Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vybrané parametry ovlivňující obtížnost slovních úloh

Selected parameters influencing the difficulty of word problems

Lenka Vokounová

Vedoucí práce: prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Matematika

2019

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Vybrané parametry ovlivňující obtížnost slovních úloh potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha 12. 7. 2019

Poděkování

Ráda bych poděkovala své vedoucí práce Prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., za velmi vstřícný přístup a hlavně za neuvěřitelně rychlé reakce v průběhu tvorby mé bakalářské práce. Dále bych ráda poděkovala svému manželovi za pomoc s technickými záležitostmi, které se týkaly mé práce a také své kamarádce a kolegyni, která mi byla oporou i na své dovolené a pomáhala mi hledat vhodná synonyma.

ABSTRAKT

Práce se zabývá vybranými parametry, které ovlivňují obtížnost slovních úloh. Cílem práce je vytipovat některé parametry, které by mohly ovlivňovat řešení slovních úloh a ukázat, že propojení matematiky s jazykem má smysl a může poukázat na obtíže, které učitelé matematiky ve slovní úloze nemusí vždy za problém považovat.

První část práce je věnovaná slovním úlohám obecně. Věnuje se důležitosti slovních úloh v hodinách matematiky, dělení slovních úloh podle oblastí matematiky a podle kontextu. Nakonec se zabývá řešením různých typů slovních úloh.

V druhé části jsou uvedeny některé parametry ovlivňující obtížnost slovních úloh. Následně je provedena analýza vlivu zvolených parametrů u vybraných slovních úloh na základě projektu 16-06134S Grantové agentury České republiky – Slovní úlohy jako klíč k aplikaci a porozumění matematickým pojmům a na základě vlastních zkušeností z učitelské praxe.

V poslední části práce je pak uvedeno vlastní doporučení pro práci se slovními úlohami.

KLÍČOVÁ SLOVA

slovní úlohy, parametry ovlivňující řešení slovních úloh, řešení slovních úloh

ABSTRACT

This thesis deals with selected parameters influencing the difficulty of word problems. The aim of the thesis is to identify some parameters that could influence the solution of word problems and show that the connection of mathematics with language makes sense and can point out the difficulties that mathematics teachers do not see in the task.

The first part of the thesis is devoted to word problems in general. It deals with the importance of word problems in mathematics lessons, classification of word problems by mathematics and context. Finally, it deals with the solution of word problems.

In the second part there are some parameters influencing the difficulty of word problems. Subsequently, the analysis of the influence of selected parameters on selected word problems is carried out on the basis of the project of the Grant Agency of the Czech Republic number 16-06134S - Word Problems as a Key to Application and Understanding of Mathematical Concepts and based on own experience in teaching.

In the last part of the thesis is my own recommendation for working with word problems.

KEYWORDS

word problems, parameters influencing the solution of word problems, solving of word problems

Obsah

Úvod - motivace

Jako téma své bakalářské práce jsem si zvolila vybrané parametry ovlivňující obtížnost slovních úloh. Proč právě takové téma? Již od 9. ročníku na základní škole jsem říkala, že chci být učitelkou a učit český jazyk a matematiku. Každý mi tvrdil, že jsou to dva diametrálně odlišné předměty, ale já je měla oba stejně ráda a možná jsem již v té době podvědomě tušila, že tyto dva předměty spolu souvisí. Jednu dobu jsem dokonce oba obory i studovala, ale osud tomu chtěl jinak, a teď tedy studuji jen matematiku. Již z dob studia a později i z praxe jsem viděla stále více souvislostí mezi těmito dvěma předměty a to převážně u slovních úloh, kde je potřeba číst s porozuměním a v neposlední řadě i dobře zformulovat odpověď.

V hodinách matematiky se tedy žákům snažím ukazovat, jak je důležité rozumět psanému textu, a že není pravda, že pokud jde někomu český jazyk, tak mu nejde matematika a naopak. S kolegyněmi jsme v rámci mezioborové spolupráce rozebíraly takový úsměvný matematicko-lingvistický problém, který žákům s nadsázkou ukazuji, jako jediný, mně známý, rozdíl mezi matematikou a českým jazykem. Týkal se věty: „Mám toho jednou tolik, co ty." Z matematického hlediska je to vlastně operace „jeden krát" z čehož vyplývá, že mám „stejně jako ty". Z pohledu kolegyň s aprobací český jazyk, je to ale tak, že „mám dvojnásobek toho, co ty". A následně, když jsme onu větu převedly na „mám toho dvakrát tolik, co ty", tak z matematického i lingvistického hlediska to bylo obojí jako „dvojnásobek". Tímto jsme se vzájemně ujistily, že matematika je úzce propojena s jazykem, na který je vázaná a nejspíš v každém jazyce bude mít svá specifika.

Ve své práci se tedy věnuji slovním úlohám a parametrům, které ovlivňují způsob jejich řešení. V první kapitole práce se věnuji vymezení pojmu slovní úloha, dělení slovních úloh a některým možným obtížím při řešení slovních úloh. Jednu podkapitolu jsem i věnovala úvaze, proč jsou slovní úlohy pro žáky důležité. Ve druhé části své práce se věnuji některým parametrům, které ovlivňují obtížnost slovních úloh. Parametry jsem vybírala převážně z návrhu parametrů pro výzkum Grantové agentury České republiky (GA ČR) 16-06134S – Slovní úlohy jako klíč k aplikaci a porozumění matematickým pojmům. Vzhledem k tomu, že uvedených parametrů bylo velmi mnoho, vybrala jsem jen ty, se kterými jsem se sama ve výuce setkala. Dále jsem u některých zkoumaných parametrů uvedla ukázky a závěry z výzkumu pořádaného na Pedf UK, ale snažila jsem se je doplnit o vlastní zkušenosti z praxe. Zároveň jsem uváděla skromné návrhy na řešení obtíží spojených s daným parametrem, při řešení úloh ve škole. Jako poslední jsem uvedla parametr, který jsem nenalezla ani ve zmiňovaném výzkumu, ani v návrzích parametrů, ale v praxi se s ním setkávám velmi často. Problémy jsem se snažila ilustrovat na příkladech z učebnic a jejich modifikacích. V poslední, krátké kapitole, jsem shrnula doporučení pro tvorbu úloh ve školské matematice.

1 Slovní úlohy

Řešení slovních úloh je součástí téměř každého tematického celku matematiky. Ale co vše lze vlastně za slovní úlohu považovat? Najít u různých autorů, zabývajících se slovními úlohami, jedinou a shodnou definici slovní úlohy se mi nepodařilo, ale jednotlivé definice mají hodně společného. Vybrala jsem tři podobné definice, se kterými se ztotožňuji.

O. Odvárko (O. Odvárko a kol., 1990, str. 205) například definuje slovní matematické úlohy takto: *„Matematické úlohy, které procvičují jednotlivé kalkuly, jsou zpravidla už vyjádřeny v příslušném symbolickém jazyce kalkulu, slovy jsou sděleny jen pokyny „upravte“ apod. Matematické úlohy, které tak vyjádřeny nejsou, nazýváme slovní matematické úlohy.*

Dále uvádí, že slovní úlohy jsou vlastně vztahem matematiky k realitě.

J. Vyšín (J. Vyšín, 1972, str. 107) definuje slovní úlohu takto: *„Slovními úlohami bývají zpravidla nazývány úlohy aritmetické nebo algebraické, formulované slovy, nikoli matematickými symboly, nebo úlohy z praxe, jejichž řešení vyžaduje rozřešení aritmetické nebo algebraické úlohy.“*

F. Kuřina (F. Kuřina, 1989, str. 61) definuje slovní úlohu takto: *„Slovní úloha je úloha, kde je obvykle popsána určitá reálná situace (např. s ekonomickou, přírodní, fyzikální, společenskou či jinou tematikou) a úkolem řešitele je určit odpovědi na položené otázky“.*

Všechny tři uvedené definice slovní úlohy mají dvě zásadní společné věci, a to, že jsou formulované slovy a jsou nějakým způsobem spjaty s reálným problémem. Vyučovat tedy matematiku bez slovních úloh by znamenalo připravit žáky o propojení matematiky s reálným životem a vzít matematice silný motivační nástroj. To, že jsou slovní úlohy formulovány slovy, ale vyžaduje od žáků jazykové porozumění a zároveň i přesahuje do životních zkušeností. Nestačí tedy u slovních úloh „jen“ počítat, ale je potřeba úlohu pochopit komplexně.

1.1 Důležitost slovních úloh

Slovní úlohy řeší člověk téměř denně, aniž si to uvědomuje, při nakupování, při vaření, ale i s kamarády, když se chce spravedlivě podělit třeba o čokoládu. Tedy slovní úlohy provázejí žáky nejen ve škole, ale už od raného dětství v běžném životě. Ve své práci se budu zabývat pouze slovními úlohami zadanými ve škole. To, že slovní úlohy jsou nedílnou součástí výuky matematiky, je nemalou měrou dáno i tím, že jsou zakotveny i v Rámcovém vzdělávacím programu základního vzdělávání. Ale proč jsou ve skutečnosti opravdu tak důležité?

Jak jsem již psala, slovní úlohy propojují matematiku s reálným životem. Na druhou stranu hlubší pochopení matematiky pomáhá žákům řešit obtížnější úlohy z běžného života, a tím jim i ukazuje význam matematiky v jejich budoucím životě. Žáci si dále zvyšují svou čtenářskou gramotnost, protože zadaný text slovní úlohy musí nejen přečíst, ale i pochopit a musí z něj umět vybrat důležité informace. Tyto informace musí dále zpracovávat a musí si je převést do „matematického jazyka“. V některých typech úloh musí umět vybrat nadbytečné informace, jinde zase naopak informace na základě přechozích zkušeností či znalostí z reálného života doplnit. V neposlední řadě učí slovní úlohy žáky samostatně přemýšlet a kreativně pracovat.

Je ale všeobecně známo, že u žáků nejsou slovní úlohy oblíbeny (Novotná, 2000). Zdají se jim příliš obtížné. Často se stává, když žák vidí, že je zadání slovní úlohy delší než dva řádky, rovnou úlohu přeskakuje a řeší raději něco jiného. Setkávám se bohužel i velmi často s tím, že když žáci vědí, že se učíme zrovna násobit zlomky, s největší pravděpodobností bude slovní úloha procvičovat ono násobení, a tak úlohu přečtou velmi nepozorně a rovnou dva nalezené zlomky násobí, místo např. sčítání. Je tedy potřebné nejen průběžně zařazovat slovní úlohy, ale zařazovat i slovní úlohy, které se řeší aparátem probraným již dříve a ne právě probíraným. Dále samozřejmě platí, že čím je úloha pro žáky reálnější, tím spíše budou motivovaní k jejímu řešení. Protože jak píše J. Novotná (J. Novotná, 2000, str. 14) *„hlavním cílem vzdělávání je lepší příprava pro život, měly by být do vyučování zařazovány úlohy co nejpodobnější těm, které lidé řeší v běžném životě. Navíc děti obvykle nezajímá nic, co se k běžnému životu nevztahuje. Slovní úlohy by měly* *být vždy matematické úlohy, předkládané v podobě, která je pro děti přístupná. Jejich kvalita závisí vždy na kvalitě jejich vnitřní matematické struktury a rovněž na jejich eleganci a přístupnosti. To mimo jiné znamená, že by tyto úlohy neměly být zatěžovány příliš mnoha bezvýznamnými detaily. Důležitý pohled na slovní úlohy ve vyučování matematice shrnuje A. Toom v (Toom,1999): „Jedná se zde o jeden z nejzákladnějších zákonů kultury: Lidská kultura nikdy nepopisuje realitu vzájemně jednoznačně. Zestručňuje, zjednodušuje, idealizuje. Zeměpisné mapy nejsou, nemohou být a ani nemají být stejné jako krajina, kterou znázorňují. ... Mnohé tzv. úlohy z běžného života jsou těžkopádné a nemetodické. Běžný život je plný zbytečností, mnohomluvnosti, zmatků a nudy, což vše by se mělo z vyučování matematice odstranit.“*

1.2 Dělení slovních úloh a matematizace

1.2.1 Dělení podle oblasti matematiky

O. Odvárko (Odvárko a kol.,1990) dělí slovní úlohy nejprve do dvou skupin, a to na slovní matematické úlohy a slovní úlohy s nematematickým obsahem. Slovní matematické úlohy dále rozděluje na tři hlavní poddruhy: na slovní úlohy s aritmetickým obsahem, slovní úlohy s algebraickým obsahem a slovní úlohy s geometrickým obsahem. Slovní matematické úlohy ve svém zadání zpravidla obsahují čísla, nebo se v nich píše o rovnicích, funkcích, ale žák si je musí převést sám do symbolického jazyka matematiky, např. algebry.

Ukázka:

př. Určete všechna reálná čísla, která mají svou druhou mocninu o 576 větší než svůj čtrnáctinásobek.

Toto je ukázka slovní algebraické úlohy, kterou žák musí dekódovat z jazyka českého do jazyka matematického.

možné řešení: Neznámé číslo označíme x, oborem této proměnné zvolíme množinu **R**, v níž ovládáme kalkul. Jinými slovy použijeme vyjádření pro druhou mocninu x^2 a pro čtrnáctinásobek neznámé výraz $14x$ a rovnicí:

$$x^2 = 14x + 576$$

Algebraická úloha pak zní, řešte v **R** tuto rovnici.

př. Jaké číslo musíme odečíst od čísla 20, abychom dostali 9? (Slovní aritmetická úloha)

př. Vyšetřete množinu všech rovin v prostoru, které mají od dvou daných bodů $A; B$ stejné vzdálenosti. (Slovní úloha s geometrickým obsahem)

Mnohem obtížnější jsou pro žáky, dle mého názoru, slovní úlohy s nematematickým obsahem. Což jsou úlohy s textem, ve kterém se vyskytuje alespoň jeden termín nepatřící do jazyka žádné matematické teorie. Žák při řešení takovéto úlohy musí tedy sám přejít k úloze matematické, která mu pomůže vyřešit původní úlohu. Tento přechod se nazývá **matematizace slovní úlohy**. Dále pak musí řešitel úlohy přejít zpět od výsledku matematické úlohy k výsledku slovní úlohy, tomu se říká **interpretace výsledku matematické úlohy v původní situaci**.

Ukázka:

př. Podél jedné strany parku má být vysazeno stromořadí vzácných dřevin. V zásilce sazenic ze zahraničí je však o 24 zdravých jedinců méně, než je třeba k dodržení šestimetrové vzdálenosti stromků od sebe. Po rozhodnutí sázet tyto stromky v osmimetrových vzdálenostech zbude 26 zdravých sazenic. Kolik zdravých stromků bylo dovezeno, kolik jich bude vysázeno a jak dlouhé stromořadí vznikne?

možné řešení: Slovní úloha se týká stromků, cesty podél parku, matematické termíny v jejím textu zastupují pouze čísla 24, 6, 8, 26. Je zřejmé, že úlohu si můžeme nakreslit, představit, a tak zaměříme své úsilí k matematizaci dané úlohy na slovní geometrickou úlohu. Je potřeba si uvědomit, že velkou roli budou hrát stromky zasazené v rozích parku, označíme tedy krajní body písmeny A, B. Dále budeme dělit úsečku AB na shodné části. Protože máme zadány informace ke dvěma způsobům dělení (po 6 a 8 metrech), budou se počty krajních bodů jednotlivých částí lišit o 24 + 26, tedy o 50 krajních bodů.

Slovní geometrická úloha tak bude znít: Úsečku AB, jejíž velikost neznáte, rozdělte na shodné úsečky. Je-li velikost každé z nich rovna 6 m, je jich o 50 více než při velikosti rovné 8 m. Kolik krajních bodů úseček vznikne v prvním a kolik ve druhém případě? Jakou velikost má úsečka AB?

Dále pak tuto úlohu převedeme na matematickou úlohu algebraickou, kde počet úseček o velikosti 6 m označíme x, počet úseček o velikosti 8 m označíme $x-50$, velikost úsečky označíme $6x$, respektive $8(x-50)$ a počet krajních bodů $x+1$, respektive $x-49$. Algebraická úloha pak tedy zní:

Řešte v **N** rovnici $6x = 8(x-50)$.

Po úspěšném vyřešení této rovnice, jejímž kořenem je číslo 200 následuje ještě interpretace výsledku. A to, že původně se počítalo s vysazením 201 stromků (počet krajních bodů úseček), dovezeno bylo 177 zdravých sazenic (plánovaných 201 stromů mínus 24), vysazeno bude 151 stromků (počet krajních bodů úseček). A délka stromořadí je 1 200 m (plyne z velkosti úsečky AB).

U slovních úloh s nematematickým obsahem se můžeme setkat s matematizací různými způsoby, neboť ne všichni řešitelé mají stejnou matematickou zkušenost a hlavně je to úloha, která není přesným „obtiskem“ slovní úlohy.

1.2.2 Dělení podle kontextu slovní úlohy

Dělení podle kontextu úlohy je další možnost, jak slovní úlohy rozdělit. Je to dokonce způsob dělení slovních úloh, se kterým se setkáváme nejčastěji v učebnicích matematiky. Je to například dělení na úlohy o pohybu, úlohy o společné práci, úlohy na směsi, úlohy o dělení celku na části. Tyto úlohy se žákům zdají zpočátku obtížné, ostatně jako jiné slovní úlohy, ale časem se naučí aplikovat algoritmus, který jim pomáhá úlohy vyřešit (matematizovat si je) a nakonec je řeší bez větších problémů a někteří i radši než slovní úlohy, u kterých si musí matematizaci provést sami na základě logického uvažování. Dle mých zkušeností se do takových úloh pouštějí i méně zdatní žáci, neboť mají k řešení „návod“ v podobě naučeného algoritmu. Na jednu stranu je, myslím, tento způsob řešení dobrý v tom, že i slabší žáci mohou zažít úspěch, osvojí si alespoň nějaký způsob matematizace slovní úlohy, ale na druhou stranu nenutí žáky nad úlohou přemýšlet. Žák může pouze aplikovat naučený způsob řešení na základě toho, že se v textu vyskytne „signální slovo“, které napoví, že se jedná zrovna o úlohu na směsi a na to použije daný algoritmus.

1.3 Proces řešení slovních úloh

J. Novotná (2000) uvádí, že v literatuře je procesu řešení slovních úloh věnována veliká pozornost, a jako příklad vyjmenovává tyto publikace: (Polya, 1945, Vyšín, 1972, Fridman, 1977, Odvárko a kol. 1990, Hejný 1995, Kratochvílová, 1997, Krupka, 1997).

Já už jsem v předchozí kapitole představila proces řešení slovních úloh, podle (Odvárko a kol., 1990) s nematematickým obsahem. O. Odvárko dělí řešení do tří fází: matematizace situace, řešení vzniklé matematické úlohy a návrat do kontextu zadání. Dále pak Odvárko klade důraz na dvojí zkoušku a to nejprve zkoušku u řešení matematické úlohy a následně zkoušku kontextovou. Je to velmi obecně popsaný proces řešení slovních úloh.

J. Novotná (2000) rozdělila etapy řešení slovních úloh velmi podobně, nicméně oproti Odvárkovi daleko podrobněji.

1) *Etapa uchopování*, která obsahuje
   a. uchopování všech objektů a vztahů a identifikaci těch, které se týkají řešené situace, a eliminace těch, které jsou „navíc“,
   b. hledání a nalezení všech vztahů, které se týkají řešitelského procesu,
   c. hledání a nalezení sjednocujícího pohledu,
   d. získání celkového vhledu do struktury problému.

2) *Etapa transformace* odhalených vztahů do jazyka matematiky a vyřešení odpovídajícího matematického problému.
3) *Etapa návratu do kontextu zadání úlohy*.

Samozřejmě uvedený postup je ideální, žáci bohužel často některé etapy přeskočí. A vzniknou tak problémy při řešení slovní úlohy. Někteří žáci jsou ale neúspěšní z jiného důvodu, a to proto, že nepochopí daný text slovní úlohy. Nedokáží rozklíčovat, co přesně se po nich vlastně chce, a tak nemají ani šanci projít etapou uchopování. Bez správného uchopení pak nemohou transformovat zadání do matematického jazyka, a pokud neproběhne transformace, tak pak ani nemohou projít etapou návratu do kontextu zadání úlohy a tím vlastně ztrácejí šanci na vyřešení slovní úlohy.

Jako poslední příklad jiného pohledu na proces řešení slovních úloh jsem si nechala pohled G. Polya (2016), neboť je nejpodrobnější a tak, jak byl v knize napsán (resp. přeložen) i snáze čitelnější pro laiky, a tedy i pro studenty, kteří by si mohli knihu přečíst. Zároveň je jeho způsob pohledu na řešení slovních úloh velmi návodný pro učitele, obsahuje konkrétní otázky či pokyny, které mohou žákům pomoci nalézt cestu k řešení. Opět je zde rozdělení do tří etap, respektive do čtyř, ale čtvrtá je vlastně již zkouška správnosti a ohlédnutí se zpět za úlohou.

1) *Porozumění úloze* – návodné otázky, pokyny: Co je zde neznámá, Jaké jsou údaje? Jaké jsou podmínky? Je možné vyhovět podmínkám? Jsou podmínky dostatečné pro určení neznámé? Nebo jsou nadbytečné? Nebo obsahují rozpor? Nakreslete si obrázek. Zaveďte vhodné označení.
2) *Navržení plánu řešení* – návodné otázky, pokyny: Už jste viděli úlohu předtím? Znáte nějakou podobnou úlohu? Znáte nějakou větu, která by mohla být užitečná? Podívejte se na neznámou a zkuste přemýšlet o všeobecně známé úloze mající tutéž nebo podobnou neznámou. Tady je úloha příbuzná vaší, která již byla vyřešena. Můžete ji využít? Můžete využít její výsledek, metodu? Umíte úlohu přeformulovat? Umíte si představit nějakou přístupnější příbuznou úlohu? Nebo obecnější či speciálnější úlohu? Analogickou úlohu? Uvažujte pouze část z daných

podmínek a vynechejte jejich další části. Nakolik je pak neznámá určena, a jak se může měnit? Využili jste všechny údaje? Využili jste všechny podmínky?

3) *Realizace plánu* – návodné otázky, pokyny: Při realizaci vašeho plánu řešení překontrolujte každý krok. Vidíte jasně, že tento krok je správný? Umíte dokázat, že je správný?
4) *Pohled zpět* – návodné otázky, pokyny: Umíte překontrolovat výsledek? Umíte zkontrolovat důkaz: Umíte stejný výsledek získat jinak? Vidíte to na první pohled? Umíte použít výsledek nebo metodu na vyřešení jiné úlohy?

I když G. Polya (2016) klade otázky velmi obecně, jsou poměrně návodné a mnohdy žákům pomohou se na úlohu podívat jinak, nebo v ní najít konkrétní údaj, který je důležitý pro řešení. Nejvíce mě zaujal čtvrtý bod, který kromě kontroly řešení nabádá žáky, ale i učitele k hledání jiného způsobu řešení, jelikož je běžné, že pokud žák úlohu vyřeší, zkontroluje výsledek, ubezpečí se, že ho má správně, nemá potřebu hledat jiné řešení. A přiznám se i já, že žáky k hledání jiného řešení nenutím. Ve třídě, kde bývá průměrně 25 žáků, je častým jevem, že některý z nich nalezne řešení vykazující odlišnosti od řešení většinového, a tento svůj postup pak ostatním předvede, čímž nejenže zvýší pozornost třídy, ale zároveň podpoří i zájem o hledání různých způsobů řešení. V dané situaci pak může vyvolat otázky vedoucí k dalším řešením. Žáci pak vidí, že matematika nemusí být jen o jednom nacvičeném postupu, ale že je mnoho cest, jak se dostat k témuž výsledku. Nicméně je vždy lepší, pokud každý žák přijde na jiné řešení sám, protože jen „koukáním“ na další řešení se nemusí naučit řešit slovní úlohy, stejně jako se jen „koukáním“ nenaučí jezdit na kole, obojí je potřeba si vyzkoušet. Dále pak čtvrtý bod otázkou, zda umíme použít výsledek nebo metodu na vyřešení jiné úlohy, nabádá k tomu, abychom si naši metodu prošli znovu a snažili se ji aplikovat, což vede k upevnění znalostí a rozvinutí schopností řešit úlohy.

1.4 Možné obtíže při řešení slovních úloh

Jak už jsem zmínila v předchozích kapitolách, při řešení slovních úloh se mohou vyskytnout obtíže, které znemožní žákovi řešení jeho úlohy. Rozdělila jsem si takové obtíže na obtíže matematického rázu a nematematického rázu. Za matematické potíže považuji takové, které se týkají matematických operací. Např. žák neumí sečíst/ odečíst/ vynásobit/ vydělit dva zlomky, dvě desetinná čísla atd. To znamená, správně ze zadání rozklíčuje, jakou matematickou operaci je třeba použít, ale bez kalkulačky ji neumí správně provést. Nebo u žáka správně proběhne matematizace textu, sestaví např. správnou rovnici, ale nezná algoritmus řešení rovnice, a tak úlohu nevyřeší, neboť nedojde ke konečnému výsledku. Dále může proběhnout správná matematizace textu, ale žák například nezvládá převody jednotek a tudíž konečný výsledek bude špatný. Případně může být žákovi jasné, když bude chtít spočítat, kolik litrů vody má napustit do akvária, musí spočítat objem nádrže, ale na vzorec si nevzpomene nebo si ho nebude umět odvodit, opět u něj není problém s porozuměním textu, s matematizací, ale s obtížemi matematického rázu – neschopnost zapamatovat si nebo odvodit vzorec. Nebo u úlohy z geometrie žák neumí sestrojit trojúhelník, i když všechny předchozí kroky zvládl a ví, že je potřeba sestrojit trojúhelník v určitém měřítku a změřit jeho jednu stranu. Konkrétně mám na mysli úlohu Délka tunelu z učebnice Matematiky pro 7. ročník základní školy, 3.díl od autorů Odvárko – Kadleček str. 17.

úloha:

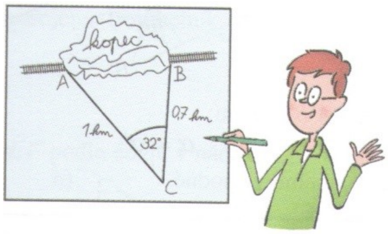
<u>Délka tunelu</u>

Železniční trať povede kopcem. V místě A bude začátek budoucího tunelu a v místě B jeho konec.

Byly zjištěny vzdálenosti AC a BC a velikost úhlu ACB.

Zjisti, jak dlouhý bude tunel.

obrázek k úloze:



V učebnici je k obrázku ještě nápověda: Narýsuj si obrázek v měřítku 1 : 10 000 (1 km = 1 000 m = 100 000 cm)

Nápovědu jsem však dětem vytištěnou nedávala, neboť měřítko jsme již měli probrané a podobné úlohy jsme řešili, tudíž jsem usoudila, že by nemusela být nápověda potřeba. Z 22 přítomných žáků úlohu zcela samostatně a správně začalo řešit 13. Zbývající žáci nevěděli, jak úlohu uchopit, provedli zápis formou překreslení obrázku, zakreslili i trojúhelník (bez kopce), ale netušili, co dál. Po nějaké době, kdy již zmíněných 13 žáků mělo v měřítku přepočítané strany trojúhelníku, jsem dětem podala ústní nápovědu, ať si dané strany zmenší v měřítku, které jim vyhovuje a vejde se jim na papír. Zbývajících 9 žáků se tedy pokusilo strany nějakým způsobem zmenšit. Někteří volili cestu nejmenšího odporu a zvolili si měřítko 1 : 100 000, ale při konstrukci přišli na to, že trojúhelník s tak malými rozměry je pro ně nemožné narýsovat, a tak provedli přepočet, tři žáci úlohu nevyřešili vůbec, neboť neuměli zmenšovat pomocí měřítka. Ostatní žáci, celkem jich tedy bylo 19, zvolili většinou měřítko 1 : 10 000 a začali s konstrukcí. Z těchto 19 žáků místo ostrého úhlu 32° jeden narýsoval úhel tupý 148°, jeho řešení úlohy tedy ztroskotalo na tom, že neumí narýsovat úhel pomocí úhloměru, i když všechny ostatní kroky zvládl. Další dva žáci nedokázali sestrojit trojúhelník ze dvou stran a úhlu jimi sevřeném. Tudíž opět věděli, co je potřeba pro vyřešení úlohy udělat, porozuměli zadání (ať už s nápovědou nebo bez ní), ale chyběl jim matematický aparát (konstrukce úhlu nebo celého trojúhelníku) ke správnému dořešení. Nakonec ze zbývajících 16 žáků, kteří správně sestrojili trojúhelník, jeden zapomněl změřenou stranu opět zvětšit a uvedl, že tunel bude měřit přibližně 6 cm a ani se nad tímto výsledkem nepozastavil. Na můj dotaz, zda mu šesticentimetrový tunel nepřipadá zvláštní, řekl: „Jé, ahá, já to zapomněl zpátky zvětšit." Až tedy na tohoto posledního žáka, všech šest, kteří úlohu nevyřešili (ani po nápovědě s měřítkem), ji nevyřešili proto, že neuměli uplatnit správně zvolený matematický aparát.

Častěji se však setkávám s tím, že žáci nevědí, jak úlohu uchopit, nebo co se po nich v úloze vlastně chce. Nerozumí jejímu zadání, či jen některým slovům v zadání. A to ve své bakalářské práci považuji za obtíže nematematického rázu, protože velmi často, po důkladném vyjasnění některých pojmů nebo po nakreslení obrázku či schématu nebo po reformulaci úlohy žák ví, co má dělat. A právě tyto jazykové obtíže neboli nematematické parametry ovlivňující obtížnost slovních úloh ve své bakalářské práci hlouběji popisuji. Z hlediska jednotlivých fází řešení slovních úloh vlastně žáci tápou již v té první části, ve fázi uchopování úlohy. Neschopnost některých žáků přečíst s porozuměním zadání slovní úlohy je způsobena mnoha různými faktory, a to nejen na straně žáka, ale i na straně autora slovní úlohy. A samotné porozumění, či spíše neporozumění textu slovní úlohy pak většinou vede ke špatnému zápisu informací, k užití nadbytečných informací a celkově ke špatnému nebo ne zcela správnému řešení.

2 Parametry ovlivňující obtížnost slovních úloh

Parametrů ovlivňujících obtížnost slovních úloh je velmi mnoho. Podle L.M. Fridmana (v Mareš, 1980) je základních parametrů 6, ale sám si je vědom toho, že to není konečný počet. Mezi tyto parametry patří struktura úlohy, logická správnost úlohy, stupeň určenosti úlohy, míra zobecnění úlohy, míra úplnosti zadání a způsob jazykového vyjádření úlohy. Dále se budu zabývat jen jazykovým vyjádřením úlohy.

Každá slovní úloha je dle Fridmana formulována v určitém jazyce, který může žákovi usnadnit nebo zkomplikovat řešení. Fridman studoval, jak žáci úlohy řeší, a dospěl k závěru, že žáci nejčastěji text úlohy dekódují jako celek. Ale tento přístup je pro ně velmi náročný a tak často chybují nebo se dopouští nepřesností. Lepší je dle něj přístup, kdy se úloha rozebírá po částech, určuje typická slovní spojení pro jednotlivé vztahy mezi veličinami. Nicméně parametr jazykového vyjádření byl v článku (Mareš, 1980) zmíněn pouze okrajově a nebyl podrobněji zkoumán.

V rámci výzkumu Grantové agentury České republiky (GA ČR) 16-06134S – Slovní úlohy jako klíč k aplikaci a porozumění matematickým pojmům byly zkoumány některé parametry ovlivňující obtížnost řešení slovních úloh a to především z jazykového hlediska. Tvorba testovacích úloh probíhala ve spolupráci pracovníků katedry matematiky a didaktiky matematiky, pracovníků katedry českého jazyka a pracovníků katedry psychologie Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy. Proběhlo šest vln testování na šesti školách. Zkoumanými parametry v tomto výzkumu (Vondrová a kol., v rkp.) byly:

- Zkušenostní kontext (obeznámenost žáků s kontextem úlohy),

- Nadbytečné informace v zadání úlohy (včetně přítomnosti nadbytečného numerického údaje),

- Verbální a neverbální složka zadání slovní úlohy (např. vliv přítomnosti různých druhů obrázků),

- Jazyková explicitnost zadání slovní úlohy (např. přítomnost modálního výrazu, jazyková ustálenost),

- Pořadí informací v zadání slovní úlohy,

- Návodnosti (návodnost čísel a návodnost vazby mezi objekty pojmenovanými v úloze),

- Operátorové úlohy,

- Antisignál (tedy slovo/slova vedoucí k opačné operaci, než vyžaduje správné řešení),

- Proporční a aditivní úlohy a Úměrnosti

I přesto, že výzkum byl opravdu podrobný a zabýval se mnoha parametry, parametrů, které ovlivňují slovní úlohy, je mnohem více viz např. verze parametrů z GA ČR č. 16-06134S ze dne 25. 4. 2016

V této verzi jsou parametry uspořádány velmi přehledným způsobem do tabulky a rozděleny do 5 hlavních kategorií:

1) Parametry spojené se způsobem zadání slovní úlohy – text jako celek
2) Parametry spojené se způsobem zadání slovní úlohy – slova
3) Parametry spojené s druhem vyžadované odpovědi
4) Matematické parametry
5) Ostatní

Každá z těchto kategorií má mnoho pododdílů, dle kterých lze zkoumat obtížnost slovních úloh. Z lingvistického hlediska jsou velmi zajímavé první tři kategorie, čtvrtá se již zabývá matematickým hlediskem, což není obsahem mé práce. Mezi matematické parametry např. patří: Číselný obor, ve kterém je úloha zadána, familiárnost čísel, role čísel, nutnost znalosti vzorce, číselná soustava, výskyt proměnných v zadání, nutnost znalosti nějakého specifického způsobu řešení daného typu úloh (např. úlohy na pohyb, úlohy z oblasti pravděpodobnosti). V kategorii ostatní jsou pak parametry dva: Zda spadají dovednosti vedoucí k správné odpovědi do ŠVP pro daný ročník a druhým parametrem je zde nutná míra abstrakce, něco objevit, s něčím pracovat co v reálném světě nemůže nastat (např. půl člověka).

Já se dále trochu podrobněji zaměřím na první tři kategorie. Ještě než se mi dostaly do rukou informace týkající se výzkumu a verze parametrů, sama jsem si v zaměstnání všímala opakujících se potíží při žákovských řešeních slovních úloh. Nebylo jich mnoho, ale opakovaly se často. Všechny jsem pak objevila ve verzi parametrů z GA ČR č. 16-06134S a po pročtení dalších parametrů jsem si uvědomila i další, které jsem sama neviděla.

2.1 Parametry spojené se způsobem zadání slovní úlohy – text jako celek

V souboru parametru z GA ČR č. 16-06134S je vyjmenováno přes dvacet různých parametrů týkajících se textu jako celku. Tvoří zde nejobsáhlejší oblast parametrů, které ovlivňuji slovní úlohu. A přiznám se, že i mě v této oblasti napadlo nejvíce faktorů, které mohou žákovo řešení ovlivnit, jen jsem si své vlastní parametry netřídila do větších skupin. Vyjmenuji pouze některé z parametrů, které mě zaujaly, vymezím ty, které napadly mě samotnou (i když jsem je přesně takto nedefinovala), uvedu nějaké příklady slovních úloh a případné problémy při jejich řešení se kterými jsem se setkala, nebo které se objevily ve výzkumu, případně uvedu příklady z výzkumu, který probíhal na Pedf UK a závěr z výzkumu.

Nejzajímavější mi přišly tyto parametry:

a) Podíl neverbální složky na výstavbě slovní úlohy
b) Srozumitelnost neverbální složky, která je nutná pro řešení úlohy.
c) Délka textu
d) Výskyt negace
e) Odstupňovanost hierarchie syntaktických struktur
f) Kontext úlohy
g) Nutnost znalosti přímo nezadaných údajů (např. že leden má 31 dní, hodina 60min) – chybějící údaje
h) Nadbytečné údaje
i) Některé části textu zvýrazněny (tučně, podtržením).
j) Grafické ztvárnění textu (např. věty strukturovány do odstavců vs. jednolitý text)

2.1.1 Délka textu a nadbytečné údaje

Z výše uvedených parametrů mě samotnou napadla délka textu jako první. Na základě mnoha diskuzí s kolegy v práci jsme se jednoznačně shodli, že délka textu slovních úloh se podílí na úspěšnosti žákovských řešení. Mnohdy, když zadám žákům delší slovní úlohu, tak aniž by tušili, co se po nich v úloze chce, začnou vzdychat, tváří se nešťastně a najdou se i tací, kteří nahlas pronesou: „To je moc dlouhý, tomu nerozumim." A to vše ihned po nalistování dané úlohy. V učebnicích, které používáme (Odvárko – Kadleček) je několik slovních úloh, které jsou svým rozsahem zadání i na půl strany učebnice, často bývají doplněny obrázkem nebo tabulkou. Ale z mého pohledu to nejsou úlohy matematicky obtížné. Většinou je potřeba se zorientovat v textu a pak v tabulce (obrázku) vyhledat potřebné údaje a zapsat odpověď, případně provést jednoduchou početní operaci. Vždy úlohu s delším textem zadávám samostatně, tím myslím, že žáci nemají na výběr pracovat na jiných úlohách a tuto si nechat na konec, nebo ji neřešit vůbec. Snažím se žáky motivovat k jejímu řešení. A to tedy nejen nátlakem, kdy nemají možnost řešit jinou úlohu, ale i tím, že daná úloha je např. z běžného života (jízdní řád, vyúčtování služeb, sportovní tabulky), nebo alespoň tím, ať zkusí úlohu přečíst a uvidí, že délka textu nevypovídá nic o tom, že úloha musí být složitější.

Moji žáci vědí, že se mohou kdykoliv, když je samostatná práce přihlásit o pomoc, a to jak spolužáků (těch rychlejších, kteří už jsou s prací hotovi), tak mou. Tudíž když ani po přečtení nevědí, kde začít, dostane se jim malé pomoci. Na závěr pak úlohu kontrolujeme společně. Bohužel i přes zařazování těchto jednodušších, avšak delších, slovních úloh si všichni žáci za 4 roky, které studují na 2. stupni ZŠ, nezvyknou, že dlouhá úloha nemusí vždy znamenat obtížná a zděšené výrazy vídám nadále.

Jako příklad takové úlohy uvedu úlohu, kterou jsem zadala v 6. ročníku, pochází z učebnice Matematiky pro 6. ročník základní školy, 1.díl od autorů Odvárko – Kadleček str. 39 úloha 15.

úloha:

Paní Kovářová, která žije v Hlinsku v Čechách, se vrací z podzimního výletu do Vídně domů. Jede vlakem Eurocity „Antonín Dvořák“.

16 EC / SC ANTONÍN DVOŘÁK

WIEN SÜDBAHNHOF – PRAHA HL.N.

15.58		WIEN SÜDBAHNHOF	
16.55–16.57		BŘECLAV	ČDCentrum
17.30–17.32		BRNO HL.N.	ČDCentrum
18.58–18.59		PARDUBICE HL. N.	ČDCentrum
19.20	EC	**Jaroslav Hašek** Kolín 19.42 – Praha hl.n. 20.31	
19.33	Os	Hradec Králové hl.n. 19.55 – Borohrádek 20.41 – Choceň 20.59 (nejede 24., 31.XII.)	
19.36	Os	Chrudim 20.00 – Slatiňany 20.14 – Žďárec u Skutče 20.42 – Hlinsko v Čechách 21.01 (Pardubice hl.n. – Slatiňany nejede 24., 31.XII., Slatiňany – Hlinsko v Čechách jede v ⚒ nejede 22.XII. – 2.I.)	
19.42	Os	Přelouč 19.55 – Kolín 20.31 (nejede 24., 25., 31.XII.)	
20.01		PRAHA HL.N.	

a) V kolik hodin vyjíždí vlak z Vídně?

b) Jak dlouho trvá jízda z Wien Südbahnhof do Břeclavi? (První z uvedených časových údajů ve stanici Břeclav označuje příjezd, druhý odjezd.)

c) Kde bude paní Kovářová přestupovat?

d) V kolik hodin bude v Pardubicích?

e) Kolik minut bude paní Kovářová čekat v Pardubicích na přípoj do Hlinska v Čechách?

f) V kolik hodin bude v Hlinsku v Čechách?

g) Jak dlouho jí bude trvat celá cesta z Vídně do Hlinska?

h) Jak dlouho jede EC „Antonín Dvořák“ z Vídně do Prahy?

Konkrétně u této úlohy jsem předpokládala, že se opět najdou žáci, kteří úlohu nebudou chtít vůbec řešit, nebo že vzápětí, po přečtení úlohy se několik žáků přihlásí, protože nebudou rozumět tabulce s jízdním řádem. Obě má očekávání se naplnila. Protože tato kapitola se věnuje délce textu, budu se zabývat pouze tímto problémem, nikoliv neporozuměním tabulce. Po zadání úlohy třída „zašuměla“, po chvíli se jeden žák přihlásil a zeptal se, jestli mají vypracovat odpovědi na všechny otázky. Po mé kladné odpovědi následoval povzdech z více lavic. Po další chvilce, která by mohla odpovídat rychlejšímu přečtení úlohy, se jedna žákyně zeptala, zda na vypočtení mají celou vyučovací hodinu (tuto úlohu jsem zadala na začátku vyučovací hodiny). Po mé záporné odpovědi a uvedení časového limitu na max. 15 minut se současně ozvali dva žáci s výkřikem: „To nemůžeme stihnout." Už jen z těchto reakcí lze posoudit, že delší text žáky děsí, uvede je do stresu, který jsem nechtěně podpořila časovým limitem. Takový stres se pak může negativně podepsat na jejich řešení.

V učebnici tato úloha zabere celou stranu bez šesti řádků, na kterých je další slovní úloha. Zkusila jsem tuto úlohu přepsat na počítači tak, jak je to zde v mé práci, a jízdní řád jsem rozdala na zvláštním papírku. Očekávala jsem, že se úloha bude zdát na první pohled kratší a žáci se pustí do řešení bez větších obtíží. Částečně se mé očekávání naplnilo. Nikdo nevykřikl, že úloze nerozumí, že je moc dlouhá. Třída začala „šumět" již při rozdávání papírů, což bylo, jak se později ukázalo, kvůli tomu, že se obávali, že jde o test. Co se týká délky textu, tak padl pouze jeden dotaz a to, zda mají vypracovat všechny odpovědi. Opět po mé kladné odpovědi následoval povzdech několika žáků. Následně jsem je upozornila, že maximálně mají 15 minut. Reakce byla pouze taková, že se pár žáků podívalo na hodiny na stěně ve třídě. Ale nezdálo se, že by se časového limitu báli. Vše ale mohlo být způsobeno složením třídy.

Z čehož mi vyplývá, že by mohlo kromě objektivní délky textu záležet i na tom, jaký prostor text zaujímá na stránce. Když jsem text přepsala, vešla se mi tři zadání na A4 a jízdní řád dostali žáci samostatně, „zděšení" z délky textu nebylo takové jako u první šesté třídy, kdy je text bez několika řádků na celou stranu učebnice a proložený jízdním řádem. Ale mohlo jít pouze o náhodu.

Na druhou stranu mám vyzkoušeno, že pokud je slovní úloha zadaná pro žáka lákavě, neděsí ho délka textu. Každé pololetí po uzavření známek věnuji jednu, na konci roku i více hodin, matematickým pohádkám. Využívám k tomu knihu Bylo nebylo (matematické pohádky) pro 2. stupeň od M. Veselého, kde každá matematická pohádka, která je vlastně slovní úlohou, zabere jednu i více stran knihy. Tento druh slovních úloh žáci vítají a do jejich řešení se pouštějí s nadšením. A to text i několikanásobně přesahuje délku slovních úloh v učebnici a motivací pro žáky není ani to, že by úloha byla ze života, ani odměna ve formě známky či nějaké sladkosti, odměnou je jim opravdu jen to, že dojdou ke správnému výsledku. Možná je to dáno i netradičností úloh a hlavně humorným podáním známých i méně známých příběhů. Nezkoumala jsem nijak úspěšnost řešení, ale v těchto hodinách jsem nikdy nezaslechla, že je to dlouhé a úloze nerozumí. Tudíž případná neúspěšnost při řešení dlouhé slovní úlohy by zde nebyla založena jen na tom, že by žáka od řešení odradila délka textu.

Délkou textu se zabývá i výzkum (Vondrová a kol., v rkp.) a to konkrétně v kapitole 6 s názvem Nadbytečné informace v zadání slovní úlohy (délka textu). Jak už z názvu kapitoly vyplývá, délkou textu se výzkum zabýval v rámci nadbytečných informací. To znamená, že délku slovní úlohy prodlužovali přidáním nadbytečného textu nebo nadbytečného numerického údaje na různá místa zadání slovní úlohy – na začátek zadání, do textu zadání, anebo měl dodaný text funkci vysvětlující. Pro lepší představu uvedu úlohy, které byly pro testování žáků použity. Pro lepší přehlednost, vyznačím, stejně jako autoři výzkumu, nadbytečný text kurzívou. Žáci ve výzkumu neměli text nijak zvýrazněný.

ukázka úlohy pro 3.ročník, kdy byl text přidán na začátek zadání:

původní znění: Na zastávce Jindřišská z tramvaje vystoupili 3 cestující a 5 jich nastoupilo. Dále pokračovalo 13 cestujících. Kolik cestujících bylo v tramvaji, než přijela na zastávku Jindřišská?

úloha s přidaným textem: *Tramvaj číslo 6 jede po své trase z Libně do Vršovic. Je to nový typ tramvaje, který jezdí v Praze teprve krátce*. Na zastávce Jindřišská z tramvaje vystoupili 3 cestující a 5 jich nastoupilo. Dále pokračovalo 13 cestujících. Kolik cestujících bylo v tramvaji, než přijela na zastávku Jindřišská?

ukázka úlohy pro 7. ročník, kdy byl text přidán do textu zadání:

původní znění: Výletníci ujdou 4,5 kilometru za hodinu. Na výlet v celkové délce 31,5 kilometru se vydají v 9:00. Rádi by dorazili zpět nejpozději v 17:30. Kolik nejvýše času mohou celkem strávit při své cestě odpočinkem?

úloha s přidaným textem: *Výletníci* mají bezpečně ověřeno, že *ujdou 4,5 kilometru za hodinu. Na* zítřek si naplánovali náročný okružní *výlet v celkové délce 31,5 kilometru.* Na cestu by se chtěli ze svého tábora *vydat v 9:00 a rádi by dorazili zpět nejpozději v 17:30. Kolik nejvýše času mohou celkem strávit při své cestě odpočinkem* a přestávkami na občerstvení*?*

ukázka úlohy pro 3. ročník, kdy dodaný text měl funkci vysvětlující:

původní znění: Na letní tábor se zaměřením na sportovní aktivity a angličtinu se přihlásilo 36 dětí. Pokojů je třeba objednat 4krát méně, než je přihlášeno dětí. Kolik je třeba objednat pokojů?

úloha s přidaným textem: *U Berouna se koná letní tábor, který je zaměřený* na sportovní aktivity a na angličtinu. *Letos* se na tábor přihlásilo 36 dětí. *Tábor je v krásném prostředí u řeky a děti bydlí v hezkém hotelu s mnoha pokoji. Na každém pokoji je vždy několik postelí. V hotelu* je třeba objednat 4krát méně pokojů, než *kolik se* přihlásilo dětí. Kolik *pokojů se musí pro tábor* objednat?

Velmi stručně řečeno u úloh s nadbytečnými informacemi výzkum ukázal, že pokud byly nadbytečné informace vloženy uvnitř zadání základního textu, v nižších ročnících se rozdíly při řešení delších variant projevily jako signifikantní, kdežto s postupujícím věkem přestaly být pro žáky problémem. Ale problematika informací navíc je komplexní a závisí na porozumění jednotlivých žáků. Výzkum tedy nepotvrdil původní předpoklad, že delší text znamená pro žáky obtížnější úlohu. Což se vlastně shoduje i s mým zjištěním, kdy žáci spíše odmítají řešit delší slovní úlohu, než že by ji neuměli správně vyřešit. A tím, pak bývají v testech v hodině u řešení slovních úloh méně úspěšní. Pokud jsou na úlohu připraveni, to znamená, že očekávají, že budou řešit delší slovní úlohu, ať už v hodině, kdy řešíme jen matematické pohádky nebo v již zmiňovaném výzkumu, kde věděli, že test je složen ze samých slovních úloh, projevují větší snahu úlohu řešit a délka textu tedy jen málo ovlivní jejich úspěšnost.

Nadbytečný údaj, jako parametr, tak jak ho mám ve výčtu parametrů v kapitole 2.1, chápu jako nadbytečný numerický údaj. Výzkum bere v potaz nadbytečný údaj, ať už jako text či nadbytečný numerický údaj a spojuje je do jedné kapitoly. Já to vzhledem k mému výčtu parametrů rozdělím.

2.1.2 Nadbytečný údaj

Jak jsem již zmínila, nadbytečný údaj chápu jako nadbytečný numerický údaj. Z mého pohledu je to údaj, který může žáky přivést ke špatnému výpočtu nebo je minimálně zmást natolik, že se údajem budou zabývat a pozdrží je to v jejich práci. Zároveň si myslím, že při použití nadbytečného numerického údaje se ukáže, kdo čte slovní úlohu s porozuměním a kdo jen zkouší různé matematické operace ať už náhodně nebo na základě známých slovních vazeb.

Ve svých hodinách se setkávám jak s tím, že žáci údaj bez větších problémů eliminují, tak i s tím, že se mě ptají, proč je v úloze uveden, když ho nepotřebují, tak i s tím, že se s údajem snaží počítat. Když si pak úlohu s nadbytečným numerickým údajem kontrolujeme, často se ozve žák, který s nadbytečným numerickým údajem počítal jen proto, že si myslel, že musí využít všechny údaje. Tito žáci, když získají více zkušeností s typem úloh, kde je vložen nadbytečný numerický údaj, většinou později bez problémů nadbytečný údaj eliminují a nijak se nepozastavují nad tím, že nemusí použít k výpočtu všechny údaje v úloze.

Osobně úlohy s nadbytečným numerickým údajem považuji za obtížnější, protože zde nestačí aplikovat naučený postup (například ve výpočtech pomocí trojčlenky, kdy se v zadání vyskytne čtvrtý číselný údaj), ale žáci musejí úlohu číst opravdu s porozuměním a případný nadbytečný údaj eliminovat. Zároveň je ráda zařazuji do výuky, protože mám pocit, že čím častěji jsou žáci nuceni nad úlohou přemýšlet, zda v ní není opět něco navíc, tím spíše pak čtou všechny slovní úlohy pozorněji a přemýšlí nad vztahy mezi jednotlivými veličinami.

ukázka úlohy (z výzkumu) s nadbytečným numerickým údajem pro 6. a 7. ročník:

původní znění: V továrně na zpracování kovů tento týden pracují na výrobě plechovek. V pondělí, úterý i ve středu jich vyrobili stejný počet. Dohromady to za tyto tři dny bylo 14 685 plechovek. Ve čtvrtek jich vyrobili o 319 více než v pondělí. Kolik plechovek musí v pátek ještě vyrobit, aby mohli zákazníkovi odeslat 25 000 kusů, které si objednal?

úloha s přidaným numerickým údajem: V továrně na zpracování kovů tento týden pracují na výrobě plechovek *v celkové ceně 12 500 EUR*. V pondělí, úterý i ve středu jich vyrobili stejný počet. Dohromady to za tyto tři dny bylo 14 685 plechovek. Ve čtvrtek jich vyrobili o 319 více než v pondělí. Kolik plechovek musí v pátek ještě vyrobit, aby mohli zákazníkovi odeslat 25 000 kusů, které si objednal?

I úlohy s nadbytečným numerickým údajem měly několik variant dle umístění v zadání úlohy, a to před všechny údaje potřebné pro řešení, za údaje potřebné pro řešení a mezi údaje potřebné pro řešení. Nebudu zde uvádět všechny varianty. (Vondrová a kol.,rkp.)

Výsledek šetření ukázal, že umístění nadbytečného numerického údaje v rámci textu zadání slovní úlohy vliv na obtížnost nemá, zatímco jeho charakter ano. Charakterem nadbytečného údaje je zde myšleno to, do jaké míry žákovi dovoluje, aby ho začlenil do úlohy. Z pohledu charakteru nadbytečného údaje se opět mohou slovní úlohy třídit a to konkrétně dle toho, do jaké míry nadbytečný údaj dovoluje žákovi, aby ho začlenil do výpočtu. Vznikly tak tři situace, a to, kdy je snadné zařadit nadbytečný údaj, kdy je to obtížné a kdy je to téměř nemožné.

U varianty, kdy je snadné zařadit nadbytečný údaj, došli N. Vondrová a kol. ke zjištění, že nemusí žákovu úspěšnost ovlivnit, pokud žák správně tvoří situační model. Pokud si ho však správně nevytvoří, může se stát, že nadbytečný údaj do svého výpočtu zařadí nesprávně. U dalších dvou variant bylo zařazení nadbytečného údaje obtížné, až téměř nemožné. Dle předpokladu v jednotlivých řešeních nenašli žádnou stopu po výpočtech s nadbytečným údajem, ale i přesto, byli žáci v řešení variant s tímto nadbytečným údajem méně úspěšní. Z čehož vyplynulo, že je možné, že nadbytečný údaj zatěžuje žáky v tom smyslu, že ho mají v paměti, dokud nezjistí, k čemu ho potřebují a zároveň jim to ztěžuje orientaci v úloze. Další možností je, že žák se snaží nadbytečný údaj do úlohy začlenit za každou cenu, ale nedaří se mu to, a tak řešení takové úlohy vzdá. Tato teze se jim pak potvrdila až následnými rozhovory se žáky, neboť pouze z písemného řešení to poznat nelze. Nakonec došli k závěru, že vliv nadbytečného numerického údaje s věkem slábne.

Z těchto výsledků mi vyplývá, jak důležité je se žáky úlohy s nadbytečnými údaji probírat, neboť pak si budou jistí, že nemusí k výpočtu vždy použít vše, co je napsané v zadání. Nestačí tedy jen slovní úlohy opravit a oznámkovat, ale při nejmenším připojit komentář a ještě lépe si se žákem promluvit. V běžných třídách není prostor na promlouvání s každým žákem, ale má zkušenost je taková, že stačí úlohu společně opravit, zmínit před celou třídou různá úskalí, opakující se problémy a mnoha žákům to pomůže. Někteří se pak sami aktivně ptají, ať už v hodině nebo po konci hodiny. Důležité však je, řešení úloh probrat slovně, protože červeně škrtnutá úloha žákovi neřekne, kde udělal chybu. Můj pocit, ovšem nijak vědecky nepodložený, je ten, že čím více s žáky takové úlohy procvičuji, tím jsou úspěšnější v jejich řešení. Ve vyšších ročnících neslýchám již otázky: „K čemu je tam tedy ten údaj?“ nebo stížnost typu: „Já jsem se to tam snažil nacpat, když je to v zadání.“ Se závěrem výzkumu nadbytečného numerického údaje tedy plně souhlasím a jen dodávám, že si myslím, že veliký vliv kromě věku, má i určitá počtářská zkušenost a to, že se žáci již s nadbytečným numerickým údajem víckrát setkali.

2.1.3 Nutnost znalosti přímo nezadaných údajů

Další parametr, který u slovních úloh řeším v hodinách často, je nutnost znalosti přímo nezadaných údajů jako například, že den má 24 hodin, které měsíce mají 31 dní, které 30, zda je přestupný nebo nepřestupný rok, případně i to, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180°.

Většinu údajů z běžného života na druhém stupni již žáci znají. Problém pak nastává v situaci, kdy je potřeba v paměti najít odbornější znalost, buď vzorec pro rychlost z dráhy a času nebo již zmíněný součet vnitřních úhlů v trojúhelníku. Právě na součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je v řadě učebnic Odvárko – Kadleček několik příkladů. A to již v řadě pro 6. ročník, kdy žáci tuto vlastnost trojúhelníku teprve objevují, ale i v ostatních řadách. V učebnici pro 8. ročník ve 2. dílu na str. 48 je úloha 18.

úloha:

V trojúhelníku ABC je velikost vnitřního úhlu β dvojnásobkem velikosti úhlu α velikost úhlu γ je o 20° menší než velikost úhlu β. Urči velikosti všech vnitřních úhlů tohoto trojúhelníku.

možné řešení:

Nejprve je potřeba označit jeden úhel, nejvýhodnější se jeví úhel α, jako neznámou x. Dále pak dle zadání bude úhel β roven $2x$ a úhel γ lze zapsat jako $2x - 20$. V následujícím kroku je potřeba si uvědomit, že součet všech tří úhlů v trojúhelníku je roven 180° a rovnice je sestavena, úloha je převedena na algebraickou úlohu typu řešte v **R** rovnici:

$$180 = x + 2x + 2x - 20$$

Po vyřešení dané rovnice získáme výsledek $x = 40$

A po interpretaci výsledku tedy velikosti všech tří úhlů, 40°, 80° a 60°.

Tato úloha je zadaná v souhrnných cvičeních k opakování rovnic, tudíž předpokládám, že se žáci budou snažit sestavit rovnici, neboť právě budou mít učivo procvičené. Může nastat několik situací a to, že vůbec neumějí sestavit rovnici, nevědí, který úhel je výhodné zvolit jako neznámou a neumí zapsat pomocí neznámé úhly ostatní. Druhá možnost, která může nastat, je ta, že dokáží úhly zapsat pomocí neznámé, ale nesestaví rovnici a to proto, že buď neví, jaký je součet vnitřních úhlů v trojúhelníku, nebo si neuvědomí, že to je onen chybějící údaj. V hodinách se setkávám v osmém ročníku ale spíše s tím, že si neuvědomují, že si neznámý údaj musí sami doplnit a po nápovědě, že potřebují znát ještě součet všech vnitřních úhlů v trojúhelníku, pak úlohu bez problému vyřeší. Zanedbávám tedy situaci, kdy žáci neumí sestavit rovnici, ani úlohu nebudou řešit pomocí obrázku nebo logicky.

Myslím si, že chybějící údaj ve slovní úloze může negativně ovlivnit žákovo řešení. Ve větší míře, na základě mých osobních zkušeností, žák bude méně úspěšný v řešení slovní úlohy, pokud údaj není z běžného života, ale z odbornější oblasti, např. matematiky či fyziky. Opět si myslím, že žáci budou v řešení úloh s chybějícím údajem úspěšnější, čím častěji se s nimi setkají. Že se jim, stejně jako u úloh s nadbytečným údajem, přestane zdát nepochopitelné, že mohou použít i údaj, který v úloze není zadán, že mohou využít svou vlastní zkušenost.

Výzkum, který by řešil vliv parametru chybějícího údaje ve slovní úloze, jsem ve mně dostupné literatuře nenašla, ale věřím, že by mohl být přínosný pro vyučující matematiky a možná stejně překvapivý, jako výzkum týkající se délky textu.

2.1.4 Kontext úlohy

Vždy jsem si myslela, že na kontextu úlohy až tak moc nezáleží, ale praxe a v neposlední řadě i má dcera, mě vyvedly z omylu. Kontext úlohy, jak ho chápu já, je srozumitelnost situace zadané v úloze. To znamená, pokud je žákovi situace v úloze známá, řeší ji dle mého názoru snadněji, než když je mu méně známá či neznámá, nebo dokonce je pro něj úplně nesmyslná. Setkala jsem se, s tím, že žáci neuměli vyřešit úlohu, protože v zadání bylo slovo vozovka a někteří toto slovo neznali. Byla to sice úloha z fyziky, ale šla by aplikovat i na úlohy o pohybu v matematice. Pro názornost uvedu modifikovanou úlohu opět z učebnice Odvárko – Kadleček Matematika pro 8. ročník 2.díl str. 36. Slovní úlohu jsem pouze rozšířila o slova „vzhledem k vozovce".

úloha:

Při vojenském cvičení vyjela z tábora v 5 hodin vojenská kolona průměrnou rychlostí 40 km/h vzhledem k vozovce. O půl hodiny později za ní byla vyslána motospojka jedoucí průměrnou rychlostí 70 km/h vzhledem k vozovce.

Za jak dlouho motospojka kolonu dostihne? V kolik to bude hodin?

Ačkoliv spojení „vzhledem k vozovce" nehraje, podle mě, v zadání důležitou roli, v učebnici ani není, tak se žáci dožadovali vysvětlení, co je to vozovka a nedokázali začít úlohu řešit. Ani v původní fyzikální úloze spojení slov „vzhledem k vozovce" nehrálo roli, neboť se nic jiného nepohybovalo „vzhledem k něčemu jinému". Bylo pro mě velmi překvapující, že k řešení úlohy, kterou řešili žáci již mnohokrát a stačilo na ni použít známý algoritmus (v případě fyziky jeden vzorec), žáci měli potřebu znát slovní spojení, které vlastně nemělo vliv na řešení. A bez znalosti slovního spojení úlohu nezačínali řešit. Pomíjím tedy fakt, že v 8. ročníku neznají význam slova vozovka.

Posledním impulzem, který mě vedl ke zvolení tématu bakalářské práce, byla právě má dcera, která ve 2. ročníku ZŠ dostala domácí úkol z matematiky a místo, aby ho, jako vždy do té doby, vyřešila, tak se nad ním rozbrečela. Úlohu měla zapsanou na pracovním listě od paní učitelky, tudíž autora úlohy neznám.

úloha:

Na dětské běžecké závody na 2km se přihlásilo 42 běžkařů. Těsně před startem se přihlásili ještě tři závodníci.

a) Kolik se jich přihlásilo celkem?
b) Během závodů 5 dětí zlomilo lyži. Dalších 10 dětí závod vzdalo. Kolik dětí dojelo do cíle?
c) Kolik dětí závod nedokončilo?

První otázku dcera vyřešila bez problémů, nezmátl ji ani nadbytečný údaj 2 km. Ale u úlohy b) se na poměrně dlouhou chvíli zastavila. Respektive provedla zápis, ale nepočítala. Po delší pauze jsem se jí ptala, v čem je problém a zda chce ode mě poradit. Nechtěla, ale bylo vidět, že usilovně přemýšlí a zároveň začíná brečet. Úlohy, kde bylo potřeba provést stejné matematické operace, obdobného zadání, již před tím mnohokrát vyřešila dobře a bez problému, tak jsem vůbec nevěděla, co se stalo. Když se po chvíli uklidnila, snažila jsem se pomocí různých otázek dojít k tomu, čemu na úloze nerozumí. Nakonec jsem se tedy dozvěděla, v čem je problém, který já jsem vůbec neviděla. V úloze b) nevěděla, zda běžkaři, když zlomí lyži, mohou, nebo nemohou v závodě pokračovat a dojet do cíle. Vzhledem k tomu, že na běžkách sama jezdí, jí ta situace nepřipadala nemožná, z vlastní zkušenosti si představila, jak se jednou nohou odráží a na druhé má lyži a jede jako na koloběžce. Vysvětlily jsme si, že tedy nejspíš ne, i když pravidla závodu jsme k dispozici neměly. Až v tuto chvíli jsem si uvědomila, že zdánlivě jednoduše zadaná úloha, která se mně, jako dospělému, zdála naprosto jednoznačná, protože jsem předpokládala, co tím autor chtěl říci, a kam svou otázkou směřuje, může ještě matematickými úlohami tolik nepoznamenané dítě zmást. Donutilo mě to tedy se na slovní úlohy zkoušet dívat ještě více jako žáci a hledat případná úskalí v jejich formulaci. Jako učitel tvořím slovní úlohy s cílem procvičit nějakou konkrétní schopnost a vůbec nemusím vidět potíž v nejasné formulaci zadání, protože vlastně sama vím, co jsem úlohou chtěla říct.

Kontextem slovní úlohy se opět zabývá i výzkum (Vondrová a kol., v rkp.) v kapitole 5 nazvané Zkušenostní kontext, a to z mnoha hledisek. Ve výzkumu je nejprve shrnut náhled na kontext v různé odborné literatuře od různých autorů.

Následně pak autoři uvádí (Vondrová a kol., v rkp.): *„V našem výzkumu jsme vycházeli z pojetí kontextu úlohy jako sféry reality, v níž je zasazena problémová situace. Za klíčové jsme považovali to, zda je (resp. může být) pro žáky osobně známý, či neznámý. Napříč testovanými skupinami úloh jsme proto variovali posuny mezi doménami reality, u nichž jsme předpokládali, že s nimi většina žáků může, resp. nemůže mít osobní zkušenost (např. nákup sešitů v papírnictví versus nákup akcií na světové burze). V samotném hlavním testování však nebylo možné zjišťovat, zda je kontext konkrétní úlohy pro jednotlivé žáky osobně známý (a oblíbený) ‑ z časových důvodů nemohly být všem žákům pokládány doplňkové otázky. Využita byla proto data ze vstupního dotazníku, v kterém byli žáci dotazováni na známost vybraných sfér reality.*[1]*“*

Vlivem kontextu na řešení slovních úloh se zabývalo již mnoho zahraničních studií, jejich výsledky jsou stručně shrnuty ve (Vondrová a kol., v rkp.). Zajímavé je, že ne všechny studie se shodnou na tom, jaký vliv má znalost kontextu na řešení slovních úloh. Například v (Vondrová a kol., v rkp.) je uvedeno, že *„Palmova studie (2008) i některé další studie (např. Cooper, Harries, 2005; Csíkos,Kelemen, Verschaffel, 2011) naznačují, že velká část žáků nevyužívá při řešení matematických slovních úloh informace z reálného života, a tedy že úlohy vyžadující aplikaci mimoškolních znalostí a zkušeností z reality mají spíše negativní vliv na žákovskou úspěšnost ve slovních úlohách, některé další studie přinášejí opačné výsledky. Stillman(ová) (2000) došla k závěru, že mají-li žáci osobní zkušenost s určitou doménou, jejich výkon v úloze s odpovídajícím kontextem je vyšší. “*

Z toho plyne, že nejspíš neexistuje jednoznačný názor na důležitost kontextu slovní úlohy vzhledem k úspěšnosti při řešení. Jak jsem již uvedla v začátku této kapitoly, sama jsem si

[1] V návaznosti na hlavní testování byla provedena hloubková studie, jejíž součástí bylo pokládání doplňkových otázek zjišťujících znalost a oblíbenost kontextu konkrétních úloh u jednotlivých žáků – tato studie bude prezentována v článku Smetáčkové a Páchové (v přípravě).

nejprve myslela, že kontext nemá až takový vliv na úspěšnost řešení, měla jsem pocit, že nezáleží na tom, zda má Petr 10 „frfníků“ nebo 10 Kč, když by žáci měli pak spočítat o kolik „frfníků“ má méně než Lukáš s 53 „frfníky“. Ale dlouhodobá praxe mi ukazuje, že se žáci ptají čím dál častěji na význam slov, slovních spojení a žádají si třeba i vizuální znázornění.

Dle (Vondrová a kol., v rkp.) je nutné rozlišit dvě různé funkce reálné zkušenosti při řešení slovních úloh. První z nich je motivační funkce a druhá kognitivní. Je pravděpodobné, že žáci, kterým je situace v úloze blízká by mohli být více motivovaní k jejímu řešení, čímž se zvýší šance na úspěšné řešení, protože se o něj pokusí i žáci slabší, právě díky motivaci známou situací (motivační funkce). A známá situace pak žákům umožní, že si úlohu mohou názorně představit a tím se pro ně úloha stává konkrétní a tím by mohlo vzrůst i porozumění dané situaci v úloze (kognitivní funkce). Ale právě v případě kognitivní funkce může naopak dojít k oslabení úspěšnosti řešení, především už žáků se slabšími matematickými schopnostmi. Oslabení pak může vzniknout proto, že žáci jsou zahlceni vzpomínáním na onu známou situaci.

V prováděném výzkumu na Pedf UK autoři studie použili 18 úloh, u kterých variovali kontext, přičemž věnovali pozornost, aby u jedné varianty byli vždy žáci s kontextem plně obeznámeni a k tomu doplnili variantu zcela opačnou. Vycházeli při tom z již zmiňovaných dotazníků. Testy rozdělili do několika skupin dle kontextu, např. skupina se sci-fi a fantasy kontextem, skupina úloh s politickým kontextem nebo třeba skupina úloh o směsích a další. Uvedu dvě skupiny, které mě zaujaly. Uvedu nejprve příklady zkoumaných úloh a v závěru výsledky z šetření.

úlohy se sci-fi a fantasy kontextem:

Ředitelé pražských základních škol koupili pro své žáky na tělocvik dva druhy menších gumových míčů, které se lišily barvou. 100 červených míčů stálo 8 000 korun, 50 zelených míčů stálo 2 000 korun. Kolik bylo kterého druhu, jestliže dali za 600 míčů 28 000 korun?

Velitelé mezigalaktických armád koupili pro své bojovníky dva druhy použitých laserových světelných mečů, které se lišily barvou. 100 červených mečů stálo 8 000 korun, 50 zelených mečů stálo 2 000 korun. Kolik bylo kterého druhu, jestliže dali za 600 mečů 28 000 korun?

Ředitelé pražských základních škol koupili pro své žáky na tělocvik dva druhy menších gumových míčů, které se lišily barvou. 100 červených míčů stálo 8 000 zedů, 50 zelených míčů stálo 2 000 zedů. Kolik bylo kterého druhu, jestliže dali za 600 míčů 28 000 zedů?

Velitelé mezigalaktických armád koupili pro své bojovníky dva druhy použitých laserových světelných mečů, které se lišily barvou. 100 červených mečů stálo 8 000 zedů, 50 zelených mečů stálo 2 000 zedů. Kolik bylo kterého druhu, jestliže dali za 600 mečů 28 000 zedů?

Varianty se sci-fi kontextem měly nižší úspěšnost než varianta bez sci-fi kontextu. Rozdíl mezi variantami nebyl ani v 8. ani v 9. ročníku signifikantní, ale naznačuje, že úlohy, kde je uveden běžný kontext, jsou pro žáky snazší než úlohy s fantasy kontextem. Předpokladem bylo, že úlohy se sci-fi kontextem v kombinaci s vojenskou tematikou, budou bližší chlapcům než dívkám, což se potvrdilo, ale rozdíl nebyl nijak významný. Což vedlo k závěru, že úlohy s reálným kontextem jsou pro žáky stejně nebo méně náročné než úlohy se sci-fi či fantasy kontextem.

Já osobně jsem předpokládala výrazně nižší úspěšnost u variant, kde se vyskytují zedy, neboť má zkušenost z hodin je taková, že se žáci obávají řešit úlohy s neznámými pojmy. Ale možná proto, že se nemuseli při testování bát špatné známky a řešili pouze slovní úlohy, byli motivování úlohy řešit, i když neznali význam slova zed.

úlohy s politickým kontextem:

Ševčíkovi s dětmi strávili dovolenou u moře. Základní výdaje tvořily výdaje na benzín, za ubytování a za jídlo. Za benzín utratili 280 eur a za ubytování 620 eur. Na každých 30 eur za jídlo pro dospělé zaplatili 21 eur za jídlo pro děti. Za jídlo pro dospělé přitom utratili 630 eur. Kolik činily základní výdaje na dovolenou?

Komunálních voleb se účastnily čtyři politické strany - MAD, KUS, COP a ZEN. V celé republice za stranu MAD kandidovalo 280 osob a za stranu KUS dokonce 620 osob. Na každých 30 kandidátů strany COP připadá 21 kandidátů strany ZEN. Ve volbách přitom kandidovalo 630 osob za stranu COP. Kolik bylo ve volbách celkem kandidátů?

Tyto úlohy byly zadávány žákům 9. ročníků, tudíž se u nich už předpokládala obeznámenost s politickým životem, ale většinou politika nebývá oblastí jejich zájmu. Rozdíl úspěšnosti mezi oběma úlohami byl téměř 20%, ale i přesto to nebyl rozdíl statisticky významný. Co však ale překvapilo samotné autory studie, bylo to, že žáci byli úspěšnější u úlohy s politickými stranami než u úlohy s rodinnou dovolenou, se kterou mají žáci spíše více zkušeností než s politickými stranami. Vondrová a kol. se domnívají, že by to mohlo být způsobenou zadáním s cizí měnou, případně tím, že úloha s dovolenou se týká nákladů na dovolenou, které děti samy neřeší, dále pak i formulací úlohy, která mohla na žáky působit uměle a snížit tak jejich motivaci k řešení. Zatímco politický kontext sice žákům není úplně známý, ale mohli být motivováni tím, že je to oblast společensky hodně významná a je jí věnovaná veliká pozornost ve společnosti. Nicméně to, že politický kontext neměl nijak významný vliv na úspěšnost řešení slovních úloh u žáků 9. ročníků, nepopírá to, že při použití politického kontextu u mladších žáků, pro které je politické téma hodně vzdálené, by mohlo přinést zcela jiné výsledky. Tím už se však výzkum nezabýval.

U této části výzkumu jsem zpočátku, stejně jako autoři, předpokládala, že úlohy s politickým kontextem budou pro žáky obtížnější. Ale zároveň, když jsem si přečetla úlohu, která byla předkládaná jako ta méně obtížná varianta a zjistila jsem, že je to úloh týkající se rodinného rozpočtu, říkala jsem si, že by to nemusela být úplně pravda. Neboť z vlastní zkušenosti z výuky na základní škole vím, že žáci se absolutně nezajímají o rodinný rozpočet vlastní rodiny, nemají tušení, kolik peněz rodina měsíčně utratí za vodu, elektřinu, dovolenou atd. A když počítáme v hodinách úlohy týkající se právě rodinného rozpočtu, ať už dovolené nebo jiných výdajů, často se ptají na slova, kterým nerozumí, a to, co jsou to výdaje, co je rozpočet, co znamená slovo vyúčtování, dokonce i co je to polopenze. Ale naopak bývají k počítání takových úloh motivovanější. Autoři studie naopak poukazují na větší míru motivovanosti u politického tématu.

Ještě se chci vrátit k úlohám s finančním tématem. Myslím, že toto téma by si možná zasloužilo samostatný výzkum, jak na porozumění úlohám s finanční tematikou, tak i na motivaci k řešení takových úloh. Ze své praxe mám právě zkušenost takovou, že žáci o rodinném rozpočtu moc nevědí. S postupem do vyšších ročníků se tato situace mírně lepší, ale nevím, zda je to tím, že i úlohy týkající se financí, zařazujeme často do výuky nebo tím, že se již žáci začínají zajímat o rodinný rozpočet, nebo se začnou rodičů vyptávat na základě zadaných úloh. U dovolené vlastně děti řeší také jen to, co si sbalí s sebou, aby se nenudily, a neptají se rodičů, kolik co stojí, nepočítají peníze na benzín, maximálně se zajímají, jaké dostanou s sebou vlastní kapesné na útratu. Je to myslím škoda, protože by se jim pak usnadnil vstup do budoucího dospělého života, až se o finance budou muset starat sami. Při tom, až na pár výjimek, žáci rádi zkoumají, jaká je jejich spotřeba vody v domácnosti, kolik peněz za vodu utratí, a to jak celá rodina, tak oni sami. Rodiče možná nemají čas nebo chuť děti zasvětit do tajů financí v rodině, tak to zbývá na učitele. Každý rok, v každém ročníku zadáváme dětem dlouhodobější projekt týkající se financí rodiny - spotřeba vody v domácnosti, levnější varianta dovolené z reálných nabídek, pro jejich konkrétní rodinu, spotřeba vody vázaná čistě na jejich osobu nikoliv na celou domácnost, běžné účty, spoření, půjčky. I když je to pro žáky dlouhodobá a poměrně náročná práce, ve většině případů při hodnocení řeknou, že je to bavilo, vidí v tom i přínos do života a něco se naučili, dokonce považovali i úkoly za smysluplné.

2.2 Parametry spojené se způsobem zadání slovní úlohy - slova

V souboru parametrů z GA ČR č. 16-06134S ze dne 25. 4. 2016 je v této kategorii uvedeno parametrů již o něco méně než v kategorii text jako celek. Opět nebudu vyjmenovávat všechny. Tentokrát se zaměřím pouze na ty, které ve své praxi vnímám. Patří sem např. tyto:

a) Výskyt termínů (z jiné než matematické oblasti)
b) Výskyt termínů z oblasti matematiky
c) Výskyt cizích slov a okazionalizmů (např. zedy)
d) Výskyt slov z periferie slovní zásoby
e) Výskyt homogenních a heterogenních objektů (4 spadlé rukavice = 4ks nebo 4 páry?, stránky vs. listy papíru)
f) jazykové a nejazykové vyjádření matematických údajů (např. ½ šálku vs. polovina šálku)
g) Přítomnost fyzikálních jednotek

2.2.1 Výskyt termínů z jiné než matematické oblasti, výskyt cizích slov a okazionalizmů a výskyt slov z periferie slovní zásoby.

Osobně jsem, před přečtením souboru parametrů, výskyt termínů z jiné než matematické oblasti, výskyt cizích slov a okazionalizmů a výskyt slov z periferie slovní zásoby zařadila do jedné kategorie a proto to tak řadím i ve své práci. Protože dle mého hlediska pokud odborný termín žáci neznají, je to stejné, jako když neznají význam cizího slova, případně slova z periferie slovní zásoby. Souhrnně tyto parametry budu dále nazývat „neznámá slova“. Myslím si, že buď daný termín mohou žáci ignorovat, protože nehraje důležitou roli pro provedení výpočtu, nebo si pod daným slovem představí něco jiného, což ale také správnost výpočtu nemusí ovlivnit. Takovým příkladem je úloha z učebnice Odvárko - Kadleček Matematika pro 6. ročník 3. díl str. 92.

úloha:

Louka mezi lesem a silnicí je sice jen 36 m široká, ale 1 km dlouhá. Jak dlouho bude trvat její sekání žacím strojem, se kterým jeden pár koní poseká za 8 hodin 1,8 ha?

Myslím, že není nutné vědět, co je to žací stroj, jak vypadá a jak funguje, aby žáci mohli úlohu úspěšně vyřešit. Nehledě na to, že v úloze je myšlen žací stroj poháněný koňmi, který si přesně nedovedu představit ani já. Samozřejmě, každý školní rok, kdy vyučuji 6. ročník se najde minimálně jeden žák, který se nebojí zeptat, co je to žací stroj, tudíž je možné, že tuto informaci k vyřešení úlohy považuje za důležitou. Ale také je možné, že si chce jen rozšířit slovní zásobu a na řešení slovní úlohy by neznalost tohoto slova neměla vliv.

Předpokládám, že při hlubším zkoumání parametru „neznámá slova ", jako samostatného, by se neobjevil žádný významný rozdíl mezi úlohou, která by neznámá slova neobsahovala a úlohou, která by je obsahovala. Pokud by žáci byli testovaní jen na slovní úlohy, asi by je neznámá slova od řešení úlohy neodradila, ale věřím, že v běžné vyučovací hodině, či při testu, který obsahuje nejen slovní úlohy, ale i aritmetické nebo algebraické příklady by řešení slovní úlohy odložili nebo dokonce vzdali. Nevidím ale problém v tom, i při testu, žákům neznámé slovo vysvětlit. Vždy před písemnou prací dávám prostor k přečtení celého zadání a k dotazům, v hodinách se žáci mohou ptát kdykoliv. Pak vlastně problém neznámého slova téměř zcela zaniká. Podobný parametr byl vlastně řešen i ve výzkumu GA ČR č. 16-06134S s parametrem kontext, kde v úloze se sci-fi prvky byl zařazen okazionalizmus „zed" a rozdíl v řešení úloh se slovem i bez něj nebyl nijak statisticky významný.

2.2.2 Výskyt termínů z oblasti matematiky

Samostatně jsem si vyčlenila výskyt termínů z oblasti matematiky a to proto, že se při výuce často setkávám s neznalostí některých matematických termínu a tedy nemožností se domluvit, co mají žáci řešit, v případě samostatné práce nemožností úlohu vyřešit. Častěji se s tímto problémem setkávám u slovních úloh s matematickým obsahem než u úloh s nematematickým obsahem, což dává smysl, neboť úlohy s matematickým obsahem přímo vyžadují využití termínů z oblastí matematiky. S kolegy v zaměstnání jsme se shodli na tom, že se naši žáci odmítají učit zpaměti matematické termíny, protože jim to přijde zbytečné a neužitečné. Pojmům rovnostranný a rovnoramenný trojúhelník se žáci nevyhýbají, i když si je často pletou, nejspíš vidí smysl minimálně v tom, že dostávají úlohy, kde se tyto termíny vyskytují, nebo i sami chtějí takový útvar pojmenovat a tímto termínem je pojmenování trojúhelníku, který má všechny strany (případně ramena) shodné, nejsnazší. Nicméně, mnohdy až zarputile, se odmítají naučit termíny – dělenec, dělitel a podíl, činitel a součin, sčítanec a součet a menšenec, menšitel a rozdíl. Ačkoliv se tyto termíny učí již od druhé třídy, nevidí v tom smysl a během chvíle je úspěšně zapomínají. Na druhém stupni tyto termíny opět opakujeme a procvičujeme, a to k veliké nelibosti žáků. Snažím se termíny často používat v řeči v domnění, že si je žáci ukotví, ale v osmé třídě, kdy se již začnou tyto termíny hojně vyskytovat v zadání úloh, zjistím, že má snaha byla marná. Dříve než začneme probírat mnohočleny, trénujeme zápis výrazů a to jak číselných, tak s proměnnými. Začínáme tedy např. takovouto úlohou:

Vypočítejte podíl čísel 18 a 6.

Jedná se o jednoduchou úlohu, ale pouze pro někoho, kdo ví, co je podíl. Moje zkušenost je taková, že zhruba pětina žáků si plete podíl a rozdíl a bez předchozího procvičení a zopakování by buď odčítali, nebo úlohu neřešili vůbec. Po zopakování těchto termínů pak přejdeme na složitější slovní úlohy s matematickým obsahem, např.

Určete rozdíl podílu a součtu čísel 18 a 6.

Kde už tedy nehraje roli jen znalost termínů, ale i správné rozklíčování pořadí početních operací. Ale bez znalosti matematických termínů nemohou žáci tuto úlohu správně vyřešit.

Další slovní úlohou, tentokrát s nematematickým obsahem, která obsahuje matematické termíny, je například tato:

Tomáš si chce vyrobit čtvercového draka. Úhlopříčky kostry vyrobí ze stejně dlouhých špejlí o délce 60 cm. Může v papírnictví zakoupit papír z role široké 0,5 m?

Aby žáci mohli tuto úlohu vyřešit, potřebují vědět, jak vypadá čtverec, že má všechny strany shodné a musí vědět, co je úhlopříčka, aby si mohli správně přiřadit údaj 60 cm. Čtverec na druhém stupni, troufám si říct, poznají všichni žáci. Ale s termínem úhlopříčka si někteří nemusí vědět rady. A i kdyby znali Pythagorovu větu (vzorec pro obsah čtverce pomocí dvou úhlopříček neznají), nebudou ji moci použít a tedy úlohu vyřešit.

Častější problém, ale vídám u matematických slovních úloh, kde je přeci jen více odborné terminologie. A s postupem do vyšších ročníků se mi zdá tento problém markantnější, což bude nejspíš dáno nárůstem množství odborných matematických termínů. Pravidelně do čtvrtletní písemné práce zařazuji, dle mého názoru záchrannou, úlohu na vzájemnou polohu přímky a kružnice nebo dvou kružnic. Považuji ji za záchrannou z toho důvodu, že stačí znát příslušnou terminologii. Když tuto látku začínáme probírat, žáci mohou mít k dispozici přehled vzájemných poloh těchto útvarů a probírané učivo jim přijde jednoduché. Když však dojde na test, kde již přehled nemohou mít, už se jim tolik nedaří. V letošních čtvrtletních písemných pracích v 8. ročnících bylo potřeba znát termíny tečna, sečna, vnější přímka, tětiva a soustředné kružnice. Písemnou práci psalo celkem 48 žáků, plný počet bodů za tuto úlohu mělo jen 10 z nich a více než polovina žáků, přesně 31 si nevzpomnělo na vnější přímku. Místo vnější přímka, psali: „nemají polohu“, „nedotýkající se přímka“ a dokonce i „netečna“.

U kruhu, kružnice a těles s podstavou kruh se setkávám velmi často s tím, že si žáci pletou poloměr a průměr, což opět vede ke špatnému řešení. Bohužel je nenapadne, že ve slově poloměr je obsažena nápověda ve tvaru slova „polo“, což je půl, a ani, když je na to sama upozorním, neberou nápovědu v potaz. Podobné je to i s termíny dělitel a násobek, kdy nevidí, nebo snad nechtějí vidět, spojitost s dělením a násobením. Žáci se nejspíš nechtějí učit nová slova, odborné termíny, ve kterých nevidí smysl pro běžný život a u kterých mají pocit, že je využijí jen v průběhu probírané látky. Přitom na těchto slovech mnohdy závisí i jejich úspěšnost například u přijímacích zkoušek na střední školu, což pro mnohé z nich je životní mezník, který ovlivní jejich budoucnost.

Aby si žáci termíny lépe osvojili, je potřeba je zařazovat do úloh, opravovat žáky, když se vyjádří nepřesně, trvat na používání terminologie v hodinách a sami terminologii hojně používat. Zhruba od konce 7. ročníku na žáky pozitivně působí, když se zmiňuji, že podobná úloha by mohla být v přijímacích zkouškách na střední školu a to včetně terminologie.

2.3 Parametry spojené s druhem vyžadované odpovědi

V souboru parametrů z GA ČR č. 16-06134S ze dne 25. 4. 2016 je v této kategorii uvedeno parametrů šest. Patří mezi ně tyto:

a) Typ úlohy (otevřená, uzavřená, přiřazovací)
b) Požadovaný způsob vyjádření odpovědi (číslem, slovní…)
c) Formulace toho, co se má dělat (věta tázací, oznamovací, rozkazovací)
d) Umístění otázky
e) Otázka stojí samostatně
f) Text úlohy omezuje použitou strategii (např. vyžaduje se řešení pomocí obrázku)

U všech těchto parametrů si dokážu představit, jak by mohly ovlivnit úspěšnost při řešení slovních úloh. Mě ale v souvislosti s parametry, které se týkají otázek, jako první napadl úplně jiný parametr. Nejsem schopná ho zařadit ani do jedné z výše uvedených podkategorií, uvedu ho proto tedy samostatně a hlouběji ho popíšu.

2.3.1 Počet otázek v textu

Počet otázek v textu je myslím velmi významný parametr, který může mít vliv na úspěšnost žákova řešení, převážně tedy na úspěšnost úplného řešení. Žák si přečte slovní úlohu, zaregistruje otázky, ale vůbec si neuvědomí, že otázek je více, spočítá výsledek, napíše odpověď a má pocit, že je s prací hotov. Možná je to způsobené tím, že častěji řeší úlohy, kde je pouze jedna otázka a žákovi se zautomatizovaly úkony potřebné k vyřešení úlohy tak, že po napsání jedné odpovědi je práce hotová. Bohužel ale jen částečně. Pro upřesnění toho, co myslím otázkou ještě uvedu, že v této kapitole beru jako otázku i pokyn formou věty oznamovací nebo rozkazovací, ne jen tázací.

Všimla jsem si, že tento problém ve veliké míře mizí, když jsou otázky u úlohy rozčleněné a zapsané pod sebou. Pro názornost uvedu úlohu, kde jsou otázky v textu úlohy a kde jsou rozčleněné. Úloha s otázkami v textu je převzata z učebnice Odvárko – Kadleček Matematika pro 6. ročník 2. díl str. 34. Úlohu jsem pak pro představu rozčlenění upravila.

úloha:

Schodiště na půdu bude vysoké 3,4 m. Pan zbrklý rozhodl, že celé schodiště bude mít deset schodů. Jak vysoký bude jeden schod? Výsledek zapiš v metrech i v centimetrech. Nebudou schody příliš vysoké?

rozčleněná úloha:

Schodiště na půdu bude vysoké 3,4 m. Pan zbrklý rozhodl, že celé schodiště bude mít deset schodů.

a) Jak vysoký bude jeden schod?
b) Výsledek zapiš v metrech i v centimetrech.
c) Nebudou schody příliš vysoké?

V prvém případě, u úlohy, kdy jsou všechny otázky v textu, se velmi často stává, že žáci vypočtou výšku schodu, kterou zapíší jen v metrech. Další otázky, jako by pro ně neexistovaly. Žáci nevynechávají otázky úmyslně proto, že neznají odpověď, protože po upozornění, že jim ještě část chybí, odpovědi většinou úspěšně doplní. U rozčleněné úlohy je naopak míra pravděpodobnosti vynechání některé otázky daleko menší. Žáci si většinou při výpočtech úlohu sami dělí na a), b), c) a tím pádem nezapomenou na vyřešení všech otázek.

Vynechání odpovědí, pokud má úloha více otázek může ve škole způsobovat opět stres ze špatné známky nebo časové tísně. Žáci se pak snaží pracovat rychle a vše rychle řešit a úlohu pak čtou povrchně. V hodinách se snažím zařazovat oba typy úloh, abych žáky nutila k pozornému čtení. Do testů však doporučuji raději otázky rozčlenit, neboť si chci ověřit znalosti z oblasti matematiky a myslím si, že tak zmenším míru zbytečně vynechaných odpovědí a tím i ztrátu správných řešení.

Myslím, že moje rozčlenění jednotlivých otázek by se mohlo částečně zahrnout do parametru Otázka stojí samostatně, i když z formulace parametru vyplývá, že se jedná jen o jednu otázku. Troufám si říct, že jedna otázka stojící samostatně nebo začleněná v textu by v případném výzkumu neměla tak markantní rozdíly, jako u více otázek. Ale to už je spíše úkol pro další výzkum.

Myslím, že parametr týkající se počtu otázek se nedá ale řešit jen takto samostatně, protože nejen počet otázek, ale například i jejich vzájemné umístění budou mít vliv na řešení slovní úlohy. Domnívám se, že pokud budou otázky řazeny na konci úlohy jedna za druhou, žáci je spíše všechny zodpoví, než když bude jedna otázka uprostřed textu a další na jeho konci. Pokud není potřeba k vypočítání poslední otázky znát odpověď na otázku umístěnou uprostřed textu, je myslím vysoce pravděpodobné, že otázku uprostřed textu žáci přehlédnou. Obzvláště pokud bude ve formě věty oznamovací, tedy nebude na ni žáky upozorňovat signál ve formě otazníku. A s tím opět souvisí další parametr, který jsem zmínila výše, a to parametr Formulace toho, co se má dělat (věta tázací, oznamovací, rozkazovací).

Myslím, že je více než patrné, že jednotlivé parametry, a to nejen parametry týkající se otázek, se vzájemně prolínají. A vzhledem k tomu, že k parametrům týkajících se otázek nejspíš nebyl u nás proveden podrobnější výzkum, by mohlo být zajímavé, takový výzkum provést, jistě by přinesl spoustu zajímavých výsledků.

3 Doporučení pro tvorbu školských úloh

Již v předchozích kapitolách jsem se snažila ukázat, jaké metody se mi osvědčily, při řešení problémů se slovními úlohami. Nyní je zobecním a shrnu pro lepší přehlednost.

V každém případě je důležité nebát se slovní úlohy zařazovat jen proto, že ve vyučovací hodině zaberou více času nebo proto, že je žáci nemají rádi a mají obtíže při jejich řešení. Naopak, obtíže je nutné překonávat, jen tak si budou žáci rozšiřovat své znalosti a zlepšovat své čtenářské kompetence. Bystřejším žákům je určitě vhodné předkládat úlohy obtížnější nebo právě jen přeformulované do obtížnější varianty textu, abychom i jim pomohli zlepšovat čtenářskou gramotnost.

Ideální by bylo každou úlohu s žáky prodiskutovat, ale při 45minutové dotaci, to bohužel není možné. Vždy se snažím podrobněji probírat úlohy, u kterých si myslím, že jsou pro žáky obtížnější. Vyplatilo se mi i trpělivě odpovídat na otázky týkající se řešení slovních úloh, ale ne přímo, spíše nápovědou nebo i jen připomenutím, ať si slovní úlohu přečtou ještě jednou, že svou odpověď najde v zadání.

Co se týká vybraných parametrů, určitě bych doporučila zařazovat delší slovní úlohy a to i nadprůměrně dlouhé, jako například matematické pohádky, které mí žáci řeší s nadšením, aniž si uvědomují, že řeší vlastně dlouhou slovní úlohu. Zároveň se mi osvědčilo domluvit se s kolegyní na zařazení slovních úloh do hodin českého jazyka, aby žáci viděli, že práce s textem, kterou se v hodinách zabývají, neznamená jen práci s literárním textem nebo odborným z oblasti biologie, ale že i se slovní úlohou lze pracovat jinak.

Jak jsem již uvedla, je vhodné zařazovat do výuky pravidelně i slovní úlohy s nadbytečným či naopak chybějícím údajem, většina potíží s řešením, dle mého názoru, pochází z nedostatečné zkušenosti s těmito úlohami.

Rozhodně doporučuji zařazovat do výuky dlouhodobější projekty týkající se financí v rodině – spotřeba vody, dovolená, hypotéky atd. A do hodin kratší slovní úlohy na obdobná témata. Většina žáků doma s rodiči neprobírá půjčky, útratu za dovolenou ani spotřebu energií. A z vlastní zkušenosti vím, že žáky tyto projekty zajímají, obzvláště v 9. ročníku, kdy už někteří z nich začínají mít vlastní platební kartu.

A v neposlední řadě používat při výuce matematickou terminologii v nejvyšší možné míře a striktně ji vyžadovat i po žácích, aby se jim zautomatizovala a nebrali ji jako cizí jazyk, i když matematika je pro ně vlastně dalším jazykem.

A na závěr ještě podotknu, že stejně jako je důležité zažít úspěch v matematice jako takové, tak je důležité zažít úspěch i ze samostatného řešení slovní úlohy, každý úspěch posouvá žáka dál, k úspěchům u řešení slovních úloh nehledě na parametry.

Závěr

Ve své práci jsem ukázala, jak některé vybrané parametry mohou ovlivnit řešení slovních úloh, vymezila jsem pojem slovní úloha z různých pohledů a poukázala na důležitost slovních úloh ve výuce.

Dále jsem se věnovala jednotlivým vybraným parametrům slovních úloh. Tím, že jsem měla možnost prostudovat výzkum a návrhy parametrů Grantové agentury České republiky (GA ČR) 16-06134S – Slovní úlohy jako klič k aplikaci a porozumění matematickým pojmům jsem se velmi věnovala i některým výsledkům, které mi přišly zajímavé a vzhledem k mým pedagogickým zkušenostem i blízké. Vybrala jsem však i parametry, kterými se výzkum nezabýval, a podrobněji jsem je na základě vlastních zkušeností rozebrala. U vybraných parametrů jsem na základě vlastních zkušeností i zkušeností kolegů uvedla i doporučení pro práci se slovními úlohami v hodinách. Svá doporučení jsem v poslední kapitole ještě shrnula a doplnila o další.

Cílem mé práce bylo vytipovat některé parametry, které by mohly ovlivňovat řešení slovních úloh a ukázat, že propojení matematiky s lingvistikou má smysl a může poukázat na obtíže, které učitelé matematiky ve slovní úloze nevidí. Hlubší pohled na slovní úlohu z lingvistického hlediska pak může pomoci učitelům lépe formulovat slovní úlohy a předcházet tím žákovské neúspěšnosti při řešení úloh.

Ráda bych se touto problematikou zabývala v další práci, kdy bych provedla výzkum pro některé z parametrů, které ještě u nás nebyly dopodrobna zkoumány.

Seznam použitých informačních zdrojů

NOVOTNÁ, Jarmila. Analýza řešení slovních úloh Kapitoly z didaktiky matematiky. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2000. ISBN 80-7290-011-0.

VYŠÍN, Jan. Metodika řešení matematických úloh. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 1962. ISBN 14-907-62

ODVÁRKO, Oldřich. Metody řešení matematických úloh. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1990. ISBN 80-04-20434-1

KOPKA, Jan. Umění řešit matematické problémy. Praha: nakladatelství HAV, 2013. ISBN 978-80-903625-5-0

KUŘINA, František. Umění vidět v matematice. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 1990.

HEJNÝ, NOVOTNÁ, STEHLÍKOVÁ. Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, 2004. ISBN 80-7290-189-3

PÓLYA, György. Jak to řešit?: překvapivé aspekty (nejen) matematických metod. Přeložil Oldřich KOWALSKI. Praha: Matfyzpress - vydavatelství MFF UK, 2016. ISBN 978-80-7378-325-9

Texty vzniklé na KMDM v rámci řešení projektu GAČR 16-06134S

MAREŠ, Jiří. Fridmanova teorie učebních úloh. Časopis Pedagogika ISSN 0031-3815 (Print), ISSN 2336-2189 (Online) https://pages.pedf.cuni.cz/pedagogika/?p=5512

ODVÁRKO, O., J. KADLEČEK. Matematika 1 pro 6. ročník základní školy. 3.přepracované vydání, Havlíčkův Brod: Prometheus, 2013, ISBN 978-80-7196-410-0.

ODVÁRKO, O., J. KADLEČEK. Matematika 2 pro 6. ročník základní školy. 3.přepracované vydání, Havlíčkův Brod: Prometheus, 2013, ISBN 978-80-7196-414-8.

ODVÁRKO, O., J. KADLEČEK. Matematika 3 pro 6. ročník základní školy. 3.přepracované vydání, Havlíčkův Brod: Prometheus, 2015, ISBN 978-80-7196-416-2.

ODVÁRKO, O., J. KADLEČEK. Matematika 3 pro 7. ročník základní školy. 3.přepracované vydání, Havlíčkův Brod: Prometheus, 2013, ISBN 978-80-7196-430-8.

ODVÁRKO, O., J. KADLEČEK. Matematika 2 pro 8. ročník základní školy. 3.přepracované vydání, Havlíčkův Brod: Prometheus, 2015, ISBN 978-80-7196-435-3.

MARTINCOVÁ, Olga a Radoslava BRABCOVÁ. Malý slovník jazykovědných termínů. Praha: Univerzita Karlova, 1998. ISBN 80-86039-66-8.

ŠMEJKALOVÁ, Martina. Jazyk matematiky v slovních úlohách jako ve specifickém typu didaktického komunikátu. Nová čeština doma a ve světě. Praha: Filozofická fakulta UK v Praze, 2017, 2017(1), 74-82. ISSN 1805-367X.

HIRSCHOVÁ, Milada. Matematická slovní úloha jako komunikát: Mathematical word problems as a type of communication : slovní úlohy ve výuce matematiky a komunikační kompetence v mateřském jazyce. Český jazyk a literatura. Praha: Fraus, 1950-, 68(2), 69-75. ISSN 0009-0786.

SIGMUNDOVÁ, Alena. Jazyková stránka matematických slovních úloh a její vliv na úspěšnost žákova řešení: Linguistic Aspect of Mathematical Word Problems and its Impact on The Success of Pupil's Solution. Didaktické studie. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, katedra českého jazyka, 2017, 9(2), 134-156. ISSN 1804-1221

SIGMUNDOVÁ, Alena. Vliv jazykové stránky matematických slovních úloh na kvalitu žákova řešení. Nová čeština doma a ve světě. Praha: Filozofická fakulta UK v Praze, 2016, 2016(1), 113-117. ISSN 1805-367X.