

Michal Rössler, Metamathematics of Nonstandard Theories

(V. Švejdar, oponentský posudek na doktorskou
disertaci, srpen 2008)

Předložená disertační práce se zabývá axiomatickými teoriemi, v nichž lze pracovat s infinitezimálními čísly, tedy vlastně formalizovat nestandardní analýzu, a které jsou přitom tak slabé, že jejich bezspornost lze dokázat tzv. finitními prostředky. Autor uvažuje teorie NQA^+ , NQA^- a NQA^* , z nichž druhou a třetí definuje, první navrhli Chuaqui a Suppes. Pro všechny tyto teorie se zabývá důkazy jejich bezspornosti a jejich interpretovatelností vůči fragmentům Peanovy aritmetiky.

Hlavními výsledky práce jsou (a) upozornění na nedostatky v důkazu bezspornosti teorie NQA^+ , který předložili Chuaqui a Suppes, (b) důkazy bezspornosti teorií NQA^- a NQA^* formalizovatelné v primitivně rekurzivní aritmetice PRA, (c) vzájemná interpretovatelnost teorie NQA^- s $I\Delta_0 + \text{Exp}$, (d) interpretovatelnost silnějších teorií $I\Sigma_1$ a WKL_0 v NQA^+ . Hlavní metodou důkazů bezspornosti formalizovatelných v PRA je použití Hilbert-Ackermannovy věty.

Na několika místech jsem postrádal podrobnější vysvětlení nebo jsem si všiml určitých nedostatků. Předpokládám přitom, že jde o závady odstranitelné v průběhu objahoby nebo nedorozumění způsobená ne dost pozorným čtením. (i) Podformule $\mathbb{N}(x)$ v definici 2.3.16 vypadá jako nadbytečná. (ii) V definici 2.3.21 by čtenáři pomohlo slovní vysvětlení, jak se interpretuje znaménko s , například “1 značí záporné číslo”. (iii) Podobně v definici 2.3.31 by mohlo nebo mělo být řečeno, co se stane při dělení nulou. (iv) Ve výčtu symbolů na začátku pododdílu 3.1.1 si nelze domyslet, k čemu by mohl být užitečný symbol pro identickou funkci. Totéž platí pro symbol C_τ v následujícím bodu 7. (v) K definici 3.1.2 bych uvítal nějaké příklady. Kde v dalším je tato definice použita? (vi) V axiomech minima teorie NQA^+ je řečeno, že $\min_\varphi(y)$ je číslo nepřevyšující x splňující φ za předpokladu, že x samo splňuje φ , avšak myslím že vypadl postulát, že je to nejmenší takové číslo. (vii) V pododdílu 3.1.3 bych za definicí teorie S uvítal vysvětlení (důkaz z axiomů), proč je S sporná. Za posledním axiomem S21 není jasné, co přesně znamená “the constant terms are”. Jde o *všechny* konstantní termy, nebo jen o konstantní termy důležité pro náš účel? (viii) V Lemmatu 3.2.2 by mělo být řečeno, vůči jakým formulím je ona teorie konzervativní. (ix) V Kroku 1 pododdílu 3.2.3 postrádám vysvětlení, proč univerzum $M(N, \varepsilon)$ konstruovaného modelu je konečné. A co označuje C ? Všechny konstantní termy? (x) Definice 3.3.6 je nejasná. Nemělo by raději být, že τ je term kontrolující *pro* φ ? (xi) Výraz *externí formule* je matoucí, většinou by jej pravděpodobně bylo možné nahradit slovem *formule*.

Celkově musím říci, že práce se zvláště dobře nečte, protože autor se příliš nesnaží čtenáře získat pro předkládané teorie, a vlastně ani pro své pojetí problematiky. Uvítal bych nějaké ukázky práce v diskutovaných teoriích, nejlépe ovšem nějaký důkaz tvrzení o limitách, řadách nebo derivacích. Lemmata v pododdílu 3.1.2 obsahují dlouhý výčet dokazatelných tvrzení, z nichž žádné nebo skoro žádné se netýká infinitezimálních veličin, ani neukazuje použití těch podstatných axiomů, tj. axiomů minima, maxima, či sumy. Za tvrzením v prvním odstavci pododdílu 3.3.2, že NQA^* je silnější než NQA^- , avšak slabší než NQA^+ , by měly následovat nějaké ukázky tvrzení, která ony teorie separují. U teorie NQA^* vlastně chybí vysvětlení, proč se vůbec zavádí. Mělo by smysl uvažovat kromě uspořádaných těles také reálně uzavřená tělesa? Nebo to v nestandardní analýze není podstatné? Autor je zbytečně stručný v nejdůležitějších částech práce, tj. v důkazech vlastních výsledků. Jejich verifikace je tak velmi obtížná. Naproti tomu, celá kapitola 2 je naopak zbytečně podrobná.

Na druhé straně oceňuji například to, jak se autorovi podařilo nahradit osm axiomů o infinitezimálních číslech z prací Chuaquiho a Suppese mnohem přehlednější pěticí. V práci jsem nenalezl žádné podstatné chyby. Výhrady v předchozích dvou odstavcích se týkají pouze provedení, nikoliv samotných výsledků práce. Jak nestandardní analýza, tak zkoumání slabých teorií pomocí interpretovatelnosti a pomocí analýzy důkazů bezspornosti jsou velmi zajímavé oblasti výzkumu, a v práci je obojí problematika ojedinelým způsobem uvedena do souvislosti. Využití Hilbert-Ackermannovy věty v důkazech bezspornosti je zajímavá a domnívám se že "ta pravá" metoda. Z těchto důvodů soudím, že předložená práce vyhovuje všem požadavkům kladeným na doktorskou disertaci, a proto navrhuji, po úspěšné obhajobě, udělení titulu Ph.D.

V Praze 2.8.2008

