Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vladimír Krásný

Podmíněné hustoty

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jan Seidler, CSc.,
Ústav teorie informace a automatizace AV

Studijní program: Matematika, Obecná matematika

2008

Rád bych poděkoval RNDr. Janu Seidlerovi, CSc. za shovívavost a pomoc při vypracovávání mé bakalářské práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne Jméno Příjmení

Obsah

Název práce: Podmíněné hustoty
Autor: Vladimír Krásný
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce RNDr. Jan Seidler, CSc., Ústav teorie informace a automatizace AV
e-mail vedoucího: seidler@utia.cas.cz

Abstrakt: Podmíněná hustota je hlavním nástrojem pro výpočet podmíněných pravděpodobností a zejména podmíněných středních hodnot. Ve své bakalářské práci jsem se zaměřil na představení teoretického základu nutného pro výpočet a následnou aplikaci podmíněné hustoty. Převážná část této práce je pak věnována samotným příkladům, na kterých je možno shlédnout, jak s podmíněnou hustotou v praxi počítat.

Klíčová slova: pravděpodobnostní prostor, měřitelný prostor, náhodná veličina, podmíněná hustota

Title: Conditional density
Author: Vladimír Krásný
Department: Název katedry či ústavu v angličtině
Supervisor: RNDr. Jan Seidler, CSc., Ústav teorie informace a automatizace AV ČR
Supervisor's e-mail address: seidler@utia.cas.cz

Abstract: Conditional density is the main tool for computing condintional probabilities, mostly conditional expected values. In my work I focused mainly on introducing of theoretical bases which are essential for general understanding of how it is computed and how it is worked with. In more than half of my work I am paying attention to practical examples of how to compute conditional density functions.

Keywords: probability space, measurable space, random variable, conditional density function

Kapitola 1

Základní definice a označení

Následovat bude několik základních definic a označení, které budu v teoretické části používat.

Definice 1

Dvojici (Ω, A), kde Ω je neprázdná množina a A je její nějaká σ–algebra, nazýváme měřitelný prostor.

Definice 2

Trojici (Ω, A, P), kde (Ω, A) je měřitelný prostor a P je pravděpodobnostní míra definovaná na A, nazýváme pravděpodobnostní prostor.

Definice 3

Mějme pravděpodobnostní prostor (Ω, A, P) a měřitelný prostor (S, Σ). Měřitelnou funkci $X : (\Omega, A) \rightarrow (S, \Sigma)$ nazveme náhodnou veličinou (někdy budu zkracovat n.v.).

Definice 4

Nechť (Ω, A, P) je pravděpodobnostní prostor, (S, Σ), (G, Φ) měřitelné prostory a $X : (\Omega, A) \rightarrow (S, \Sigma)$, $Y : (\Omega, A) \rightarrow (G, \Phi)$ náhodné veličiny.

Pak rozdělení n.v. X je pravděpodobnostní míra P_X definovaná na Σ takto

$$P_X(D) = P(X \in D), \text{ kde } D \in \Sigma.$$

Obdobně definujeme rozdělení náhodného vektoru (X, Y) jako pravděpodobnostní míru $P_{X,Y}$ na $\Sigma \otimes \Phi$ následujícím způsobem

$$P_X(D \times C) = P(X \in D, Y \in C), \text{ kde } D \times C \in \Sigma \otimes \Phi.$$

Definice 5

Mějme pravděpodobnostní prostor (Ω, A, P), měřitelný prostor (S, Σ), n.v. $X : (\Omega, A) \rightarrow (S, \Sigma)$ a σ-konečnou míru μ na Σ.

Řekneme, že rozdělení n.v. X má hustotu $f_X(x)$ vzhledem k μ, jestliže $f_X(x)$ je nezáporná měřitelná funkce, pro kterou platí

$$P(X \in D) = \int_D f_X(x) d\mu(x) \text{ pro } \forall D \in \Sigma.$$

Kapitola 2

Pokročilejší definice

Definice 6

Mějme pravděpodobnostní prostor (Ω, A, P), $B \subset A$ σ–algebru a náhodnou veličinu $X : (\Omega, A) \to (S, \Sigma)$, přičemž $X \in L_1(\Omega, A, P)$. Pak střední podmíněnou hodnotou n.v. X vzhledem k σ–algebře B nazveme každou n.v. Y takovou, která má následující vlastnosti

1. $Y \in L_1(\Omega, B, P_B)$, kde P_B je zúžení P na σ–algebru B
2. pro každou množinu $C \in B$ platí

$$\int_B XdP = \int_B YdP$$

a budeme ji označovat $E[X \mid B]$. Jelikož $E[X \mid B]$ není určena jednoznačně, označíme $E^*[X \mid B]$ jako množinu všech $E[X \mid B]$.
Pak pro jev $D \in A$ a volbou $X = I_D$ dostaneme $E[X \mid B] = E[I_D \mid B] = P(D \mid B)$.

Definice 7

Symbolem $\sigma(Y)$ značíme σ-algebru generovanou náhodnou veličinou Y.

Definice 8

Mějme pravděpodobnostní prostor (Ω, A, P), měřitelné prostory $(S, \Sigma), (G, \Phi)$ a náhodné veličiny $X : (\Omega, A) \to (S, \Sigma)$, $Y : (\Omega, A) \to (G, \Phi)$. Podmíněnou střední hodnotu $E[X \mid \sigma(Y)]$ nazveme podmíněnou střední hodnotou n.v. X vzhledem k Y a budeme ji značit $E[X \mid Y]$.

Z definice podmíněné střední hodnoty víme, že libovolná $E[Z \mid Y]$ je $\sigma(Y)$-měřitelná, kde $Z \in L_1(\Omega, A, P)$. Dále pak víme (např. z [2] Lemma 7.18), že existuje měřitelná reálná funkce $f : (G, \Phi) \to (R, B)$ taková, že

$$E[Z \mid Y] = f(Y) \text{ až na množinu } N \text{, kde } P(N) = 0 .$$

Z definice 8 tak dostáváme

$$\int_{[Y \in C]} E[Z \mid Y] dP = \int_{[Y \in C]} ZdP = \int_{[Y \in C]} fdP \text{, kde } C \in \Phi .$$

Použijeme-li na tuto rovnost větu o substituci, dostaneme

$$\int_{[Y \in C]} ZdP = \int_C f(y) dP_Y(y) \text{, kde } C \in \Phi .$$

Zvolíme-li navíc $\varphi(C) = \int\limits_{[Y\in C]} ZdP$, kde $C \in \Phi$, je funkce f R-N derivací $\frac{d\varphi}{dP_Y}$ (tj. $\forall C \in \Phi \;\; \varphi(C) = \int_C f(y)dP_Y(y)$) P_Y -skoro jednoznačně.

Platí-li vztah

$$\int\limits_{[Y\in C]} ZdP = \int\limits_C f(y)dP_Y(y), \text{ kde } C \in \Phi,$$

definujeme funkci $f : (G, \Phi) \to (R, B)$ jako podmíněnou střední hodnotu n.v. X při Y ([1] str. 336).
Zvolíme-li Z speciálně, tj. $Z = I_D(X)$, kde $D \in \Sigma$, existuje f_D taková, že

$$f_D(Y) = E[I_A(X) \mid Y] = P(X \in D \mid Y)$$

$$(f_D(y) = E[I_A(X) \mid Y = y] = P(X \in D \mid Y = y))$$

a užitím definice podmíněné pravděpodobnosti dostaneme

$$P(X \in D, Y \in C) = \int\limits_{[Y\in C]} P(X \in D \mid Y)dP = \int\limits_{[Y\in C]} E[I_D(X) \mid Y]dP = \int\limits_{[Y\in C]} f_D dP = \int\limits_C f_D(y)dP_Y(y)$$

.

Poslední řádky jsou obzvláště důležité vzhledem k následující definici.

Definice 9

Nechť (Ω, A, P) je pravděpodobnostní prostor, (S, Σ), (G, Φ) měřitelné prostory a $X : (\Omega, A) \to (S, \Sigma)$, $Y : (\Omega, A) \to (G, \Phi)$ náhodné veličiny. Podmíněným rozdělením n.v. X za podmínky n.v. Y budeme rozumět funkci
$P_{X|Y} : (\Sigma \otimes \Phi) \to [0,1] : (B, y) \to P_{X|Y}(B \mid y)$,
která má následující tři vlastnosti

1. Pro $\forall y \in G$ je množinová funkce $D \to P_{X|Y}(D \mid y)$ pravděpodobnostní mírou na Σ
2. Pro $\forall D \in \Sigma$ je funkce $y \to P_{X|Y}(D \mid y)$ Φ-měřitelná
3. $\forall D \in \Sigma, \forall C \in \Phi$ platí $\int\limits_C P_{X|Y}(D \mid y)dP_Y(y) = P(X \in D, Y \in C)$

Přirozeně bychom tak mohli definovat podmíněnou hustotu $f_{X|Y}(x \mid y)$ jako nezápornou měřitelnou funkci takovou, pro kterou platí, že

$$P_{X|Y}(D \mid y) = \int\limits_B f_{X|Y}(x \mid y)d\mu(x) \text{ pro } \forall (B, y) \in (\Sigma \otimes \Phi),$$

respektive takovou, pro kterou platí, že

$$\forall D \in \Sigma, \forall C \in \Phi \text{ platí } \int\limits_C \left[\int\limits_D f_{X|Y}(x \mid y)d\mu(x) \right] dP_Y(y) = P(X \in D, Y \in C).$$

Dáme-li nyní do rovnosti tento vztah a poslední rovnost před definicí 9, dostaneme

$$\int\limits_D f_{X|Y}(x \mid y)d\mu(x) = f_D(y) = P(X \in D \mid Y = y) \text{ pro } \forall D \in \Sigma.$$

Kapitola 3

Motivace/Cesta k definici

Nyní si představíme jiný způsob, kterým je možné dojít k definici podmíněné hustoty.

Nechť (Ω, A, P) je pravděpodobnostní prostor.
Pak podmíněnou pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B, lze vypočíst pomocí vzorce

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ je-li } P(B) > 0.$$

Jak následná úvaha ukáže, v případě náhodných veličin lze očekávat podobný vztah.
Mějme reálné náhodné veličiny X a Y, jejich sdruženou hustotu $f_{X,Y}$ a marginální hustotu n.v. Y, kterou budeme značit f_Y. Dále mějme interval $[y_1, y_2]$, pro nějž platí $P(y_1 < Y < y_2) > 0$.
Podle vztahu pro podmíněnou pravděpodobnost pak můžeme napsat, že

$$P(X < x_1 \mid y_1 < Y < y_2) = \frac{P(X < x_1, y_1 < Y < y_2)}{P(y_1 < Y < y_2)} = \frac{\int_{-\infty}^{x_1}\int_{y_1}^{y_2} f_{X,Y}(x,y)dydx}{\int_{y_1}^{y_2} f_y(y)dy}.$$

Nechť dále je f_Y spojitá na $[y_1, y_2]$ a $f_{X,Y}$ spojitá na $[y_1, y_2]$ pro každé $x \in (-\infty, x_1]$, pak podle věty o střední hodnotě integrálního počtu existují y_M a y_S, že

$$\int_{y_1}^{y_2} f_y(y)dy = (y_2 - y_1) \cdot f_Y(y_M)$$

a

$$\int_{y_1}^{y_2} f_{X,Y}(x,y)dy = (y_2 - y_1) \cdot f_{X,Y}(x, y_S).$$

Po dosazení do předchozí rovnosti a po zkrácení $(y_2 - y_1)$ dostáváme následující vztah

$$P(X < x_1 \mid y_1 < Y < y_2) = \frac{\int_{-\infty}^{x_1} f_{X,Y}(x, y_S)dx}{f_Y(y_M)} = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{f_{X,Y}(x, y_S)}{f_Y(y_M)}dx.$$

Při limitním přechodu $y_1 \uparrow y$ a $y_2 \downarrow y$, kde stále platí $P(y_1 < Y < y_2) > 0$, získáme podmíněnou distribuční funkci

$$P(X < x_1 \mid y_1 < Y < y_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}dx$$

a podmíněnou hustotu, jež bychom mohli definovat jako

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}.$$

V průběhu výpočtu jsme však stanovili několik předpokladů, které bývají v praxi jen těžko ověřitelné ba někdy je jejich ověření nemožné.

V obecnějším případě lze uvážit případ, kdy budeme podmiňovat diskrétní náhodnou veličinou, přičemž závěr tohoto příkladu je posléze možné zobecněn i na absolutně spojité náhodné veličiny.

Mějme náhodnou veličinu Y, jež nabývá jen a právě kladných celočíselných hodnot ($P(Y=k)>0$ pro $\forall k \in Z^+$). Dále mějme náhodnou veličinu X, jejíž rozdělení je absolutně spojité k nějaké σ-konečné míře μ a má hustotu f_X vzhledem k této míře. Nechť D je nějaká borelovská množina, pak podle vztahu pro podmíněnou pravděpodobnost platí

$$P(X \in D, Y=k) = P(X \in D \mid Y=k) \cdot P(Y=k) \text{ pro } \forall k \in Z^+.$$

Nechť $C \subset Z^+$, pak

$$P(X \in D, Y \in C) = \sum_{k \in C} P(X \in D, Y=k) = \sum_{k \in C} P(X \in D \mid Y=k) \cdot P(Y=k).$$

Nyní označíme-li λ^0 čítací míru a f_Y hustotu rozdělení n.v. Y vzhledem k míře λ^0, můžeme předchozí řádek přepsat do tvaru

$$P(X \in D, Y \in C) = \int_C P(X \in D \mid Y=y) \cdot f_Y(y) d\lambda(y).$$

Vybavíme-li si nyní definici hustoty (viz. Definice 5), můžeme analogicky definovat podmíněnou hustotu veličiny X při daném Y jako takovou nezápornou měřitelnou funkci $f_{X|Y}(x \mid y)$, pro kterou platí

$$P(X \in D, Y \in C) = \int_C \left[\int_D f_{X|Y}(x \mid y) \right] f_Y(y) d\lambda(y) \text{ pro } \forall C, D \text{ borelovské množiny.}$$

(převzato z [4] 3.5, str. 54 a 55)

Kapitola 4

Podmíněná hustota

Definice 10 (podmíněná hustota)

Mějme pravděpodobnostní prostor (Ω, A, P), měřitelné prostory $(S, \Sigma), (G, \Phi)$ a náhodné veličiny $X : (\Omega, A) \to (S, \Sigma)$, $Y : (\Omega, A) \to (G, \Phi)$. Nechť (X, Y) má hustotu $f_{X,Y}(x,y)$ vzhledem k součinové míře $\mu \times \lambda$, kde μ je σ-konečná míra na (S, Σ) a λ je σ-konečná míra na (G, Φ) (z čehož plyne, že $\mu \times \lambda$ je σ-konečná míra na $(S \times G, \Sigma \otimes \Phi)$).

Podmíněnou hustotou n.v. X při daném Y nazveme takovou nezápornou měřitelnou funkci $f_{X|Y}(x \mid y)$, která pro libovolné množiny $D \in \Sigma, C \in \Phi$ splňuje vztah

$$P(X \in D, Y \in C) = \int_C \left[\int_D f_{X|Y}(x \mid y) d\mu(x) \right] f_Y(y) d\lambda(y)$$

Tvrzení 1

Nechť $g_{X|Y}(x \mid y)$ je nezáporná měřitelná funkce, která také vyhovuje rovnici v předchozí definici. Pak $g_{X|Y}(x \mid y) = f_{X|Y}(x \mid y)$ sk.vš $[\nu \times \mu]$, kde ν míra na (G, Φ) a $f_Y(y)$ je její hustota vzhledem k míře λ (tzn. $\nu(C) = \int_C f_Y(y) d\lambda(y)$, kde $C \in \Phi$).)

Důkaz

Užitím Fubiniovy věty na rovnici v předchozí definici pro $g_{X|Y}(x \mid y)$ i $f_{X|Y}(x \mid y)$ dostaneme

$$P(X \in D, Y \in C) = \iint_{D \times C} f_{X|Y}(x \mid y) d(\nu \times \mu)$$
$$P(X \in D, Y \in C) = \iint_{D \times C} g_{X|Y}(x \mid y) d(\nu \times \mu)$$

Aplikací věty o rozšíření míry a R-N věty dostaneme dokazovanou rovnost.

Věta 2 (o podmíněné hustotě)

Nechť (Ω, A, P) je pravděpodobnostní prostor, (S, Σ), (G, Φ) měřitelné prostory, $X : (\Omega, A) \to (S, \Sigma)$, $Y : (\Omega, A) \to (G, \Phi)$ náhodné veličiny, μ σ-konečná míra na Σ a λ σ-konečná míra na Φ. Dále nechť má rozdělení náhodného vektoru (X, Y) hustotu $f_{X,Y} : (S \times G, \Sigma \otimes \Phi) \to (R_+, B(R_+))$ vzhledem k součinové míře $\mu \times \lambda$.

Pak hustota rozdělení n.v. Y je $f_Y(y) = \int_S f_{X,Y}(x, y) d\mu(x)$ a podmíněná hustota n.v. X při daném $Y = y$ je rovna

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}, \text{ když } f_Y(y) > 0,$$
$$f_{X|Y}(x \mid y) = 0, \text{ když } f_Y(y) = 0.$$

Důkaz

Nejprve ukážeme, že $f_Y(y)$ je skutečně hustotou P_Y vzhledem k míře λ, tj.

$$P(Y \in C) = \int_C f_Y(y) d\lambda \text{ pro } \forall C \in \Phi.$$

Nechť $C \in \Phi$, pak

$$P(Y \in C) = P(Y \in C, X \in S) = \iint_{C \times S} f_{X,Y}(x, y) d\mu \times d\lambda.$$

Užitím Fubiniovy věty získáme

$$\iint_{C \times S} f_{X,Y}(x, y) d\mu \times d\lambda = \int_C \left[\int_S f_{X,Y}(x, y) d\mu \right] d\lambda = \int_C f_Y(y) d\lambda,$$

výsledkem je tedy kýžená rovnost $P(Y \in C) = \int_C f_Y(y) d\lambda$.

Nyní se přesuneme k druhé a hlavní části důkazu.
Z definice podmíněné hustoty víme, že musí splňovat rovnost

$$P(X \in D, Y \in C) = \int_C \left[\int_D f_{X|Y}(x \mid y) d\mu(x) \right] f_Y(y) d\lambda(y) \text{ pro } \forall D \in \Sigma, \forall C \in \Phi.$$

Označme si $M = \{y : f_Y(y) = 0\}$, $N \subset M$, pak

$$P(X \in D, Y \in N) = \iint_{N \times D} f_{X,Y}(x,y) d\mu \times d\lambda \leq \iint_{N \times S} f_{X,Y}(x,y) d\mu \times d\lambda = \int_N \left[\int_S f_{X,Y}(x,y) d\mu \right] d\lambda =$$

$$= \int_N f_Y(y) d\lambda = 0$$

Označme $O = G \setminus M$. Dosadíme-li do vztahu

$$P(X \in D, Y \in C) = \int_C \left[\int_D f_{X|Y}(x \mid y) d\mu(x) \right] f_Y(y) d\lambda(y)$$

$f_{X|Y}(x \mid y)$ jak jsme si jej nadefinovali, zjistíme, že

$$\int_C \left[\int_D f_{X|Y}(x \mid y) d\mu(x) \right] f_Y(y) d\lambda(y) = \iint_{(C \cap O) \times D} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} d\mu(x) f_Y(y) d\lambda(y) =$$

$$= \iint_{(C \cap O) \times D} f_{X,Y}(x,y) d\mu(x) d\lambda(y) = P(X \in D, Y \in (C \cap O))$$

Nyní využijeme toho, že $P(X \in D, Y \in (C \cap M)) = 0$, díky čemuž

$$\int_C \left[\int_D f_{X|Y}(x \mid y) d\mu(x) \right] f_Y(y) d\lambda(y) = P(X \in D, Y \in (C \cap O)) + P(X \in D, Y \in (C \cap M)) =$$

$$= P(X \in D, Y \in C).$$

Tím jsme dokázali, že $f_{X|Y}(x \mid y)$ je skutečně podmíněnou hustotou rozdělení X za podmínky Y.

Tvrzení 3

Nechť platí předpoklady jako v předchozí větě a navíc nechť $f_Y(y)$ je hustota n.v. Y a $f_{X|Y}(x \mid y)$ je podmíněnou hustotou rozdělení X za podmínky Y, pak

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y}(x \mid y) \cdot f_Y(y) \text{ s.v. } [\mu \times \lambda].$$

Důkaz

Z definice hustoty $f_{X,Y}(x,y)$ máme pro každé $\forall D \in \Sigma, \forall C \in \Phi$

$$P(X \in D, Y \in C) = \iint_{D \times C} f_{X,Y}(x,y) d\mu(x) d\lambda(y).$$

Z definice podmíněné hustoty $f_{X|Y}(x \mid y)$ máme pro každé $\forall D \in \Sigma, \forall C \in \Phi$

$$P(X \in D, Y \in C) = \int_C \left[\int_D f_{X|Y}(x \mid y) d\mu(x) \right] f_Y(y) d\lambda(y),$$

z čehož jednoduchou úpravou dostáváme

$$P(X \in D, Y \in C) = \iint_{D \times C} f_{X|Y}(x \mid y) f_Y(y) d\mu(x) d\lambda(y)$$

Aplikací věty o rozšíření míry a R-N věty získáme požadovanou rovnost.

Tvrzení 4

Nechť (Ω, A, P) je pravděpodobnostní prostor, (S, Σ), (G, Φ) měřitelné prostory, $X : (\Omega, A) \to (S, \Sigma)$, $Y : (\Omega, A) \to (G, \Phi)$ náhodné veličiny, μ σ-konečná míra na Σ a λ σ-konečná míra na Φ.

Pak náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé $\Leftrightarrow$ $f_{X|Y}(x \mid y) = f_X(x)$ s.v. $[\mu \times \lambda]$.

Důkaz.

"$\Rightarrow$"

Jsou-li náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé, pak pro jejich sdruženou hustotu platí

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \text{ s.v. } [\mu \times \lambda].$$

Dosadíme-li do vzorce pro podmíněnou hustotu, dostaneme

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_X(x) \cdot f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x) \text{ s.v. } [\mu \times \lambda].$$

"$\Leftarrow$"

Pro opačnou implikaci využijeme předešlé věty, podle které

$$f_{X,Y}(x, y) = f_{X|Y}(x \mid y) \cdot f_Y(y) \text{ s.v. } [\mu \times \lambda].$$

Dosadíme-li za $f_{X|Y}(x \mid y) = f_X(x)$, dostaneme

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \text{ s.v. } [\mu \times \lambda],$$

čímž jsme dané tvrzení dokázali.

Kapitola 5

Příklady

5.1 Příklad 1

Nechť má (X, Y) rovnoměrné rozdělení na množině $M \subset \Re^2$ konečné Lebesgueovy míry. Ukažte, že $f_{X|Y}$ a $f_{Y|X}$ jsou rovnoměrná rozdělení na příslušných řezech.

Ze zadání víme, že $\lambda(M) = K$, kde $K \in \Re^+$ je konečná hodnota. Platí tedy, že

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\lambda(M)} = \frac{1}{K} \text{ pro } (x, y) \in M,$$

$$f_{X,Y} = 0 \text{ jinak.}$$

je hustota rozdělení (X, Y).

Jako první vypočteme $f_{X|Y}(x|y)$. Pro její výpočet budeme potřebovat $f_Y(y)$. Označme si $I(y)=\{x:(x,y)\in M\}$ ($I(y)$ je horizontální řez množiny M bodem y), pak

$$f_Y(y)=\int_R f_{X,Y}(x,y)dx=\int_{I(y)} f_{X,Y}(x,y)dx=\int_{I(y)}\frac{1}{K}dx=\frac{|I(y)|}{K} \text{ pro } \forall y\in R,$$

přičemž pro y taková, že $\forall x\in R,(x,y)\notin M$ (neboli $|I(y)|=0$), je $f_Y=0$.
$f_{X|Y}$ pak již snadno vypočteme jako podíl $f_{X,Y}$ a f_Y, neboli

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{1}{K}}{\frac{|I(y)|}{K}}=\frac{1}{|I(y)|}, \text{ když } f_Y(y)>0\wedge x\in I(y),$$

$$f_{X|Y}(x|y)=0 \text{ jinak.}$$

Vidíme tedy, že $f_{X|Y}$ je hustotou rovnoměrného rozdělení na intervalu $I(y)=\{x:(x,y)\in M\}$.

Analogicky provedeme výpočet $f_{Y|X}$.
Označme si $I(x)=\{y:(x,y)\in M\}$ ($I(x)$ je vertikální řez množiny M bodem x), pak

$$f_X(x)=\int_R f_{X,Y}(x,y)dy=\int_{I(x)} f_{X,Y}(x,y)dy=\int_{I(x)}\frac{1}{K}dy=\frac{|I(x)|}{K} \text{ pro } \forall x\in R,$$

přičemž pro x taková, že $\forall y\in R,(x,y)\notin M$ (neboli $|I(x)|=0$), je $f_X=0$.
$f_{Y|X}$ opět dostaneme jako podíl $f_{X,Y}$ a f_X, tedy

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{1}{K}}{\frac{|I(x)|}{K}}=\frac{1}{|I(x)|}, \text{ když } f_X(x)>0\wedge y\in I(x),$$

$f_{Y|X}(y|x)=0$ jinak.
I pro tuto podmíněnou hustotu jsme tedy dostali, že je hustotou rovnoměrného rozdělením na intervalu $I(x)=\{y:(x,y)\in M\}$.

Speciální případy množiny M:
Výpočty jednotlivých speciálních případů budeme provádět přesně podle obecného řešení.
1) $M=[0,1]^2$
Ze zadání ihned víme, že

$$\lambda(M)=1,$$

tedy

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{1}=1 \text{ pro } \forall(x,y)\in M,$$

$$f_{X,Y}(x,y)=0 \text{ jinak.}$$

Začneme výpočtem $f_{X|Y}(x|y)$, nejdříve je potřeba zjistit, jak vypadá funkce $f_Y(y)$:

$$f_Y(y)=\int_R f_{X,Y}(x,y)dx=\int_{I(y)} f_{X,Y}(x,y)dx=\int_0^1 1dx=1 \text{ pro } \forall y\in[0,1],$$

$$f_Y(y)=0 \text{ jinak (pro jiná } y \text{ je } I(y) \text{ prázdná množina).}$$

Teď již známe vše potřebné pro výpočet $f_{X|Y}$:

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{1}{1}=1, \text{ když } \forall y\in[0,1]\wedge x\in[0,1],$$

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=0 \text{ jinak.}$$

Pro výpočet $f_{Y|X}$ je potřeba určit f_X:

$$f_X(x)=\int_R f_{X,Y}(x,y)dy=\int_{I(x)} f_{X,Y}(x,y)dy=\int_0^1 1dy=1 \text{ pro } \forall x\in[0,1],$$

$$f_X(x)=0 \text{ jinak (pro jiná } x \text{ je } I(x) \text{ prázdná množina).}$$

Teď již známe vše potřebné pro výpočet $f_{Y|X}$:

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{1}=1, \text{ když } \forall x\in[0,1]\wedge y\in[0,1],$$

$f_{Y|X}(y\,|\,x)=0$ jinak.

V tomto případě jsme si mohli všimnout, že nejen podmíněné hustoty byly hustotami rovnoměrných rozdělení, ale byly jimi dokonce i hustoty marginální.

V tomto případě jsou náhodné veličiny X a Y dokonce nezávislé.

2) Množina M je jednotkový kruh, $M=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$

Opět budeme postupovat podle obecného řešení, tj. určíme míru množiny M

$\lambda(M)=\pi$,

z čehož si odvodíme sdruženou hustotu

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{\pi} \text{ pro } \forall(x,y)\in M,$$

$$f_{X,Y}(x,y)=0 \text{ jinak.}$$

Nyní si vypočteme $f_Y(y)$:

$$f_Y(y)=\int_R f_{X,Y}(x,y)dx=\int_{I(y)} f_{X,Y}(x,y)dx=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx=\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi} \text{ pro } \forall y\in(-1,1),$$

$$f_Y(y)=0 \text{ jinak (pro jiná } y \text{ je } |I(y)|=0\text{).}$$

Teď již známe vše potřebné pro výpočet $f_{X|Y}(x\,|\,y)$:

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(x)}=\frac{\frac{1}{\pi}}{\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}}=\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}},$$

$$\text{když } \forall y\in(-1,1)\wedge x\in\left[-\sqrt{1-y^2},\sqrt{1-y^2}\right],$$

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=0 \text{ jinak.}$$

Nyní si vypočteme $f_X(x)$:

$$f_X(x)=\int_R f_{X,Y}(x,y)dy=\int_{I(x)} f_{X,Y}(x,y)dy=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} \text{ pro } \forall x\in(-1,1),$$

$$f_X(x)=0 \text{ jinak (pro jiná } x \text{ je } |I(x)|=0\text{)}.$$

Teď již známe vše potřebné pro výpočet $f_{Y|X}(y|x)$:

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{1}{\pi}}{\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}},$$

$$\text{když } \forall x\in(-1,1)\wedge y\in\left[-\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2}\right],$$

$$f_{Y|X}(y|x)=0 \text{ jinak.}$$

Na rozdíl od předchozího případu nejsou marginální hustoty hustotami rovnoměrného rozdělení (jejich hodnota byla závislá na příslušné proměnné) a n.v. X a Y nejsou ani nezávislé.

3) V posledním případě je množina M trojúhelník, $M=\{(x,y):0\le x\le y\le 1\}$

I nyní budeme postupovat podle obecného řešení, tj. začneme určením míry množiny M

$$\lambda(M)=\frac{1}{2},$$

díky čemuž jednoduše určíme sdruženou hustotu

$$f_{X,Y}(x,y)=2 \text{ pro } \forall(x,y)\in M,$$

$$f_{X,Y}(x,y)=0 \text{ jinak.}$$

Nyní se zaměříme na výpočet $f_Y(y)$:

$$f_Y(y)=\int_R f_{X,Y}(x,y)dx=\int_{I(y)} f_{X,Y}(x,y)dx=\int_0^y 2dx=2y \text{ pro } \forall y\in(0,1],$$

$$f_Y(y)=0 \text{ jinak (pro jiná } y \text{ je } |I(y)|=0\text{)}.$$

Určení $f_{X|Y}(x|y)$ je již jen otázkou podílu dvou známých funkcí

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{2}{2y}=\frac{1}{y}, \text{ když } \forall y\in(0,1]\wedge x\in[0,y],$$

$$f_{X|Y}(x|y)=0 \text{ jinak.}$$

Nyní si vypočteme $f_X(x)$:

$$f_X(x)=\int_R f_{X,Y}(x,y)dy=\int_{I(x)} f_{X,Y}(x,y)dy=\int_x^1 2dy=2(1-x) \text{ pro } \forall x\in[0,1),$$

$$f_X(x)=0 \text{ jinak (pro jiná } x \text{ je } |I(x)|=0\text{)}.$$

Teď již známe vše potřebné pro výpočet $f_{Y|X}(y|x)$:

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{2}{2(1-x)}=\frac{1}{1-x}, \text{ když } \forall x\in[0,1)\wedge y\in(x,1],$$

$$f_{Y|X}(y \mid x) = 0 \text{ jinak.}$$

Stejně jako v druhém speciálním případu ani nyní nejsou n.v. X a Y nezávislé a ani jejich marginální rozdělení nejsou rovnoměrná.

5.2 Příklad 2

Nechť (X, Y, Z) má rovnoměrné rozdělení na množině $M = \{(x, y, z): 0 \le x \le y \le z \le 1\}$ v $\mathfrak{R}^3$.

Najděte podmíněnou hustotu každé dvojice za podmínky zbývající náhodné veličiny, dále pak najděte podmíněnou hustotu každé z náhodných veličin za podmínky zbývajících dvou.

Jako první si určíme míru množiny M

$$\lambda(M) = \iiint_M dxdydz = \frac{1}{6}$$

Sdružená hustota náhodného vektoru (X, Y, Z) je tedy definovaná následovně

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = 6 \text{ pro } (x, y, z) \in M \text{ ,}$$

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = 0 \text{ jinak.}$$

Nejprve si vypočteme marginální rozdělení a následně podmíněné hustoty každé dvojice za podmínky zbývající náhodné veličiny.

$$f_X(x) = \int_x^1 \int_y^1 6dzdy = 3(1 - 2x + x^2) \text{ pro } x \in [0,1),$$

$$f_X(x) = 0 \text{ jinak.}$$

$$f_Y(y) = \int_0^y \int_y^1 6dzdx = 6y(1 - y) \text{ pro } y \in (0,1),$$

$$f_Y(y) = 0 \text{ jinak.}$$

$$f_Z(z) = \int_0^z \int_0^y 6dxdy = 3z^2 \text{ pro } z \in (0,1],$$

$$f_Z(z) = 0 \text{ jinak.}$$

Nyní, když známe všechny marginální hustoty, je vše připraveno pro výpočet podmíněných hustot $f_{X,Y|Z}(x, y \mid z)$, $f_{X,Z|Y}(x, z \mid y)$ a $f_{Y,Z|X}(y, z \mid x)$.

$$f_{X,Y|Z}(x, y \mid z) = \frac{f_{X,Y,Z}(x, y, z)}{f_Z(z)} = \frac{2}{z^2} \text{ pro } z \in (0,1] \wedge 0 \le x \le y \le z \text{ ,}$$

$$f_{X,Y|Z}(x, y \mid z) = 0 \text{ jinak.}$$

$$f_{X,Z|Y}(x, z \mid y) = \frac{f_{X,Y,Z}(x, y, z)}{f_Y(y)} = \frac{1}{y(1 - y)} \text{ pro } y \in (0,1) \wedge 0 \le x \le y \le z \le 1,$$

$$f_{X,Z|Y}(x, z \mid y) = 0 \text{ jinak.}$$

$$f_{Y,Z|X}(y, z \mid x) = \frac{f_{X,Y,Z}(x, y, z)}{f_X(x)} = \frac{2}{1 - 2x + x^2} \text{ pro } x \in [0,1) \wedge x \le y \le z \le 1,$$

$$f_{Y,Z|X}(y, z \mid x) = 0 \text{ jinak.}$$

Pro výpočet zbylých podmíněných hustot budeme potřebovat znát $f_{X,Y}(x,y)$, $f_{X,Z}(x,z)$ a $f_{Y,Z}(y,z)$.

$$f_{X,Y}(x,y)=\int_y^1 6dz = 6(1-y) \text{ pro } 0 \le x \le y < 1,$$
$$f_{X,Y}(x,y)=0 \text{ jinak.}$$
$$f_{X,Z}(x,z)=\int_x^z 6dy = 6(z-x) \text{ pro } 0 \le x < z \le 1,$$
$$f_{X,Z}(x,z)=0 \text{ jinak.}$$
$$f_{Y,Z}(y,z)=\int_0^y 6dx = 6y \text{ pro } 0 < y \le z \le 1,$$
$$f_{Y,Z}(y,z)=0 \text{ jinak.}$$

Opět známe vše potřebné pro výpočet podmíněných hustot $f_{X|Y,Z}(x \mid y,z)$, $f_{X|Y,Z}(x \mid y,z)$ a $f_{Y|X,Z}(y \mid x,z)$.

$$f_{X|Y,Z}(x \mid y,z)=\frac{f_{X,Y,Z}(x,y,z)}{f_{Y,Z}(y,z)}=\frac{1}{y} \text{ pro } 0 \le x \le y \le z \le 1 \wedge y \ne 0,$$
$$f_{X|Y,Z}(x \mid y,z)=0 \text{ jinak.}$$
$$f_{Y|X,Z}(y \mid x,z)=\frac{f_{X,Y,Z}(x,y,z)}{f_{X,Z}(x,z)}=\frac{1}{z-x} \text{ pro } 0 \le x \le y \le z \le 1 \wedge x \ne z,$$
$$f_{Y|X,Z}(y \mid x,z)=0 \text{ jinak.}$$
$$f_{Z|X,Y}(z \mid x,y)=\frac{f_{X,Y,Z}(x,y,z)}{f_{X,Y}(x,y)}=\frac{1}{1-y} \text{ pro } 0 \le x \le y \le z \le 1 \wedge y \ne 1,$$
$$f_{Z|X,Y}(z \mid x,y)=0 \text{ jinak.}$$

5.3 Příklad 3

Buď X rovnoměrně rozdělená na $[0,1]$ a nechť má Y za podmínky $X=x$ rovnoměrné rozdělení na $[0,x]$. Najdi sdružené rozdělení (X,Y), hustotu Y a podmíněnou hustotu X za podmínky Y.

$$f_X(x)=1 \text{ pro } x \in [0,1],$$
$$f_X(x)=0 \text{ jinak.}$$
$$f_{Y|X}(y \mid x)=\frac{1}{x} \text{ pro } y \in [0,x],$$
$$f_{Y|X}(y \mid x)=0 \text{ jinak.}$$

Sdruženou hustotu získáme použitím vzorce $f_{X,Y}(x,y)=f_{Y|X}(y \mid x)\cdot f_X(x)$ s.v.

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{x}\cdot 1 \text{ pro } 0 \le y \le x \le 1 \wedge x \ne 0,$$
$$f_{X,Y}(x,y)=0 \text{ jinak.}$$

Nyní můžeme vypočíst $f_Y(y)$,

$$f_Y(y) = \int_y^1 \frac{1}{x}\,dx = -\ln y \text{ pro } y \in (0,1],$$
$$f_Y(y) = 0 \text{ jinak.}$$
Podmíněná hustotu již snadno dopočteme
$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{x}}{-\ln y} = -\frac{1}{x \ln y} \text{ pro } y \in (0,1] \wedge x \in [y,1],$$
$$f_{X|Y}(x \mid y) = 0 \text{ jinak.}$$

5.4 Příklad 4

(X,Y) má rozdělení s hustotou $f_{X,Y}(x,y) = (x+y) \cdot \mathrm{I}_{[0,1]^2}(x,y)$ na $\Re^2$. Najděte $f_{X|Y}$.

Pro výpočet hustoty X při podmínce Y budeme potřebovat f_Y, tu vypočteme následovně
$$f_Y(y) = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^1 (x+y)dx = \frac{1}{2} + y \text{ pro } y \in [0,1],$$
$$f_Y(y) = 0 \text{ jinak.}$$
$f_{X|Y}(x \mid y)$ pak již spočteme jako podíl $f_{X,Y}(x,y)$ a $f_Y(y)$:
$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2x+2y}{1+2y} \text{ pro } y \in [0,1] \wedge x \in [0,1],$$
$$f_{X|Y}(x \mid y) = 0 \text{ jinak.}$$

5.5 Příklad 5

(X,Y) má rozdělení s hustotou $f_{X,Y}(x,y) = 2(x+y) \cdot \mathrm{I}_M(x,y)$ na $\Re^2$, kde $M = \{(x,y) : 0 \le x \le y \le 1\}$. Najděte $f_{X|Y}$ a $f_{Y|X}$.

Pro výpočet hustoty X při podmínce n.v. Y budeme potřebovat hustotu marginálního rozdělení Y $f_Y(y)$. Tu vypočteme následovně
$$f_Y(y) = \int_{I(y)} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^y f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^y 2 \cdot (x+y)dx = 3y^2 \text{ pro } y \in (0,1],$$
$$f_Y(y) = 0 \text{ jinak.}$$
$f_{X|Y}(x \mid y)$ pak již spočteme jako podíl $f_{X,Y}(x,y)$ a $f_Y(y)$:
$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2(x+y)}{3y^2} \text{ pro } y \in (0,1] \wedge x \in [0,y],$$
$$f_{X|Y}(x \mid y) = 0 \text{ jinak.}$$
Pro výpočet hustoty Y při podmínce X budeme potřebovat hustotu marginálního rozdělení n.v. X $f_X(x)$, tu vypočteme následovně
$$f_X(x) = \int_{I(x)} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_x^1 f_{X,Y}(x,y)dy = \int_x^1 2 \cdot (x+y)dy = -3x^2 + 2x + 1 \text{ pro } x \in [0,1),$$
$$f_X(x) = 0 \text{ jinak.}$$

$f_{Y|X}(y \mid x)$ pak již spočteme jako podíl $f_{X,Y}(x,y)$ a $f_X(x)$:

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{2(x+y)}{-3x^2+2x+1} \text{ pro } x \in [0,1) \wedge y \in [x,1],$$

$$f_{Y|X}(y \mid x) = 0 \text{ jinak.}$$

5.6 Příklad 6

(X,Y) mají rozdělení s hustotou $f_{X,Y}(x,y) = 15x^2y \cdot \mathrm{I}_M(x,y)$ na $\Re^2$, kde M je jako v předchozím příkladě. Najděte $f_{X|Y}$ a $f_{Y|X}$.

Pro výpočet hustoty X při podmínce Y budeme potřebovat $f_Y(y)$, tu vypočteme následovně

$$f_Y(y) = \int_{I(y)} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^y f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^y 15x^2 y dx = 5y^4 \text{ pro } y \in (0,1],$$

$$f_Y(y) = 0 \text{ jinak.}$$

$f_{X|Y}(x \mid y)$ pak již spočteme jako podíl $f_{X,Y}(x,y)$ a $f_Y(y)$:

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{15x^2y}{5y^4} = \frac{3x^2}{y^3} \text{ pro } y \in (0,1] \wedge x \in [0,y],$$

$$f_{X|Y}(x \mid y) = 0 \text{ jinak.}$$

Pro výpočet hustoty Y při podmínce X budeme potřebovat $f_X(x)$, tu vypočteme následovně

$$f_X(x) = \int_{I(x)} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_x^1 f_{X,Y}(x,y)dy = \int_x^1 15x^2 y dy = \frac{15x^2}{2}\left(1-x^2\right) \text{ pro } x \in [0,1),$$

$$f_X(x) = 0 \text{ jinak.}$$

$f_{Y|X}(y \mid x)$ pak již spočteme jako podíl $f_{X,Y}(x,y)$ a $f_X(x)$:

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{15x^2y}{\frac{15x^2}{2}\left(1-x^2\right)} = \frac{2y}{1-x^2} \text{ pro } x \in [0,1) \wedge y \in [x,1],$$

$$f_{Y|X}(y \mid x) = 0 \text{ jinak.}$$

5.7 Příklad 7

Nechť má (X,Y) v $\Re^m \times \Re^n$ normální rozdělení $N(\mu, V)$ s $\det V \neq 0$.

Označme $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}$.

Ukažte, že $f_{X|Y}(\cdot \mid y)$ je hustota normálního rozdělení $N\left(\mu_1 + V_{11}V_{22}^{-1}(y-\mu_2), V_{11} - V_{12}V_{22}^{-1}V_{21}\right)$.

Definujme $U = X - V_{12}V_{22}^{-1}Y$.

$$\begin{pmatrix} U \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -V_{12}V_{22}^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Podle [4] Věta 4.4 má náhodný vektor (U,Y) rozdělení $N(B\mu, BVB^T)$, kde $B = \begin{pmatrix} 1 & -V_{12}V_{22}^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sdružené rozdělení vektoru U a Y je tedy normální, navíc

$$\operatorname{cov}(U,Y) = E(UY) - E(U)E(Y) = E(XY - V_{12}V_{22}^{-1}Z^2) - (\mu_1 - V_{12}V_{22}^{-1}\mu_2)\mu_2$$

kde

$$E(XY) = V_{12} + \mu_1\mu_2,\ EZ^2 = V^{22} + \mu_2^2,$$

čímž po dosazení dostaneme

$$\operatorname{cov}(U,Y) = 0,$$

což znamená, že dané vektory jsou spolu nezávislé (využijeme později).

Nyní si určíme střední hodnotu a rozptyl U, abychom mohli zapsat jeho hustotu.

$$EU = E(X - V_{12}V_{22}^{-1}Y) = EX - V_{12}V_{22}^{-1}EY = \mu_1 - V_{12}V_{22}^{-1}\mu_2$$

$$\operatorname{var} U = \operatorname{var}(X - V_{12}V_{22}^{-1}Y) = \operatorname{var} Y - \operatorname{cov}(X, V_{12}V_{22}^{-1}Y) - \operatorname{cov}(V_{12}V_{22}^{-1}Y, X) + \operatorname{var}(V_{12}V_{22}^{-1}Y) =$$

$$= V_{11} - V_{12}V_{22}^{-1}V_{12}^T - V_{12}V_{22}^{-1}V_{21} + V_{12}V_{22}^{-1}V_{22}V_{22}^{-1}V_{12}^T = V_{11} - V_{12}V_{22}^{-1}V_{12}^T - V_{12}V_{22}^{-1}V_{21} + V_{12}V_{22}^{-1}V_{12}^T =$$

$$= V_{11} - V_{12}V_{22}^{-1}V_{21}.$$

Náhodný vektor U má tedy hustotu

$$f_U(u) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(u - \mu_1 + V_{12}V_{22}^{-1}\mu_2)^T (V_{11} - V_{12}V_{22}^{-1}V_{21})^{-1}(u - \mu_1 + V_{12}V_{22}^{-1}\mu_2)\right\}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} \left|V_{11} - V_{12}V_{22}^{-1}V_{21}\right|^{\frac{1}{2}}}$$

a náhodný vektor Y má hustotu $f_Y(y)$, která odpovídá marginálnímu rozdělení $N(\mu_2, V_{22})$.

Sdružená hustota U a Y je díky nezávislosti rovna $f_{U,Y}(u,y) = f_U(u) f_Y(y)$.

Nyní provedeme transformaci náhodného vektoru (U,Y) na (X,Y).

$$t: \begin{pmatrix} U \\ Y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

$$t: \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u + V_{11}V_{22}^{-1}y \\ y \end{pmatrix},$$

t je regulární a prosté na $\Re^{m+n}$.

Označme τ inverzní zobrazení k t definovaným

$$\tau: \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} U \\ Y \end{pmatrix},$$

$$\tau: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x - V_{11}V_{22}^{-1}y \\ y \end{pmatrix}.$$

Jakobián zobrazení τ je roven jedné, podle věty o transformaci tak platí, že

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{U,Y}(x - V_{11}V_{22}^{-1}y, y) = f_U(x - V_{11}V_{22}^{-1}y) f_Y(y).$$

Podle věty o podmíněné hustotě vyjádříme $f_{X|Y}(x \mid y)$

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f_U\left(x-V_{11}V_{22}^{-1}y\right)f_Y(y)}{f_Y(y)}=f_U\left(x-V_{11}V_{22}^{-1}y\right).$$

Z toho již dostáváme, že $f_{X|Y}(x\mid y)$ je skutečně hustotou normálního rozdělení $N\left(\mu_1+V_{11}V_{22}^{-1}(y-\mu_2),V_{11}-V_{12}V_{22}^{-1}V_{21}\right)$.

Hlavní myšlenka (definice $U = X - V_{12}V_{22}^{-1}Y$) převzata z [3] Věta V.9.

5.8 Příklad 8

(X,Y) mají v $\Re^2$ normální rozdělení $N(0,I)$, I je identická matice. Nechť (ρ,α), kde $\rho\ge 0$ a $0\le\alpha<2\pi$, jsou polární souřadnice (X,Y). Spočtěte podmíněnou hustotu $f_{\alpha|\rho}(a\mid r)$.

Hustotu $f_{X,Y}(x,y)$ ihned určíme ze zadání (buďto přímým výpočtem a nebo si uvědomíme, že v tomto případě jsou X a Y nezávislé náhodné veličiny, a jejich sdružená hustota tak bude rovna součinu jejich marginálních hustot), tj.

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \text{ pro } (x,y)\in\Re^2 .$$

Provedeme transformaci náhodného vektoru (X,Y) na (ρ,α)

$$t:\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\rho\\\alpha\end{pmatrix},$$

$$t\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{x^2+y^2}\\ arctg2(x,y)\end{pmatrix},$$

kde

$$arctg2(x,y)=arctg\left(\frac{y}{x}\right), \text{ je-li } (x>0)\wedge(y>0),$$

$$arctg2(x,y)=arctg\left(\frac{y}{x}\right)+\pi, \text{ je-li } x<0,$$

$$arctg2(x,y)=arctg\left(\frac{y}{x}\right)+2\pi, \text{ je-li } (x>0)\wedge(y<0).$$

t je regulární a prosté na množině $\Re^2\setminus(0,0)$.

Označme τ inverzní zobrazení k t

$$\tau:\begin{pmatrix}\rho\\\alpha\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},$$

$$\tau\begin{pmatrix}r\\a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}r\cos a\\ r\sin a\end{pmatrix}.$$

Jakobiánem zobrazení τ je

$$D_\tau(\rho,\alpha)=\begin{vmatrix}\frac{\partial\tau_1}{\partial\rho} & \frac{\partial\tau_1}{\partial\alpha}\\ \frac{\partial\tau_2}{\partial\rho} & \frac{\partial\tau_2}{\partial\alpha}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos a & -r\cdot\sin a\\ \sin a & r\cdot\cos a\end{vmatrix}=r$$

Podle věty o transformaci pak

$$f_{\rho,\alpha}(r,a) = f_{X,Y}(r\cdot\cos a, r\cdot\sin a)\cdot r = \frac{r}{2\pi}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \text{ pro } r>0 \wedge 0\le a<2\pi,$$

$$f_{\rho,\alpha}(r,a)=0 \text{ jinak.}$$

Pro spočtení $f_{\alpha|\rho}(a\,|\,r)$ budeme potřebovat $f_\rho(r)$.

$$f_\rho(r) = \int_0^{2\pi}\frac{r}{2\pi}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)da = \frac{r}{2\pi}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\cdot\int_0^{2\pi}da = r\cdot\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \text{ pro } r>0,$$

$$f_\rho(r)=0 \text{ jinak.}$$

Pro dokončení výpočtu $f_{\alpha|\rho}(a\,|\,r)$ již jen stačí podělit $f_{\rho,\alpha}(r,a)$ a $f_\rho(r)$,

$$f_{\alpha|\rho}(a\,|\,r) = \frac{f_{\rho,\alpha}(r,a)}{f_\rho(r)} = \frac{\frac{r}{2\pi}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)}{r\cdot\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)} = \frac{1}{2\pi} \text{ pro } 0\le a<2\pi.$$

$$f_{\alpha|\rho}(a\,|\,r)=0 \text{ jinak.}$$

Podmíněná hustota $f_{\alpha|\rho}(a\,|\,r)$ je hustotou rovnoměrného rozdělení. Výsledek taktéž potvrzuje to, čeho si bylo možné všimnout již při vypočtení $f_{\rho,\alpha}(r,a)$, tj. toho, že náhodné veličiny ρ a α jsou nezávislé (velikost vektoru (x,y) je nezávislá na úhlu, jenž svírá s osou x a naopak).

5.9 Příklad 9

V situaci předchozího příkladu spočtěte podmíněnou hustotu X za podmínky ρ.

Náhodný vektor (X,Y) má rozdělení s hustotou $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$ pro $(x,y)\in\Re^2$.

Opět provedeme transformaci vektoru (X,Y). Definujme si zobrazení t,

$$t:\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}X\\\rho\end{pmatrix},$$

$$t\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\\sqrt{x^2+y^2}\end{pmatrix}.$$

t je regulární v množině $M=\{(x,y)\in\Re^2, y\neq 0\}$. Aby bylo zobrazení t i prosté, je potřeba provézt transformaci zvlášť pro $M^+=\{(x,y)\in\Re^2, y>0\}$ a zvlášť pro $M^-=\{(x,y)\in\Re^2, y<0\}$.

Nechť tedy nejprve je t zobrazení z $M^+\to\Re^2$

Dále označíme τ inverzní zobrazení k t,

$$\tau:\begin{pmatrix}X\\\rho\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$$

$$\tau\begin{pmatrix}x\\r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\\sqrt{r^2-x^2}\end{pmatrix}$$

Jakobiánem zobrazení τ je

$$D_\tau(x,\rho)=\begin{vmatrix}\frac{\partial\tau_1}{\partial x} & \frac{\partial\tau_1}{\partial\rho}\\ \frac{\partial\tau_2}{\partial x} & \frac{\partial\tau_2}{\partial\rho}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ \frac{-2x}{\sqrt{r^2-x^2}} & \frac{2r}{\sqrt{r^2-x^2}}\end{vmatrix}=\frac{2r}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

Podle věty o transformaci pak

$$f_{X,\rho}(x,r)=f_{X,Y}\left(x,\sqrt{r^2-x^2}\right)\cdot\frac{2r}{\sqrt{r^2-x^2}}=\frac{r}{\pi\sqrt{r^2-x^2}}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\text{ pro } |x|<r,$$

$$f_{X,\rho}(x,r)=0\text{ jinak.}$$

Pro spočtení $f_{X|\rho}(x\mid r)$ budeme potřebovat $f_\rho(r)$.

$$f_\rho(r)=\int_{-r}^{r}\frac{r}{\pi\sqrt{r^2-x^2}}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)dx=\frac{r}{\pi}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\cdot\int_{-r}^{r}\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\cdot\int_{-r}^{r}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}}=$$

Nyní provedeme substituci $\frac{x}{r}=z$

$$=\frac{1}{\pi}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\cdot\int_{-1}^{1}\frac{r}{\sqrt{1-z^2}}dz=\frac{r}{\pi}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)[\arcsin]_{-1}^{1}=\frac{r}{\pi}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\cdot\pi=r\cdot\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right),$$

tedy

$$f_\rho(r)=r\cdot\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\text{ pro } r>0,$$

$$f_\rho(r)=0\text{ jinak.}$$

Pro dokončení výpočtu $f_{X|\rho}(x\mid r)$ již jen stačí podělit $f_{X,\rho}(x,r)$ a $f_\rho(r)$

$$f_{X|\rho}(x\mid r)=\frac{f_{X,\rho}(x,r)}{f_\rho(r)}=\frac{\frac{r}{\pi\sqrt{r^2-x^2}}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)}{r\cdot\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)}=\frac{1}{\pi\sqrt{r^2-x^2}}\text{ pro } |x|<r,$$

$f_{X|\rho}(x\mid r)=0$ jinak.

V případě, že t zobrazení z $M^-\to\Re^2$, vypadá inverzní zobrazení τ takto

$$\tau:\begin{pmatrix}X\\ \rho\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$$

$$\tau\begin{pmatrix}x\\ r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ -\sqrt{r^2-x^2}\end{pmatrix}$$

Jakobián zobrazení τ opět vyjde $\frac{2r}{\sqrt{r^2-x^2}}$, podle věty o transformaci pak

$$f_{X,\rho}(x,r)=f_{X,Y}\left(x,-\sqrt{r^2-x^2}\right)\cdot\frac{2r}{\sqrt{r^2-x^2}}=\frac{r}{\pi\sqrt{r^2-x^2}}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\text{ pro } |x|<r,$$

$f_{X,\rho}(x,r)=0$ jinak,

tedy taktéž stejně jako v prvním případě. Výpočet tak bude probíhat naprosto stejně a i naprosto stejný dá výsledek.

5.10 Příklad 10

Nechť má N Poissonovo rozdělení s parametrem 1 ($N \sim Po(1)$) a X za podmínky $N = n$ má binomické rozdělení s parametry n a p ($(X \mid N = n) \sim Bi(n, p)$). Nalezněte rozdělení (N, X), rozdělení X a podmíněné rozdělení N za podmínky $X = k$.

Označme μ^0 čítací míru, pak n.v. N má hustotu vzhledem k míře μ^0,

$$f_N(n) = \frac{1}{n!} e^{-1}.$$

Náhodná veličina X za podmínky $N = n$ má hustotu vzhledem k míře μ^0,

$$f_{X|N}(k \mid n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Nechť existuje sdružená hustota $f_{X,N}(k,n)$ rozdělení (N, X) vzhledem k $\mu^0 \times \mu^0$, pak podle tvrzení 3

$$f_{X,N}(k,n) = f_N(n) \cdot f_{X|N}(k \mid n) \text{ s.v. } [\mu^0 \times \mu^0],$$

neboli

$$f_{X,N}(k,n) = \frac{p^k (1-p)^{n-k}}{(n-k)! \cdot k!} e^{-1} \text{ pro } n \in Z_0^+ \wedge k \in \{0,1,2,\dots,n-1,n\},$$

$$f_{X,N}(k,n) = 0 \text{ jinak.}$$

Hustotu rozdělení X získáme vypočtením rovnice

$$f_X(k) = \int_k^\infty f_{X,N}(k,n) d\mu^0(n) = \sum_{n=k}^\infty \frac{p^k (1-p)^{n-k}}{(n-k)! k!} e^{-1} = \frac{p^k}{k!} e^{-1} \sum_{n=k}^\infty \frac{(1-p)^{n-k}}{(n-k)!} =$$

$$= \frac{p^k}{k!} e^{-1} \sum_{n=0}^\infty \frac{(1-p)^n}{n!} = \frac{p^k}{k!} e^{-1} e^{1-p} = \frac{p^k}{k!} e^{-p} \text{ pro } k \in Z_0^+,$$

$$f_X(k) = 0 \text{ jinak.}$$

X má tedy Poissonovo rozdělení s parametrem p ($X \sim P(p)$).

Při znalosti $f_{X,N}(k,n)$ a $f_X(k)$ již můžeme vypočíst hustotu rozdělení N za podmínky $X = k$.

$$f_{N|X}(n \mid k) = \frac{f_{X,N}(k,n)}{f_X(k)} = \frac{\dfrac{p^k (1-p)^{n-k}}{(n-k)! \cdot k!} e^{-1}}{\dfrac{p^k}{k!} e^{-p}} =$$

$$= e^{-(1-p)} \frac{(1-p)^{n-k}}{(n-k)!} \text{ pro } k \in Z_0^+ \wedge n \in \{k, k+1, k+2, \dots\},$$

$$f_{N|X}(n \mid k) = 0 \text{ jinak.}$$

N za podmínky $X = k$ má tedy rozdělení jako náhodná veličina $k + M$, kde M má Poissonovo rozdělení s parametrem $1-p$ pro $k \in Z_0^+ \wedge n \in \{k, k+1, k+2, \dots\}$.

Literatura

[1] Štěpán J. (1987): Teorie pravděpodobnosti. Academia, Praha.

[2] Lachout P. (2004): Teorie pravděpodobnosti. Nakladatelství Karolinum, Praha.

[3] Doc. RNDr. Anděl J. (1985): Matematická statisika. Nakladatelství technické literatury, Praha.

[4] Doc. RNDr. Anděl J. (2005): Základy matematické statistiky. Matfyzpress, Praha.

[5] Dupač V, Hušková M. (2001): Pravděpodobnost a matematická statistika