práce zůstává, že některé úlohy, které jsme uvedli, jsme čerpali z maturitních sbírek. Nemohli jsme však ověřit, zda se pak takové úlohy při skutečných maturitách objevovaly či ne. Další nedostatek vidíme v tom, že při srovnávání maturit dřívějších s maturitami v dnešní době se

omezujeme pouze na srovnání se současnou dnešní státní maturitní zkouškou, která je pouze ve formě didaktického testu, co se týče předmětu matematika a matematika rozšiřující. Pro úplnější srovnání by bylo potřeba se zabývat také dnešními profilovými (ústními) maturitními zkouškami, i když, jak již jsme zmínili, nebylo by pak možné toto srovnání dělat všeobecné, neboť nároky na tuto zkoušku se na mnohým školách dosti odlišují.

Maturitní zkoušky jsou velice diskutovaným tématem. Bylo již o nich mnoho napsáno, viz také naše příloha, která vypichuje alespoň některé práce, na které jsme v průběhu tvorby tohoto díla narazili. Rozhodně si však tento seznam nevytkl za cíl úplnost. Jsou zde uvedeny jen některé z mnoha dalších závěrečných prací, a to práce, které se zaměřovaly na témata nejvíce příbuzná tématu našemu. Při tvorbě naší bakalářské práce jsme čím dál více naráželi na mnohé další otázky, na jejichž zodpovězení zde již nezbyl prostor. Snažili jsme se na to vždy průběžně upozorňovat. Jako několik z mnoha příkladů, jak by bylo možno naši práci ještě rozšířit, můžeme uvést tyto: Bylo by možné nezabývat se v historii především matematikou, ale údaje o jejím vývoji rozšířit zasazením do kontextu celkových změn v maturitních zkouškách od jejich zavedení. Bylo by možné udělat průzkum toho, jak maturita z matematiky vypadala i na jiných školách než na onom hlavním proudu. Také by mohlo stát za důkladnější rozebrání podoby a obsahu i jiných maturitních okruhů než v oblasti logaritmu. Bylo by též možno předložit více vzorově vyřešených úloh z oblasti logaritmů, projít vícero starých maturitních zadání a uvést více úloh. Navíc by mohlo být ještě možné zaměřit se i na další typy škol. Třeba se toho ujme někdo další.

Seznam použitých informačních zdrojů

Díla o vývoji maturitní zkoušky, učebnice matematiky

AUERHAN, Jan, František BĚLEHRÁDEK, Břetislav FOUSTKA a Zdeněk Václav TOBOLKA. *Česká politika, Díl 5: Kulturní, zvláště školské úkoly české politiky*. Praha: Jan Laichter, 1913. Dostupné také z: <https://ndk.cz/uuid/uuid:3a612fc0-f904-11e3-8232-5ef3fc9ae867>

BEČVÁŘOVÁ Martina. *Maturitní zkoušky (2)*. Učitel matematiky, 1999a, 7(2), 81 – 89. Dostupné také z: https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/150975/UcitelMat_007-1999-2_3.pdf

BEČVÁŘOVÁ Martina. *Maturitní zkoušky (3)*. Učitel matematiky, 1999b, 7(3), 168 – 174. Dostupné také z: https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/150997/UcitelMat_007-1999-3_6.pdf

BROŽ, Jaromír, Vladimír ROSKOVEC a Miloslav A. VALOUCH. *Fyzikální a matematické tabulky*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1980. Dostupné také z: <https://digitalniknihovna.cz/mzk/uuid/uuid:6ed4a660-7cbd-11e3-a388-5ef3fc9ae867>

CHLUP, Otokar. *Středoškolská didaktika*. Brno: Společnost nových škol, 1935. Dostupné také z: <https://ndk.cz/uuid/uuid:8ab5df90-4db2-11e4-8afd-001018b5eb5c>

MORKES, F. *Historický přehled postavení maturitní zkoušky a analýza jejích funkcí*. Praha: ÚIV – CERMAT, 2003.

ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: Funkce*. 3. upravené vyd. Praha: Prometheus, 2011. ISBN 978-80-7196-357-7.

PRŮCHA, Jan, Eliška WALTEROVÁ a Jiří MAREŠ. *Pedagogický slovník*. 6. aktualiz. a rozš. vyd. Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-647-6.

SOCHOR, K. *Mathematické vzorce: se zřetelem na opakování maturitní a vůbec pro potřebu studujících škol středních*. Praha: E. Weinfurter, 1906. Dostupné také z: <https://digitalniknihovna.cz/mzk/uuid/uuid:84bc7f50-0f47-11e7-9d16-005056825209>

Závěrečné práce

BINDZAROVÁ, Lucie. *Analýza úloh státní maturity z matematiky 2010–2020*. [online]. Olomouc, 2021. Bakalářská práce. Univerzita Palackého. [cit. 2023-4-03]. Dostupné z: <https://theses.cz/id/8m32d2/Bp-Bindzarova.pdf>

BŘEZINOVÁ, Marie. *Modely státních maturit v EU a v České republice*. [online]. Hradec Králové, 2013. Bakalářská práce. Univerzita Hradec Králové. [cit. 2023-4-14]. Dostupné z: <https://theses.cz/id/8m32d2/Bp-Bindzarova.pdf>

KABELE, Jiří. *Proměny modelu maturitní zkoušky v České republice*. [online]. Praha, 2015. Diplomová práce. Karlova univerzita. [cit. 2023-4-03]. Dostupné z: https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/79760/DPTX_2013_2_11410_0_415601_0_155340.pdf?sequence=1&isAllowed=y

KABRDOVÁ, Pavlína. *Maturita jako přechod do dospělosti*. [online]. Olomouc, 2022. Bakalářská práce. Univerzita Palackého. [cit. 2023-4-14]. Dostupné z: https://theses.cz/id/z7gim3/Bc_Kabrdova_Maturita_jako_prechod_do_dospelosti.pdf

KARÁSKOVÁ, Lenka. *Státní maturita z matematiky*. [online]. Ostrava, 2015. Bakalářská práce. Ostravská univerzita. [cit. 2023-3-31]. Dostupné z: <https://portal.osu.cz//StagPortletsJSR168/CleanUrl?urlid=prohlizeni-prace-detail&praceIdno=36080>

KAVANOVÁ, Alica. *Možnosti zvyšování profesní způsobilosti učitelů z pohledu DVP*. [online]. Brno, 2007. Bakalářská práce. Masarykova univerzita. [cit. 2023-4-03]. Dostupné z: <https://adoc.pub/queue/monosti-zvyovani-profesni-zpsobilosti-uitel-z-pohledu-dvpp-i.html>

KREKLOVÁ, Eliška. *Třídění didaktických testů státní maturitní zkoušky z matematiky v období 2011–2020*. [online]. České Budějovice, 2021. Bakalářská práce. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích. [cit. 2023-4-03]. Dostupné z: https://theses.cz/id/o59xu5/Trideni_didaktickyh_testu_statni_maturitni_zkousky_z_mat.pdf

OTTOVÁ, Lenka. *Maturita z matematiky do poloviny 20. století*. [online]. Brno, 2011. Diplomová práce. Masarykova univerzita. [cit. 2023-3-31]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/btftz/Diplomova_prace_Lenka_Ottova.pdf

PŘISTOUILOVÁ, Petra. *Logaritmy*. [online]. Ostrava, 2010. Bakalářská práce. Ostravská univerzita. [cit. 2023-4-05]. Dostupné z: <https://portal.osu.cz//StagPortletsJSR168/CleanUrl?urlid=prohlizeni-prace-detail&praceIdno=16911>

RUSŇÁK, Martin. *Průmyslové školy a maturita z matematiky*. [online]. Ostrava, 2019. Diplomová práce. Ostravská univerzita. [cit. 2023-4-03]. Dostupné z: <https://portal.osu.cz/StagPortletsJSR168/CleanUrl?urlid=prohlizeni-prace-detail&praceIdno=50501>

SKUTIL, Martin. *Proměna maturity jako specifického školního jevu*. [online]. Brno, 2008. Dizertační práce. Masarykova univerzita. [cit. 2023-3-31]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/r0eid/Dizertace_Skutil_26_11_2008.pdf

SVOBODOVÁ, Gabriela. *Maturity z matematiky včera a dnes*. [online]. Brno, 2012. Bakalářská práce. Masarykova univerzita. [cit. 2023-3-31]. Dostupné z: <https://is.muni.cz/th/keoae/bakula.pdf>

ŠEFL, Jan. *Průvodce studenta přípravou na maturitu z matematiky*. [online]. Olomouc, 2022. Bakalářská práce. Univerzita Palackého. [cit. 2023-4-03]. Dostupné z: <https://theses.cz/id/y0rwpq/Bakalarska-prace.pdf>

TULIS, Martin. *Logaritmy*. [online]. Hradec Králové, 2018. Diplomová práce. Univerzita Hradec Králové. [cit. 2023-4-13]. Dostupné z: <https://theses.cz/id/vn5cv0/STAG88265.pdf>

VRTÍLKOVÁ, Jana. *Maturity z matematiky*. [online]. Brno, 2014. Bakalářská práce. Masarykova univerzita. [cit. 2023-3-31]. Dostupné z: <https://is.muni.cz/th/v98hz/prace.pdf>

VYCHOPŇOVÁ, Tereza. *Proces přípravy státních maturit – případová studie na všeobecném gymnáziu*. [online]. Brno, 2011. Bakalářská práce. Masarykova univerzita. [cit. 2023-4-03]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/m6yqk/bakalarska_prace_tereza_vychopnova-1.docx

ZUZÁKOVÁ, Jana. *Mocniny a logaritmy ve školské matematice*. [online]. Brno, 2014. Diplomová práce. Masarykova univerzita. [cit. 2023-4-13]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/xuemt/Mocniny_a_logaritmy_ve_skolske_matematice.pdf

Sbírky a ukázky maturitních úloh

BENDA, Petr. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1959. Dostupné také z: <https://ndk.cz/uuid/uuid:6c976500-fb0b-11e3-99ee-001018b5eb5c>

BENDA, Petr, Berta DAŇKOVÁ a Josef SKÁLA. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1968. Dostupné také z: <https://digitalniknihovna.cz/mzk/uuid/uuid:7d57fd10-a861-11e4-b7ae-001018b5eb5c>

BENDA, Petr, Berta DAŇKOVÁ a Josef SKÁLA. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1971. Dostupné také z: <https://digitalniknihovna.cz/mzk/uuid/uuid:f172f4f0-3d36-11e6-8746-005056825209>

BENDA, Petr, Berta DAŇKOVÁ a Josef SKÁLA. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979. Dostupné také z: <https://digitalniknihovna.cz/mzk/uuid/uuid:c2a0c9c0-b6db-dfd8-44dd-5b05e70c11db>

BENDA, Petr. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1983. Dostupné také z: <https://digitalniknihovna.cz/mzk/uuid/uuid:849d5890-c05e-11e3-bb44-5ef3fc9bb22f>

BENDA, Petr. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1986. Dostupné také z: <https://digitalniknihovna.cz/mzk/uuid/uuid:fed45ab6-22be-fadc-0645-e824e2b01bdf>

BENDA, Petr. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988. Dostupné také z: <https://digitalniknihovna.cz/mzk/uuid/uuid:92388a90-1f84-11e3-b79f-5ef3fc9bb22f>

BOROVANSKÝ, Ludvík. *Ukázky themat daných k pís. maturitním zkouškám z matematiky na českých středních školách r. 1906 [1]*. Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, 36 (1907), 225 – 226. Dostupné také z: <http://dx.doi.org/10.21136/CPMF.1907.122717>

HRUBÝ, Dag, Dalibor KOTT. *Maturitní zkouška z matematiky na Státní reálce v Jevíčku v roce 1922*. Učitel matematiky, 20(3), 109–114. Dostupné také z: https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/149541/UcitelMat_020-2012-2_8.pdf

MAŠKA, Otokar. *Matematika v úlohách, I. díl: Aritmetika a algebra*. Brno: Barvič a Novotný, 1945. Dostupné také z: <https://digitalniknihovna.cz/mzk/uuid/uuid:85c4c3c4-bf96-4c0f-8267-da13a7a372aa>

SOMMER, Jan a Václav HÜBNER. *Maturitní otázky z matematiky: pomocná kniha pro vyšší třídy škol středních*. Praha: Jednota českých matematiků, 1905. Dostupné také z: <https://kramerius.lib.cas.cz/uuid/uuid:b0d0a8d3-617a-4f23-9e74-ecaaf24969e6>

WALLENTIN, Franz. *Maturitätsfragen aus der Mathematik. Zum Gebrauche für die obersten Klassen der Gymnasien un Realschulen*. Neunte Auflage. Wien: Karl Gerolds Sohn, 1908. Dostupné také z: <https://archive.org/details/maturittsfragen00wallgoog/page/nundefined/mode/1up?q=log>

Informace o pokusném ověřování, zákony, vyhlášky

Dodatek k Vyhlášení pokusného ověřování obsahu, formy, organizace a hodnocení výběrové zkoušky ze středoškolské matematiky (dále jen „Matematika+“), kterou lze konat jako nepovinnou zkoušku profilové části maturitní zkoušky, č. j. MŠMT 42192/2013-1 ze dne 12. prosince 2013 (dále jen „Dodatek“). [online]. Praha: 2015 [cit. 2023-3-9]. Dostupné z: https://www.msmt.cz/uploads/021/0211/MAT/dodatek_MAT_.pdf

Hodnotící zpráva o výsledcích pokusného ověřování obsahu, formy, organizace a hodnocení výběrové zkoušky ze středoškolské matematiky. [online]. Praha: 2014 [cit. 2023-3-9]. Dostupné z: https://data.cermat.cz/files/files/Matematika/MA-PLUS_hodnotici_zprava_2014.pdf

Hodnotící zpráva o výsledcích pokusného ověřování obsahu, formy, organizace a hodnocení výběrové zkoušky ze středoškolské matematiky. [online]. Praha: 2020 [cit. 2023-3-9]. Dostupné z: https://data.cermat.cz/files/files/Matematika/MA-plus_2020_hodnotici_zprava.pdf

Vyhlášení pokusného ověřování obsahu, formy, organizace a hodnocení výběrové zkoušky ze středoškolské matematiky, kterou lze konat jako nepovinnou zkoušku profilové části maturitní zkoušky, podle § 171 odst. 1 zákona č.561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (školský zákon), ve znění pozdějších předpisů. [online]. Praha: 2013a [cit. 2023-3-9]. Dostupné z: <https://docplayer.cz/2706384-Ministerstvo-skolstvi-mladeze-a-telovychovy-c-j-msmt-42192-2013-1-v-praze-dne-12-prosince-2013.html>

Vyhlášení pokusného ověřování obsahu, formy, organizace a hodnocení výběrové zkoušky ze středoškolské matematiky, kterou lze konat jako nepovinnou zkoušku profilové části maturitní zkoušky (dále jen „Matematika+“) č. j. MSMT-42192/2013-1 ze dne 12. 12. 2013, ve znění změn č. j. MSMT-7441/2015-1 ze dne 31. 3. 2015 a ve znění změn č. j. MSMT-28299/2015-1 ze dne 2. 9. 2015. [online]. Praha: 2013b [cit. 2023-3-9]. Dostupné z: https://www.msmt.cz/uploads/021/0211/uplne_zneni_pokusne_overovani_MAT_vcetne_dodatku_2.pdf

Vyhlášení pokusného ověřování znalostí středoškolské matematiky podle katalogu požadavků pro výběrovou zkoušku z matematiky (dále jen „Matematika+“) na školní rok 2016/2017 a další čj. MSMT-33785/2015-1 ze dne 15. března 2016, ve znění dodatku č. 1 čj. MSMT-33785/2015-4 ze dne 30. listopadu 2016. [online]. Praha: 2016 [cit. 2023-3-21]. Dostupné z: https://maturita.cermat.cz/files/files/matematika-plus/Uplne-zneni-pokusne-overovani-MAT-PLUS_2017.pdf

Vyhláška ministerstva školství České socialistické republiky o středních školách. Praha: Ministerstvo školství České socialistické republiky, 1985, ročník 1984, číslo 124. Dostupné z: <https://www.zakonyprolidi.cz/cs/1984-124>

Vyhláška ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy České socialistické republiky o ukončování studia ve středních školách a o ukončování přípravy ve zvláštních odborných učilištích. Praha: Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy České socialistické republiky, 1989, ročník 1989, číslo 119. Dostupné z: <https://www.zakonyprolidi.cz/cs/1989-119>

Vyhláška ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy České republiky o ukončování studia ve středních školách a učilištích. Praha: Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy České republiky, 1991, ročník 1991, číslo 442. Dostupné z: <https://www.zakonyprolidi.cz/cs/1991-442/zneni-0>

Vyhláška o bližších podmínkách ukončování vzdělávání ve středních školách maturitní zkouškou. Praha: Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy České republiky, 2009, ročník 2009, číslo 177. Dostupné z: <https://www.zakonyprolidi.cz/cs/2009-177/zneni-0>

Vyhláška, kterou se mění vyhláška č. 177/2009 Sb., o bližších podmínkách ukončování vzdělávání ve středních školách maturitní zkouškou, ve znění pozdějších předpisů. Praha: Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy České republiky, 2012, ročník 2012, číslo 371. Dostupné z: <https://www.zakonyprolidi.cz/cs/2012-371>

Zákon o gymnasiích. Praha: Národní shromáždění Československé socialistické republiky, 1968, ročník 1968, číslo 168. Dostupné z: <https://www.zakonyprolidi.cz/cs/1968-168>

Zákon o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (školský zákon). Praha: Parlament ČR, 2004, ročník 2004, číslo 561. Dostupné z: <https://www.zakonyprolidi.cz/cs/2004-561/zneni-0>

Zákon, kterým se mění zákon č. 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (školský zákon), ve znění pozdějších předpisů. Praha: Parlament ČR, 2009, ročník 2008, číslo 242. Dostupné z: <https://www.zakonyprolidi.cz/cs/2008-242>

Zákon, kterým se mění zákon č. 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (školský zákon), ve znění pozdějších předpisů, a zákon č. 200/1990 Sb., o přestupcích, ve znění pozdějších předpisů. Praha: Parlament ČR, 2016, ročník 2016, číslo 178. Dostupné z: <https://www.zakonyprolidi.cz/cs/2016-178/zneni-0>

Zákon o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (školský zákon). Praha: Parlament ČR, 2022, ročník 2004, číslo 561. Dostupné z: https://maturita.ceremat.cz/files/files/zakon-vyhlaska/Skolsky-zakon/Skolsky_zakon_1-2-2022.pdf

Věstníky, ostatní periodika

Časopis pokrokového studentstva. Praha: J. Krajc, 02.1907, 10(4-5). Dostupné také z: <https://ndk.cz/uuid/uuid:5f9b3580-ec44-11ea-804d-005056827e51>

Jahresbericht der Landes-Oberrealschule in Mähr.-Ostrau. Mähr.-Ostrau: Landes Oberrealschule, 1900, 1900(17). Dostupné také z: <https://ndk.cz/uuid/uuid:00a362c4-e1b7-4ebb-b6c1-09c59e128733>

Národní listy. Praha: Julius Grégr, 7. 3. 1908, 48(66), odpolední vydání). ISSN 1214-1240. Dostupné také z: <https://digitalniknihovna.cz/mzk/uuid/uuid:23f33c40-7640-11dc-9eb0-000d606f5dc6>

Věstník Ministerstva školství a národní osvěty =: Mitteilungen des Ministeriums für Schulwesen und Volkskulture. Praha: Ministerstvo školství a národní osvěty, 6.12.1922, 4(6). ISSN 1802-5048.

Věstník Ministerstva školství a národní osvěty =: Mitteilungen des Ministeriums für Schulwesen und Volkskulture. Praha: Ministerstvo školství a národní osvěty, 12.01.1931, 13(19). ISSN 1802-5048.

Věstník Ministerstva školství a národní osvěty =: Mitteilungen des Ministeriums für Schulwesen und Volkskulture. Praha: Ministerstvo školství a národní osvěty, 11.01.1938, 20(14) ISSN 1802-5048.

Věstník Ministerstva školství a národní osvěty =: Mitteilungen des Ministeriums für Schulwesen und Volkskulture. Praha: Ministerstvo školství a národní osvěty, 1942, 24(33). ISSN 1802-5048.

Věstník ministerstva školství a osvěty. Praha: Státní nakladatelství, 22.06.1945, 1(3). ISSN 1802-5064. Dostupné také z: <https://ndk.cz/uuid/uuid:e64e4720-3a4b-11eb-a9f6-005056827e51>

Věstník ministerstva školství a osvěty. Praha: Státní nakladatelství, 15.02.1946, 2(3). ISSN 1802-5064. Dostupné také z: <https://ndk.cz/uuid/uuid:3b115050-e703-11ea-9a6f-5ef3fc9ae867>

Věstník ministerstva školství, věd a umění. Praha: Státní nakladatelství, 28.02.1949, 5(4). ISSN 1802-5072. Dostupné také z: <https://ndk.cz/uuid/uuid:b7c12fe0-e707-11ea-9a6f-5ef3fc9ae867>

Věstník ministerstva školství, věd a umění. Praha: Státní nakladatelství, 31.03.1950, 6(9). ISSN 1802-5072. Dostupné také z: <https://ndk.cz/uuid/uuid:d580b130-e712-11ea-804d-005056827e51>

Věstník ministerstva školství, věd a umění. Praha: Státní nakladatelství, 31.01.1952, 8(3). ISSN 1802-5072. Dostupné také z: <https://ndk.cz/uuid/uuid:f8e6d8b0-ee89-11ea-8ce6-005056825209>

Věstník ministerstva školství, věd a umění. Praha: Státní nakladatelství, 31.01.1953, 9(3). ISSN 1802-5072. Dostupné také z: <https://ndk.cz/uuid/uuid:de549d20-e718-11ea-9a6f-5ef3fc9ae867>

Věstník ministerstva školství. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 31.01.1954, 10(3). Dostupné také z: <https://ndk.cz/uuid/uuid:1d477850-240d-11eb-9dc2-005056820560>

Věstník ministerstva školství a kultury. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 10.11.1964, 20(31). ISSN 1802-5099. Dostupné také z: <https://ndk.cz/uuid/uuid:08fafa00-ee0e-11ea-9a6f-5ef3fc9ae867>

Věstník ministerstva školství a kultury. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 20.01.1965, 21(2). ISSN 1802-5099. Dostupné také z: <https://ndk.cz/uuid/uuid:3ba4a805-c9ce-4498-a3e5-f1b64ec5614c>

Věstník ministerstva školství a kultury. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1965, 21(obsah ročníku). ISSN 1802-5099. Dostupné také z: <https://ndk.cz/uuid/uuid:bd35b970-ee3a-11ea-9a6f-5ef3fc9ae867>

Věstník ministerstva školství a kultury. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1966, 22(obsah ročníku). ISSN 1802-5099. Dostupné také z: <https://ndk.cz/uuid/uuid:66453040-ee31-11ea-8ce6-005056825209>

Věstník ministerstva školství a kultury. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 20.11.1967, 23(32). ISSN 1802-5099. Dostupné také z: <https://ndk.cz/uuid/uuid:558abd40-ee33-11ea-9a6f-5ef3fc9ae867>

Věstník ministerstva školství a ministerstva kultury České socialistické republiky. Státní pedagogické nakladatelství, 20.02.1969, 25(2). ISSN 0322-7936. Dostupné také z: <https://ndk.cz/uuid/uuid:406216dd-d9d5-48f0-86b0-c8ec22fac15e>

Věstník ministerstva školství a ministerstva kultury České socialistické republiky. Státní pedagogické nakladatelství, 20.04.1971, 27(4). ISSN 0322-7936. Dostupné také z: <https://ndk.cz/uuid/uuid:1eb65880-ee81-11ea-8ce6-005056825209>

Věstník ministerstva školství a Ministerstva kultury České socialistické republiky. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 20.07.1981, 22(37). ISSN 0322-7936.

Věstník ministerstva školství a Ministerstva kultury České socialistické republiky. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 20.5.1983, 6(39). ISSN 0322-7936.

Věstník ministerstva školství a Ministerstva kultury České socialistické republiky. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 20.5.1987 4(43). ISSN 0322-7936.

Internetové stránky CZVV

Didaktické testy Matematika+. Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. [online]. Praha: CZVV, c2019. [cit. 2023-3-9]. Dostupné z: <https://maturita.cermat.cz/archiv-maturitni-zkousky/matematika-plus/didakticke-testy-matematika>

Matematika+. Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. [online]. Praha: CZVV, c2019. [cit. 2023-3-09]. Dostupné z: <https://maturita.ceremat.cz/archiv-maturitni-zkousky/matematika-plus>

Maturitní zkouška 2013–2020 — jarní zkušební období. Signální výsledky didaktických testů. Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. [online]. Praha: CZVV, 2021. [cit. 2023-3-09]. Dostupné z: https://data.ceremat.cz/files/files/2021/MZ/MZ2013-2021_vysledky_jamp.pdf

Maturitní zkouška 2013 – 2022 – jarní zkušební období: Signální výsledky didaktických testů povinné zkoušky společné části MZ. [online]. Praha: CZVV, 2022. [cit. 2023-3-09]. Dostupné z: https://data.ceremat.cz/files/files/2022/MZ/MZ13-22_DIDAKTICKE_TESTY_signalni_vysledky.pdf

Maturitní zkouška 2023. Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. [online]. Praha: CZVV, c2019. [cit. 2023-3-09]. Dostupné z: <https://maturita.ceremat.cz/menu/maturitni-zkouska>

O nás. Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. [online]. Praha: CZVV, c2019. [cit. 2023-3-09]. Dostupné z: <https://.ceremat.cz/menu/o-nas>

Seznam vysokých škol zohledňujících výsledek nepovinné maturitní zkoušky z matematiky rozšiřující. [online]. Praha: CZVV, 2022. [cit. 2023-4-12]. Dostupné z: https://maturita.ceremat.cz/files/files/MA-rozsirujici/Seznam-VS/2022-2023/seznam_VS_MR_2023_5.pdf

Státní maturitní zkouška společná část – matematika. Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. [online]. Praha: CZVV, c2019. [cit. 2023-3-09]. Dostupné z: <https://maturita.ceremat.cz/menu/maturitni-zkouska/zkousky-spolecne-casti/matematika>

Státní maturitní zkouška společná část – matematika rozšiřující. Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. [online]. Praha: CZVV, c2019. [cit. 2023-3-09]. Dostupné z: <https://maturita.ceremat.cz/menu/maturitni-zkouska/zkousky-spolecne-casti/matematika-rozsirujici>

Testy a zadání. Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. [online]. Praha: CZVV, c2019. [cit. 2023-4-13]. Dostupné z: <https://maturita.ceremat.cz/menu/testy-a-zadani-z-predchozich-obdobi/matematika-rozsirujici-testy-a-zadani>

Maturitní zpravodaje, katalogy požadavků, zadání didaktických testů

Katalog požadavků zkoušek společné části maturitní zkoušky: Matematika. 2014. [online]. [cit. 2023-3-09]. Dostupné z: https://maturita.ceremat.cz/files/files/katalog-pozadavku/MA_Katalog_pozadavku_MZ_1718.pdf

Katalog požadavků zkoušek společné části maturitní zkoušky: Matematika rozšiřující. 2020. [online]. [cit. 2023-3-09]. Dostupné z: https://maturita.ceremat.cz/files/files/katalog-pozadavku/MX-katalog_pozadavku.pdf

Maturitní zpravodaj. 2014, č. 23. [online]. [cit. 2023-3-09]. Dostupné z: https://maturita.ceremat.cz/files/files/zpravodaj/Maturitni_zpravodaj_23_14.pdf

Maturitní zpravodaj. 2015a, č. 33. [online]. [cit. 2023-3-09]. Dostupné z https://maturita.ceremat.cz/files/files/zpravodaj/Maturitni_zpravodaj_33_15.pdf

Maturitní zpravodaj. 2015b, č. 30. [online]. [cit. 2023-3-09]. Dostupné z: https://maturita.ceremat.cz/files/files/zpravodaj/Maturitni_zpravodaj_30_15.pdf

Maturitní zpravodaj. 2016, č. 38. [online]. [cit. 2023-4-13]. Dostupné z: https://maturita.ceremat.cz/files/files/zpravodaj/Maturitni-zpravodaj_38_16.pdf

Maturitní zpravodaj. 2019, č. 49. [online]. [cit. 2023-3-09]. Dostupné z: https://maturita.ceremat.cz/files/files/zpravodaj/Ceremat_MZ_49_19.pdf

Maturitní zpravodaj. 2022, č. 61. [online]. [cit. 2023-3-09]. Dostupné z: https://maturita.ceremat.cz/files/files/zpravodaj/Ceremat_MZ_61_22.pdf

Zadání didaktického testu z matematiky základní úroveň obtížnosti, 2011, jarní termín. [online]. [cit. 2023-3-09]. Dostupné z: http://web.archive.org/web/20130315194319/http://www.novamaturita.cz/download/force_download.php?download_this_file=sada_A_jaro_2011_TS_20110628/MA_Z_DT.pdf

Zadání didaktického testu z matematiky vyšší úroveň obtížnosti, 2011, jarní termín. [online]. [cit. 2023-3-09]. Dostupné z: http://web.archive.org/web/20130119121739/http://www.novamaturita.cz/download/force_download.php?download_this_file=sada_A_jaro_2011_TS_20110628/MA_V_DT.pdf

Zadání didaktického testu z matematiky, 2013, jarní termín. [online]. [cit. 2023-3-09]. Dostupné z: http://zvladnimatiku.cz/wp-content/uploads/2015/04/MA_2013_jaro_DT.pdf

Přílohy

Abecední seznam některých českých závěrečných prací, které se zabývají tématem maturitní zkoušky (nejen) z matematiky

Během tvorby naší práce jsme narazili na vícero závěrečných prací, které se zabývají příbuznými tématy k tématu našemu. Rádi bychom z nich zde udělali stručný přehled, který může napomoci k alespoň základní orientaci v tom, jaké existují práce na témata *historie maturitní zkoušky a maturitní zkouška z matematiky*. Uvedme tu alespoň stručný výtah toho, o čem je možné se v nich dočíst. Zároveň upozorníme, pokud jsou zde závěrečné práce, ve kterých víme bezpečně, že obsahují větší nepřesnosti.

Analýza úloh státní maturity z matematiky 2010–2020 – bakalářská práce Lucie Bindzarové, Olomouc, 2021.

Tato práce si vytkla za cíl prostřednictvím (vzorově vyřešených) příkladů státní maturitní zkoušky od roku 2010 do roku 2020 ukázat, jak přistupovat k výpočtu jednotlivých typů úloh v oblasti logaritmů. Také, na co by si žáci měli dát v rámci přípravy na maturitu pozor, aby při řešení těchto úloh v maturitní zkoušce uspěli. Na začátku práce je ještě možno najít velice zestručnělou historii MZ (po roce 1931 hned následuje rok 2009).

Maturita jako přechod do dospělosti – bakalářská práce Pavlína Kabrdové, Olomouc, 2022.

Popisuje se zde mj. podoba maturity ve školním roce 2020/2021, uvádí se zde následně reflexe žáků závěrečného ročníku, jak prožívají poslední ročník, samotnou zkoušku i jejich pocity po jejím absolvování.

Maturita z matematiky do poloviny 20. století – diplomová práce Lenky Ottové, Brno, 2011

Popisuje vývoj maturitní zkoušky do poloviny 20. století, také podává osnovy matematiky na tehdejších školách, obsahuje analýzu maturitních příkladů z matematiky z maturitních protokolů. Je možné se zde seznámit se seznamy maturitních otázek z matematiky z několika různých let a z různých typů škol. V této práci je také možno nalézt odkaz na volně dostupnou sbírku 1200 maturitních příkladů z matematiky (v němčině) z let 1872 – 1878, z ní jsme i my čerpali a mezi svými zdroji uvedli. Bohužel ve své práci autorka často cituje některé nepřesnosti z disertační práce Martina Skutila. Její dílo pak pozbývá věrohodnosti.

Maturity z matematiky – bakalářská práce Jany Vrtílkové, Brno, 2014.

Zabývá se historií maturitní zkoušky a státní maturity do roku 2013, výhledem vývoje maturit na další léta, srovnává obtížnost školní maturity se státní maturitou, zabývá se výsledky MZ z roku 2013 a výsledky průzkumu mezi žáky 9. ročníku, kteří si maturitní test vyzkoušeli.

Maturity z matematiky včera a dnes – bakalářská práce Gabriely Svobodové, Brno, 2012.

Porovnává náročnost úloh maturitních písemek z matematiky v dnešní době s maturitními úlohami v minulosti. Práce obsahuje vyřešenou sadu deseti zadaní maturitních úloh z matematiky, celkově třicet úloh, předložených žákům vybraného gymnázia ve školním roce 1935/1936, postup je volen dle pravděpodobného postupu žáků té doby, obsahuje také analýzy učebnic té doby i doby dnešní.

Modely státních maturit v EU a v České republice – bakalářská práce Marie Březinové, Hradec Králové, 2013.

Práce porovnává MZ z matematiky v České republice s MZ ve Francii. Pojednává o historii maturity, požadavcích, o typech úloh v obou zemích. Pokouší se o porovnání úloh se stejnou tematikou, jsou zde uváděny ukázky z maturity z matematiky z ČR i z Francie.

Možnosti zvyšování profesní způsobilosti učitelů z pohledu DVPP – bakalářská práce Alica Kavanové, Brno, 2007.

Práce popisuje mj. vývoj českého školství, historii maturitní zkoušky, otázku zavedení nové maturity a představuje výsledky výzkumu provedeného s cílem zjistit připravenost učitelů na očekávanou změnu – zavedení státních MZ.

Proměna maturity jako specifického školního jevu – dizertační práce Martina Skutila, Brno, 2008.

Zabývá se historií maturit od jejich počátku do roku 1968, studuje ji v souvislosti s historií naší země a pokouší se informovat o tom, jak ve kterých letech přesně maturitní zkouška probíhala. Na tuto práci odkazují další závěrečné práce zabývající se historií maturitní zkoušky. Nicméně je nutno upozornit na její značné nedostatky, které jsou zarmocující tím, že právě z této práce velmi mnoho dalších prací čerpá a cituje některé zavádějící informace. Jsou to nedostatky způsobené jednak překlepy v letopočtu, jednak nepřesné a zmatené informace o tom, které maturitní předměty byly kdy povinné, jednak příliš velké zobecňování na úkor pravdy. Zdá se, že autor nepracoval vždy s původními prameny, jak si v úvodu předsevzal.

Proces přípravy státních maturit – případová studie na všeobecném gymnáziu – bakalářská práce Terezy Vychopňové, Brno, 2011.

Nejprve se můžeme v práci dozvědět některé informace na téma hodnocení žáků a středoškolské vzdělávání. Klíčová část práce se zabývá historií státních maturit, po které autorka shrnula svůj výzkum o tom, jak probíhal proces přípravy státních maturit na vybraném gymnáziu.

Proměny modelu maturitní zkoušky v České republice – diplomová práce Jiřího Kabele, Praha, 2015.

Obsahuje analýzu dosavadního vývoje maturitních zkoušek a jejich stavu v roce 2015, naznačuje očekávaný vývoj MZ, jak byl v té době předpokládán.

Popisuje různé modely MZ (např. model 6+7³⁹ v roce 1849 či 4+4 v roce 1922). Ani zde se žel autor nevyvaroval některých faktografických chyb. Pozor např. na to, že v roce 1908 mezi ústní zkoušky zapomíná uvést matematiku, na nepřesnosti v předmětech v roce 1964 apod.

Průmyslové školy a maturita z matematiky – diplomová práce Martina Rusňáka, Ostrava, 2019.

Rozebírá historii MZ, také se zde porovnává zastoupení učiva v ŠVP s maturitním testem, hlavní částí práce je analýza didaktického testu nanečisto, který autor vytvořil a žákům předložil a didaktického testu načisto, jak u těch samých žáků dvou středních průmyslových škol v roce 2018 dopadl. Práce obsahuje mj. postup řešení didaktického testu načisto a klasifikaci pravděpodobných chyb.

Průvodce studenta přípravou na maturitu z matematiky – bakalářská práce Jana Šefla, Olomouc, 2022.

Tato práce předkládá souhrn učiva matematiky středních škol tak, aby bylo možné pomocí něj se na MZ připravit. Výsledkem práce byl vznik publikace „Průvodce studenta přípravou na maturitu z matematiky“ s téměř 300 řešenými příklady, která však není volně dostupná. Ve volně dostupné části je však možno seznámit se s historií maturitní zkoušky v českých zemích.

Státní maturita z matematiky – bakalářská práce Lenky Karáskové, Ostrava, 2015.

Zabývá se rozбором státní maturity především z matematiky, jednu stránku zde věnuje i Matematice+. Podává zde rozbor a vzorové řešení z didaktického testu MZ – matematiky z jarního období roku 2015. U některých úloh jsou uvedeny předpoklady a znalosti, které musí žák pro úspěšné vyřešení mít, někde uvádí více postupů řešení.

Třídění didaktických testů státní maturitní zkoušky z matematiky v období 2011–2020 – bakalářská práce Elišky Kreklové, České Budějovice, 2021.

Můžeme se zde dočíst o tom, jak se vyvíjela maturitní zkouška. Žel zde často narazíme na mnohé nepřesnosti, autorka asi spoléhala na správnost zdrojů, ze kterých čerpala. Stalo se však, že některé informace, které citovala z prací J. Kabrdy a M. Skutila nebyly přesné. Jinak se dále v práci vysvětluje náplň státní maturitní zkoušky z matematiky. Nachází se zde kategorizace úloh z didaktického testu MZ, které by měli absolventi základní školy zvládnout, zároveň určuje jejich četnost a zaměření. Některé úlohy jsou otestovány se žáky základní školy.

³⁹ Číslo značí počet povinných maturitních předmětů.