MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Václav Mikeska

GHP a Weylův formalismus pro gravitační perturbace

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. David Kofroň, Ph.D.
Studijní program: Teoretická fyzika
Studijní obor: FTFP

Praha 2022

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Rád bych poděkoval odbornému vedoucímu této diplomové práce Mgr. Davidu Kofroňovi, Ph.D. nejen za nesčetné rady, vedení ve správném směru a možnosti pracovat na fyzikálně zajímavém tématu, ale také za vstřícnost a přátelský přístup již od zadání bakalářské práce.

Děkuji svým rodičům a svému bratrovi za obrovskou podporu v důležitých krocích mého života, čímž mi pomohli se věnovat diplomové práci. Neméně děkuji své přítelkyni Petře Krutílkové za psychickou oporu a motivaci při tvorbě diplomové práce.

Řada výpočtů byla provedena v softwaru *Wolfram Mathematica*® s využitím nástroje *xAct* (Martín-García, 2002-2022).

Název práce: GHP a Weylův formalismus pro gravitační perturbace

Autor: Václav Mikeska

Ústav: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. David Kofroň, Ph.D., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: Mnoho astrofyzikálně zajímavých situací neumíme dnes popsat analyticky přesným řešením Einsteinových rovnic, a proto se zkoumají na úrovni perturbací známých prostoročasů. Existují různé způsoby, jak tyto perturbace zkoumat. Lze hledat přímo perturbace metriky přesného řešení Einsteinových rovnic. Ve vakuových prostoročasech typu D se ukázalo výhodné zkoumat perturbace v GHP formalismu zavedením Debyeova potenciálu. V této práci se věnujeme propojením těchto dvou přístupů. Prezentujeme obecný postup, jak přejít od Debyeova potenciálu ke stacionárním axisymetrickým perturbacím Kerrovy metriky. Tento postup vyžaduje hledání kalibračního vektoru. Ukázali jsme, že oba přístupy vedou na stejnou perturbaci zářivých komponent Weylova tenzoru, a mezi těmito komponentami jsme nalezli jednoduchý vztah.

Klíčová slova: GHP formalismus, Debyeův potenciál, Weylova třída metrik, gravitační perturbace, přesná řešení

Title: GHP and Weyl formalism for gravitational perturbations

Author: Václav Mikeska

Institute: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: Mgr. David Kofroň, Ph.D., Institute of Theoretical Physics

Abstract: The exact analytical solutions of Einstein's equations describing systems of astrophysical interest have not been found yet, and thus they have to be studied only as perturbations of known spacetimes. There are various ways to investigate these perturbations. One can look directly for perturbations of metric of the exact solution of Einstein's equations. In vacuum spacetimes of type D, it has proved advantageous to investigate perturbations in the GHP formalism by introducing the Debye potential. In this paper, we discuss the connection between these two approaches. We present a general procedure for translating the results from the Debye potential formalism to stationary axisymmetric perturbations of the Kerr metric. This procedure requires solving for a calibration vector. We show that both approaches lead to the same perturbation of the radiative components of the Weyl tensor, and we find a simple relation between these components.

Keywords: GHP formalism, Debye potential, Weyl class of metric, gravitational perturbations, exact solutions

Obsah

Úvod

Albert Einstein ve svém článku (Einstein, 1915) formuloval obecnou relativitu a dnes nazývané Einsteinovy rovnice. O rok později ve článku (Einstein, 1916) teoreticky předpověděl existenci gravitačních vln. O dalších 100 let později se podařilo přímo detekovat tyto gravitační vlny na detektoru LIGO (Abbott a kol., 2016). Mezi další detektory gravitačních vln patří např. VIRGO a v přípravě je první vesmírný detektor gravitačních vln LISA.

Detekce gravitačních vln otevírá nové okno do vesmíru, a proto má význam je zkoumat na úrovni gravitačních perturbací obecně. Existuje více formalismů, ve kterých lze gravitační perturbace zkoumat. Standardně se však provádí linearizací veličin a rovnic kolem neperturbovaného prostoročasu. V tenzorovém formalismu se vychází z perturbace metriky, která však není jednoznačná. Díky kalibrační volnosti totiž mohou různé perturbace metriky popisovat stejnou fyzikální situaci (Stewart a Walker, 1974).

Další možností je popisovat perturbace v GHP formalismu (Geroch a kol., 1973) pomocí Debyeova potenciálu, který do obecné relativity pro elektromagnetické pole zobecnili Cohen a Kegeles (1974) a dále nejen pro gravitační perturbace na prostoročasech typu D rozšířili Cohen a Kegeles (1975). Debyeův potenciál představuje komplexní funkci, ze které lze GHP derivacemi získat jak perturbaci metriky, tak perturbace zářivých komponent Weylova tenzoru. Nevýhodou Debyeova potenciálu je, že jím nelze určit v případě gravitace monopólové a dipólové perturbace (Kofroň, 2020).

Kerrova metrika (Kerr, 1963) popisující rotující černou díru je z astrofyzikálního hlediska velmi důležitá, neboť rotující černé díry představují obvykle závěrečnou fázi vývoje dostatečně hmotných hvězd (Bardeen, 1970). Zároveň lze spoustu zajímavých astrofyzikálních procesů kolem těchto černých děr, jako např. rotující disky nebo vyzařování gravitačních vln, zkoumat na úrovni perturbací. Proto se v druhé části této práce budeme soustředit na gravitační perturbace Kerrovy metriky.

Weylovým formalismem zkoumání gravitačních perturbací označujeme gravitační perturbace cirkulárních prostoročasů popsaných Weylovou metrikou (Weyl, 1917) za předpokladu, že perturbovaná metrika zůstává v této Weylově třídě metrik. A právě Kerrova metrika je jedním z představitelů Weylovy třídy metrik. Weylův formalismus pro Kerrovu metriku proto bude představovat stacionární axiálně symetrické perturbace rotující černé díry, kterým se v této práci budeme věnovat.

Na některých úrovních není stále explicitní přechod mezi Weylovým formalismem a GHP formalismem s užitím Debyeova potenciálu. V těchto dvou formalismech dostáváme totiž díky kalibrační volnosti obecně různé perturbace veličin. Příkladem je perturbace metriky, která v GHP formalismu vede na kalibraci anglicky zvanou ingoing nebo outgoing radiation gauge. Na druhou stranu existují kalibračně invariantní veličiny, jako např. zářivé komponenty NP Weylova tenzoru na prostoročasech typu D. V obou případech se v této práci věnujeme vzájemnému vztahu těchto dvou formalismů pro perturbace, případně ověřujeme že dávají stejný výsledek.

Abstraktní indexy jsou značeny tučnými písmeny latinské abecedy. Kulaté závorky kolem indexů značí symetrizaci a hranaté závorky kolem indexů značí antisymetrizaci. Signatura metriky je v rámci celé práce $(+ - - -)$. Riemannův tenzor křivosti $\boldsymbol{R_{ab}{}^{c}{}_{d}}$ Levi-Civitovy kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla_a}$ je definován rovnicí

$$\boldsymbol{R_{ab}{}^{c}{}_{d}\, v^{d}} = \boldsymbol{\nabla}_a \boldsymbol{\nabla}_b\, \boldsymbol{v}^c - \boldsymbol{\nabla}_b \boldsymbol{\nabla}_a\, \boldsymbol{v}^c\,, \tag{1}$$

kde $\boldsymbol{v}$ je libovolné hladké vektorové pole. Ricciho tenzor křivosti $\boldsymbol{R_{ab}}$ je kontrakcí Riemannova tenzoru,

$$\boldsymbol{R_{ab}} = \boldsymbol{R_{ca}{}^{c}{}_{b}}\,. \tag{2}$$

Používáme geometrizované jednotky $c = G = 1$ a uvažujeme nulovou kosmologickou konstantu.

1. Obecná relativita v NP a GHP formalismu

1.1 NP formalismus a NP tetráda

Ukázalo se, že některé problémy obecné relativity lze oproti standardnímu tenzorovému formalismu výhodněji studovat pomocí skalárního formalismu. Jedná se o formalismus, který místo tenzorů pracuje se skaláry, které se získají např. projekcemi tenzorů na bázi. Mezi výhody skalárního formalismu může patřit zjednoduší řady rovnic v takovém smyslu, že jsou pak snadněji řešitelnější. V tenzorovém formalismu mají rovnice naopak zpravidla úspornější podobu. Další výhoda skalárního formalismu je, že používá skaláry a derivace působící pouze na skaláry, které nezávisejí na volbě souřadnic. V tenzorovém formalismu je naopak při konkrétních výpočtech zapotřebí oné volby souřadnic.

Příkladem skalárního formalismu, který nalezl široké uplatnění zejména při řešení algebraicky speciálních prostoročasů, je tzv. NP formalismus, který zavedli Newman a Penrose (1962). NP formalismus dostává svou podobu přirozeně, vychází-li se ze spinorového formalismus. Lze však na něj nahlížet i jako na speciální tetrádový formalismus, kde se všechny tenzorové veličiny a kovariantní derivace projektují na patřičně zvolenou nulovou tetrádu $(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{m}})$, tzv. NP tetrádu. Pro NP tetrádu požadujeme, aby byly $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{n}$ reálné a $\boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{m}}$ komplexní, a dále aby splňovaly normalizační vztahy

$$\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{m} \cdot \overline{\boldsymbol{m}} = 1\,, \tag{1.1}$$

zatímco zbylé skalární součiny jsou nulové. Skalární součin daný metrikou $\boldsymbol{g_{ab}}$ značíme jako $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{n}) \equiv \boldsymbol{g_{ab} l^a n^b} \equiv \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{n}$.

Zvolené NP tetrádě odpovídá ortonormální tetráda $\left\{\boldsymbol{E}_{(i)}\right\}_{i=0}^{3}$ s transformačními vztahy

$$\begin{aligned} \boldsymbol{l} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{E}_{(0)} + \boldsymbol{E}_{(1)}\right)\,, &\qquad \boldsymbol{n} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{E}_{(0)} - \boldsymbol{E}_{(1)}\right)\,, \\ \boldsymbol{m} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{E}_{(3)} + i\boldsymbol{E}_{(4)}\right)\,, &\qquad \overline{\boldsymbol{m}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{E}_{(3)} - i\boldsymbol{E}_{(4)}\right)\,. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ortonormální tetráda pak splňuje standardní normalizační vztahy

$$\boldsymbol{E}_{(0)} \cdot \boldsymbol{E}_{(0)} = -\boldsymbol{E}_{(1)} \cdot \boldsymbol{E}_{(1)} = -\boldsymbol{E}_{(2)} \cdot \boldsymbol{E}_{(2)} = -\boldsymbol{E}_{(3)} \cdot \boldsymbol{E}_{(3)} = 1\,, \tag{1.3}$$

kde zbylé skalární součiny jsou nulové.

NP tetráda složená z vektorů $(\boldsymbol{l^a}, \boldsymbol{n^a}, \boldsymbol{m^a}, \overline{\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{a}}})$ tvoří vektorovou bázi $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^4 = \{\boldsymbol{l^a}, \boldsymbol{n^a}, \boldsymbol{m^a}, \overline{\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{a}}}\}$. Normalizační vztahy NP tetrády (1.1) pak definují duální (kovektorovou) bázi jako $\mathcal{B}^* = \{\boldsymbol{e}^i\}_{i=1}^4 = \{\boldsymbol{n_a}, \boldsymbol{l_a}, -\overline{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{a}}, -\boldsymbol{m_a}\}$ a metriku ve tvaru

$$\boldsymbol{g_{ab}} = 2\boldsymbol{l_{(a} n_{b)}} - 2\boldsymbol{m_{(a} \overline{m}_{b)}}\,. \tag{1.4}$$

Prvky vektorové báze $\mathcal{B}$ a kovektorové báze $\mathcal{B}^*$ jsou spjaty vztahy

$$\left\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}^j \right\rangle = \delta_i^j\,, \tag{1.5}$$

kde závorky $\langle\,,\rangle$ značí kontrakci vektoru a kovektoru a δ_i^j značí Kroneckerovo delta.

1.2 NP spinové koeficienty

V NP formalismu se namísto Levi-Civitovy kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla_a}$ (tj. beztorzní a metrické), používají směrové derivace podél vektorů NP tetrády (tzv. NP derivace) definované následovně

$$D \equiv \boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\nabla_a}\,, \quad \Delta \equiv \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\nabla_a}\,, \quad \delta \equiv \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\nabla_a}\,, \quad \bar{\delta} \equiv \overline{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\nabla_a}\,. \tag{1.6}$$

Levi-Civitovu kovariantní derivaci zkonstruujeme zpětně vztahem

$$\boldsymbol{\nabla_a} = \boldsymbol{n_a}D + \boldsymbol{l_a}\Delta - \overline{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{a}}\delta - \boldsymbol{m_a}\bar{\delta}\,. \tag{1.7}$$

NP tetráda definuje tetrádovou kovariantní derivaci $\eth_{\boldsymbol{a}}$, která ji anihiluje, neboli

$$\eth_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{e}_i = 0 = \eth_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{e}^i \quad \text{pro } i = 1,\ldots,4\,. \tag{1.8}$$

Rozdíl Levi-Civitovy a tetrádové kovariantní derivace je dán rozdílovým tenzorem $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\nabla} - \eth$. Z definice tetrádové derivace a působení rozdílového tenzoru jako pseudoderivace dostaneme

$$\boldsymbol{\nabla_a}\boldsymbol{e}_i{}^{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{\gamma}^{\boldsymbol{c}}{}_{i\boldsymbol{a}} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{e}_j{}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\nabla_a}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{\gamma}^k{}_{ij}\boldsymbol{e}_k \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{e}^k{}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{e}_j{}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\nabla_a}\boldsymbol{e}_i{}^{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{\gamma}^k{}_{ij}\,. \tag{1.9}$$

Komponenty $\boldsymbol{\gamma}^k{}_{ij}$ v NP bázi $\mathcal{B}$ jsou tzv. spinové rotační koeficienty. 24 nezávislých komponent rozdílového tenzoru v NP bázi je v NP formalismu zakódováno ve 12 komplexních skalárech, tzv. NP spinových koeficientech definovaných vztahem

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma_{abc}} = {} & 2\boldsymbol{n}_{[\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{c}]}\left(\boldsymbol{n_b}\kappa - \boldsymbol{m_b}\rho - \overline{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{b}}\sigma + \boldsymbol{l_b}\tau\right)\\ & + 2\boldsymbol{m}_{[\boldsymbol{a}}\boldsymbol{l}_{\boldsymbol{c}]}\left(\boldsymbol{l_b}\nu - \overline{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{b}}\mu - \boldsymbol{m_b}\lambda + \boldsymbol{n_b}\pi\right)\\ & + \boldsymbol{l}_{[\boldsymbol{a}}\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{c}]}\Big[\boldsymbol{n_b}\left(\epsilon + \bar{\epsilon}\right) + \boldsymbol{l_b}\left(\gamma + \bar{\gamma}\right) - 2\overline{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{b}}\left(\alpha + \bar{\beta}\right)\Big]\\ & + \boldsymbol{m}_{[\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{c}]}\Big[\boldsymbol{n_b}\left(\epsilon - \bar{\epsilon}\right) - \boldsymbol{l_b}\left(\gamma - \bar{\gamma}\right) + 2\boldsymbol{m_b}\left(\alpha - \bar{\beta}\right)\Big] + \text{c.c.}\,,\end{aligned} \tag{1.10}$$

kde c.c. značí komplexně sdružené předchozí členy.

1.3 Riemannův tenzor v NP formalismu

Ve čtyřech dimenzích má rozklad Riemannova tenzoru křivosti $\boldsymbol{R_{abcd}}$ na jeho bezestopé části tvar

$$\boldsymbol{R_{abcd}} = \boldsymbol{C_{abcd}} + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{S} \owedge \boldsymbol{g}\right)_{\boldsymbol{abcd}} + \frac{1}{24}R\left(\boldsymbol{g} \owedge \boldsymbol{g}\right)_{\boldsymbol{abcd}}\,, \tag{1.11}$$

kde $\boldsymbol{C_{abcd}}$ je Weylův tenzor, $\boldsymbol{S_{ab}}$ je bezestopý Ricciho tenzor a R značí Ricciho skalár. V rovnici (1.11) jsme použili operátor double-wedge, který zobrazí dva symetrické tenzory $\boldsymbol{A_{ab}}$ a $\boldsymbol{B_{cd}}$ na tenzor mající symetrie Riemannova tenzoru podle definice

$$\left(\boldsymbol{A} \owedge \boldsymbol{B}\right)_{\boldsymbol{abcd}} \equiv 4\boldsymbol{A}_{[\boldsymbol{a}|[\boldsymbol{c}}\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{b}]|\boldsymbol{d}]} = \boldsymbol{A_{ac}B_{bd}} + \boldsymbol{A_{bd}B_{ac}} - \boldsymbol{A_{ad}B_{bc}} - \boldsymbol{A_{bc}B_{ad}}\,. \tag{1.12}$$

Deset nezávislých komponent Weylova tenzoru je v NP formalismu zakódováno v pěti komplexních skalárech, tzv. NP Weylových skalárech, definovaných vztahy

$$
\begin{aligned}
\Psi_0 &= -\boldsymbol{C}_{abcd}\boldsymbol{l}^a\boldsymbol{m}^b\boldsymbol{l}^c\boldsymbol{m}^d\,,\\
\Psi_1 &= -\boldsymbol{C}_{abcd}\boldsymbol{l}^a\boldsymbol{n}^b\boldsymbol{l}^c\boldsymbol{m}^d\,,\\
\Psi_2 &= -\boldsymbol{C}_{abcd}\boldsymbol{l}^a\boldsymbol{m}^b\overline{\boldsymbol{m}}^c\boldsymbol{n}^d\,,\\
\Psi_3 &= -\boldsymbol{C}_{abcd}\boldsymbol{n}^a\boldsymbol{l}^b\boldsymbol{n}^c\overline{\boldsymbol{m}}^d\,,\\
\Psi_4 &= -\boldsymbol{C}_{abcd}\boldsymbol{n}^a\overline{\boldsymbol{m}}^b\boldsymbol{n}^c\overline{\boldsymbol{m}}^d\,.
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

Ekvivalentně lze NP skalár Ψ_2 definovat jako

$$
\Psi_2 = -\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{C}_{abcd}\boldsymbol{l}^a\boldsymbol{n}^b\boldsymbol{l}^c\boldsymbol{n}^d - \boldsymbol{C}_{abcd}\boldsymbol{l}^a\boldsymbol{n}^b\boldsymbol{m}^c\overline{\boldsymbol{m}}^d\right)\,, \tag{1.14}
$$

kde na pravé straně první člen tvoří reálnou část a druhý člen tvoří ryze imaginární část NP skaláru Ψ_2. Bezestopý Ricciho tenzor $\boldsymbol{S}_{ab}$ je dán třemi komplexními a třemi reálnými skaláry, tzv. NP Ricciho skaláry, definovanými vztahy

$$
\begin{aligned}
\Phi_{00} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{S}_{ab}\boldsymbol{l}^a\boldsymbol{l}^b\,,\\
\Phi_{01} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{S}_{ab}\boldsymbol{l}^a\boldsymbol{m}^b\,,\\
\Phi_{02} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{S}_{ab}\boldsymbol{m}^a\boldsymbol{m}^b\,,\\
\Phi_{11} &= \frac{1}{4}\boldsymbol{S}_{ab}\left(\boldsymbol{l}^a\boldsymbol{n}^b + \boldsymbol{m}^a\overline{\boldsymbol{m}}^b\right)\,,\\
\Phi_{12} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{S}_{ab}\boldsymbol{n}^a\boldsymbol{m}^b\,,\\
\Phi_{22} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{S}_{ab}\boldsymbol{n}^a\boldsymbol{n}^b\,.
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

Ricciho skalár je v NP formalismu nahrazen NP skalárem Λ definovaným jako

$$
\Lambda = \frac{R}{24}\,. \tag{1.16}
$$

NP Weylovy skaláry, NP Ricciho skaláry a NP skalár Λ tak efektivně kódují 20 nezávislých komponent Riemannova tenzoru.

Dále budeme předpokládat Riemannův tenzor křivosti (a z něho odvozené tenzory a NP skaláry) spojený s Levi-Civitovou kovariantní derivací $\boldsymbol{\nabla}$. Potom NP Weylovy skaláry a NP Ricciho skaláry splňují NP Ricciho rovnice. Plnou sadu NP Ricciho rovnic lze nalézt např. v monografii (Stephani a kol., 2003). Pro pozdější použití zde uvádíme následující NP Ricciho rovnice

$$
\Delta\alpha - \bar{\delta}\gamma = (\rho+\epsilon)\,\nu - (\tau+\beta)\,\lambda + (\bar{\gamma}-\bar{\mu})\,\alpha + \left(\bar{\beta}-\bar{\tau}\right)\gamma - \Psi_3\,, \tag{1.17a}
$$

$$
\delta\kappa - D\sigma = -\left(3\epsilon - \overline{\epsilon} + \rho + \overline{\rho}\right)\sigma + \left(\overline{\alpha} + 3\beta - \overline{\pi} + \tau\right)\kappa - \Psi_0\,, \tag{1.17b}
$$

$$
\overline{\delta}\overline{\nu} - \Delta\overline{\mu} = \overline{\mu}^2 + \lambda\overline{\lambda} + (\gamma+\overline{\gamma})\,\overline{\mu} - \nu\overline{\pi} + \left(\overline{\tau} - 3\overline{\beta} + \alpha\right)\overline{\nu} + \Phi_{22}\,. \tag{1.17c}
$$

1.4 Transformace NP tetrády

Transformace zachovávající normalizační vztahy (1.3) v daném bodě tvoří šestidimenzionální Lorentzovu grupu. Obecnou transformaci lze složit ze tří prostorových rotací a tří boostů. Prostorová rotace kolem vektoru $\boldsymbol{E}_{(3)}$ je dána parametrem θ_3 jako

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}'_{(0)} &= \boldsymbol{E}_{(0)}\,, \\
\boldsymbol{E}'_{(1)} &= \cos\theta_3 \boldsymbol{E}_{(1)} - \sin\theta_3 \boldsymbol{E}_{(2)}\,, \\
\boldsymbol{E}'_{(2)} &= \sin\theta_3 \boldsymbol{E}_{(1)} + \cos\theta_3 \boldsymbol{E}_{(2)}\,, \\
\boldsymbol{E}'_{(3)} &= \boldsymbol{E}_{(3)}\,.
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

Rotace kolem vektoru $\boldsymbol{E}_{(1)}$, resp. $\boldsymbol{E}_{(2)}$, je dána parametrem θ_1, resp. θ_2 obdobnými vztahy. Boost ve směru $\boldsymbol{E}_{(3)}$ je dán parametrem v_3 jako

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}'_{(0)} &= \frac{\boldsymbol{E}_{(0)} - v_3 \boldsymbol{E}_{(3)}}{\sqrt{1-v_3^2}}\,, \\
\boldsymbol{E}'_{(1)} &= \boldsymbol{E}_{(1)}\,, \\
\boldsymbol{E}'_{(2)} &= \boldsymbol{E}_{(2)}\,, \\
\boldsymbol{E}'_{(3)} &= \frac{\boldsymbol{E}_{(3)} - v_3 \boldsymbol{E}_{(0)}}{\sqrt{1-v_3^2}}\,.
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

Boost ve směru $\boldsymbol{E}_{(1)}$, resp $\boldsymbol{E}_{(2)}$, je dán parametrem v_1, resp. v_2 obdobnými vztahy.

V řeči NP tetrády lze obecnou Lorentzovu transformaci složit ze dvou nulových rotací, z jedné prostorové rotace a jednoho boostu (Stephani a kol., 2003). Nulová rotace kolem $\boldsymbol{l}$ je dána komplexním parametrem B jako

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{l}' &= \boldsymbol{l}\,, \\
\boldsymbol{n}' &= \boldsymbol{n} + B\overline{\boldsymbol{m}} + \overline{B}\boldsymbol{m} + B\overline{B}\boldsymbol{l}\,, \\
\boldsymbol{m}' &= \boldsymbol{m} + B\boldsymbol{l}\,.
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

Nulová rotace kolem $\boldsymbol{n}$ je dána komplexním parametrem E jako

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{l}' &= \boldsymbol{l} + E\overline{\boldsymbol{m}} + \overline{E}\boldsymbol{m} + E\overline{E}\boldsymbol{n}\,, \\
\boldsymbol{n}' &= \boldsymbol{n}\,, \\
\boldsymbol{m}' &= \boldsymbol{m} + E\boldsymbol{n}\,.
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

Prostorová rotace kolem $\boldsymbol{E}_{(1)}$, tzv. rotace v $\boldsymbol{m}$-$\overline{\boldsymbol{m}}$ rovině, je dána reálným parametrem θ jako

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{l}' &= \boldsymbol{l}\,, \\
\boldsymbol{n}' &= \boldsymbol{n}\,, \\
\boldsymbol{m}' &= \mathrm{e}^{i\theta}\boldsymbol{m}\,.
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

Boost ve směru $\boldsymbol{E}_{(1)}$, tzv. boost v $\boldsymbol{l}$-$\boldsymbol{n}$ rovině, je dán reálným parametrem $A > 0$ jako

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{l}' &= A\boldsymbol{l}\,, \\
\boldsymbol{n}' &= A^{-1}\boldsymbol{n}\,, \\
\boldsymbol{m}' &= \boldsymbol{m}\,.
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

1.5 Transformace NP Weylových skalárů

NP Weylovy skaláry (1.13) nejsou obecně invariantní vzhledem k Lorentzovým transformacím (Stephani a kol., 2003). Pod působením nulové rotace kolem $\boldsymbol{l}$

(rovnice (1.20)) se transformují podle vztahů

$$\begin{aligned}
\Psi_0' &= \Psi_0\,,\\
\Psi_1' &= \Psi_1 + \bar{B}\Psi_0\,,\\
\Psi_2' &= \Psi_2 + 2\bar{B}\Psi_1 + \bar{B}^2\Psi_0\,,\\
\Psi_3' &= \Psi_3 + 3\bar{B}\Psi_2 + 3\bar{B}^2\Psi_1 + \bar{B}^3\Psi_0\,,\\
\Psi_4' &= \Psi_4 + 4\bar{B}\Psi_3 + 6\bar{B}^2\Psi_2 + 4\bar{B}^3\Psi_1 + \bar{B}^4\Psi_0\,.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Pod působením nulové rotace kolem $\boldsymbol{n}$ (rovnice (1.21)) se NP Weylovy skaláry transformují podle vztahů

$$\begin{aligned}
\Psi_0' &= \Psi_0 + 4E\Psi_1 + 6E^2\Psi_2 + 4E^3\Psi_3 + E^4\Psi_4\,,\\
\Psi_1' &= \Psi_1 + 3E\Psi_2 + 3E^2\Psi_3 + E^3\Psi_4\,,\\
\Psi_2' &= \Psi_2 + 2E\Psi_3 + E^2\Psi_4\,,\\
\Psi_3' &= \Psi_3 + E\Psi_4\,,\\
\Psi_4' &= \Psi_4\,.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Pod působením rotace v $\boldsymbol{m}$-$\overline{\boldsymbol{m}}$ rovině (rovnice (1.22)) se NP Weylovy skaláry transformují podle vztahů

$$\Psi_0' = \mathrm{e}^{2i\theta}\Psi_0\,,\quad \Psi_1' = \mathrm{e}^{i\theta}\Psi_1\,,\quad \Psi_2' = \Psi_2\,,\quad \Psi_3' = \mathrm{e}^{-i\theta}\Psi_3\,,\quad \Psi_4' = \mathrm{e}^{-2i\theta}\Psi_4\,. \tag{1.26}$$

Pod působením boostu v $\boldsymbol{l}$-$\boldsymbol{n}$ rovině (rovnice (1.23)) se NP Weylovy skaláry transformují podle vztahů

$$\Psi_0' = A^2\Psi_0\,,\quad \Psi_1' = A\Psi_1\,,\quad \Psi_2' = \Psi_2\,,\quad \Psi_3' = A^{-1}\Psi_3\,,\quad \Psi_4' = A^{-2}\Psi_4\,. \tag{1.27}$$

1.6 GHP formalismus

Na NP formalismus přirozeně navazuje GHP (Geroch-Held-Penrose) formalismus (Geroch, Held a Penrose, 1973), který nalézá uplatnění především v prostoročasech, ve kterých existuje přirozený výběr dvojice reálných vektorů NP tetrády $\boldsymbol{l}$ a $\boldsymbol{n}$.

GHP formalismus zavádí diskrétní operátor čárka ('), který při působení na NP tetrádu prohazuje vektory $\boldsymbol{l}$ a $\boldsymbol{n}$ a vektory $\boldsymbol{m}$ a $\overline{\boldsymbol{m}}$, neboli

$$\boldsymbol{l} \overset{\prime}{\longleftrightarrow} \boldsymbol{n}\,, \qquad\qquad \boldsymbol{m} \overset{\prime}{\longleftrightarrow} \overline{\boldsymbol{m}}\,. \tag{1.28}$$

Působení operátoru čárka na NP skaláry je odvozeno od jejich definičních vztahů a od této transformace NP tetrády. Z implicitně definovaných NP spinových koeficientů rovnicí (1.10) dostaneme působení operátoru čárka jako

$$\kappa \overset{\prime}{\longleftrightarrow} -\nu\,,\quad \rho \overset{\prime}{\longleftrightarrow} -\mu\,,\quad \sigma \overset{\prime}{\longleftrightarrow} -\lambda\,,\quad \tau \overset{\prime}{\longleftrightarrow} -\pi\,,\quad \epsilon \overset{\prime}{\longleftrightarrow} -\gamma\,,\quad \beta \overset{\prime}{\longleftrightarrow} -\alpha\,. \tag{1.29}$$

Křivostní NP skaláry se pod působením operátoru čárka transformují jako

$$\begin{gathered}
\Psi_0 \overset{\prime}{\longleftrightarrow} \Psi_4\,,\quad \Psi_1 \overset{\prime}{\longleftrightarrow} \Psi_3\,,\quad \Psi_2 \overset{\prime}{\longleftrightarrow} \Psi_2\,,\quad \Lambda \overset{\prime}{\longleftrightarrow} \Lambda\,,\\
\Phi_{00} \overset{\prime}{\longleftrightarrow} \Phi_{22}\,,\quad \Phi_{01} \overset{\prime}{\longleftrightarrow} \overline{\Phi}_{12}\,,\quad \Phi_{02} \overset{\prime}{\longleftrightarrow} \overline{\Phi}_{02}\,,\quad \Phi_{11} \overset{\prime}{\longleftrightarrow} \Phi_{11}\,.
\end{gathered} \tag{1.30}$$

Směrové derivace podél NP tetrády se pod působením operátoru čárka transformují jednoduše jako

$$D \overset{\prime}{\longleftrightarrow} \Delta\,, \quad \delta \overset{\prime}{\longleftrightarrow} \bar{\delta}\,. \tag{1.31}$$

Obecné Lorentzovy transformace zachovávající směr dvojice reálných vektorů NP tetrády tvoří dvouparametrickou grupu složenou z boostů v $\boldsymbol{l}$-$\boldsymbol{n}$ rovině (rovnice (1.23)) a rotace v $\boldsymbol{m}$-$\overline{\boldsymbol{m}}$ rovině (rovnice (1.22)). Lze je parametrizovat jedinou komplexní funkcí λ a transformace nabývá tvaru

$$\boldsymbol{l'} = \lambda\bar{\lambda}\,\boldsymbol{l}\,, \qquad \boldsymbol{n'} = \lambda^{-1}\bar{\lambda}^{-1}\,\boldsymbol{n}\,, \tag{1.32}$$

$$\boldsymbol{m'} = \lambda\bar{\lambda}^{-1}\,\boldsymbol{m}\,, \qquad \overline{\boldsymbol{m}}' = \lambda^{-1}\bar{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{m}}\,. \tag{1.33}$$

Od této transformace se odvíjí i transformace všech NP skalárů podle jejich definic. Skalár, který se transformuje podle rovnice

$$\eta' = \lambda^p\bar{\lambda}^q\,\eta\,, \tag{1.34}$$

nazýváme GHP skalár GHP váhy $[p,q]$. Spinová váha spojená s rotací v $\boldsymbol{m}$-$\overline{\boldsymbol{m}}$ rovině takového skaláru je $(p-q)/2$ a boostová váha spojená s boostem v $\boldsymbol{l}$-$\boldsymbol{n}$ rovině je $(p+q)/2$. Z definičních vztahů GHP skaláru (rovnice (1.32) - (1.34)) plyne, že operátor čárka transformuje GHP skalár váhy $[p,q]$ na GHP skalár váhy $[-p,-q]$ a že komplexní sdružení vytvoří z GHP skaláru váhy $[p,q]$ GHP skalár váhy $[q,p]$. Operace čárka a komplexní sdružení navzájem komutují. GHP váhu lze použít pro kontrolu správnosti rovnic, neboť lze spolu porovnávat jen členy se stejnou GHP váhou.

GHP váhu budeme občas uvádět ve spodním indexu jako např. v následujících GHP skalárech,

$$\Psi_{2_{[0,0]}}\,, \quad \Psi_{3_{[-2,0]}}\,, \quad \Psi_{4_{[-4,0]}}\,, \quad \Phi_{00_{[2,2]}}\,, \quad \Phi_{01_{[2,0]}}\,, \quad \Phi_{00_{[2,-2]}}\,, \quad \Phi_{11_{[0,0]}}\,, \quad \Lambda_{[0,0]}\,. \tag{1.35}$$

Z dvanácti NP spinových koeficientů se jen osm z nich transformuje jako GHP skalár podle rovnice (1.34). Jejich GHP váhy jsou

$$\begin{gathered} \kappa_{[3,1]}\,, \quad \rho_{[1,1]}\,, \quad \sigma_{[3,-1]}\,, \quad \tau_{[1,-1]}\,, \\ \nu_{[-3,-1]}\,, \quad \mu_{[-1,-1]}\,, \quad \lambda_{[-3,1]}\,, \quad \pi_{[-1,1]}\,. \end{gathered} \tag{1.36}$$

Stejně jako NP skaláry β, ϵ a jejich čárkované verze se i NP derivace netransformují podle vztahu (1.34). Lze z nich však zkonstruovat tzv. GHP derivace, které při působení na GHP skalár vytvoří nový GHP skalár jiné váhy. Jedná se o GHP derivace þ, ð a jejich čárkované verze[1] definované působením na GHP skalár η váhy $[p,q]$ vztahy

$$þ\eta \equiv (D - p\epsilon - q\bar{\epsilon})\,\eta\,, \qquad þ'\eta \equiv (\Delta + p\epsilon' + q\bar{\epsilon}')\,\eta\,, \tag{1.37}$$

$$ð\eta \equiv \left(\delta - p\beta + q\bar{\beta}'\right)\eta\,, \qquad ð'\eta \equiv \left(\bar{\delta} + p\beta' - q\bar{\beta}\right)\eta\,. \tag{1.38}$$

GHP derivace þ, resp. þ$'$, zvyšuje o 1, resp. snižuje o 1, boostovou váhu a GHP derivace ð, resp. ð$'$, zvyšuje o 1, resp. snižuje o 1, spinovou váhu, neboli GHP

[1]Symbol ð již značil tetrádovou kovariantní derivaci. Dále budeme tento symbol používat výhradně jako GHP derivaci.

derivace mění GHP váhu následovně,

$$\text{þ} \to [+1, +1]\,, \qquad \text{þ}' \to [-1, -1]\,, \tag{1.39}$$

$$\eth \to [+1, -1]\,, \qquad \eth' \to [-1, +1]\,. \tag{1.40}$$

Z definičních vztahů (1.37) a (1.38) plyne

$$\overline{\text{þ}\eta} = \text{þ}\overline{\eta}\,, \quad \overline{\eth\eta} = \eth'\overline{\eta}\,, \tag{1.41}$$

kde η je GHP skalár. Ná základě rovnic (1.32)-(1.34) lze v jistém významu přiřadit GHP váhu prvkům NP tetrády takto,

$$\boldsymbol{l}_{[1,1]}\,, \quad \boldsymbol{n}_{[-1,-1]}\,, \quad \boldsymbol{m}_{[1,-1]}\,, \quad \overline{\boldsymbol{m}}_{[-1,1]}\,. \tag{1.42}$$

2. Gravitační perturbace

2.1 Jednoparametrická třída řešení

Mezi známá přesná řešení Einsteinových rovnic nepatří např. rotující černá díra obklopená akrečním diskem nebo vyzařující gravitační vlny, přestože se jedná o astronomicky významné objekty. V režimech, kdy lze situaci aproximovat gravitační perturbací na pozaďovém prostoročasu, se hledání řešení a jeho vlastností značně zjednodušuje. Při studiu perturbací však dochází ke vzniku nového problému, kterému se budeme v této kapitole věnovat.

Předpokládejme, že známe nějaké přesné řešení Einsteinových rovnic dané metrikou $\boldsymbol{g}$ na varietě $\mathcal{M}$ - tvoří dvojici $(\mathcal{M}, \boldsymbol{g})$. V ideálním případě bychom chtěli znát jednoparametrickou třídu přesných řešeních Einsteinových rovnic $(\mathcal{M}', \boldsymbol{g'})$ parametrizované parametrem $\tilde{\epsilon}$ sestávající z třídy metrik $\boldsymbol{g'} \equiv \boldsymbol{g}(\tilde{\epsilon})$ na třídě variet $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{M}(\tilde{\epsilon})$. Parametr $\tilde{\epsilon}$ je zvolen tak, že pro nulovou hodnotu dostaneme pozaďový, neperturbovaný prostoročas a pozaďovou metriku, tj. $\mathcal{M}(0) = \mathcal{M}$ a $\boldsymbol{g}(0) = \boldsymbol{g}$. Za předpokladu, že hodnota parametru $\tilde{\epsilon}$ je malá, hledáme namísto přesného řešení lineární perturbaci metriky ve formě tenzoru $\boldsymbol{\gamma}$. Formálně lze linearizaci metriky zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{g}(\tilde{\epsilon}) = \boldsymbol{g} + \tilde{\epsilon}\boldsymbol{\gamma} + \mathrm{O}(\tilde{\epsilon}^2)\,, \tag{2.1}$$

kde $\boldsymbol{\gamma}$ nezávisí na $\tilde{\epsilon}$. Rovnice (2.1) má však jeden významný nedostatek, který tvoří základní problém studia perturbace prostoročasů. Tomuto problému se věnujeme v následující podkapitole.

2.2 Identifikační problém a kalibrační volnost

Při studiu gravitačních perturbací pracujeme se dvěma odlišnými prostoročasy - s pozaďovým prostoročasem $\mathcal{M}$ a s perturbovaným prostoročasem $\mathcal{M}'$. Jedná se o dva odlišné objekty a klíčový problém gravitačních perturbací je, že neexistuje přirozená nebo nějak preferovaná identifikace bodů variety $\mathcal{M}$ s body variety $\mathcal{M}'$. Matematicky řečeno neexistuje preferovaná volba diffeomorfismu z $\mathcal{M}$ do $\mathcal{M}'$.[1] Z toho vyplývá, že ani nelze preferovaně porovnávat další objekty jako třeba tenzory na varietě $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}'$. Podíváme se na to, jak se projeví nejednoznačnost volby tohoto diffeomorfismu. Tomuto problému se věnoval již článek (Stewart a Walker, 1974).

Zkusme opravit rovnici (2.1), kde namísto metriky $\boldsymbol{g}$ budeme uvažovat obecný objekt Q,

$$Q(\tilde{\epsilon}) = Q + \tilde{\epsilon}\dot{Q} + \mathrm{O}(\tilde{\epsilon}^2)\,, \tag{2.2}$$

kde $Q(\tilde{\epsilon})$ je objekt žijící na varietě $\mathcal{M}'$, Q je objekt žijící na varietě $\mathcal{M}$ a objekt $\dot{Q}$ žijící na varietě $\mathcal{M}$ budeme nazývat derivace Q. Dodejme, že Q a $\dot{Q}$ nezávisí na $\tilde{\epsilon}$.

Předpokládejme, že zvolíme daný diffeomorfismus μ z variety $\mathcal{M}$ do variety $\mathcal{M}'$, neboli

$$\mu\,:\,\mathcal{M} \to \mathcal{M}'\,. \tag{2.3}$$

[1] Diffeomorfismus, tj. 1-1 zobrazení, které je i se svou inverzí hladké, volíme proto, aby nám dále indukoval push-forward tenzorů.

Diffeomorfismus μ indukuje push-forward μ_* tenzorů z variety $\mathcal{M}$ do variety $\mathcal{M}'$ a pull-back μ^* tenzorů z variety $\mathcal{M}'$ do variety $\mathcal{M}$. Objekt $Q(\tilde{\epsilon};\mu(x))$ v bodě $\mu(x)$, kde $x \in \mathcal{M}$, pak můžeme srovnat s objekty $\mu_*(Q(x)) = (\mu_* Q)(\mu(x))$ a $\mu_*(\dot{Q}(x)) = (\mu_*\dot{Q})(\mu(x))$ žijícími na varietě $\mathcal{M}'$. Opravená rovnice (2.2) má potom tvar

$$Q(\tilde{\epsilon};\mu(x)) = \mu_*(Q(x)) + \tilde{\epsilon}\mu_*(\dot{Q}(x)) + \mathrm{O}(\tilde{\epsilon}^2)\,. \tag{2.4}$$

Zároveň požadujeme, aby rovnice (2.4) platila v limitě $\tilde{\epsilon} \to 0$, neboli

$$Q(\mu(x)) = \mu_*(Q(x))\,. \tag{2.5}$$

Aby byla tato rovnice splněna pro všechna Q, je nezbytné aby byl diffeomorfismus také parametrizován parametrem $\tilde{\epsilon}$ a aby pro $\tilde{\epsilon} = 0$, kdy nastává $\mu : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, bylo μ identita,

$$\mu \to \mu(\tilde{\epsilon}) \equiv \mu_{\tilde{\epsilon}}, \quad \text{kde } \mu_0 = \mathrm{id}\,. \tag{2.6}$$

Z tohoto důvodu je vhodné uvažovat pětidimenzionální varietu $\mathcal{N}$, která je foliována čtyřdimenzionálními varietami $\mathcal{M}'$ tak, že $\tilde{\epsilon}$ parametrizující variety $\mathcal{M}'$ tvoří dobře definovanou souřadnici na $\mathcal{N}$. Potom lze na jednoparametrickou třídu diffeomorfismů $\mu_{\tilde{\epsilon}}$ zobrazující body z $\mathcal{N}$ do $\mathcal{N}$ nahlížet jako na tok. Označme vektorové pole na $\mathcal{N}$[2] příslušející toku $\mu_{\tilde{\epsilon}}$ jako $\boldsymbol{M}$. Naše výchozí rovnice (2.4) přejde na tvar

$$Q(\tilde{\epsilon};\mu_{\tilde{\epsilon}}(x)) = \mu_{\tilde{\epsilon}*}(Q(x)) + \tilde{\epsilon}\mu_{\tilde{\epsilon}*}(\dot{Q}(x)) + \mathrm{O}(\tilde{\epsilon}^2)\,. \tag{2.7}$$

Tuto rovnici stáhneme zpět na varietu $\mathcal{M}$ působením pull-backem $\mu_{\tilde{\epsilon}}{}^* = \mu_{-\tilde{\epsilon}*}$, čímž dostaneme

$$\mu_{-\tilde{\epsilon}*}Q(\tilde{\epsilon};\mu_{\tilde{\epsilon}}(x)) = Q(x) + \tilde{\epsilon}\dot{Q}(x) + \mathrm{O}(\tilde{\epsilon}^2)\,, \tag{2.8}$$

kde jsme využili, že $\mu_{\tilde{\epsilon}*}\mu_{-\tilde{\epsilon}*} = \mu_{0*} = \mathrm{id}$. Hledanou derivaci $\dot{Q}(x)$ vyjádříme jako

$$\dot{Q}_{\boldsymbol{M}}(x) = \lim_{\tilde{\epsilon}\to 0} \frac{\mu_{-\tilde{\epsilon}*}Q(\tilde{\epsilon};\mu_{\tilde{\epsilon}}(x)) - Q(x)}{\tilde{\epsilon}} = \mathcal{L}_{\boldsymbol{M}}Q(\tilde{\epsilon};x)\,, \tag{2.9}$$

kde jsme rozpoznali definici Lieovy derivace $\mathcal{L}_{\boldsymbol{M}}$ podél vektorového pole $\boldsymbol{M}$ žijícího na varietě $\mathcal{N}$, které je vzhledem k varietě $\mathcal{M}$ z konstrukce úlohy transverzální. Derivace objektu Q tedy závisí na volbě diffeomorfismu, což jsme již naznačili v rovnici (2.9) spodním indexem v $\dot{Q}_{\boldsymbol{M}}$. Rovnici (2.9) lze přepsat pomocí totální derivace do tvaru

$$\dot{Q}_{\boldsymbol{M}}(x) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{\epsilon}}\mu_{-\tilde{\epsilon}*}Q(\tilde{\epsilon};\mu_{\tilde{\epsilon}}(x))\right|_{\tilde{\epsilon}=0} = \mathcal{L}_{\boldsymbol{M}}Q(\tilde{\epsilon};x)\,. \tag{2.10}$$

V následujících podkapitolách a kapitolách nebudeme vždy v derivaci objektu uvádět zvolený diffeomorfismus a rovnice typu (2.10) budeme zapisovat ve zkrácené formální podobě

$$\dot{Q} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{\epsilon}}Q(\tilde{\epsilon})\right|_{\tilde{\epsilon}=0} = \mathcal{L}Q(\tilde{\epsilon})\,. \tag{2.11}$$

Zvolíme-li obecně jinou jednoparametrickou třídu diffeomorfismů $\nu_{\tilde{\epsilon}}$ odpovídající vektorovému poli $\boldsymbol{N}$, bude hledaná derivace $\dot{Q}_{\boldsymbol{N}}$ rovna

$$\dot{Q}_{\boldsymbol{N}} = \mathcal{L}_{\boldsymbol{N}}Q(\tilde{\epsilon})\,. \tag{2.12}$$

[2]Přesněji řečeno toto vektorové pole žije na tečném bandlu variety $\mathcal{N}$.

Rozdíl těchto dvou derivací daný odlišnou volbou vektorového pole je

$$\dot{Q}_{\boldsymbol{M}} - \dot{Q}_{\boldsymbol{N}} = \mathcal{L}_{\boldsymbol{M}} Q(\tilde{\epsilon}) - \mathcal{L}_{\boldsymbol{N}} Q(\tilde{\epsilon}) = \mathcal{L}_{\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N}} Q(\tilde{\epsilon})\,. \tag{2.13}$$

Vzhledem k tomu, že toky $\mu_{\tilde{\epsilon}}$ a $\nu_{\tilde{\epsilon}}$ jsou parametrizovány stejným parametrem $\tilde{\epsilon}$, je vektorové pole $\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{M} - \boldsymbol{N}$ tangenciální k varietě $\mathcal{M}$, neboli žije na tečném bandlu variety $\mathcal{M}$. Lieova derivace je pak pouze citlivá na to, jak se $Q(\tilde{\epsilon})$ chová na varietě $\mathcal{M}$, a můžeme proto psát

$$\dot{Q}_{\boldsymbol{M}} - \dot{Q}_{\boldsymbol{N}} = \mathcal{L}_{\boldsymbol{u}} Q\,. \tag{2.14}$$

Podrobným rozborem tak dostáváme známý výsledek, že perturbace $\dot{Q}$ veličiny Q je dána jednoznačně až na Lieovu derivaci neperturbované veličiny Q podél libovolného hladkého vektorového pole $\boldsymbol{u}$ žijícího na neperturbované varietě $\mathcal{M}$. Libovůle ve volbě $\boldsymbol{u}$ nám udává tzv. kalibrační volnost gravitačních perturbací a $\boldsymbol{u}$ nazýváme kalibračním vektorem.

Drobnou modifikací rovnice (2.13) dostaneme

$$\dot{Q}_{\boldsymbol{M}} + \dot{Q}_{\boldsymbol{N}} = \mathcal{L}_{\boldsymbol{M}} Q + \mathcal{L}_{\boldsymbol{N}} Q = \mathcal{L}_{\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}} Q\,, \tag{2.15}$$

neboli součtem dvou perturbací $\dot{Q}_{\boldsymbol{M}}$ a $\dot{Q}_{\boldsymbol{N}}$ získáme novou perturbaci $\dot{Q}'$ danou kalibračním vektorem $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}$. Lineární perturbace tak lze jednoduše sčítat. (V případě perturbací daných vícero parametry je potřeba uvažovat odpovídající vícedimenzionální varietu $\mathcal{N}$.)

Klíčovou roli při studiu gravitačních perturbací hrají veličiny, které jsou tzv. kalibračně invariantní, tj. jejich derivace nezávisí na volbě vektoru v Lieově derivaci. Poznamenejme tak klíčový poznatek plynoucí z rovnice (2.12), že pokud je neperturbovaná veličina Q všude nulová (nebo konstantní), je její derivace $\dot{Q}$ kalibračně invariantní.

2.3 Metrické perturbace

Motivováni předešlými podkapitolami budeme tenzor $\boldsymbol{\gamma}$ převážně nazývat derivací metriky, neboť dle definice

$$\boldsymbol{\gamma} \equiv \dot{\boldsymbol{g}} \equiv \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{\epsilon}} \boldsymbol{g}(\tilde{\epsilon})\right|_{\tilde{\epsilon}=0} \equiv \mathcal{L}_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{g}(\tilde{\epsilon})\,. \tag{2.16}$$

Za perturbaci metriky prvního řádu pak budeme standardně považovat tenzor $\tilde{\epsilon}\boldsymbol{\gamma}$.

Perturbace metriky se standardně v literatuře provádí tak, že uvažujeme pozaďovou metriku $\boldsymbol{g}$ rozloženou do nějaké báze $\{\boldsymbol{e}^i\}_{i=1,\dots,4}$,

$$\boldsymbol{g} = g_{ij} \boldsymbol{e}^i \boldsymbol{e}^j \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{g}(x) = g_{ij}(x) \boldsymbol{e}^i(x) \boldsymbol{e}^j(x)\,. \tag{2.17}$$

Perturbace metriky pak bývá provedena prostřednictvím perturbace komponent metriky g_{ij}. Nové komponenty metriky $g_{ij}(\tilde{\epsilon})$ závisejí na parametru $\tilde{\epsilon}$ a perturbovaná metrika se standardně píše ve tvaru

$$\boldsymbol{g}(\tilde{\epsilon}; x) = g_{ij}(\tilde{\epsilon}, x) \boldsymbol{e}^i(x) \boldsymbol{e}^j(x)\,, \tag{2.18}$$

kde se předpokládá, že $\boldsymbol{g}(\tilde{\epsilon})$ již žije na pozaďové varietě díky implicitně předpokládanému diffeomorfismu. Derivace metriky se pak standardně získá derivací rovnice (2.18) podle $\tilde{\epsilon}$ a položením $\tilde{\epsilon} = 0$,

$$\boldsymbol{\gamma} = \left.\frac{\mathrm{d}g_{ij}(\tilde{\epsilon})}{\mathrm{d}\tilde{\epsilon}}\right|_{\tilde{\epsilon}=0} \boldsymbol{e}^i \boldsymbol{e}^j \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{\gamma}(x) = \left.\frac{\mathrm{d}g_{ij}(\tilde{\epsilon};x)}{\mathrm{d}\tilde{\epsilon}}\right|_{\tilde{\epsilon}=0} \boldsymbol{e}^i(x)\boldsymbol{e}^j(x)\,. \tag{2.19}$$

Problémem v předchozím postupu je rovnice (2.18), neboť objekty $\boldsymbol{g}(\tilde{\epsilon};x)$ a $g_{ij}(\tilde{\epsilon},x)$ žijí na varietě $\mathcal{M}'$ a ne v bodě $x \in \mathcal{M}$. Nyní ukážeme, co se ve skutečnosti skrývá za postupem výše, a jak lze rigorózně dojít k rovnici (2.19). Perturbované metrické komponenty $g_{ij}(\tilde{\epsilon})$ již neleží v bodě $x \in \mathcal{M}$, ale v bodě $\mu_{\tilde{\epsilon}}(x) \in \mathcal{M}'$, kde $\mu_{\tilde{\epsilon}}$ tvoří tok. Perturbovaná metrika je pak ve skutečnosti předpokládaná ve tvaru

$$\boldsymbol{g}(\tilde{\epsilon};\mu_{\tilde{\epsilon}}(x)) = g_{ij}(\tilde{\epsilon},\mu_{\tilde{\epsilon}}(x))\mu_{\tilde{\epsilon}*}\boldsymbol{e}^i(x)\mu_{\tilde{\epsilon}*}\boldsymbol{e}^j(x)\,. \tag{2.20}$$

Tuto rovnici stáhneme zpět působením pull-backem ${\mu_{\tilde{\epsilon}}}^* = \mu_{-\tilde{\epsilon}*}$,

$$\mu_{-\tilde{\epsilon}*}\boldsymbol{g}(\tilde{\epsilon};\mu_{\tilde{\epsilon}}(x)) = \mu_{-\tilde{\epsilon}*}g_{ij}(\tilde{\epsilon},\mu_{\tilde{\epsilon}}(x))\boldsymbol{e}^i(x)\boldsymbol{e}^j(x)\,. \tag{2.21}$$

Nyní rovnici zderivujeme podle $\tilde{\epsilon}$ a položíme $\tilde{\epsilon} = 0$, dostaneme tak rovnici (2.19), neboť jsme použili rovnici (2.10) na levé straně pro $\boldsymbol{g}$ a na pravé straně pro g_{ij}. Dále jsme využili toho, že vektory $\boldsymbol{e}^i(x)$ na základě konstrukce naší úlohy nezávisejí na $\tilde{\epsilon}$. K této problematice se vrátíme v podkapitole 4.1, kde ji vyjasníme na příkladu.

Lieova derivace nám říká, jaký je vztah mezi perturbací metriky $\boldsymbol{g_{ab}}$ a perturbací inverzní metriky $\boldsymbol{g^{-1ab}}$. Jejich derivace jsou podle rovnice (2.10)

$$\dot{\boldsymbol{g}}_{\boldsymbol{ab}} = \mathcal{L}_{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{g_{ab}}\,, \quad \dot{\boldsymbol{g}}^{\boldsymbol{-1ab}} = \mathcal{L}_{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{g^{-1ab}} \tag{2.22}$$

a inverzní metrika je dána podmínkou

$$\boldsymbol{g_{ab}}\boldsymbol{g^{-1bc}} = \boldsymbol{\delta^c_a}\,, \tag{2.23}$$

kde $\boldsymbol{\delta^c_a}$ je Kroneckerovo delta. Působením Lieovy derivace na tuto rovnici dostaneme

$$0 = \mathcal{L}_{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{\delta^c_a} = (\mathcal{L}_{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{g_{ab}})\,\boldsymbol{g^{-1bc}} + \boldsymbol{g_{ab}}\left(\mathcal{L}_{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{g^{-1bc}}\right)\,, \tag{2.24}$$

kde jsme použili Leibnizovo pravidlo pro Lieovu derivaci a to, že Lieova derivace anihiluje Kroneckerovo delta. Nyní na rovnici zapůsobíme inverzní metrikou $\boldsymbol{g^{-1ad}}$ a vyjádříme derivaci inverzní metriky ve tvaru

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{g^{-1cd}} = -\boldsymbol{g^{-1ac}}\boldsymbol{g^{-1bd}}\,(\mathcal{L}_{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{g_{ab}})\,. \tag{2.25}$$

Obecným postupem s pomocí diferenciální geometrie jsme tak dostali známý výsledek, že derivaci inverzní metriky získáme až na znaménko z derivace metriky zvednutím indexů pomocí neperturbované inverzní metriky. Uvědomme si, že smysluplněji lze indexy Lieovy derivace metriky psát ve tvaru

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{g_{ab}} = (\mathcal{L}_{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{g})_{\boldsymbol{ab}}\,, \tag{2.26}$$

a proto lze zapsat rovnici (2.25) ve zjednodušeném tvaru

$$\left(\mathcal{L}_{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{g^{-1}}\right)_{\boldsymbol{ab}} = -\,(\mathcal{L}_{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{g})_{\boldsymbol{ab}} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{L}_{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{g^{-1}} = -\mathcal{L}_{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{g}\,, \tag{2.27}$$

kde se přepokládá, že indexy byly sníženy neperturbovanou metrikou $\boldsymbol{g}$, neboť všechny objekty již žijí na pozaďovém prostoročasu.

2.4 Perturbace Riemannova tenzoru

Levi-Civitova kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$ kompatibilní s metrikou $\boldsymbol{g}$ je definována jako beztorzní metrická kovariantní derivace, tj.

$$\boldsymbol{\nabla g} = 0\,, \quad \boldsymbol{T} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\nabla_a \nabla_b} f - \boldsymbol{\nabla_b \nabla_a} f = 0\,, \tag{2.28}$$

kde $\boldsymbol{T}$ je tenzor torze a f je libovolná funkce. Pracujeme-li s více metrikami, máme k dispozici také příslušný počet Levi-Civitových kovariantních derivací. Levi-Civitovu kovariantní derivaci kompatibilní perturbované metrice $\boldsymbol{g'} \equiv \boldsymbol{g}(\tilde{\epsilon})$ budeme značit jako $\boldsymbol{\nabla}' \equiv {}^{\tilde{\epsilon}}\boldsymbol{\nabla}$.[3] Rozdíl perturbované a neperturbované kovariantní derivace je dán rozdílovým tenzorem $\boldsymbol{\Gamma}$,

$${}^{\tilde{\epsilon}}\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\nabla} + \boldsymbol{\Gamma}(\tilde{\epsilon})\,. \tag{2.29}$$

Povšimněme si, že $\boldsymbol{\Gamma}(\tilde{\epsilon})$ pro $\tilde{\epsilon} = 0$ vymizí, a tudíž je jeho derivace kalibračně invariantní.

Následující výpočet rozdílového tenzoru a perturbace Riemannova tenzoru vychází z monografie (Wald, 1984). Působením rovnicí (2.29) na metriku $\boldsymbol{g}(\tilde{\epsilon})$ a využitím vlastností výše lze dojít k následujícímu vztahu pro $\boldsymbol{\Gamma}(\tilde{\epsilon})$,

$$\boldsymbol{\Gamma_{cab}}(\tilde{\epsilon}) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla_a g_{cb}}(\tilde{\epsilon}) + \boldsymbol{\nabla_b g_{ac}}(\tilde{\epsilon}) - \boldsymbol{\nabla_c g_{ab}}(\tilde{\epsilon})\right)\,. \tag{2.30}$$

Derivaci $\dot{\boldsymbol{\Gamma}}$ získáme derivací podle parametru $\tilde{\epsilon}$ a položením $\tilde{\epsilon} = 0$,

$$\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_{\boldsymbol{cab}} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla_a \gamma_{cb}} + \boldsymbol{\nabla_b \gamma_{ac}} - \boldsymbol{\nabla_c \gamma_{ab}}\right)\,. \tag{2.31}$$

Rozdíl perturbovaného a neperturbovaného Riemannova tenzoru, v našem případě rozdíl Riemannova tenzoru $\boldsymbol{R'} \equiv \boldsymbol{R}(\tilde{\epsilon})$ příslušejícího kovariantní derivaci $\boldsymbol{\nabla}' \equiv {}^{\tilde{\epsilon}}\boldsymbol{\nabla}$ a Riemannova tenzoru $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(0)$ příslušejícího kovariantní derivaci $\boldsymbol{\nabla}$, je dán vztahem

$$\boldsymbol{R_{abc}}^{\boldsymbol{d}}(\tilde{\epsilon}) = \boldsymbol{R_{abc}}^{\boldsymbol{d}} - 2\boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{d}}{}_{\boldsymbol{b}]\boldsymbol{c}}(\tilde{\epsilon}) + \boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{e}}{}_{\boldsymbol{c}[\boldsymbol{a}}(\tilde{\epsilon})\boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{d}}{}_{\boldsymbol{b}]\boldsymbol{e}}(\tilde{\epsilon})\,. \tag{2.32}$$

Derivací této rovnice podle $\tilde{\epsilon}$ získáme derivaci Riemannova tenzoru jako

$$\dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{abc}}{}^{\boldsymbol{d}} = -2\boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a}}\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^{\boldsymbol{d}}{}_{\boldsymbol{b}]\boldsymbol{c}}\,, \tag{2.33}$$

kde jsme využili, že $\boldsymbol{\Gamma}(0) = 0$.

2.5 Linearizované Einsteinovy rovnice

Plné Einsteinovy rovnice standardní obecné relativity s nulovou kosmologickou konstantou mají tvar

$$\boldsymbol{R_{ab}}(\tilde{\epsilon}) - \frac{1}{2}R(\tilde{\epsilon})\boldsymbol{g_{ab}}(\tilde{\epsilon}) = 8\pi \boldsymbol{T_{ab}}(\tilde{\epsilon})\,, \tag{2.34}$$

[3] Ve skutečnosti uvažujeme Levi-Civitovu kovariantní derivaci ${}^{\tilde{\epsilon}}\boldsymbol{\nabla}$ metriky $\mu_{-\tilde{\epsilon}*}\boldsymbol{g}(\tilde{\epsilon})$, kde oba objekty již žijí na pozaďovém prostoročasu.

kde $\boldsymbol{T_{ab}}(\tilde{\epsilon})$ je perturbovaný tenzor energie a hybnosti, $\boldsymbol{R_{ab}}(\tilde{\epsilon}) \equiv \boldsymbol{R_{acb}}^{\boldsymbol{c}}(\tilde{\epsilon})$ je perturbovaný Ricciho tenzor a $R(\tilde{\epsilon}) \equiv \boldsymbol{R_{ab}}(\tilde{\epsilon})\boldsymbol{g^{ab}}(\tilde{\epsilon})$ je perturbovaný Ricciho skalár. Linearizované Einsteinovy rovnice získáme derivací rovnice (2.34) podle $\tilde{\epsilon}$,

$$\dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{ab}} - \frac{1}{2}\left(R\boldsymbol{\gamma_{ab}} + \dot{R}\boldsymbol{g_{ab}}\right) = 8\pi\dot{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{ab}}\,. \tag{2.35}$$

Levá strana této rovnice tvoří perturbaci $\dot{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{ab}}$ Einsteinova tenzoru $\boldsymbol{G_{ab}}(\tilde{\epsilon}) = \boldsymbol{R_{ab}}(\tilde{\epsilon}) - 1/2R(\tilde{\epsilon})\boldsymbol{g_{ab}}(\tilde{\epsilon})$.

V případě, že zkoumáme vakuové prostoročasy s vakuovými perturbacemi, zjednoduší se rovnice (2.34) na

$$\boldsymbol{R_{ab}}(\tilde{\epsilon}) = 0 \tag{2.36}$$

a rovnice (2.35) na

$$\dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{ab}} = 0\,. \tag{2.37}$$

Je-li pozaďový prostoročas řešením vakuových Einsteinových rovnic, tj. $\boldsymbol{R_{ab}} = 0$, pak je derivace $\dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{ab}}$ kalibračně invariantní.

Abychom mohli řešit linearizované vakuové Einsteinovy rovnice, potřebujeme znát derivaci $\dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{ab}}$ (v případě nevakuových perturbací i $\dot{R}$). Díky definiční vlastnosti Lieovy derivace, podle které komutuje s kontrakcí, nalezneme $\dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{ab}}$ kontrakcí rovnice (2.33) přes indexy $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}$,

$$\dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{ac}} = -2\boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a}}\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^{\boldsymbol{b}}{}_{\boldsymbol{b}]\boldsymbol{c}}\,. \tag{2.38}$$

Podobně $\dot{R}$ získáme z rovnice (2.38) jako

$$\dot{R} = -\boldsymbol{g^{ac}}\boldsymbol{\nabla_a}\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^{\boldsymbol{b}}{}_{\boldsymbol{bc}} + \boldsymbol{\nabla_b}\left(\boldsymbol{g^{ac}}\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^{\boldsymbol{b}}{}_{\boldsymbol{ac}}\right)\,, \tag{2.39}$$

kde jsme využili $\boldsymbol{\nabla g^{-1}} = 0$.

3. Perturbace v NP a GHP formalismu

3.1 Vztah perturbace metriky a NP tetrády

Metrika vyjádřená pomocí NP tetrády má tvar podle rovnice (1.4). Tento tvar platí i pro perturbované prostoročasy, neboť požadujeme splnění normalizačních podmínek (rovnice (1.1)) i pro perturbované vektory, neboli

$$\boldsymbol{g_{ab}}(\tilde{\epsilon}) = 2\boldsymbol{l_{(a}}(\tilde{\epsilon})\boldsymbol{n_{b)}}(\tilde{\epsilon}) - 2\boldsymbol{m_{(a}}(\tilde{\epsilon})\boldsymbol{\overline{m}_{b)}}(\tilde{\epsilon})\,. \tag{3.1}$$

Vidíme tedy, že perturbace metriky a kontravariantní NP tetrády jsou vzájemně svázané. V této podkapitole najdeme jejich vzájemný vztah a ukážeme, že perturbace metriky je dána perturbací NP tetrády jednoznačně, zatímco perturbace NP tetrády pomocí perturbace metriky jednoznačně zadána není.

Symetrická derivace metriky rozvinutá do kovektorů NP tetrády má obecně tvar

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma_{ab}} = {} & \gamma_{ll}\boldsymbol{n_a n_b} + \gamma_{nn}\boldsymbol{l_a l_b} + 2\gamma_{ln}\boldsymbol{l_{(a}n_{b)}} \\ & - 2\gamma_{lm}\boldsymbol{n_{(a}\overline{m}_{b)}} - 2\gamma_{l\overline{m}}\boldsymbol{n_{(a}m_{b)}} - 2\gamma_{nm}\boldsymbol{l_{(a}\overline{m}_{b)}} - 2\gamma_{n\overline{m}}\boldsymbol{l_{(a}m_{b)}} \\ & + \gamma_{mm}\boldsymbol{\overline{m}_a\overline{m}_b} + \gamma_{\overline{m}\overline{m}}\boldsymbol{m_a m_b} + 2\gamma_{m\overline{m}}\boldsymbol{m_{(a}\overline{m}_{b)}}\,,\end{aligned} \tag{3.2}$$

kde koeficienty rozkladu jsou $\gamma_{ll} = \boldsymbol{\gamma_{ab}l^a l^b}, \gamma_{ln} = \boldsymbol{\gamma_{ab}l^a n^b}, \ldots$ Tyto koeficienty proto tvoří NP skaláry a je jednoduché vidět, že jsou i GHP skaláry transformujícími se podle (1.34). Deset stupňů volnosti symetrického tenzoru derivace metriky je zakódováno ve čtyřech reálných funkcích γ_{ll}, γ_{nn}, γ_{ln}, $\gamma_{m\overline{m}}$ a ve třech komplexních funkcích γ_{lm}, γ_{nm}, γ_{mm}. Zbylé koeficienty lze vyjádřit pomocí těchto funkcí díky symetričnosti $\boldsymbol{\gamma_{ab}}$ a pomocí komplexního sdružení.

Derivací rovnice (3.1) dostaneme

$$\boldsymbol{\gamma_{ab}} = 2\left(\boldsymbol{\dot{l}_{(a}n_{b)}} + \boldsymbol{l_{(a}\dot{n}_{b)}}\right) - 2\left(\boldsymbol{\dot{m}_{(a}\overline{m}_{b)}} + \boldsymbol{m_{(a}\dot{\overline{m}}_{b)}}\right)\,, \tag{3.3}$$

kde platí $\boldsymbol{\dot{\overline{m}}_b} = \boldsymbol{\overline{\dot{m}}_b}$. 16 stupňů volnosti v perturbaci kontravariantní NP tetrády je tak zakódováno ve dvou reálných kovektorech $\boldsymbol{\dot{l}_a}$ a $\boldsymbol{\dot{n}_a}$ a v jednom komplexním kovektoru $\boldsymbol{\dot{m}_a}$.

Poznamenejme, že derivaci kovariantní NP tetrády nedostaneme jednoduše zvednutím indexu u derivace kontravariantní NP tetrády, stejně jako je tomu u derivace metriky a inverzní metriky. Jejich vztah najdeme v následující podkapitole.

Derivace kovektorů NP tetrády můžeme rozvinout do neperturbované NP tetrády jako

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\dot{l}_a} &= \dot{l}_n\boldsymbol{l_a} + \dot{l}_l\boldsymbol{n_a} - \dot{l}_{\overline{m}}\boldsymbol{m_a} - \dot{l}_m\boldsymbol{\overline{m}_a}\,,\\ \boldsymbol{\dot{n}_a} &= \dot{n}_n\boldsymbol{l_a} + \dot{n}_l\boldsymbol{n_a} - \dot{n}_{\overline{m}}\boldsymbol{m_a} - \dot{n}_m\boldsymbol{\overline{m}_a}\,,\\ \boldsymbol{\dot{m}_a} &= \dot{m}_n\boldsymbol{l_a} + \dot{m}_l\boldsymbol{n_a} - \dot{m}_{\overline{m}}\boldsymbol{m_a} - \dot{m}_m\boldsymbol{\overline{m}_a}\,,\\ \boldsymbol{\dot{\overline{m}}_a} &= \dot{\overline{m}}_n\boldsymbol{l_a} + \dot{\overline{m}}_l\boldsymbol{n_a} - \dot{\overline{m}}_{\overline{m}}\boldsymbol{m_a} - \dot{\overline{m}}_m\boldsymbol{\overline{m}_a}\,,\end{aligned} \tag{3.4}$$

kde značení koeficientů rozkladu je voleno tak, aby $\dot{l}_n = \boldsymbol{\dot{l}_a n^a}, \dot{l}_l = \boldsymbol{\dot{l}_a l^a}, \ldots$. Tyto koeficienty proto tvoří NP skaláry a je jednoduché vidět, že jsou i GHP skaláry transformujícími se podle (1.34). 16 nezávislých stupňů volnosti v perturbaci kovariantní NP tetrády (která generuje symetrickou derivaci $\boldsymbol{\gamma_{ab}}$ podle rovnice (3.3)) je zakódováno ve čtyřech reálných koeficientech $\dot{l}_l$, $\dot{l}_n$, $\dot{n}_l$, $\dot{n}_n$ a v šesti komplexních koeficientech $\dot{l}_m$, $\dot{n}_m$, $\dot{m}_l$, $\dot{m}_n$, $\dot{m}_m$, $\dot{m}_{\overline{m}}$.

Dosazením rozkladu (3.4) do rovnice (3.3) a porovnáním s rozkladem (3.2) dostaneme následující jednoznačné vyjádření nezávislých NP projekcí tenzoru $\boldsymbol{\gamma}$ pomocí NP projekcí derivací kovektorů NP tetrády

$$
\begin{aligned}
\gamma_{ll\,[2,2]} &= 2\dot{l}_l\,, & \gamma_{lm\,[2,0]} &= \dot{l}_m + \dot{m}_l\,,\\
\gamma_{nn\,[-2,-2]} &= 2\dot{n}_n\,, & \gamma_{nm\,[0,-2]} &= \dot{n}_m + \dot{m}_n\,,\\
\gamma_{ln\,[0,0]} &= \dot{l}_n + \dot{n}_l\,, & \gamma_{mm\,[2,-2]} &= 2\dot{m}_m\,,\\
\gamma_{m\overline{m}\,[0,0]} &= 2\,\mathrm{Re}(\dot{m}_{\overline{m}})\,,
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

kde Re( ) značí reálnou část a ve spodních indexech jsme zaznamenali GHP váhu. Všimněme si, že NP projekce $\boldsymbol{\gamma_{ab}}$ nezávisejí ze sady nezávislých NP projekcí perturbace NP tetrády na imaginární části $\dot{m}_{\overline{m}}$. V rovnicích (3.5) se každá z nezávislých NP projekcí perturbace NP tetrády vyskytuje nejvýše jednou, a proto je z rovnic (3.5) ihned vidět, jaké kombinace nezávislých NP projekcí perturbace NP tetrády lze získat ze zadané perturbace metriky. V tomto problému nám zůstává neurčeno šest stupňů volnosti. Těchto šest stupňů volnosti pochází ze šesti-parametrické Lorentzovy grupy transformací NP tetrády dané rovnicemi (1.20)-(1.23). Přímým výpočtem lze ověřit, že tyto transformace nemění pravou stranu rovnic (3.5), a tudíž ani NP projekce derivace metriky.

Uvažujme rotaci v $\boldsymbol{m}$-$\overline{\boldsymbol{m}}$ rovině (rovnice (1.22)) parametrizovanou reálným parametrem $\theta(\tilde{\epsilon})$, který je funkcí od polohy a od $\tilde{\epsilon}$ splňující $\theta(0) = 0$. Pak jediná netriviální NP derivace NP tetrády je rovna

$$
\dot{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{a}} = i\dot{\theta}\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{a}} \quad\Longrightarrow\quad \dot{m}_{\overline{m}} = -i\dot{\theta}\,. \tag{3.6}
$$

Tedy tato transformace mění pouze imaginární část $\dot{m}_{\overline{m}}$.

Dále uvažujme boost v $\boldsymbol{l}$-$\boldsymbol{n}$ rovině (rovnice (1.23)) daný reálným parametrem $A(\tilde{\epsilon}) > 0$, který je funkcí od polohy a od $\tilde{\epsilon}$ splňující $A(0) = 1$. Pak jediné netriviální NP derivace NP tetrády jsou rovny

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{l}}_{\boldsymbol{a}} &= \dot{A}\boldsymbol{l}_{\boldsymbol{a}} \quad\Longrightarrow\quad \dot{l}_n = \dot{A}\,,\\
\dot{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{a}} &= -\dot{A}\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{a}} \quad\Longrightarrow\quad \dot{n}_l = -\dot{A}\,.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Dostali jsme, že $\dot{l}_n + \dot{n}_l = 0$, a derivace metriky (3.5) tak zůstává nezměněna.

Nyní uvažujme nulovou rotaci kolem $\boldsymbol{l}$ (rovnice (1.20)) danou komplexním parametrem $B(\tilde{\epsilon})$, který je funkcí od polohy a od $\tilde{\epsilon}$ splňující $B(0) = 0$. Pak jediné netriviální NP derivace NP tetrády jsou rovny

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{a}} &= \dot{B}\overline{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{a}} + \dot{\overline{B}}\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{a}} \quad\Longrightarrow\quad \dot{n}_m = -\dot{B}\,,\\
\dot{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{a}} &= \dot{B}\boldsymbol{l}_{\boldsymbol{a}} \quad\Longrightarrow\quad \dot{m}_n = \dot{B}\,.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Dostali jsme, že $\dot{n}_m + \dot{m}_n = 0$, a derivace metriky (3.5) tak zůstává opět nezměněna.

Vzhledem k tomu, že se na ní budeme dále odkazovat, uvádíme zde i nulovou rotaci kolem $\boldsymbol{n}$ (rovnice (1.21)). Ta je dána komplexním parametrem $E(\tilde{\epsilon})$, který je funkcí od polohy a od $\tilde{\epsilon}$ splňující $E(0) = 0$. Pak jediné netriviální NP derivace NP tetrády jsou rovny

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{l}}_{\boldsymbol{a}} &= \dot{E}\overline{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{a}} + \dot{\overline{E}}\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{a}} &&\Longrightarrow &\dot{l}_m &= -\dot{E}\,, \\ \dot{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{a}} &= \dot{E}\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{a}} &&\Longrightarrow &\dot{m}_l &= \dot{E}\,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Dostali jsme, že $\dot{l}_m + \dot{m}_l = 0$, a derivace metriky (3.5) tak zůstává opět nezměněna.

3.2 Vztah perturbace kontravariantní a kovariantní NP tetrády

Stejně tak jako derivaci inverzní metriky nezískáme jenom zvednutím indexů derivace metriky neperturbovanou metrikou, nejsou ani derivace vektorů kontravariantní NP tetrády jednoduše získány zvednutím indexů derivací kovektorů kovariantní NP tetrády.

Obecně můžeme derivace vektorů kontravariantní NP tetrády rozvinout do NP tetrády jako

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{l}}^{\boldsymbol{a}} &= \dot{l}^n \boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}} + \dot{l}^l \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{a}} - \dot{l}^{\overline{m}} \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{a}} - \dot{l}^m \overline{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{a}} \\ \dot{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{a}} &= \dot{n}^n \boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}} + \dot{n}^l \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{a}} - \dot{n}^{\overline{m}} \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{a}} - \dot{n}^m \overline{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{a}} \\ \dot{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{a}} &= \dot{m}^n \boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}} + \dot{m}^l \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{a}} - \dot{m}^{\overline{m}} \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{a}} - \dot{m}^m \overline{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{a}} \\ \dot{\overline{\boldsymbol{m}}}^{\boldsymbol{a}} &= \dot{\overline{m}}^n \boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}} + \dot{\overline{m}}^l \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{a}} - \dot{\overline{m}}^{\overline{m}} \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{a}} - \dot{\overline{m}}^m \overline{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{a}}\,, \end{aligned} \tag{3.10}$$

kde $\dot{l}^n = \dot{\boldsymbol{l}}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{a}}, \dot{l}^l = \dot{\boldsymbol{l}}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{l}_{\boldsymbol{a}}, \ldots$. Tyto koeficienty mají podobné vlastnosti jako koeficienty výše, co se týče komplexního sdružení a počtu stupňů volnosti.

Perturbované vektory a kovektory jsou stále svázány normalizačními podmínkami (1.1), neboli

$$\Big\langle \boldsymbol{e}_i(\tilde{\epsilon}), \boldsymbol{e}^j(\tilde{\epsilon}) \Big\rangle = \boldsymbol{e}_i{}^{\boldsymbol{a}}(\tilde{\epsilon})\boldsymbol{e}^j{}_{\boldsymbol{a}}(\tilde{\epsilon}) = \text{konst.}\,, \tag{3.11}$$

kde konst. je konstanta rovná 0 nebo ± 1. Derivací této rovnice dostaneme

$$\Big\langle \dot{\boldsymbol{e}}_i, \boldsymbol{e}^j \Big\rangle + \Big\langle \boldsymbol{e}_i, \dot{\boldsymbol{e}}^j \Big\rangle = \dot{\boldsymbol{e}}_i{}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{e}^j{}_{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{e}_i{}^{\boldsymbol{a}}\dot{\boldsymbol{e}}^j{}_{\boldsymbol{a}} = 0\,. \tag{3.12}$$

Tato rovnici nám říká, jaký je vztah mezi koeficientami rozkladu derivací kontravariantní a kovariantní NP tetrády. Níže uvádíme tyto vztahy pro nezávislé projekce derivací NP tetrády,

$$\begin{aligned} \dot{l}^l &= -\dot{l}_l\,, & \dot{n}^l &= -\dot{l}_n\,, & \dot{m}^l &= -\dot{l}_m\,, \\ \dot{l}^n &= -\dot{n}_l\,, & \dot{n}^n &= -\dot{n}_n\,, & \dot{m}^n &= -\dot{n}_m\,, \\ \dot{l}^m &= -\dot{m}_l\,, & \dot{n}^m &= -\dot{m}_n\,, & \dot{m}^m &= -\dot{m}_m\,, \\ & & & & \dot{m}^{\overline{m}} &= -\dot{\overline{m}}_m\,. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Pomocí těchto vztahů můžeme vyjádřit projekce derivace metriky jako

$$\begin{aligned} \gamma_{ll[2,2]} &= -2\dot{l}^l\,, & \gamma_{lm[2,0]} &= -\dot{l}^m - \dot{m}^l\,, \\ \gamma_{nn[-2,-2]} &= -2\dot{n}^n\,, & \gamma_{nm[0,-2]} &= -\dot{n}^m - \dot{m}^n\,, \\ \gamma_{ln[0,0]} &= -\dot{l}^n - \dot{n}^l\,, & \gamma_{mm[2,-2]} &= -2\dot{m}^m\,, \\ \gamma_{m\overline{m}[0,0]} &= -2\,\mathrm{Re}(\dot{m}^{\overline{m}})\,, \end{aligned} \tag{3.14}$$

K těmto vztahům lze dojít obecně také jiným postupem. Napišme normalizační podmínky kontravariantní NP tetrády ve tvaru

$$\boldsymbol{g_{ab}}(\tilde{\epsilon})\boldsymbol{e}_i{}^{\boldsymbol{a}}(\tilde{\epsilon})\boldsymbol{e}_j{}^{\boldsymbol{b}}(\tilde{\epsilon}) = \text{konst.}\,, \tag{3.15}$$

kde konst. je konstanta rovná 0 nebo ±1. Derivací této rovnice dostaneme

$$\boldsymbol{\gamma}_{ij} = -\boldsymbol{g_{ab}}\dot{\boldsymbol{e}}_i{}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{e}_j{}^{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{g_{ab}}\boldsymbol{e}_i{}^{\boldsymbol{a}}\dot{\boldsymbol{e}}_j{}^{\boldsymbol{b}}\,. \tag{3.16}$$

Tato rovnice je v souladu s dřívějším výsledkem (3.14).

3.3 Vztah perturbace zářivých komponent Weylova tenzoru a perturbace metriky

Mezi nejvýznamější NP Weylovy skaláry patří Ψ_0 a Ψ_4, neboť představují zářivé komponenty Weylova tenzoru. V této podkapitole nalezneme vztah pro výpočet jejich derivací pomocí NP projekcí derivace metriky, a to pro perturbace na obecně nevakuových prostoročasech.

Perturbovaný NP Weylův skalár Ψ_0 je podle definice (1.13) roven

$$\Psi_0(\tilde{\epsilon}) = -\boldsymbol{C_{abcd}}(\tilde{\epsilon})\boldsymbol{l^a}(\tilde{\epsilon})\boldsymbol{m^b}(\tilde{\epsilon})\boldsymbol{l^c}(\tilde{\epsilon})\boldsymbol{m^d}(\tilde{\epsilon})\,. \tag{3.17}$$

Derivací této rovnice dostaneme

$$\dot{\Psi}_0 = -\dot{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{abcd}}\boldsymbol{l^a m^b l^c m^d} - 2\boldsymbol{C_{abcd}}\dot{\boldsymbol{l}}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{m^b l^c m^d} - 2\boldsymbol{C_{abcd}}\boldsymbol{l^a}\dot{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{l^c m^d}\,. \tag{3.18}$$

Soustřeďme se nejdříve na první člen na pravé straně této rovnice. Všimněme si, že binární symetrický operátor double-wedge definovaný rovnicí (1.12) se vzhledem k derivaci chová podle Leibnizova pravidla, neboli

$$\mathcal{L}\left(\boldsymbol{A} \mathbin{\wedge\!\!\!\wedge} \boldsymbol{B}\right) = \left(\mathcal{L}\boldsymbol{A}\right) \mathbin{\wedge\!\!\!\wedge} \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \mathbin{\wedge\!\!\!\wedge} \left(\mathcal{L}\boldsymbol{B}\right)\,. \tag{3.19}$$

Derivací rovnice (1.11) tedy dostaneme

$$\dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{abcd}} = \dot{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{abcd}} + \frac{1}{2}\left(\dot{\boldsymbol{S}} \mathbin{\wedge\!\!\!\wedge} \boldsymbol{g}\right)_{\boldsymbol{abcd}} + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{S} \mathbin{\wedge\!\!\!\wedge} \boldsymbol{\gamma}\right)_{\boldsymbol{abcd}} + \frac{1}{12}R\left(\boldsymbol{\gamma} \mathbin{\wedge\!\!\!\wedge} \boldsymbol{g}\right)_{\boldsymbol{abcd}}\,. \tag{3.20}$$

Tuto rovnici projektujeme na $\boldsymbol{l^a m^b l^c m^d}$,

$$\dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{abcd}}\boldsymbol{l^a m^b l^c m^d} = \dot{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{abcd}}\boldsymbol{l^a m^b l^c m^d} + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{S} \mathbin{\wedge\!\!\!\wedge} \boldsymbol{\gamma}\right)_{\boldsymbol{abcd}}\boldsymbol{l^a m^b l^c m^d}\,, \tag{3.21}$$

kde členy obsahující metriku $\boldsymbol{g}$ zmizely díky normalizačním podmínkám (1.1). První člen na pravé straně této rovnice (3.18) vyjádříme s užitím definice operátoru double-wedge (1.12) jako

$$\begin{aligned} -\dot{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{abcd}}\boldsymbol{l^a m^b l^c m^d} = {}& -\dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{abcd}}\boldsymbol{l^a m^b l^c m^d} \\ & +\frac{1}{2}\boldsymbol{S_{ab}}\left(\boldsymbol{l^a l^b}\gamma_{mm} - 2\boldsymbol{l^a m^b}\gamma_{lm} + \boldsymbol{m^a m^b}\gamma_{ll}\right)\,. \end{aligned} \tag{3.22}$$

S užitím definic NP Ricciho skalárů (1.15) pak jako

$$-\dot{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{abcd}}\boldsymbol{l^a m^b l^c m^d} = -\dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{abcd}}\boldsymbol{l^a m^b l^c m^d} + \Phi_{00}\gamma_{mm} - 2\Phi_{01}\gamma_{lm} + \Phi_{02}\gamma_{ll}\,. \tag{3.23}$$

Derivaci Riemannova tenzoru $\dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{abcd}}$ daného rovnicí (2.33) vypočítáme s užitím (2.31) pomocí rovnice

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{abcd}} = &-\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{dc}} + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{db}} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{bc}}\right] \\ &+\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{dc}} + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{ab}} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{ac}}\right] .\end{aligned} \tag{3.24}$$

Dále derivaci metriky rozvineme do NP tetrády podle (3.2), kovariantní derivace NP tetrády vyjádříme pomocí NP spinových koeficientů a kovariantní derivace působící na skaláry rozvineme do tetrádových derivací podle (1.7). Jedná se o přímočarý, avšak vzhledem k počtu členů zdlouhavý výpočet, který lze provést pomocí vhodného softwaru. Projektovaný výsledek na $\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{d}}$ již převedený do GHP skalárů a derivací má tvar

$$\begin{aligned}-2\dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{abcd}}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{d}} = &\left[\eth^2 - 2\overline{\tau}'\eth + \sigma\text{þ}' - \overline{\sigma}'\text{þ} + 2\left(\left(\rho' - \overline{\rho}'\right)\sigma + \overline{\tau}'^2 - \eth\overline{\tau}'\right)\right]\gamma_{ll} \\ &+2\left[-\eth\text{þ} + 2\overline{\tau}'\text{þ} + \overline{\rho}\eth - \sigma\eth' + \left(\left(\overline{\tau} - 2\tau'\right)\sigma + \kappa\overline{\rho}' - 2\overline{\rho\tau}' + \text{þ}\overline{\tau}' + \eth\overline{\rho}\right)\right]\gamma_{lm} \\ &\left[\text{þ}^2 - 2\overline{\rho}\text{þ} - \overline{\kappa}\eth + \kappa\eth' - 2\left(\sigma\overline{\sigma} - \kappa\tau' - \overline{\kappa\tau}' + \eth\overline{\kappa}\right)\right]\gamma_{mm} \\ &-2\left[\sigma\text{þ} + \kappa\eth + \left(\left(\rho - \overline{\rho}\right)\sigma - 2\kappa\overline{\tau}' + \eth\kappa\right)\right]\left(\gamma_{ln} + \gamma_{m\overline{m}}\right) + 2\kappa^2\gamma_{nn} + 2\sigma^2\overline{\gamma_{mm}} \\ &+2\left[2\sigma\eth + \left(-\kappa\overline{\sigma}' + \left(\tau - 2\overline{\tau}'\right)\sigma + \eth\sigma\right)\right]\overline{\gamma_{lm}} - 4\kappa\sigma\overline{\gamma_{nm}} \\ &+2\left[2\kappa\text{þ} + \left(\left(\rho - 2\overline{\rho}\right)\kappa - \overline{\kappa}\sigma + \text{þ}\kappa\right)\right]\gamma_{nm} .\end{aligned} \tag{3.25}$$

Nyní se zaměříme na druhý a třetí člen na pravé straně rovnice (3.18), tedy na část $\dot{\Psi}_0$ tvořenou přímo derivacemi NP tetrády. Dosazením rozkladu (3.10) dostaneme

$$\begin{aligned}&-2\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{abcd}}\dot{\boldsymbol{l}}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{d}} - 2\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{abcd}}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}}\dot{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{d}} = \\ &\quad - 2\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{abcd}}\left(\dot{l}^{n}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}} + \dot{l}^{l}\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{a}} - \dot{l}^{\overline{m}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{a}} - \dot{l}^{m}\overline{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{a}}\right)\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{d}} \\ &\quad - 2\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{abcd}}\dot{\boldsymbol{l}}^{\boldsymbol{a}}\left(\dot{m}^{n}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{b}} + \dot{m}^{l}\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{b}} - \dot{m}^{\overline{m}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{b}} - \dot{m}^{m}\overline{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{b}}\right)\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{d}} = \\ &\quad - 2\dot{l}^{n}\underbrace{\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{abcd}}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{d}}}_{-\Psi_0} - 2\dot{l}^{l}\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{abcd}}\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{d}} + 2\dot{l}^{m}\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{abcd}}\overline{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{d}} \\ &\quad - 2\dot{m}^{l}\underbrace{\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{abcd}}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{d}}}_{-\Psi_1} + 2\dot{m}^{m}\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{abcd}}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{d}} + 2\dot{m}^{\overline{m}}\underbrace{\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{abcd}}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{d}}}_{-\Psi_0} ,\end{aligned} \tag{3.26}$$

kde jsme rozpoznali definice NP Weylových skalárů (rovnice (1.13)) a rovnou nenapsali triviálně nulové členy v poslední rovnosti díky symetriím Weylova tenzoru. Zbývající členy jsou dány lineárními kombinacemi NP Weylových skalárů. Abychom je určili, vyjdeme z bezestopovosti Weylova tenzoru

$$0 = \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{abcd}}\boldsymbol{g}^{\boldsymbol{ac}} = \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{abcd}}\left(\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{c}} + \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{c}} - \overline{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{c}}\right) . \tag{3.27}$$

Projektujeme-li tuto rovnici na $\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{d}}$, dostaneme

$$0 = \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{abcd}}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{d}} + \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{abcd}}\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{d}} = 2\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{abcd}}\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{d}} . \tag{3.28}$$

Projekcí rovnice (3.27) na $\boldsymbol{l}^b\boldsymbol{m}^d$ dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \boldsymbol{C}_{abcd}\boldsymbol{n}^a\boldsymbol{l}^b\boldsymbol{l}^c\boldsymbol{m}^d - \boldsymbol{C}_{abcd}\boldsymbol{m}^a\boldsymbol{l}^b\overline{\boldsymbol{m}}^c\boldsymbol{m}^d \\ &\implies \boldsymbol{C}_{abcd}\overline{\boldsymbol{m}}^a\boldsymbol{m}^b\boldsymbol{l}^c\boldsymbol{m}^d = \boldsymbol{C}_{abcd}\boldsymbol{l}^a\boldsymbol{n}^b\boldsymbol{l}^c\boldsymbol{m}^d = -\Psi_1\,. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Projekcí rovnice (3.27) na $\boldsymbol{l}^b\boldsymbol{l}^d$ dostaneme

$$0 = -\boldsymbol{C}_{abcd}\boldsymbol{m}^a\boldsymbol{l}^b\overline{\boldsymbol{m}}^c\boldsymbol{l}^d - \boldsymbol{C}_{abcd}\overline{\boldsymbol{m}}^a\boldsymbol{l}^b\boldsymbol{m}^c\boldsymbol{l}^d = -2\boldsymbol{C}_{abcd}\boldsymbol{l}^a\overline{\boldsymbol{m}}^b\boldsymbol{l}^c\boldsymbol{m}^d\,. \tag{3.30}$$

Rovnice (3.26) tak přejde na tvar

$$-2\boldsymbol{C}_{abcd}\dot{\boldsymbol{l}}^a\boldsymbol{m}^b\boldsymbol{l}^c\boldsymbol{m}^d - 2\boldsymbol{C}_{abcd}\boldsymbol{l}^a\dot{\boldsymbol{m}}^b\boldsymbol{l}^c\boldsymbol{m}^d = 2\left(\dot{l}^n - \dot{m}^{\overline{m}}\right)\Psi_0 + 2\left(\dot{m}^l - \dot{l}^m\right)\Psi_1\,. \tag{3.31}$$

Dohromady tak s výsledky výše dostáváme vztah pro derivaci NP Weylova skaláru Ψ_0,

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_0 &= \frac{1}{2}\left[\eth^2 - 2\overline{\tau}'\eth + \sigma\text{þ}' - \overline{\sigma}'\text{þ} + 2\left(\left(\rho' - \overline{\rho}'\right)\sigma + \overline{\tau}'^2 - \eth\overline{\tau}'\right)\right]\gamma_{ll} \\ &+ \left[-\eth\text{þ} + 2\overline{\tau}'\text{þ} + \overline{\rho}\eth - \sigma\eth' + \left(\left(\overline{\tau} - 2\tau'\right)\sigma + \kappa\overline{\rho}' - 2\overline{\rho}\overline{\tau}' + \text{þ}\overline{\tau}' + \eth\overline{\rho}\right)\right]\gamma_{lm} \\ &\frac{1}{2}\left[\text{þ}^2 - 2\overline{\rho}\text{þ} - \overline{\kappa}\eth + \kappa\eth' - 2\left(\sigma\overline{\sigma} - \kappa\tau' - \overline{\kappa}\overline{\tau}' + \eth\overline{\kappa}\right)\right]\gamma_{mm} \\ &- \left[\sigma\text{þ} + \kappa\eth + \left(\left(\rho - \overline{\rho}\right)\sigma - 2\kappa\overline{\tau}' + \eth\kappa\right)\right]\left(\gamma_{ln} + \gamma_{m\overline{m}}\right) + \kappa^2\gamma_{nn} + \sigma^2\overline{\gamma_{mm}} \\ &+ \left[2\sigma\eth + \left(-\kappa\overline{\sigma}' + \left(\tau - 2\overline{\tau}'\right)\sigma + \eth\sigma\right)\right]\overline{\gamma_{lm}} - 2\kappa\sigma\overline{\gamma_{nm}} \\ &+ \left[2\kappa\text{þ} + \left(\left(\rho - 2\overline{\rho}\right)\kappa - \overline{\kappa}\sigma + \text{þ}\kappa\right)\right]\gamma_{nm} \\ &+\Phi_{00}\gamma_{mm} - 2\Phi_{01}\gamma_{lm} + \Phi_{02}\gamma_{ll} \\ &+2\left(\dot{\overline{m}}_m - \dot{n}_l\right)\Psi_0 + 2\left(\dot{m}_l - \dot{l}_m\right)\Psi_1\,, \end{aligned} \tag{3.32}$$

kde jsme použili vztahy (3.13) mezi derivacemi kovariantní a kontravariantní NP tetrády.

Působením operátorem čárka $'$ dostaneme vztah pro derivaci NP Weylova skaláru Ψ_4. Pro úsporu vypíšeme nyní pouze poslední dva členy, které nás budou dále zajímat,

$$\dot{\Psi}_4 = \cdots + 2\left(\dot{m}_{\overline{m}} - \dot{l}_n\right)\Psi_4 + 2\left(\dot{\overline{m}}_n - \dot{n}_{\overline{m}}\right)\Psi_3\,. \tag{3.33}$$

Poslední dva členy ve $\dot{\Psi}_0$ a $\dot{\Psi}_4$ jsou problematické, neboť závisejí na perturbaci NP tetrády a ne přímo na perturbaci metriky. Ukážeme, že je lze odtransformovat, avšak ne u $\dot{\Psi}_0$ a $\dot{\Psi}_4$ zároveň.

Uvažujme dále transformace jako v podkapitole 3.1, viz rovnice (3.6)-(3.9) a poznámky okolo. Tyto transformace jsou identita pro $\tilde{\epsilon} \to 0$, a proto nemění pozaďové (neperturbované) spinové koeficienty a pozaďové GHP derivace. Dále, jak bylo ukázáno v podkapitole 3.1, zachovávají NP projekce perturbace metriky, a proto tyto transformace mění pouze právě poslední dva členy ve $\dot{\Psi}_0$ a $\dot{\Psi}_4$.

Hledáme takové transformace (3.6)-(3.9), abychom vynulovali poslední dva členy v $\dot{\Psi}_4$, neboli

$$0 = \dot{m}'_{\overline{m}} - \dot{l}'_n = \dot{m}_{\overline{m}} + i\dot{\theta} - \dot{l}_n + \dot{A} \implies i\dot{\theta} + \dot{A} = \dot{m}_{\overline{m}} - \dot{l}_n\,, \tag{3.34}$$

$$0 = \dot{\overline{m}}'_n - \dot{n}'_{\overline{m}} = \dot{\overline{m}}_n - \dot{n}_{\overline{m}} + 2\dot{B} \implies 2\dot{B} = \dot{n}_{\overline{m}} - \dot{\overline{m}}_n\,. \tag{3.35}$$

Touto volbou $\dot{\theta}$, $\dot{A}$ a $\dot{B}$ jsme odtransformovali poslední dva členy v (3.33) a výsledný tvar $\dot{\Psi}_4$ tak je

$$
\begin{aligned}
\dot{\Psi}_4 = \frac{1}{2}\Big[\eth'^2 - 2\overline{\tau}\eth' + \sigma'\text{þ} - \overline{\sigma}\text{þ}' + 2\Big((\rho-\overline{\rho})\,\sigma' + \overline{\tau}^2 - \eth'\overline{\tau}\Big)\Big]\,\gamma_{nn} \\
+\left[-\eth'\text{þ}' + 2\overline{\tau}\text{þ}' + \overline{\rho}'\eth' - \sigma'\eth + \left((\overline{\tau}'-2\tau)\,\sigma' + \kappa'\overline{\rho} - 2\overline{\rho}'\overline{\tau} + \text{þ}'\overline{\tau} + \eth'\overline{\rho}'\right)\right]\overline{\gamma_{nm}} \\
+\frac{1}{2}\Big[\text{þ}'^2 - 2\overline{\rho}'\text{þ}' - \overline{\kappa}'\eth' + \kappa'\eth - 2\left(\sigma'\overline{\sigma}' - \kappa'\tau - \overline{\kappa}'\overline{\tau} + \eth'\overline{\kappa}'\right)\Big]\,\overline{\gamma_{mm}} \\
-\left[\sigma'\text{þ}' + \kappa'\eth' + \left((\rho'-\overline{\rho}')\,\sigma' - 2\kappa'\overline{\tau} + \eth'\kappa'\right)\right](\gamma_{ln} + \gamma_{m\overline{m}}) + \kappa'^2\gamma_{ll} + \sigma'^2\gamma_{mm} \\
+\left[2\sigma'\eth' + \left(-\kappa'\overline{\sigma} + (\tau' - 2\overline{\tau})\,\sigma' + \eth'\sigma'\right)\right]\gamma_{nm} - 2\kappa'\sigma'\gamma_{lm} \\
+\left[2\kappa'\text{þ}' + \left((\rho' - 2\overline{\rho}')\,\kappa' - \overline{\kappa}'\sigma' + \text{þ}'\kappa'\right)\right]\overline{\gamma_{lm}} \\
+\Phi_{22}\overline{\gamma_{mm}} - 2\overline{\Phi_{12}}\,\overline{\gamma_{nm}} + \overline{\Phi_{02}}\gamma_{nn}\,.
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

Poslední zbylou transformaci (3.9) lze využít k vynulování posledního členu ve vztahu pro výpočet $\dot{\Psi}_0$ (rovnice (3.32)),

$$
0 = \dot{m}'_l - \dot{l}'_m = \dot{m}_l - \dot{l}_m + 2\dot{E} \implies 2\dot{E} = \dot{l}_m - \dot{m}_l\,. \tag{3.37}
$$

Předposlední člen v (3.32) je už dán transformacemi (3.35),

$$
\dot{\overline{m}}'_m - \dot{n}'_l = \dot{\overline{m}}_m - \dot{n}_l + \left(i\dot{\theta} + \dot{A}\right) = \dot{\overline{m}}_m - \dot{n}_l + \dot{m}_{\overline{m}} - \dot{l}_n = \gamma_{m\overline{m}} - \gamma_{ln}\,, \tag{3.38}
$$

kde jsme rozpoznali nezávislé kombinace projekcí perturbace NP tetrády jednoznačně určující NP projekce derivace metriky. Derivace NP Weylova skaláru Ψ_0 tak přejde do tvaru

$$
\begin{aligned}
\dot{\Psi}_0 = \frac{1}{2}\Big[\eth^2 - 2\overline{\tau}'\eth + \sigma\text{þ}' - \overline{\sigma}'\text{þ} + 2\Big((\rho'-\overline{\rho}')\,\sigma + \overline{\tau}'^2 - \eth\overline{\tau}'\Big)\Big]\,\gamma_{ll} \\
+\left[-\eth\text{þ} + 2\overline{\tau}'\text{þ} + \overline{\rho}\eth - \sigma\eth' + \left((\overline{\tau} - 2\tau')\,\sigma + \kappa\overline{\rho}' - 2\overline{\rho}\overline{\tau}' + \text{þ}\overline{\tau}' + \eth\overline{\rho}\right)\right]\gamma_{lm} \\
+\frac{1}{2}\Big[\text{þ}^2 - 2\overline{\rho}\text{þ} - \overline{\kappa}\eth + \kappa\eth' - 2\left(\sigma\overline{\sigma} - \kappa\tau' - \overline{\kappa}\overline{\tau}' + \eth\overline{\kappa}\right)\Big]\,\gamma_{mm} \\
-\left[\sigma\text{þ} + \kappa\eth + \left((\rho - \overline{\rho})\,\sigma - 2\kappa\overline{\tau}' + \eth\kappa\right)\right](\gamma_{ln} + \gamma_{m\overline{m}}) + \kappa^2\gamma_{nn} + \sigma^2\overline{\gamma_{mm}} \\
+\left[2\sigma\eth + \left(-\kappa\overline{\sigma}' + (\tau - 2\overline{\tau}')\,\sigma + \eth\sigma\right)\right]\overline{\gamma_{lm}} - 2\kappa\sigma\overline{\gamma_{nm}} \\
+\left[2\kappa\text{þ} + \left((\rho - 2\overline{\rho})\,\kappa - \overline{\kappa}\sigma + \text{þ}\kappa\right)\right]\gamma_{nm} \\
+\Phi_{00}\gamma_{mm} - 2\Phi_{01}\gamma_{lm} + \Phi_{02}\gamma_{ll} \\
+2\left(\gamma_{m\overline{m}} - \gamma_{ln}\right)\Psi_0\,.
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

Pro některé výpočty může být vhodné tento tvar upravit s užitím NP Ricciho rovnice (1.17b) zapsané v GHP formalismu. Dále poznamenejme, že poslední člen na pravé straně rovnice (3.39) je roven $-\gamma\Psi_0$, kde γ je stopa derivace metriky $\boldsymbol{\gamma}$.

Transformace (podkapitola 3.1) měnící perturbované vektory NP tetrády, které jsou identita pro neperturbované vektory NP tetrády, tvoří další stupně volnosti oproti transformacím neperturbovaných vektorů NP tetrády žijících na pozaďové varietě $\mathcal{M}$. Jak již bylo zmíněno v podkapitole 1.5, NP Weylovy skaláry se pod transformacemi neperturbovaných vektorů NP tetrády (daných funkcemi B, E, θ, A) transformují podle rovnic (1.24)-(1.27). Derivace NP Weylových skalárů se však transformují podle transformací derivací vektorů NP tetrády, které jsou dány funkcemi $\dot{B}$, $\dot{E}$, $\dot{\theta}$, $\dot{A}$. Tyto transformace získáme derivacemi rovnic (1.24)-(1.27). Na rozdíl od transformací neperturbovaných vektorů NP tetrády transformace (3.6)-(3.9) navzájem komutují, a proto můžeme souhrnně psát

$$
\begin{aligned}
\dot{\Psi}_0' &= \dot{\Psi}_0 + 2\left(\dot{A} + i\dot{\theta}\right)\Psi_0 + 4\dot{E}\Psi_1\,,\\
\dot{\Psi}_1' &= \dot{\Psi}_1 + \dot{\overline{B}}\Psi_0 + \left(\dot{A} + i\dot{\theta}\right)\Psi_1 + 3\dot{E}\Psi_2\,,\\
\dot{\Psi}_2' &= \dot{\Psi}_2 + 2\dot{\overline{B}}\Psi_1 + 2\dot{E}\Psi_3\,,\\
\dot{\Psi}_3' &= \dot{\Psi}_3 + 3\dot{\overline{B}}\Psi_2 - \left(\dot{A} + i\dot{\theta}\right)\Psi_3 + \dot{E}\Psi_4\,,\\
\dot{\Psi}_4' &= \dot{\Psi}_4 + 4\dot{\overline{B}}\Psi_3 - 2\left(\dot{A} + i\dot{\theta}\right)\Psi_4\,.
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

Přesně podle těchto transformací se měnily $\dot{\Psi}_0$ a $\dot{\Psi}_4$, když jsme manipulovali s posledními dvěma členy na pravých stranách rovnic (3.32) a (3.33).

Vztahy pro výpočet derivací zářivých komponent Weylova tenzoru se značně zjednoduší, je-li pozaďový prostoročas vakuový a Petrovova typu D (viz podkapitola 5.1 dále). Potom jsou všechny NP Ricciho skaláry (1.15) a Ricciho skalár (1.16) nulové. Při vhodné volbě NP tetrády dále vymizí

$$
\begin{gathered}
\Psi_0 = 0\,,\quad \Psi_1 = 0\,,\quad \Psi_3 = 0\,,\quad \Psi_4 = 0\,,\\
\kappa = 0\,,\quad \sigma = 0\,,\quad \kappa' = 0\,,\quad \sigma' = 0\,.
\end{gathered}
\tag{3.41}
$$

Z rovnic (3.36) a (3.39) pak dostáváme

$$
\begin{aligned}
\dot{\Psi}_4 = \frac{1}{2}\left[\eth'^2 - 2\overline{\tau}\eth' + 2\left(\overline{\tau}^2 - \eth'\overline{\tau}\right)\right]\gamma_{nn} + \frac{1}{2}\left[\text{þ}'^2 - 2\overline{\rho}'\text{þ}'\right]\gamma_{\overline{m}\overline{m}}\\
+ \left[-\eth'\text{þ}' + 2\overline{\tau}\text{þ}' + \overline{\rho}'\eth' + \left(-2\overline{\rho}'\overline{\tau} + \text{þ}'\overline{\tau} + \eth'\overline{\rho}'\right)\right]\gamma_{n\overline{m}}\,,
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\Psi}_0 = \frac{1}{2}\left[\eth^2 - 2\overline{\tau}'\eth + 2\left(\overline{\tau}'^2 - \eth\overline{\tau}'\right)\right]\gamma_{ll} + \frac{1}{2}\left[\text{þ}^2 - 2\overline{\rho}\text{þ}\right]\gamma_{mm}\\
+ \left[-\eth\text{þ} + 2\overline{\tau}'\text{þ} + \overline{\rho}\eth + \left(-2\overline{\rho}\overline{\tau}' + \text{þ}\overline{\tau}' + \eth\overline{\rho}\right)\right]\gamma_{lm}\,.
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

Poznamenejme, že tyto tvary jsou již nezávislé na transformační volnosti derivací vektorů NP tetrády, což je v souladu s (3.40). Skaláry $\dot{\Psi}_0$ a $\dot{\Psi}_4$ jsou tak zcela invariantní k volbě kalibračního vektoru a k transformaci NP tetrády a tvoří fyzikálně měřitelné veličiny.

4. Stacionární axiálně symetrické perturbace

4.1 Weyl-Lewis-Papapetrou metrika

Obecný tvar metriky popisující stacionární axisymetrické prostoročasy je dán Weyl-Lewis-Papapetrou (WLP) metrikou (Weyl, 1917) ve Weylových souřadnicích (t, ρ, z, ϕ),

$$\boldsymbol{g} = \mathrm{e}^{2\psi} \left(\mathbf{d}t - \Omega\, \mathbf{d}\phi\right)^2 - \mathrm{e}^{2(\gamma-\psi)} \left(\mathbf{d}\rho^2 + \mathbf{d}z^2\right) - \rho^2 \mathrm{e}^{-2\psi}\, \mathbf{d}\phi^2 \,, \tag{4.1}$$

kde ψ, Ω a γ jsou funkce ρ a z. Podrobněji viz např. Stephani a kol. (2003, kapitola 20). Uvažujme, že perturbace tohoto prostoročasu zachovávají jeho symetrie, neboli perturbovaný prostoročas lze zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{g}(\tilde{\epsilon}) = \mathrm{e}^{2\psi(\tilde{\epsilon})} \left(\mathbf{d}t - \Omega(\tilde{\epsilon})\, \mathbf{d}\phi\right)^2 - \mathrm{e}^{2(\gamma(\tilde{\epsilon})-\psi(\tilde{\epsilon}))} \left(\mathbf{d}\rho^2 + \mathbf{d}z^2\right) - \rho^2 \mathrm{e}^{-2\psi(\tilde{\epsilon})}\, \mathbf{d}\phi^2 \,, \tag{4.2}$$

kde $\psi(\tilde{\epsilon})$, $\Omega(\tilde{\epsilon})$ a $\gamma(\tilde{\epsilon})$ jsou stále funkce od ρ a z. Derivací této metriky pak dostaneme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma} = {} & 2\mathrm{e}^{2\psi}\dot{\psi}\, \mathbf{d}t^2 - 2\mathrm{e}^{2\psi} \left(2\Omega\dot{\psi} + \dot{\Omega}\right) \mathbf{d}t\mathbf{d}\phi - 2\mathrm{e}^{2(\gamma-\psi)} \left(\dot{\gamma} - \dot{\psi}\right) \left(\mathbf{d}\rho^2 + \mathbf{d}z^2\right) \\ & + 2\left[\rho^2 \mathrm{e}^{-2\psi}\dot{\psi} + \mathrm{e}^{2\psi}\Omega\left(\Omega\dot{\psi} + \dot{\Omega}\right)\right] \mathbf{d}\phi^2 \,,\end{aligned} \tag{4.3}$$

kde $\dot{\psi}$, $\dot{\Omega}$ a $\dot{\gamma}$ jsou funkce od ρ a z.

Jak již bylo zmíněno, není rovnice (4.2) rigorózně správná. Metrika $\boldsymbol{g}(\tilde{\epsilon})$ totiž žije na perturbované varietě v bodě $\mu_{\tilde{\epsilon}}(x)$, kde $\mu_{\tilde{\epsilon}}$ je implicitně předpokládaný tok, a pod kovektorovou bází $(\mathbf{d}t, \dots)$ se zde rozumí push-forward kovektorové báze $(\mu_{\tilde{\epsilon}*}(\mathbf{d}t(x)), \dots)$. Z diferenciální geometrie víme, že push-forward a pull-back komutují s vnější derivací, a proto např. $\mu_{\tilde{\epsilon}*}(\mathbf{d}t(x)) = \mathbf{d}(\mu_{\tilde{\epsilon}*}(t(x)))$. Za souřadnice (jako funkce polohy) (t, ρ, z, ϕ) v (4.2) se myslí souřadnice $(\mu_{\tilde{\epsilon}*}t, \mu_{\tilde{\epsilon}*}\rho, \mu_{\tilde{\epsilon}*}z, \mu_{\tilde{\epsilon}*}\phi)$.

4.2 Kerrův prostoročas

Kerrova černá díra (Kerr, 1963) popisuje nenabitou rotující černou díru a je ve WLP metrice (4.1) dána funkcemi

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{2}\ln\left[\frac{(R_+ + R_-)^2 - 4M^2 + \frac{a^2}{\sigma^2}(R_+ - R_-)^2}{(R_+ + R_- + 2M)^2 + \frac{a^2}{\sigma^2}(R_+ - R_-)^2}\right], \\ \gamma &= \frac{1}{2}\ln\left[\frac{(R_+ + R_-)^2 - 4M^2 + \frac{a^2}{\sigma^2}(R_+ - R_-)^2}{4R_+R_-}\right], \\ \Omega &= -\frac{Ma}{\sigma^2}\frac{(R_+ + R_- + 2M)\left((R_+ + R_-)^2 - 4\sigma^2\right)}{(R_+ + R_-)^2 - 4M^2 + \frac{a^2}{\sigma^2}(R_+ - R_-)^2},\end{aligned} \tag{4.4}$$

kde

$$R_\pm = \sqrt{\rho^2 + (z \pm \sigma)^2}\,, \quad \sigma = \sqrt{M^2 - a^2}\,, \tag{4.5}$$

M je hmotnost černé díry a a je její specifický moment hybnosti (Čížek, 2017). Přejdeme-li do Boyerových–Lindquistových souřadnic (t, r, θ, ϕ) daných transformacemi

$$\rho = \sqrt{\Delta}\sin\theta\,, \quad z = (r - M)\cos\theta\,, \tag{4.6}$$

kde $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$,[1] nabude metrika (4.1) standardního tvaru

$$\boldsymbol{g} = \frac{\Delta}{\Sigma}\left(\mathbf{d}t - a\sin^2\theta\,\mathbf{d}\phi\right)^2 - \frac{\Sigma}{\Delta}\,\mathbf{d}r^2 - \Sigma\,\mathbf{d}\theta^2 - \frac{\sin^2\theta}{\Sigma}\left(a\,\mathbf{d}t - \left(r^2 + a^2\right)\mathbf{d}\phi\right)^2\,, \tag{4.7}$$

kde $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$.

Za nulovou NP tetrádu volíme Kinnersleyho tetrádu

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{l} &= \frac{1}{\sqrt{2}\,\Delta}\left[\left(r^2 + a^2\right)\boldsymbol{\partial_t} + \Delta\,\boldsymbol{\partial_r} + a\,\boldsymbol{\partial_\phi}\right]\,,\\
\boldsymbol{n} &= \frac{1}{\sqrt{2}\,\Sigma}\left[\left(r^2 + a^2\right)\boldsymbol{\partial_t} - \Delta\,\boldsymbol{\partial_r} + a\,\boldsymbol{\partial_\phi}\right]\,,\\
\boldsymbol{m} &= \frac{1}{\sqrt{2}\,(r + ia\cos\theta)}\left(ia\sin\theta\,\boldsymbol{\partial_t} + \boldsymbol{\partial_\theta} + i\csc\theta\,\boldsymbol{\partial_\phi}\right).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Potom nenulové NP spinové koeficienty jsou

$$\begin{aligned}
\tau' &= \frac{-i}{\sqrt{2}}\frac{a\sin\theta}{(r - ia\cos\theta)^2}\,, & \varrho' &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Delta}{\Sigma\,(r - ia\cos\theta)}\,,\\
\tau &= \frac{-i}{\sqrt{2}}\frac{a\sin\theta}{\Sigma}\,, & \varrho &= \frac{-1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(r - ia\cos\theta)}\,,\\
\epsilon' &= \varrho' - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{r - M}{\Sigma}\,, & \beta &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\cot\theta}{(r + ia\cos\theta)}\,,\\
\beta' &= \tau' + \bar{\beta}\,,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

a jediný nenulový NP Weylův skalár je

$$\Psi_2 = -\frac{M}{(r - ia\cos\theta)^3}\,. \tag{4.10}$$

V Boyerových–Lindquistových souřadnicích mají funkce (4.4) tvar

$$\begin{aligned}
\psi &= \frac{1}{2}\ln\left[\frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{\Sigma}\right]\,,\\
\gamma &= \frac{1}{2}\ln\left[\frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{\Delta + (M^2 - a^2)\sin^2\theta}\right]\,,\\
\Omega &= -\frac{2Mra\sin^2\theta}{\Delta - a^2\sin^2\theta}\,,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Dosazením těchto funkcí do derivace WLP metriky (4.2) získáme stacionární axi-

[1] Symbol Δ již značil NP derivaci podél vektoru $\boldsymbol{n}$, čtenáři by však mělo být podle kontextu jasné, jakého významu Δ nabývá.

symetrické perturbace Kerrovy černé díry ve tvaru

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma} = \frac{2\left(\Delta - a^2\sin^2\theta\right)}{\Sigma}\,\dot{\psi}\,\mathbf{d}t^2 - \frac{2\left(\Delta + a^2\sin^2\theta\right)}{\Sigma}\left(\frac{4Mra\sin^2\theta}{\Delta - a^2\sin^2\theta}\,\dot{\psi} - \dot{\Omega}\right)\mathbf{d}t\mathbf{d}\phi \\ -\frac{2\sin^2\theta}{\Sigma}\left[2Mra\,\dot{\Omega} + \frac{4M^2r^2a^2\sin^2\theta + \Delta\Sigma^2}{\Delta - a^2\sin^2\theta}\,\dot{\psi}\right]\mathbf{d}\phi^2 \\ +\frac{2\Sigma}{\Delta + (M^2 - a^2)\sin^2}\left(\dot{\psi} - \dot{\gamma}\right)\left(\mathbf{d}\rho^2 + \mathbf{d}z^2\right)\,,\end{aligned} \tag{4.12}$$

kde platí

$$\Delta - a^2\sin^2\theta = \Sigma - 2Mr\,. \tag{4.13}$$

4.3 Perturbace NP Weylova skaláru

Nyní se zaměříme na výpočet $\dot{\Psi}_4$ pro stacionární axisymetrické perturbace Kerrovy černé díry, která je zadaná funkcemi $\dot{\psi}$, $\dot{\Omega}$ a $\dot{\gamma}$. Protože je Kerrův prostoročas typu D, stačí nám podle rovnice (3.42) znát pouze 3 různé projekce derivace metriky $\boldsymbol{\gamma}$, a to γ_{nn}, $\gamma_{n\overline{m}}$ a $\gamma_{\overline{m}\overline{m}}$. Pro výpočet potřebujeme znát transformaci mezi Weylovou souřadnicovou bází a NP tetrádou, kterou získáme z transformace mezi Boyerovou-Lindquistovou souřadnicovou bází a NP tetrádou (rovnice (4.8)) a ze souřadnicové transformace (4.6). Hledaná transformace má tvar

$$\begin{aligned}\boldsymbol{l} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{(r^2 + a^2)}{\Delta}\,\boldsymbol{\partial_t} + \frac{(r - M)\sin\theta}{\sqrt{\Delta}}\,\boldsymbol{\partial_\rho} + \cos\theta\,\boldsymbol{\partial_z} + \frac{a}{\Delta}\,\boldsymbol{\partial_\phi}\right]\,,\\ \boldsymbol{n} &= \frac{1}{\sqrt{2}\,\Sigma}\left[\left(r^2 + a^2\right)\,\boldsymbol{\partial_t} - \sqrt{\Delta}\,(r - M)\sin\theta\,\boldsymbol{\partial_\rho} + \Delta\cos\theta\,\boldsymbol{\partial_z} + a\,\boldsymbol{\partial_\phi}\right]\,,\\ \boldsymbol{m} &= \frac{1}{\sqrt{2}\,(r + ia\cos\theta)}\left(ia\sin\theta\,\boldsymbol{\partial_t} + \sqrt{\Delta}\cos\theta\,\boldsymbol{\partial_\rho} - (r - M)\sin\theta\,\boldsymbol{\partial_z} + i\csc\theta\,\boldsymbol{\partial_\phi}\right).\end{aligned} \tag{4.14}$$

Projekcí derivace metriky (4.12) na NP tetrádu (4.14) získáme hledané projekce,

$$\begin{aligned}\gamma_{nn} &= \frac{\Delta}{\Sigma}\left(-\dot{\gamma} + 2\Delta\,\dot{\Psi} - \frac{a\,\dot{\Omega}}{\Sigma}\right)\,,\\ \gamma_{n\overline{m}} &= \frac{1}{(r - ia\cos\theta)}\left(2\Delta ia\sin\theta\,\dot{\Psi} + \frac{i\left(\Delta + a^2\sin^2\theta\right)}{2\Sigma\sin\theta}\,\dot{\Omega}\right)\\ \gamma_{\overline{m}\overline{m}} &= \frac{1}{(r - ia\cos\theta)}\left(-\left(r + ia\cos\theta\right)\left(\dot{\gamma} + 2a^2\sin^2\theta\,\dot{\Psi}\right) + \frac{a\,\dot{\Omega}}{(r - ia\cos\theta)}\right)\,,\end{aligned} \tag{4.15}$$

kde jsme zavedli novou funkci

$$\Psi \equiv \frac{\psi}{\Delta - a^2\sin^2\theta}\,. \tag{4.16}$$

Přímý vztah pro výpočet $\dot{\Psi}_4$ získáme dosazením (4.15) do rovnice (3.42) (s užitím NP spinových koeficientů ve tvaru (4.9) a NP tetrády ve tvaru (4.8)). Dlouhý výpočet pak vede ke vztahu

$$
\begin{aligned}
\dot{\Psi}_4 = & -\frac{\Delta}{2\left(r - ia\cos\theta\right)^2 \Sigma}\left[\Delta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{2\Delta}{\left(r - ia\cos\theta\right)}\frac{\partial}{\partial r}\right. \\
& \left. + \frac{ia\left(1 + \sin^2\theta\right) - r\cos\theta}{\left(r - ia\cos\theta\right)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\dot{\gamma} \\
& + \frac{1}{\left(r - ia\cos\theta\right)\Sigma^2}\left[\frac{a\Delta}{2\left(r - ia\cos\theta\right)}\left(\Delta\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\right. \\
& + \frac{i\Delta\left(\Delta + a^2\sin^2\theta\right)}{2\left(r - ia\cos\theta\right)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} + \frac{\left(a\cos 2\theta - ir\cos\theta\right)\Delta^2}{\Sigma\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial r} \\
& + \left(\frac{\Big(\left(r - 2M\right)a\cos\theta + i\left(2r\left(r - M\right) + a^2\left(1 - 3\sin^2\theta\right)\right)\Big)\Delta}{2\Sigma}\right. \\
& \left.\left. - \frac{i\left(r - M\right)\left(\Delta + a^2\sin^2\theta\right)}{\left(r - ia\cos\theta\right)}\right)\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\dot{\Omega} \\
& - \frac{\Delta^2}{\Sigma}\left[\frac{1}{\left(r - ia\cos\theta\right)^2}\left(a^2\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right) + \frac{2ia\sin\theta}{\left(r - ia\cos\theta\right)^2}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\right. \\
& \left. + \frac{2a^2\sin^2\theta}{\left(r - ia\cos\theta\right)\Sigma}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{ia\left(1 + \sin^2\theta\right) + r\cos\theta}{\left(r - ia\cos\theta\right)\Sigma\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{4a^2\sin^2\theta}{\Sigma^2}\right]\dot{\Psi}\,,
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

kde na funkce $\dot{\Psi}$, $\dot{\Omega}$ a $\dot{\gamma}$ nahlížíme jako na funkce od r a θ díky transformaci (4.6). Tento vzorec se značně zjednoduší Pro Schwarzschildovu černou díru v limitě $a \to 0$,

$$
\begin{aligned}
\dot{\Psi}_4 = \frac{\Delta}{r^4}\Bigg\{ & \left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\dot{\Psi} + \frac{i\Delta}{2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} - 2\cot\theta\right]\dot{\Omega} \\
& - \frac{1}{2}\left[\Delta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{2\Delta}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \tan\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\dot{\gamma}\Bigg\}\,,
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

kde $\Delta = r\left(r - 2M\right)$. V této limitě do reálné části $\dot{\Psi}_4$ přispívají členy s $\dot{\Psi}$ a $\dot{\gamma}$ a do ryze imaginární části člen s $\dot{\Omega}$. Pro výpočet GHP skaláru $\dot{\Psi}_0$ lze využít jednoduchého vztahu mezi $\dot{\Psi}_0$ a $\dot{\Psi}_4$, který bude odvozen v podkapitole 5.4 (rovnice (5.21)).

S užitím transformace (4.6) lze vyjádřit derivaci metriky (4.12) v Boyerově-Lindquistově souřadnicové bázi jako

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma} = & \frac{2\left(\Delta - a^2\sin^2\theta\right)}{\Sigma}\dot{\psi}\,\mathbf{d}t^2 - \frac{2\left(\Delta + a^2\sin^2\theta\right)}{\Sigma}\left(\frac{4Mra\sin^2\theta}{\Delta - a^2\sin^2\theta}\dot{\psi} - \dot{\Omega}\right)\mathbf{d}t\mathbf{d}\phi \\
& - \frac{2\sin^2\theta}{\Sigma}\left[2Mra\,\dot{\Omega} + \frac{4M^2r^2a^2\sin^2\theta + \Delta\Sigma^2}{\Delta - a^2\sin^2\theta}\dot{\psi}\right]\mathbf{d}\phi^2 \\
& + 2\Sigma\left(\dot{\psi} - \dot{\gamma}\right)\left(\frac{\mathbf{d}r^2}{\Delta} + \mathbf{d}\theta^2\right)\,.
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

Pro další výpočty bude užitečný i její zápis ve tvaru

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\gamma} = \\
&\frac{2}{\Sigma}\left[\frac{\Delta + a^2\sin^2\theta}{\Delta - a^2\sin^2\theta}\,\dot{\psi} - \frac{a\dot{\Omega}}{\Sigma}\right]\left[\Delta\left(\mathbf{d}t - a\sin^2\theta\,\mathbf{d}\phi\right)^2 + \sin^2\theta\left(a\,\mathbf{d}t - \left(r^2 + a^2\right)\mathbf{d}\phi\right)^2\right] \\
&+\frac{2}{\Sigma}\left[-\frac{4\Delta a\sin^2\theta}{\Delta - a^2\sin^2\theta}\dot{\psi} + \frac{\Delta + a^2\sin^2\theta}{\Sigma}\dot{\Omega}\right]\left(\mathbf{d}t - a\sin^2\theta\,\mathbf{d}\phi\right)\left(a\,\mathbf{d}t - \left(r^2 + a^2\right)\mathbf{d}\phi\right) \\
&\qquad\qquad - 2\Sigma\left(\dot{\gamma} - \dot{\psi}\right)\left[\frac{\mathbf{d}r^2}{\Delta} + \mathbf{d}\theta^2\right]. \qquad (4.20)
\end{aligned}
$$

5. Perturbace v řeči Debyeova potenciálu

5.1 Prostoročasy typu D a Debyeův potenciál

V této kapitole budeme pracovat pouze s prostoročasy typu D. Jedná se o algebraicky speciální prostoročasy s dvěma hlavními nulovými směry Weylova tenzoru, které mají dvojnásobnou multiplicitu. Hlavní vektor Weylova tenzoru je vektor splňující

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{abc}[\boldsymbol{d}}\boldsymbol{l}_{\boldsymbol{e}]}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{c}} = 0\,. \tag{5.1}$$

Zvolíme-li tyto dva hlavní nulové směry jako vektory $\boldsymbol{l}$ a $\boldsymbol{n}$ NP tetrády, následující skaláry vymizí

$$\begin{aligned} \Psi_0 = 0\,, \quad \Psi_1 &= 0\,, \quad \Psi_3 = 0\,, \quad \Psi_4 = 0\,, \\ \kappa = 0\,, \quad \sigma &= 0\,, \quad \kappa' = 0\,, \quad \sigma' = 0\,. \end{aligned} \tag{5.2}$$

To vyplývá z Goldbergova-Sachsova teorému (Goldberg, J. N. and Sachs, R. K., 1962).

Na prostoročasech typu D lze zavést komplexní funkci Debyeův potenciál, který kóduje gravitační perturbace, viz Cohen a Kegeles (1974) a Stewart (1979). Jeho zavedení spočívá v tom, že na prostoročasech typu D je ve spinorovém formalismu Hertzův potenciál χ_{ABCD} úplně degenerovaný a lze ho zapsat ve tvaru

$$\chi_{ABCD} = \hat{\chi}\iota_A\iota_B\iota_C\iota_D\,, \tag{5.3}$$

kde ι_A a o_B tvoří spinorovou bázi[1] adaptovanou na symetrie Weylova spinoru. Neboli na prostoročasech typu D lze najít takové nulové spinory ι_A a o_B, pomocí kterých má Weylův spinor tvar

$$\Psi_{ABCD} \propto o_{(A}o_B\iota_C\iota_{D)}\,. \tag{5.4}$$

Komplexní funkce $\hat{\chi}$ je onen Debyeův potenciál, který je GHP skalárem váhy [4,0]. Za pomocí operátoru čárka je vidět, že lze zavést i druhý Debyeův potenciál $\check{\chi}$, který je GHP skalárem váhy [−4,0]. Pomocí něho je pak Hertzův spinor dán jako

$$\chi_{ABCD} = \check{\chi}o_Ao_Bo_Co_D\,. \tag{5.5}$$

Debyeův potenciál $\hat{\chi}$ splňující tzv. Debyeovu rovnici

$$\left[(þ - \bar{\varrho})\,(þ' + 3\varrho') - (ð - \bar{\tau}')\,(ð' + 3\tau') - 3\Psi_2\right]\hat{\chi}_{[4,0]} = 0 \tag{5.6}$$

generuje vakuové perturbace, kde explicitní tvar metriky bude uveden dále. Podobně Debyeův potenciál $\check{\chi}$ splňuje čárkovanou verzi rovnice (5.6), neboli

$$\left[(þ' - \bar{\varrho}')\,(þ + 3\varrho) - (ð' - \bar{\tau})\,(ð + 3\tau) - 3\Psi_2\right]\check{\chi}_{[-4,0]} = 0\,. \tag{5.7}$$

[1]Spinorová báze je tvořena spinory o_A, ι_A splňujícími $o_A\iota^A = 1$, $o_Ao^A = 0$, $\iota_A\iota^A = 0$.

5.2 Ingoing radiation gauge

Pokud je $\hat{\chi}$ řešením Debyeovy rovnice (5.6) a pokud vektory $\boldsymbol{l}$ a $\boldsymbol{n}$ NP tetrády směřují do hlavních nulových směrů prostoročasu Petrovova typu D, řeší derivace metriky $\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{i}}$ linearizované vakuové Einsteinovy rovnice (2.37), kde

$$\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{i}\boldsymbol{ab}} = \left(X_{\mathrm{i}} + \overline{X_{\mathrm{i}}}\right) \boldsymbol{n_a n_b} + Y_{\mathrm{i}} \boldsymbol{m_a m_b} + \overline{Y_{\mathrm{i}}}\, \boldsymbol{\overline{m}_a \overline{m}_b} - 2Z_{\mathrm{i}} \boldsymbol{n_{(a} m_{b)}} - 2\overline{Z_{\mathrm{i}}}\, \boldsymbol{n_{(a} \overline{m}_{b)}} \tag{5.8}$$

a NP projekce $\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{i}}$ jsou GHP skaláry dané Debyeovým potenciálem jako

$$X_{\mathrm{i}} = \left(\eth'^2 + 2\tau'\eth'\right)\hat{\chi}\,, \quad Y_{\mathrm{i}} = \left(þ'^2 + 2\overline{\varrho}'þ'\right)\overline{\hat{\chi}}\,, \quad Z_{\mathrm{i}} = \left(þ'\eth + (\tau + \overline{\tau}')\,þ' + \overline{\varrho}'\eth\right)\overline{\hat{\chi}}\,. \tag{5.9}$$

Derivace metriky (5.8) splňuje kalibraci $\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{i}\boldsymbol{ab}}\boldsymbol{n^b} = 0$ a $\gamma_{\mathrm{i}} \equiv \boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{i}\boldsymbol{a}}{}^{\boldsymbol{a}} = 0$ (viz Deadman a Stewart, 2011), která se anglicky nazývá ingoing radiation gauge (odtud index i v $\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{i}}$). Za předpokladu splnění první kalibrační podmínky, je druhá z nich $\gamma_{\mathrm{i}} = 0$ vyjádřena jako $\gamma_{\mathrm{i}m\overline{m}} = 0$.

Zvolíme-li transformaci derivace NP tetrády takovou, že

$$\dot{n}_l = 0\,, \quad \dot{m}_l = 0\,, \quad \dot{m}_n = 0\,, \tag{5.10}$$

lze s užitím vztahů (3.5) derivaci metriky (5.8) vyjádřit pomocí derivace kovariantní NP tetrády ve tvaru

$$\dot{\boldsymbol{l}}_{\boldsymbol{a}} = \frac{1}{2}\left(X_{\mathrm{i}} + \overline{X_{\mathrm{i}}}\right)\boldsymbol{n_a} - Z_{\mathrm{i}}\boldsymbol{m_a} - \overline{Z_{\mathrm{i}}}\,\boldsymbol{\overline{m}_a}\,, \quad \dot{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{a}} = 0\,, \quad \dot{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{a}} = -\frac{1}{2}\overline{Y_{\mathrm{i}}}\,\boldsymbol{\overline{m}_a}\,. \tag{5.11}$$

S užitím vztahů (3.13) je pak derivace kontravariantní NP tetrády dána vztahy

$$\dot{\boldsymbol{l}}^{\boldsymbol{a}} = -\frac{1}{2}\left(X_{\mathrm{i}} + \overline{X_{\mathrm{i}}}\right)\boldsymbol{n^a}\,, \quad \dot{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{a}} = 0\,, \quad \dot{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{a}} = -\overline{Z_{\mathrm{i}}}\,\boldsymbol{n^a} + \frac{1}{2}\overline{Y_{\mathrm{i}}}\,\boldsymbol{\overline{m}^a}\,. \tag{5.12}$$

Zářivé komponenty Weylova tenzoru jsou dány čtvrtými derivacemi Debyeova potenciálu jako

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_0 &= \frac{1}{2}\eth^4\overline{\hat{\chi}} + \frac{3}{2}\Psi_2\left(-\varrho'þ + \varrho þ' + \tau'\eth - \tau\eth' + 2\Psi_2\right)\hat{\chi}\,, \\ \dot{\Psi}_4 &= \frac{1}{2}þ'^4\overline{\hat{\chi}}\,. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Další způsob, jak dojít ke vztahu pro $\dot{\Psi}_4$ pomocí Debyeova potenciálu, je dosadit do námi odvozeného vztahu (3.42) NP projekce metriky dané rovnicí (5.8). S užitím NP Ricciho rovnice (1.17c) jsme ověřili, že dostaneme konzistentně (5.13).

5.3 Outgoing radiation gauge

Analogicky jako s Debyeovým potenciálem $\hat{\chi}$ lze postupovat i s Debyeovým potenciálem $\check{\chi}$, který je čárkovanou verzí $\hat{\chi}$. Pro úplnost a možnost další reference uvádíme základní rovnice i pro tento potenciál.

Pokud je $\check{\chi}$ řešením Debyeovy rovnice (5.7) a pokud vektory $\boldsymbol{l}$ a $\boldsymbol{n}$ NP tetrády směřují do hlavních nulových směrů prostoročasu Petrovova typu D, řeší derivace metriky $\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{o}}$ linearizované vakuové Einsteinovy rovnice (2.37), kde

$$\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{o}\boldsymbol{ab}} = \left(X_{\mathrm{o}} + \overline{X_{\mathrm{o}}}\right)\boldsymbol{l_a l_b} + Y_{\mathrm{o}}\boldsymbol{\overline{m}_a \overline{m}_b} + \overline{Y_{\mathrm{o}}}\,\boldsymbol{m_a m_b} - 2Z_{\mathrm{o}}\boldsymbol{l_{(a}\overline{m}_{b)}} - 2\overline{Z_{\mathrm{o}}}\,\boldsymbol{l_{(a} m_{b)}} \tag{5.14}$$

a NP projekce $\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{o}}$ jsou GHP skaláry dané Debyeovým potenciálem jako

$$X_{\mathrm{o}} = \left(\eth^2 + 2\tau\eth\right)\check{\chi}\,, \quad Y_{\mathrm{o}} = \left(\text{þ}^2 + 2\bar{\varrho}\text{þ}\right)\bar{\check{\chi}}\,, \quad Z_{\mathrm{o}} = \left(\text{þ}\eth' + (\tau + \bar{\tau}')\,\text{þ} + \bar{\varrho}\eth'\right)\bar{\check{\chi}}\,. \tag{5.15}$$

Metrika (5.14) splňuje kalibraci $\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{o}\boldsymbol{ab}}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{b}} = 0$ a $\gamma_{\mathrm{o}} \equiv \boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{o}\boldsymbol{a}}{}^{\boldsymbol{a}} = 0$, která se anglicky nazývá outgoing radiation gauge (odtud index o v $\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{o}}$).

Zářivé komponenty Weylova tenzoru jsou dány čtvrtými derivacemi Debyeova potenciálu jako

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_0 &= \frac{1}{2}\text{þ}^4\bar{\check{\chi}}\,, \\ \dot{\Psi}_4 &= \frac{1}{2}\eth'^4\bar{\check{\chi}} + \frac{3}{2}\Psi_2\left(\varrho'\text{þ} - \varrho\text{þ}' - \tau'\eth + \tau\eth' + 2\Psi_2\right)\check{\chi}\,. \end{aligned} \tag{5.16}$$

5.4 Stacionární axiálně symetrické perturbace

Dále budeme jako pozaďový vakuový prostoročas typu D uvažovat Kerrův prostoročas (viz podkapitola 4.2). Debyeův potenciál $\check{\chi}$ závislý pouze na souřadnicích r, θ generující stacionární axisymetrické perturbace musí splňovat Debyeovu rovnici (5.7), která má na Kerrově prostoročase tvar

$$\left[\Delta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - 2\,(r - M)\,\frac{\partial}{\partial r} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + 2\left(1 - 2\csc^2\theta\right)\right]\check{\chi} = 0\,. \tag{5.17}$$

Jestliže Debyeův potenciál $\hat{\chi}$ závislý pouze na souřadnicích r, θ splňuje

$$\hat{\chi}(r,\theta) = \frac{(r - ia\cos\theta)^4}{\Delta^2}\,\check{\chi}(r,\theta)\,, \tag{5.18}$$

potom Debyeova rovnice (5.6) na Kerrově prostoročase (jejíž explicitní tvar zde neuvádíme) vede na Debyeovu rovnici (5.17).

Debyeův potenciál $\check{\chi}(r,\theta)$ generuje s užitím rovnice (5.16) na Kerrově prostoročase $\dot{\Psi}_0$ ve tvaru

$$\dot{\Psi}_0 = -\frac{1}{8}\frac{\partial^4}{\partial r^4}\bar{\check{\chi}}\,. \tag{5.19}$$

Splňuje-li Debyeův potenciál $\hat{\chi}$ vztah (5.18), pak podle rovnice (5.13) na Kerrově prostoročase generuje $\dot{\Psi}_0$ opět ve tvaru (5.19), použijeme-li nejdříve dvakrát derivovanou rovnici (5.17) podle θ, a poté dvakrát derivovanou rovnici (5.17) podle r, abychom přešli od čtvrté derivace Debyeova potenciálu $\check{\chi}$ podle θ k jeho čtvrté derivaci podle r.

Splňuje-li Debyeův potenciál $\hat{\chi}$ vztah (5.18), pak podle rovnice (5.13) na Kerrově prostoročase generuje $\dot{\Psi}_4$ ve tvaru

$$\dot{\Psi}_4 = -\frac{1}{8}\frac{\Delta^2}{(r - ia\cos\theta)^4}\frac{\partial^4}{\partial r^4}\bar{\check{\chi}}\,. \tag{5.20}$$

Debyeův potenciál $\check{\chi}(r,\theta)$ na Kerrově prostoročase generuje s užitím rovnice (5.16) $\dot{\Psi}_4$ opět ve tvaru (5.20), použijeme-li nejdříve dvakrát derivovanou rovnici (5.17) podle θ, a poté dvakrát derivovanou rovnici (5.17) podle r, abychom stejným postupem jako dříve přešli od čtvrté derivace Debyeova potenciálu $\check{\chi}$ k jeho čtvrté derivaci podle r.

Vidíme tak, že Debyeův potenciál $\check{\chi}(r,\theta)$ a $\hat{\chi}$ daný vztahem (5.18) vedou na stejnou perturbaci $\dot{\Psi}_0$ a $\dot{\Psi}_4$. Zároveň jsme ukázali, že pro stacionární axiálně symetrické perturbace existuje jednoduchý vztah mezi derivacemi zářivých komponent Weylova tenzoru,

$$\dot{\Psi}_0 = \frac{(r - ia\cos\theta)^4}{\Delta^2}\,\dot{\Psi}_4\,, \tag{5.21}$$

který je analogický vztahu (5.18). Za zmínku pro porovnání stojí analogický vztah mezi NP skaláry $\dot{\varphi}_2$ a $\dot{\varphi}_0$ pro stacionární axiálně symetrické perturbace elektromagnetického pole kolem Kerrovy černé díry

$$\dot{\varphi}_0 = -\frac{(r - ia\cos\theta)^2}{\Delta}\,\dot{\varphi}_2\,, \tag{5.22}$$

které byly studovány v (Mikeska, 2020, rovnice (2.7)).

Z podkapitoly 2.2 (speciálně rovnice (2.15)) víme, že lineární perturbace lze sčítat, a proto uvažujme perturbaci danou součtem perturbace dané Debyeovými potenciály $\check{\chi}(r,\theta)$ a $\hat{\chi}(r,\theta)$ podle vztahu (5.18). S užitím definic (5.9) a (5.15) plynou následující přímé úměry,

$$X_{\mathrm{i}} = \frac{\Sigma^2}{\Delta^2}\,X_{\mathrm{o}}\,, \quad Y_{\mathrm{i}} = \frac{(r + ia\cos\theta)^2}{(r - ia\cos\theta)^2}\,Y_{\mathrm{o}}\,, \quad Z_{\mathrm{i}} = -\frac{(r + ia\cos\theta)^2}{\Delta}\,Z_{\mathrm{o}}\,. \tag{5.23}$$

Definujme proto následující nové GHP skaláry,

$$\begin{aligned} x &\equiv X_{\mathrm{o}} = \frac{\Delta^2}{\Sigma^2}\,X_{\mathrm{i}}\,,\\ y &\equiv \frac{1}{(r - ia\cos\theta)^2}\,Y_{\mathrm{o}} = \frac{1}{(r + ia\cos\theta)^2}\,Y_{\mathrm{i}}\,,\\ z &\equiv \frac{1}{(r - ia\cos\theta)}\,Z_{\mathrm{o}} = -\frac{\Delta}{\Sigma\,(r + ia\cos\theta)}\,Z_{\mathrm{i}}\,. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Nová derivace metriky $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ je dána součtem

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}} \equiv \boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{i}} + \boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{o}}\,, \tag{5.25}$$

kde $\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{i}}$ je dána rovnicí (5.8) a $\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{o}}$ je dána rovnicí (5.14). S užitím proměnných definovaných v (5.24) vede dlouhý, avšak přímočarý, výpočet na $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ ve tvaru

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\gamma}} = (x + \overline{x}) &\left[\left(\mathbf{d}t - a\sin^2\theta\,\mathbf{d}\phi\right)^2 + \frac{\Sigma^2}{\Delta^2}\,\mathbf{d}r^2\right]\\ &- (y + \overline{y})\left[\sin^2\theta\left(a\,\mathbf{d}t - \left(r^2 + a^2\right)\mathbf{d}\phi\right)^2 - \Sigma^2\,\mathbf{d}\theta^2\right]\\ &+ 2i\,(z - \overline{z})\sin\theta\left(\mathbf{d}t - a\sin^2\theta\,\mathbf{d}\phi\right)\left(a\,\mathbf{d}t - \left(r^2 + a^2\right)\mathbf{d}\phi\right)\\ &- 2\,(z + \overline{z})\,\frac{\Sigma^2}{\Delta}\,\mathbf{d}r\mathbf{d}\theta\,. \end{aligned} \tag{5.26}$$

5.5 Teukolského mistrovská rovnice a Teukolského-Starobinského identity

Pro perturbace NP skalárů Ψ_0 a Ψ_4 odvodil Teukolsky (1973) na vakuových prostoročasech typu D tzv. Teukolského mistrovské rovnice. Uvádíme je pro vakuové perturbace a v modifikovaném tvaru podle Kofroň (2020), ve kterém všechny operátory působí na $\Psi_2^{-4/3}\dot{\Psi}_0$, resp. $\Psi_2^{-4/3}\dot{\Psi}_4$, neboli

$$[(\text{þ} - \bar{\varrho})(\text{þ}' + 3\varrho') - (\eth - \bar{\tau}')(\eth' + 3\tau') - 3\Psi_2]\,\Psi_2^{-4/3}\dot{\Psi}_0 = 0 \tag{5.27}$$

a její čárkovaná verze

$$[(\text{þ}' - \bar{\varrho}')(\text{þ} + 3\varrho) - (\eth' - \bar{\tau})(\eth + 3\tau) - 3\Psi_2]\,\Psi_2^{-4/3}\dot{\Psi}_4 = 0\,. \tag{5.28}$$

Tyto Teukolského mistrovské rovnice mají stejný tvar jako Debyeovy rovnice (5.6) a (5.7), což obecně ukázal pomocí adjungovaných operátorů Wald (1978). Teukolského mistrovské rovnice lze odvodit z vakuové de Rhamovy vlnové rovnice pro Weylův tenzor (Bini a kol., 2002). Přímým výpočtem pro Kerrovu černou díru (podkapitola 4.2) jsme ukázali, že splnění jedné Teukolského mistrovské rovnice implikuje splnění druhé Teukolského mistrovské rovnice, předpokládáme-li stacionární axiálně symetrické perturbace, které splňují relaci (5.21) mezi skaláry $\dot{\Psi}_0(r,\theta)$ a $\dot{\Psi}_4(r,\theta)$.[2]

Skaláry $\dot{\Psi}_0$ a $\dot{\Psi}_4$, které popisují stejnou fyzikální vakuovou perturbaci, jsou svázány tzv. Teukolskými-Starobinskými identitami, viz Starobinski a Churilov (1974) a Teukolsky a Press (1974), ve tvaru

$$\text{þ}'^4\left(\Psi_2^{-4/3}\dot{\Psi}_0\right) = \eth^4\left(\Psi_2^{-4/3}\dot{\Psi}_4\right) + 3\mathcal{V}\bar{\dot{\Psi}}_4\,, \tag{5.29a}$$

$$\text{þ}^4\left(\Psi_2^{-4/3}\dot{\Psi}_4\right) = \eth'^4\left(\Psi_2^{-4/3}\dot{\Psi}_0\right) - 3\mathcal{V}\bar{\dot{\Psi}}_0\,, \tag{5.29b}$$

kde $\mathcal{V}$ je operátor, který působí na GHP skalár váhy $[p,q]$ jako

$$\mathcal{V} = \Psi_2^{-1/3}\left[\tau'\eth - \tau\eth' + \varrho\text{þ}' - \varrho'\text{þ} + \frac{p}{2}\Psi_2 + \frac{q}{2}\frac{\varrho}{\bar{\varrho}}\bar{\Psi}_2\right]. \tag{5.30}$$

Teukolského-Starobinského identity platí pro nezrychlující vakuové prostoročasy typu D (Price, 2007). Z definice (5.30) plyne $\mathcal{V}' = -\mathcal{V}$. Pomocí tohoto operátoru lze zjednodušit zápis také rovnic (5.13) a (5.16).

Druhý člen na pravé straně Teukolského-Starobinského identit se interpretuje jako zpětná vazba gravitačních perturbací (Kofroň, 2020). Pro Kerrovu černou díru jsme ukázali, že tyto členy vymizí pro libovolné stacionární axiálně symetrické perturbace $\dot{\Psi}_0(r,\theta)$ a $\dot{\Psi}_4(r,\theta)$. Dále jsme ověřili, že předpokládáme-li stacionární axiálně symetrické perturbace $\dot{\Psi}_0(r,\theta)$ a $\dot{\Psi}_4(r,\theta)$ splňující relaci (5.21) a řešící Teukolského mistrovské rovnice (5.28) nebo (5.27), jsou Teukolského-Starobinského identity (5.29) automaticky splněny.[3]

[2] Toto ověření je jednodušší provést pro přeškálované skaláry $\Psi_2^{-4/3}\dot{\Psi}_0$ a $\Psi_2^{-4/3}\dot{\Psi}_4$.

[3] Ověření lze jednodušeji provést přímo pro perturbace $\dot{\Psi}_0$ a $\dot{\Psi}_4$ přenásobené faktorem $\Psi_2^{-4/3}$, neboť pomocí nich jsou vyjádřeny Teukolského mistrovské rovnice (5.28) a (5.27) a Teukolského-Starobinského identity (5.29) až na členy s operátorem $\mathcal{V}$, které vymizí.

6. Přechod mezi Debyeovým potenciálem a perturbací Kerrovy metriky

6.1 Obecný tvar kalibračního vektoru

Derivace metriky $\boldsymbol{\gamma}$ (rovnice (4.19)) popisuje stacionární axisymetrické perturbace Kerrovy černé díry, které nemusejí být vakuové (tj. obecně $\dot{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{ab}} \neq 0$, kde $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{ab}}$ je tenzor hustoty energie a hybnosti), neboť jsme nepožadovali splnění vakuových linearizovaných Einsteinových rovnic. Na druhou stranu derivace metriky $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ (rovnice (5.26)) daná Debyeovým potenciálem $\check{\chi}$ prostřednictvím skalárů x, y, z popisuje vakuové stacionární axisymetrické perturbace Kerrovy černé díry, neboť předpokládáme, že Debyeův potenciál $\check{\chi}$ řeší Debyeovu rovnici (5.17). Odtud vyplývá, že s užitím kalibrační volnosti bychom měli být schopni přejít od $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ k $\boldsymbol{\gamma}$ vždy a od $\boldsymbol{\gamma}$ k $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ právě tehdy, jsou-li splněny vakuové linearizované Einsteinovy rovnice. Této problematice se budeme věnovat v této kapitole.

Přechod mezi dvěma rozdílnými derivacemi metriky $\boldsymbol{\gamma}$ a $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ popisující stejný fyzikální systém je podle podkapitoly 2.2 dán rovnicí

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{g} \,, \tag{6.1}$$

kde $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{ab}}$ je Lieova derivace Kerrovy metriky $\boldsymbol{g}$ (rovnice (4.7)) podél vektorového pole $\boldsymbol{v}$. Budeme začínat s obecným tvarem Killingova vektoru $\boldsymbol{v}$,

$$\boldsymbol{v} = v^t(t,r,\theta,\phi)\boldsymbol{\partial_t} + v^r(t,r,\theta,\phi)\boldsymbol{\partial_r} + v^\theta(t,r,\theta,\phi)\boldsymbol{\partial_\theta} + v^\phi(t,r,\theta,\phi)\boldsymbol{\partial_\phi} \,, \tag{6.2}$$

a postupně dojdeme k obecnému tvaru pro stacionární axisymetrické perturbace.

Mějme kovariantní derivaci $\boldsymbol{\partial_v} \equiv \boldsymbol{v^a \partial_a}$, kde $\boldsymbol{\partial_a}$ je souřadnicová kovariantní derivace kompatibilní s Boyerovy-Lindquistovy souřadnicemi, tj. derivace anihilující Boyerovu-Lindquistovu souřadnicovou bázi,

$$\boldsymbol{\partial} \mathbf{d}t = \boldsymbol{\partial} \mathbf{d}r = \boldsymbol{\partial} \mathbf{d}\theta = \boldsymbol{\partial} \mathbf{d}\phi = 0 \,, \tag{6.3}$$

$$\boldsymbol{\partial \partial}_t = \boldsymbol{\partial \partial}_r = \boldsymbol{\partial \partial}_\theta = \boldsymbol{\partial \partial}_\phi = 0 \,. \tag{6.4}$$

Kovariantní derivace $\boldsymbol{\partial_a}$ je beztorzní, protože komutuje na funkcích. Z diferenciální geometrie plyne, že rozdíl dvou kovariantních derivací je pseudoderivace. Pro Lieovu derivaci $\boldsymbol{\mathcal{L}_v}$ a beztorzní souřadnicovou kovariantní derivaci $\boldsymbol{\partial_a}$ platí

$$\boldsymbol{\mathcal{L}_v} = \boldsymbol{\partial_v} + \boldsymbol{L} \,, \tag{6.5}$$

kde $\boldsymbol{L}$ je pseudoderivace generovaná tenzorem

$$\boldsymbol{L^c_d} = -\boldsymbol{\partial_d v^c} \,. \tag{6.6}$$

V Boyerových-Lindquistových souřadnicích dostaneme

$$L^\gamma_\delta = -v^\gamma{}_{,\delta} \,. \tag{6.7}$$

Lieovu derivaci metriky pak můžeme zapsat jako

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{g_{ab}} \equiv \left(\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{g}\right)_{\boldsymbol{ab}} = \boldsymbol{v^c \partial_c g_{ab}} + \boldsymbol{g_{cb} \partial_a v^c} + \boldsymbol{g_{ac} \partial_b v^c} \tag{6.8}$$

a v Boyerových-Lindquistových souřadnicích

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}} g_{\alpha\beta} \equiv \left(\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{g}\right)_{\alpha\beta} = v^\gamma g_{\alpha\beta,\gamma} + v^\gamma{}_{,\alpha} g_{\gamma\beta} + v^\gamma{}_{,\beta} g_{\alpha\gamma} \,. \tag{6.9}$$

V Boyerových-Lindquistových souřadnicích jsou komponenty derivace metriky $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ (rovnice (5.26)) a derivace metriky $\boldsymbol{\gamma}$ (rovnice (4.19)) nezávislé na souřadnicích t a ϕ. Zároveň z rovnice (6.9) pro Kerrovu metriku (4.7) máme

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}} g_{tt} = v^r g_{tt,r} + v^\theta g_{tt,\theta} + 2v^t{}_{,t} g_{tt} + 2v^\phi{}_{,t} g_{t\phi} \,, \tag{6.10a}$$

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}} g_{t\phi} = v^r g_{t\phi,r} + v^\theta g_{t\phi,\theta} + v^\phi{}_{,t} g_{\phi\phi} + \left(v^t{}_{,t} + v^\phi{}_{,\phi}\right) g_{t\phi} + v^t{}_{,\phi} g_{tt} \,, \tag{6.10b}$$

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}} g_{\phi\phi} = v^r g_{\phi\phi,r} + v^\theta g_{\phi\phi,\theta} + 2v^t{}_{,\phi} g_{t\phi} + 2v^\phi{}_{,\phi} g_{\phi\phi} \,, \tag{6.10c}$$

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}} g_{rr} = v^r g_{rr,r} + v^\theta g_{rr,\theta} + 2v^r{}_{,r} g_{rr} \,, \tag{6.10d}$$

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}} g_{\theta\theta} = v^r g_{\theta\theta,r} + v^\theta g_{\theta\theta,\theta} + 2v^\theta{}_{,\theta} g_{\theta\theta} \,, \tag{6.10e}$$

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}} g_{r\theta} = v^r{}_{,\theta} g_{rr} + v^\theta{}_{,r} g_{\theta\theta} \,. \tag{6.10f}$$

Pro zachování symetrií také tyto rovnice nemohou záviset na souřadnicích t a ϕ. Z rovnic (6.10d)-(6.10f) proto plyne, že komponenty v^r a v^θ nemohou záviset na souřadnicích t a ϕ zcela obecně. Komponenty v^r a v^θ tak dále uvažujeme ve tvaru $v^r(r,\theta)$ a $v^\theta(r,\theta)$. Dále z rovnic (6.10a)-(6.10c) plyne, že komponenty v^t a v^ϕ také nemohou záviset na souřadnicích t a ϕ zcela obecně. V tomto bodě tak uvažujeme kalibrační vektor ve tvaru

$$\boldsymbol{v} = v^t(r,\theta)\boldsymbol{\partial_t} + v^r(r,\theta)\boldsymbol{\partial_r} + v^\theta(r,\theta)\boldsymbol{\partial_\theta} + v^\phi(r,\theta)\boldsymbol{\partial_\phi} \,. \tag{6.11}$$

Triviálně, až na Lieovu derivaci, nulové komponenty kalibrační rovnice (6.1) s kalibračním vektorem ve tvaru (6.11) jsou

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}} g_{tr} = v^t{}_{,r} g_{tt} + v^\phi{}_{,r} g_{t\phi} = 0 \,, \tag{6.12a}$$

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}} g_{r\phi} = v^t{}_{,r} g_{t\phi} + v^\phi{}_{,r} g_{\phi\phi} = 0 \,, \tag{6.12b}$$

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}} g_{t\theta} = v^t{}_{,\theta} g_{tt} + v^\phi{}_{,\theta} g_{t\phi} = 0 \,, \tag{6.12c}$$

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}} g_{\theta\phi} = v^t{}_{,\theta} g_{t\phi} + v^\phi{}_{,\theta} g_{\phi\phi} = 0 \,. \tag{6.12d}$$

Po dosazení komponent Kerrovy metriky $\boldsymbol{g}$ (rovnice (4.7)) má soustava lineárních rovnic (6.12a) a (6.12b) pouze triviální řešení

$$v^t{}_{,r} = 0 \,, \quad v^\phi{}_{,r} = 0 \,. \tag{6.13}$$

Stejnými algebraickými úpravami dostaneme pouze triviální řešení soustavy lineárních rovnic (6.12c) a (6.12d),

$$v^t{}_{,\theta} = 0 \,, \quad v^\phi{}_{,\theta} = 0 \,. \tag{6.14}$$

Pomineme-li tedy konstantní řešení komponent v^t a v^ϕ, které nepřináší žádnou kalibrační změnu derivace metriky, budeme dále uvažovat kalibrační vektor $\boldsymbol{v}$ ve tvaru

$$\boldsymbol{v} = v^r(r,\theta)\boldsymbol{\partial_r} + v^\theta(r,\theta)\boldsymbol{\partial_\theta} \,. \tag{6.15}$$

6.2 Kalibrační rovnice

Derivaci metriky $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ (rovnice (5.26)) i derivaci metriky $\boldsymbol{\gamma}$ (rovnice (4.20)) máme zapsanou v kovektorové bázi[1]

$$\left(\left(\mathbf{d}t - a\sin^2\theta\,\mathbf{d}\phi\right), \left(a\,\mathbf{d}t - \left(r^2+a^2\right)\mathbf{d}\phi\right), \mathbf{d}r, \mathbf{d}\theta\right) . \tag{6.16}$$

V této bázi vyjádříme i Lieovu derivaci Kerrovy metriky, dosadíme-li konkrétní komponenty Kerrovy metriky podle rovnice (4.7) a kalibrační vektor $\boldsymbol{v}$ ve tvaru (6.15). Přímočarý výpočet podle rovnice (6.9) vede na

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{g} = \\
&\frac{2}{\Sigma^2}\left[\left(r\left(Mr-a^2\right)+(r-M)\,a^2\cos^2\theta\right)v^r - \Delta a^2\cos\theta\sin\theta\,v^\theta\right]\left(\mathbf{d}t - a\sin^2\theta\,\mathbf{d}\phi\right)^2 \\
&\quad + \frac{4a\sin\theta}{\Sigma^2}\left(r\sin\theta\,v^r + \Delta\cos\theta\,v^\theta\right)\left(\mathbf{d}t - a\sin^2\theta\,\mathbf{d}\phi\right)\left(a\,\mathbf{d}t - \left(r^2+a^2\right)\mathbf{d}\phi\right) \\
&\qquad - \frac{2\sin\theta}{\Sigma^2}\left(r\sin\theta\,v^r + \left(r^2+a^2\right)\cos\theta\,v^\theta\right)\left(a\,\mathbf{d}t - \left(r^2+a^2\right)\mathbf{d}\phi\right)^2 \\
&\quad + \frac{2}{\Delta^2}\left[\left(r\left(Mr-a^2\right)+(r-M)\,a^2\cos^2\theta\right)v^r + \Delta a^2\cos\theta\sin\theta\,v^\theta - \Delta\Sigma\,{v^r}_{,r}\right]\mathbf{d}r^2 \\
&\qquad - \frac{2\Sigma}{\Delta}\left({v^r}_{,\theta} + \Delta\,{v^\theta}_{,r}\right)\mathbf{d}r\mathbf{d}\theta - 2\left(r\,v^r - a^2\sin\theta\cos\theta\,v^\theta + \Sigma\,{v^\theta}_{,\theta}\right)\mathbf{d}\theta^2 .
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Srovnáním komponent derivace metriky $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ ve tvaru (5.26), derivace metriky $\boldsymbol{\gamma}$ ve tvaru (4.20) a Lieovy derivace metriky ve tvaru (6.17) získáme podle (6.1) soustavu šesti netriviálních rovnic

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(x) &= \frac{\Delta}{\Sigma}\left[\frac{\Delta + a^2\sin^2\theta}{\Delta - a^2\sin^2\theta}\,\dot{\psi} - \frac{a\dot{\Omega}}{\Sigma}\right] + \frac{1}{\Sigma^2}\Big[-\Delta a^2\cos\theta\sin\theta\,v^\theta \\
&\quad + \left(r\left(Mr-a^2\right)+(r-M)\,a^2\cos^2\theta\right)v^r\Big] , && (6.18a) \\
2\sin\theta\,\mathrm{Im}(z) &= \frac{1}{\Sigma}\left[\frac{4\Delta a\sin^2\theta}{\Delta - a^2\sin^2\theta}\,\dot{\psi} - \frac{\Delta + a^2\sin^2\theta}{\Sigma}\,\dot{\Omega}\right] \\
&\quad - \frac{2a\sin\theta}{\Sigma^2}\left(r\sin\theta\,v^r + \Delta\cos\theta\,v^\theta\right) , && (6.18b) \\
\frac{\Sigma^2}{\Delta}\,\mathrm{Re}(x) &= -\Sigma\left(\dot{\gamma} - \dot{\psi}\right) + \frac{1}{\Delta}\Big[\left(r\left(Mr-a^2\right)+(r-M)\,a^2\cos^2\theta\right)v^r \\
&\quad + \Delta a^2\cos\theta\sin\theta\,v^\theta - \Delta\Sigma\,{v^r}_{,r}\Big] , && (6.18c) \\
2\Sigma\,\mathrm{Re}(z) &= \left({v^r}_{,\theta} + \Delta\,{v^\theta}_{,r}\right) , && (6.18d) \\
\Sigma^2\,\mathrm{Re}(y) &= -\Sigma\left(\dot{\gamma} - \dot{\psi}\right) - \left(r\,v^r - a^2\sin\theta\cos\theta\,v^\theta + \Sigma\,{v^\theta}_{,\theta}\right) , && (6.18e) \\
\sin\theta\,\mathrm{Re}(y) &= -\frac{\sin\theta}{\Sigma}\left[\frac{\Delta + a^2\sin^2\theta}{\Delta - a^2\sin^2\theta}\,\dot{\psi} - \frac{a\dot{\Omega}}{\Sigma}\right] \\
&\quad + \frac{1}{\Sigma^2}\left(r\sin\theta\,v^r + \left(r^2+a^2\right)\cos\theta\,v^\theta\right) , && (6.18f)
\end{aligned}$$

kde funkce x, y a z definované v (5.24) jsou dány Debyeovým potenciálem $\check{\chi}$ prostřednictvím rovnic (5.15). Tyto rovnice budeme nazývat kalibrační rovnice.

[1] Povšimněme si, že tato báze je ortogonální, neboť Kerrova metrika $\boldsymbol{g}$ (rovnice (4.7)) je v ní diagonální.

Z matematického hlediska mají odlišný charakter, přecházíme-li od derivace metriky $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ k derivaci metriky $\boldsymbol{\gamma}$ nebo naopak. V obou případech se však vzhledem ke komponentám v^r a v^θ jedná o soustavu parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu o dvou proměnných r a θ.

6.3 Podmínky integrability

Existují různé způsoby jak řešit kalibrační rovnice (6.18), a to nejen v závislosti na povaze zadaného problému. V této kapitole budeme předpokládat, že známe Debyeův potenciál $\check{\chi}$ splňující Debyeovu rovnici (5.17), a tudíž i funkce x, y a z. Potom kalibrační rovnice (6.18) představují nejen soustavu reálných parciálních diferenciálních rovnic pro funkce v^r a v^θ, ale také soustavu reálných lineárních rovnic pro funkce $\dot{\psi}$, $\dot{\Omega}$ a $\dot{\gamma}$.

V našem výpočtu budeme obecně směřovat k dekaplování kalibračních rovnic (6.18) vzhledem k páru funkcí v^r, v^θ a ke trojici funkcí $\dot{\psi}$, $\dot{\Omega}$, $\dot{\gamma}$. Začneme odečtením rovnice (6.18e) od rovnice (6.18c), čímž se zbavíme členu s $\left(\dot{\gamma} - \dot{\psi}\right)$ a dostaneme

$$\Sigma\left(\mathrm{Re}(x) - \Delta\,\mathrm{Re}(y)\right) = (r - M)\,v^r + \Delta\left({v^\theta}_{,\theta} - {v^r}_{,r}\right) . \tag{6.19}$$

Dále přičteme-li k rovnici (6.18a) rovnici (6.18f) přenásobenou faktorem $\Delta/\sin\theta$, zbavíme se funkcí $\dot{\psi}$ a $\dot{\Omega}$ najednou a dostaneme

$$\mathrm{Re}(x) + \Delta\,\mathrm{Re}(y) = \frac{1}{\Sigma}\left(\Delta\cot\theta\,v^\theta + (r - M)\,v^r\right) . \tag{6.20}$$

Získali jsme tak jednoznačný vztah mezi funkcemi v^r a v^θ, tedy

$$v^r = -\frac{\Delta\cot\theta}{r - M}\,v^\theta + \frac{\Sigma}{r - M}\left(\mathrm{Re}(x) + \Delta\,\mathrm{Re}(y)\right) . \tag{6.21}$$

Dosazením tohoto vztahu do kalibračních rovnic (6.18b), (6.18e), (6.18f) dostaneme

$$\begin{aligned}
&\frac{2\Sigma r a\sin^2\theta}{r - M}\left(\mathrm{Re}(x) + \Delta\,\mathrm{Re}(y)\right) + 2\Sigma^2\sin\theta\,\mathrm{Im}(z) \\
&\qquad = -\frac{4\Delta\Sigma a\sin^2\theta}{\Delta - a^2\sin^2\theta}\,\dot{\psi} - \left(\Delta + a^2\sin^2\theta\right)\dot{\Omega} + \frac{\Delta M a\sin 2\theta}{r - M}\,v^\theta , && \text{(6.22a)} \\
&\frac{\Sigma r}{r - M}\left(\mathrm{Re}(x) + \Delta\,\mathrm{Re}(y)\right) + \Sigma^2\,\mathrm{Re}(y) \\
&\qquad = -\Sigma\left(\dot{\gamma} - \dot{\psi}\right) + \left(\frac{\Delta r}{r - M} + a^2\sin^2\theta\right)\cot\theta\,v^\theta - \Sigma\,{v^\theta}_{,\theta} , && \text{(6.22b)} \\
&\frac{\Sigma r}{r - M}\left(\mathrm{Re}(x) + \Delta\,\mathrm{Re}(y)\right) - \Sigma^2\,\mathrm{Re}(y) \\
&\qquad = \Sigma\left[\frac{\Delta + a^2\sin^2\theta}{\Delta - a^2\sin^2\theta}\,\dot{\psi} - \frac{a\dot{\Omega}}{\Sigma}\right] + \left(\frac{\Delta r}{r - M} - \left(r^2 + a^2\right)\right)\cot\theta\,v^\theta . && \text{(6.22c)}
\end{aligned}$$

Dosazením vztahu (6.21) a jeho derivací podle r a θ do kalibračních rovnic (6.19) a (6.18d) dostaneme

$$
\begin{aligned}
&\Sigma\left(\operatorname{Re}(x)-\Delta\operatorname{Re}(y)\right)-\left[\Sigma+\frac{\Delta\left(\Sigma-2r\left(r-M\right)\right)}{\left(r-M\right)^2}\right]\left(\operatorname{Re}(x)+\Delta\operatorname{Re}(y)\right)\\
&\quad+\frac{\Delta\Sigma}{r-M}\left(\operatorname{Re}(x_{,r})+\Delta\operatorname{Re}(y_{,r})+2\left(r-M\right)\operatorname{Re}(y)\right)\\
&\quad=\Delta\left[\left(1-\frac{\Delta}{\left(r-M\right)^2}\right)\cot\theta\, v^\theta+{v^\theta}_{,\theta}+\frac{\Delta}{r-M}\cot\theta\,{v^\theta}_{,r}\right]\,, \qquad (6.23a)\\
&\frac{a^2\sin 2\theta}{r-M}\left(\operatorname{Re}(x)+\Delta\operatorname{Re}(y)\right)-\frac{\Sigma}{r-M}\left(\operatorname{Re}(x_{,\theta})+\Delta\operatorname{Re}(y_{,\theta})\right)+2\Sigma\operatorname{Re}(z)\\
&\quad=\Delta\left(\frac{\csc^2\theta}{r-M}\,v^\theta-\frac{\cot\theta}{r-M}\,{v^\theta}_{,\theta}+{v^\theta}_{,r}\right)\,. \qquad (6.23b)
\end{aligned}
$$

Nyní tyto dvě rovnice vhodnými algebraickými úpravami převedeme do tvaru, ve kterém jsou funkce ${v^\theta}_{,r}$ a ${v^\theta}_{,\theta}$ dekaplované, což vede na

$$
\begin{aligned}
&-\left[\Sigma-2a^2\sin^2\theta+\frac{\Delta\left(\Sigma-2r\left(r-M\right)\right)}{\left(r-M\right)^2}\right]\left(\operatorname{Re}(x)+\Delta\operatorname{Re}(y)\right)\\
&\quad+\frac{\Delta\Sigma}{r-M}\left(\operatorname{Re}(x_{,r})+\Delta\operatorname{Re}(y_{,r})+2\left(r-M\right)\operatorname{Re}(y)\right)\\
&\quad-\Sigma\tan\theta\left(\operatorname{Re}(x_{,\theta})+\Delta\operatorname{Re}(y_{,\theta})\right)+\Sigma\left(\operatorname{Re}(x)-\Delta\operatorname{Re}(y)\right)\\
&\quad+2\Sigma\left(r-M\right)\tan\theta\operatorname{Re}(z)\\
&\qquad=\frac{2\Delta\csc 2\theta}{r-M}\left[\frac{\Delta+\left(M^2-a^2\right)\left(1+\cos^2\theta\right)}{r-M}\,v^\theta\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\left(\Delta+\left(M^2-a^2\right)\sin^2\theta\right){v^\theta}_{,r}\right]\,, \qquad (6.24a)\\
&\left[\Sigma+\frac{\Delta\left(\Sigma-2r\left(r-M\right)+2a^2\cos^2\theta\right)}{\left(r-M\right)^2}\right]\left(\operatorname{Re}(x)+\Delta\operatorname{Re}(y)\right)\\
&\quad-\frac{\Delta\Sigma}{r-M}\left(\operatorname{Re}(x_{,r})+\Delta\operatorname{Re}(y_{,r})+2\left(r-M\right)\operatorname{Re}(y)\right)\\
&\quad-\frac{\Delta\Sigma\cot\theta}{\left(r-M\right)^2}\left(\operatorname{Re}(x_{,\theta})+\Delta\operatorname{Re}(y_{,\theta})\right)-\Sigma\left(\operatorname{Re}(x)-\Delta\operatorname{Re}(y)\right)\\
&\quad+\frac{2\Delta\Sigma\cot\theta}{r-M}\operatorname{Re}(z)\\
&\qquad=\frac{\Delta\csc^2\theta}{\left(r-M\right)^2}\left[\left(\Delta-\left(M^2-a^2\right)\sin^2\theta\right)\cot\theta\, v^\theta\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\left(\Delta+\left(M^2-a^2\right)\sin^2\theta\right){v^\theta}_{,\theta}\right]\,. \qquad (6.24b)
\end{aligned}
$$

Jedná se o soustavu dvou parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu o dvou proměnných r a θ. Zavedením substituce v^θ dané vztahem

$$
v^\theta=\frac{(r-M)\sin\theta}{\Delta+(M^2-a^2)\sin^2\theta}\,V^\theta \qquad (6.25)
$$

se zjednoduší pravé strany rovnic (6.24), které zkráceně zapíšeme jako

$$\cdots = \Delta \sec\theta \, V^{\theta}{}_{,r} \,, \tag{6.26a}$$

$$\cdots = -\frac{\Delta \csc\theta}{r - M} \, V^{\theta}{}_{,\theta} \,. \tag{6.26b}$$

Podmínky integrability rovnic (6.24) jsou pak dané záměnností parciálních derivací

$$V^{\theta}{}_{,r\theta} = V^{\theta}{}_{,\theta r} \,. \tag{6.27}$$

Explicitním výpočtem lze s užitím rovnic (5.24) a (5.15) pro Kerrovu černou díru ukázat, že levé strany rovnic (6.24) obsahují nejvýše druhé derivace Debyeova potenciálu $\check{\chi}$. Podmínky integrability (6.27) pak vedou na parciální diferenciální rovnici s nejvýše třetími derivacemi Debyeova potenciálu $\check{\chi}$. Ukázali jsme, že díky Debyeově rovnici (5.17) a jejím prvním derivacím je tato rovnice splněna. Neboli Debyeova rovnice (5.17) implikuje splnění podmínek integrability.

6.4 Další zjednodušení a shrnutí

V dekaplování kalibračních rovnic (6.22) vzhledem k páru funkcí v^r, v^θ a ke trojici funkcí $\dot{\psi}$, $\dot{\Omega}$, $\dot{\gamma}$ lze dále postoupit. Vhodným součtem rovnic (6.22a) a (6.22c) dostaneme

$$\begin{aligned} &-\frac{4\Sigma r^2 a \sin^2\theta}{r^2 - a^2} \left(\mathrm{Re}(x) + \Delta\,\mathrm{Re}(y)\right) + \frac{2\Delta\Sigma^2 a \sin^2\theta}{r^2 - a^2} \mathrm{Re}(y) - 2\Sigma^2 \sin\theta \,\mathrm{Im}(z) \\ &\quad = \frac{2\Delta\Sigma\left(\Sigma - 2r\left(2r - M\right)\right) a \sin^2\theta}{\left(\Delta - a^2\sin^2\theta\right)\left(r^2 - a^2\right)} \dot{\psi} + \left(\frac{2\Delta a^2 \sin^2\theta}{r^2 - a^2} + \Delta + a^2\sin^2\theta\right) \dot{\Omega} \,. \end{aligned} \tag{6.28}$$

Další dekaplovanou rovnici lze získat nejdříve přičtením vhodného násobku rovnice (6.24b) k rovnici (6.22b) tak, abychom se zbavili členu s $v^{\theta}{}_{,\theta}$. Vzniklou rovnici pak lze vhodně sečíst s rovnicí (6.22a) nebo (6.22c), čímž se zcela zbavíme kalibračního vektoru. Výsledná rovnice je však dlouhá a nebudeme ji dále používat, a proto ji zde neuvádíme. Důležité však je, že vždy v alespoň jedné z rovnic (6.22) se nejsme schopni zbavit komponent kalibračního vektoru $\boldsymbol{v}$, a tudíž dekaplovat všechny kalibrační rovnice zároveň. Nevyhneme se tak integrování rovnic (6.26) s levými stranami danými rovnicemi (6.24). Ani v případě Schwarzschildovy černé díry ($a \to 0$) se problém nezjednoduší a kalibrační rovnice se zcela dekaplují až v Minkowského limitě ($M \to 0$), čemuž se budeme věnovat v následující podkapitole. Za zmínku však stojí rovnice (6.22a), která se ve Schwarzschildově limitě ($a \to 0$) zjednoduší na

$$2\Sigma^2 \sin\theta \,\mathrm{Im}(z) = -\Delta\dot{\Omega} \,. \tag{6.29}$$

Shrňme nyní obecný postup, jakým lze přejít ze znalosti Debyeova potenciálu $\check{\chi}(r,\theta)$ splňujícího Debyeovu rovnici (5.17) (a tedy od derivace metriky $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ dané rovnicí (5.26)) k funkcím $\dot{\psi}$, $\dot{\Omega}$, $\dot{\gamma}$ určujícím derivaci metriky $\boldsymbol{\gamma}$ (viz rovnice (4.20)) popisující stejný fyzikální systém.

Začneme výpočtem kvadratury[2] pro funkci V^θ podle rovnic (6.26) s levými stranami danými rovnicemi (6.24). Komponenta v^θ kalibračního vektoru $\boldsymbol{v}$ je pak dána podle (6.25). Druhou komponentu v^r lze určit podle rovnice (6.21), avšak pro další výpočty již nebude potřeba. Známe-li v^θ, nalezneme pak funkce $\dot\psi$, $\dot\Omega$, $\dot\gamma$ řešením soustavy lineárních rovnic (6.22). Místo rovnice (6.22a) nebo (6.22c) lze v této soustavě lineárních rovnic použít dekaplovanou rovnici (6.28).

6.5 Minkowského limita

V Minkowského limitě ($a \to 0, M \to 0$) se kalibrační rovnice (6.22) zjednoduší na

$$
\begin{aligned}
-2r^2 \sin\theta \,\mathrm{Im}(z) &= \dot\Omega \,, && (6.30a)\\
\mathrm{Re}(x) + 2r^2 \,\mathrm{Re}(y) &= -\dot\gamma + \dot\psi + \cot\theta\, v^\theta - v^\theta{}_{,\theta} \,, && (6.30b)\\
\mathrm{Re}(x) &= \dot\psi \,. && (6.30c)
\end{aligned}
$$

Rovnice (6.24a) se v Minkowského limitě zjednoduší na

$$
\begin{aligned}
&- r\left(\mathrm{Re}(x_{,r}) + r^2 \,\mathrm{Re}(y_{,r}) + 2r\,\mathrm{Re}(y)\right) - \cot\theta\left(\mathrm{Re}(x_{,\theta}) + r^2\,\mathrm{Re}(y_{,\theta})\right)\\
&\qquad - \left(\mathrm{Re}(x) - r^2\,\mathrm{Re}(y)\right) + 2r\cot\theta\,\mathrm{Re}(z) = \csc^2\theta\left(\cot\theta\, v^\theta - v^\theta{}_{,\theta}\right) . \qquad (6.31)
\end{aligned}
$$

Odečteme-li od rovnice (6.30b) rovnici (6.30c) a rovnici (6.31) přenásobenou faktorem $\sin^2\theta$, dostaneme

$$
\begin{aligned}
&- r\sin^2\theta\left(\mathrm{Re}(x_{,r}) + r^2\,\mathrm{Re}(y_{,r})\right) - \frac{\sin 2\theta}{2}\left(\mathrm{Re}(x_{,\theta}) + r^2\,\mathrm{Re}(y_{,\theta})\right)\\
&\qquad - \sin^2\theta\,\mathrm{Re}(x) - r^2\left(2 + \sin^2\theta\right)\mathrm{Re}(y) + r\sin 2\theta\,\mathrm{Re}(z) = \dot\gamma \,. \qquad (6.32)
\end{aligned}
$$

Explicitním vyjádřením funkcí x, y, z na Minkowského prostoročase dostaneme s užitím Debyeovy rovnice (5.17)

$$
\dot\gamma = 0 \,. \qquad (6.33)
$$

Podle rovnic (6.30a), (6.30c) tak můžeme určit funkce $\dot\psi$, $\dot\Omega$ přímo ze znalosti Debyeova potenciálu. Neuvádíme zde již explicitní tvar těchto rovnic, poznamenejme však, že $\dot\Omega$ je určeno imaginární částí $\check\chi$ a $\dot\psi$ reálnou částí $\check\chi$.

[2] Výpočet kvadratury označuje řešení víceproměnného integrálu.

Závěr

V této diplomové práci jsme zkoumali gravitační perturbace ve Weylově a GHP formalismu s užitím Debyeova potenciálu a jejich vzájemný vztah. V celé práci jsme dbali na matematickou rigoróznost a nahlíželi na gravitační perturbace z hlediska diferenciální geometrie. Tento přístup umožňuje lepší pochopení linearizovaných veličin a rovnic a mj. dává podobu kalibrační volnosti ve formě Lieovy derivace.

Podrobně jsme vysvětlili vztah perturbace metriky a perturbace NP tetrády, která navíc skrývá transformační volnost perturbované NP tetrády. Ukázali jsme, jak se díky této transformační volnosti mění NP Weylovy skaláry a nalezli jsme vztah pro výpočet perturbací NP Weylových skalárů Ψ_0 a Ψ_4 pomocí NP projekcí perturbace metriky, a to pro obecný nevakuový prostoročas a nevakuové gravitační perturbace. Ověřili jsme, že pro případ vakuového prostoročasu typu D, dávají tyto vztahy stejný výsledek jako perturbace NP Weylových skalárů Ψ_0 a Ψ_4 daných Debyeovým potenciálem.

Užitím Weylova formalismu, tj. perturbace metriky v rámci Weylovy třídy metrik, jsme zkoumali stacionární axisymetrické perturbace Kerrovy černé díry. Nalezli jsme explicitní vztah pro výpočet $\dot{\Psi}_0$ a $\dot{\Psi}_4$ pomocí perturbací metrických funkcí. Ukázali jsme, že v GHP formalismu se s užitím dvou typů Debyových potenciálů splňujících jednoduchou relaci

$$\hat{\chi}(r,\theta) = \frac{(r - ia\cos\theta)^4}{\Delta^2}\,\check{\chi}(r,\theta)$$

zjednoduší perturbace Kerrovy metriky. Debyeovy potenciály splňující tuto relaci vedou na stejné perturbace NP Weylových skalárů, které navíc splňují analogickou jednoduchou relaci

$$\dot{\Psi}_0 = \frac{(r - ia\cos\theta)^4}{\Delta^2}\,\dot{\Psi}_4\,.$$

Ukázali jsme, že přechod mezi perturbací Kerrovy metriky ve Weylově formalismu a v GHP formalismu je potřeba použít kalibrační volnost, která vede na kalibrační rovnice. V případě, kdy předpokládáme znalost Debyeova potenciálu, představují kalibrační rovnice soustavu reálných parciálních diferenciálních rovnic dvou proměnných pro komponenty kalibračního vektoru a soustavu reálných lineárních rovnic pro perturbace metrických funkcí Kerrovy metriky ve Weylově formalismu. Tyto rovnice jsme dekaplovali tak, že komponenty kalibračního vektoru najdeme hledáním kvadratury, přičemž podmínky integrability jsou splněny díky Debyově rovnici. Perturbace metrických funkcí Kerrovy metriky ve Weylově formalismu pak jednoduše nalezneme řešením soustavy lineárních rovnic. Opačný postup hledání Debyeova potenciálu ze znalosti perturbace metrických funkcí Kerrovy metriky ve Weylově formalismu je však z matematického hlediska mnohem náročnější.

Seznam použité literatury

Abbott, B. P., Abbott, R., Abbott, T. D., Abernathy, M. R., Acernese, F., Ackley, K. a kol. (2016). Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical Review Letters*, **116**(6), 1–16. ISSN 10797114. doi: 10.1103/PhysRevLett.116.061102.

Bardeen, J. M. (1970). Kerr metric black holes. *Nature*, **226**(5240), 64–65. ISSN 00280836. doi: 10.1038/226064a0.

Bini, D., Cherubini, C., Jantzen, R. T. a Ruffini, R. (2002). Teukolsky master equation: De Rham wave equation for gravitational and electromagnetic fields in vacuum. *Progress of Theoretical Physics*, **107**(5). ISSN 0033068X. doi: 10.1143/PTP.107.967.

Cohen, J. M. a Kegeles, L. S. (1974). Electromagnetic fields in curved spaces: A constructive procedure. *Physical Review D*, **10**(4), 1070–1084. ISSN 05562821. doi: 10.1103/PhysRevD.10.1070.

Cohen, J. a Kegeles, L. (1975). Space-time perturbations. *Physics Letters A*, **54**(1), 5–7. ISSN 03759601. doi: 10.1016/0375-9601(75)90583-6.

Deadman, E. a Stewart, J. M. (2011). Linearized perturbations of the Kerr spacetime and outer boundary conditions in numerical relativity. *Classical and Quantum Gravity*, **28**(1). ISSN 02649381. doi: 10.1088/0264-9381/28/1/015003.

Einstein, A. (1915). Die Feldgleichungen der Gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pages 844–847.

Einstein, A. (1916). Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pages 688–696. doi: 10.1002/3527608958.ch7.

Čížek, P. (2017). *Stationary fields in black-hole space-times*. Dizertační práce, Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Ústav teoretické fyziky. Vedoucí práce Semerák, O.

Geroch, R., Held, A. a Penrose, R. (1973). A space-time calculus based on pairs of null directions. *Journal of Mathematical Physics*, **14**(7), 874–881. ISSN 00222488. doi: 10.1063/1.1666410.

Goldberg, J. N. and Sachs, R. K. (1962). A theorem on Petrov types. *Acta Physica Polonica B, Proceedings Supplement*, **22**, 13.

Kerr, R. P. (1963). Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics. *Physical Review Letters*, **11**(5), 237–238. ISSN 00319007. doi: 10.1103/PhysRevLett.11.237.

Kofroň, D. (2020). Point particles and Appell's solutions on the axis of a Kerr black hole for an arbitrary spin in terms of the Debye potentials. *Physical Review D*, **101**(6). ISSN 2470-0010. doi: 10.1103/PhysRevD.101.064027.

Martín-García, M. (2002-2022). xAct: Efficient tensor computer algebra for the wolfram language. URL `http://xact.es/index.html`.

Mikeska, V. (2020). Interpretace zdrojů známých řešení teukolského rovnic. Bakalářská práce, Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Ústav teoretické fyziky, Praha. Vedoucí práce Kofroň, D.

Newman, E. a Penrose, R. (1962). An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. *Journal of Mathematical Physics*, **3**(3), 566–578. ISSN 00222488. doi: 10.1063/1.1724257.

Price, L. R. (2007). *Developments in the perturbation theory of algebraically special spacetimes*. PhD thesis, University of Florida.

Starobinski, A. a Churilov, S. (1974). Amplification of electromagnetic and gravitational waves scattered by a rotating „black hole“. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, **38**(1). ISSN 1063-7761.

Stephani, H., Kramer, D., MacCallum, M., Hoenselaers, C. a Herlt, E. (2003). *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. Second edition. Cambridge University Press. ISBN 0-521-46136-7. doi: 10.1017/cbo9780511535185.

Stewart, J. M. (1979). Hertz–Bromwich–Debye–Whittaker–Penrose potentials in general relativity. *Proceedings of the Royal Society of London A*, **367**(1731), 527–538. ISSN 00804630. doi: 10.1098/rspa.1979.0101.

Stewart, J. M. a Walker, M. (1974). Perturbations of spacetimes in general relativity. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **341**, 49–74. doi: 10.1098/rspa.1974.0172.

Teukolsky, S. A. a Press, W. H. (1974). Perturbations of a rotating black hole. III - Interaction of the hole with gravitational and electromagnetic radiation. *The Astrophysical Journal*, **193**, 443–461. ISSN 0004-637X. doi: 10.1086/153180.

Teukolsky, S. A. (1973). Perturbations of a Rotating Black Hole. I. Fundamental Equations for Gravitational, Electromagnetic, and Neutrino-Field Perturbations. *The Astrophysical Journal*, **185**, 635–647. ISSN 0004-637X. doi: 10.1086/152444.

Wald, R. M. (1978). Construction of Solutions of Gravitational, Electromagnetic, or Other Perturbation Equations from Solutions of Decoupled Equations. *Physical Review Letters*, **41**(4), 203–206. ISSN 00319007. doi: 10.1103/PhysRevLett.41.203.

Wald, R. M. (1984). *General Relativity*. The University of Chicago Press. ISBN 0-226-87033-2. doi: 10.7208/chicago/9780226870373.001.0001.

Weyl, H. (1917). The theory of gravitation. *Annalen Phys.*, **54**, 117–145. doi: 10.1007/s10714-011-1310-7.