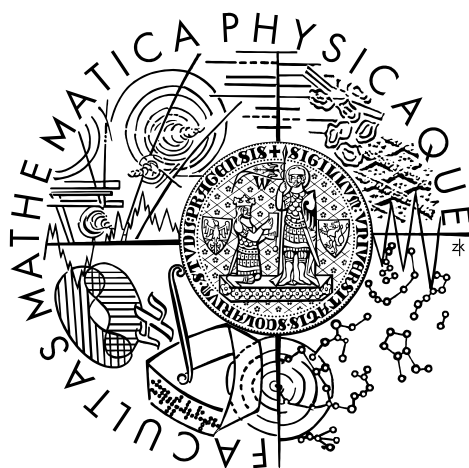


**UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE**  
Matematicko–fyzikální fakulta

**DISERTAČNÍ PRÁCE**



**Mgr. Ing. Iva Justová**

**MODELOVÁNÍ REZERVNÍHO FONDU  
NEŽIVOTNÍHO POJIŠTĚNÍ**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí disertační práce: Prof. Dr. Petr Mandl, DrSc.

Studijní program: Matematika, Finanční a pojistná matematika

Na tomto místě bych chtěla poděkovat svému školiteli Prof. Dr. Petru Mandlovi, DrSc., za čas, který mi během celého doktorského studia věnoval, a za cenné připomínky a podněty k této disertační práci.

Prohlašuji, že jsem svou disertační práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 23. června 2008

Iva Justová

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Vyrovnávací mechanismy</b>	<b>6</b>
2.1	Vyrovnávací rezerva . . . . .	6
2.2	Rozklad technického zisku/ztráty . . . . .	8
2.3	Model rezervního fondu . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Řízené Markovovy řetězce</b>	<b>11</b>
3.1	Stacionární řízení . . . . .	12
3.2	Řízení rezervního fondu . . . . .	14
3.3	Asymptotické vlastnosti řízení . . . . .	18
3.4	Příklad . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Modelování rezervního fondu</b>	<b>26</b>
4.1	Struktura rezervního fondu . . . . .	26
4.2	Stacionární rozdělení rezervního fondu . . . . .	28
4.3	Funkce rezervního fondu . . . . .	32
4.4	Příklad . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Model pro dvě odvětví</b>	<b>43</b>
5.1	Celkové zisky a ztráty . . . . .	43
5.2	Model oddělených fondů . . . . .	45
5.3	Model vzájemně propojených fondů . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Závěr</b>	<b>57</b>
	<b>Literatura</b>	<b>58</b>

# Kapitola 1

## Úvod

V rámci příprav nového konceptu regulace pojišťoven, Solventnosti II, se klade stále větší důraz na řízení rizik pojišťoven a na zabezpečení dostatečné výše kapitálu ke krytí neočekávaných ztrát. V [7] se v souvislosti s udržení solventnosti pozice doporučuje řídit výkyvy v ročních výstupech obchodu pojišťovny a udržovat je v určitém, předem stanoveném pásmu. Zároveň se zde uvádí, že jedním z užitečných nástrojů k dosažení tohoto cíle je vyrovnávací rezerva. Model rezervního fondu, který je v této práci představen, je založen právě na principech vyrovnávací rezervy.

Rezervní fond vedle běžného kapitálu slouží jako dodatečné zdroje k absorbování neočekávaných ztrát a současně napomáhá k vyrovnávání rizik spojených s neočekávanými výkyvy ve škodách v čase. Vhodnou volbou pravidel obsluhy, např. určením přípustných mezí, může být rezervní fond navíc nastaven tak, aby zároveň zajistil splnění kapitálových požadavků vztahujících se k příslušnému odvětví.

Modelování budoucího vývoje takovýchto fondů často spočívá v provádění řady stochastických simulací. Tento přístup je však časově a výpočetně náročný, proto se hledají i jiné cesty k získání potřebných výsledků.

Cílem této práce je navrhnout model rezervního fondu a ukázat, že jeho používáním pojišťovna reguluje svůj technický zisk, čímž zmírňuje dopady ročních výkyvů ve škodách. V práci jsou dále uvedeny návody, jak posuzovat efektivnost daného systému, a to pomocí několika charakteristik. Tyto ukazatele lze popsány postupy vypočítat přímo, a vyhnout se tak složitým simulacím. Práce představuje základní model pro jedno a dvě pojistná odvětví, který vychází ze zjednodušených předpokladů, nicméně může být dále rozšiřován. Celý text je rozdělen do čtyř kapitol, jejichž stručný obsah je uveden níže.

Kapitola 2 shrnuje základní poznatky týkající se vyrovnávací rezervy, zavádí obecné předpoklady modelu rezervního fondu a zaměřuje se na rozklad ročního technického zisku pojišťovny, jehož složky určují tvorbu a čerpání rezervního fondu.

Další kapitola je věnována teorii řízených Markovových řetězců, kterou využijeme při určení optimálního řízení rezervního fondu pojišťovny. Zabývat se budeme

také důležitými asymptotickými vlastnostmi nestacionárního řízení, které bude spočívat v dosazování maximálně věrohodných odhadů neznámých parametrů do optimálního stacionárního řízení rezervního fondu.

Předmětem čtvrté kapitoly je samotné modelování rezervního fondu. Velká pozornost je zde věnována odhadu stacionárního rozdělení rezervního fondu pomocí transformace náhodné veličiny s logaritmicko–normálním rozdělením. Dále se budeme soustředit na vliv používání rezervního fondu na bezpečnost a riziko uvažovaného odvětví a tento dopad budeme určitým způsobem kvantifikovat. Kapitulu uzavírá příklad s konkrétními výsledky v závislosti na různých parametrech modelu rezervního fondu.

Kapitola 5 se zabývá různými situacemi pro dvě pojistná odvětví. Blíže je popsán model oddělených rezervních fondů, který je poté zobecněn na model vzájemně propojených rezervních fondů.

Potřebné výpočty byly prováděny s použitím programu MATHEMATICA a některé grafické výstupy byly získány pomocí softwaru MS Excel.

# Kapitola 2

## Vyrovnávací mechanismy

Cílem této kapitoly je zavést obecný model rezervního fondu a stanovit jeho předpoklady. Nejprve se budeme věnovat charakteristice vyrovnávací rezervy, jakožto jednoho z používaných vyrovnávacích mechanismů. Dále se zaměříme na rozklad technického zisku pomocí upravených škodných poměrů, které určují tvorbu a čerpání rezervního fondu v jednotlivých obdobích.

S pojmem rezervního fondu se můžeme v naší historii setkat např. už ve vyhlášce č. 977 z roku 1948, kde se uvádí, že rezervní fond slouží k úhradě ztrát a tvoří se zvláště pro životní a zvláště pro neživotní pojištění. Každý z těchto rezervních fondů se doplňuje o úroky z příslušného fondu a o podíly na přebytcích v životním a neživotním pojištění, dokud nedosáhne své horní meze. Ta se určuje na konci každého roku a v případě neživotního pojištění činí 100% prémie rizikových pojištění a 50% prémie ostatních druhů pojištění splatných vždy v uplynulém účetním roce (po odečtení případných poplatků a dávek).

Rezervní fond se dále objevuje u Státní pojišťovny, kterou zavedl zákon č. 85/1952 Sb., o pojišťovnictví. V jejím Statutu z roku 1961 se můžeme dočíst, že rezervní fond byl určen ke krytí závazků Státní pojišťovny z pojištění dobrovolného a povinného, pokud k jejich krytí nestačily běžné příjmy daného kalendářního roku. Maximální výše rezervního fondu činila 400 mil. Kčs a dokud byl rezervní fond pod touto hranicí, odvádělo se do něj 50% čistého zisku Státní pojišťovny.

Jiným, ale podobným typem vyrovnávacího mechanismu je vyrovnávací rezerva. Ta má dlouhou historii používání především v Německu a ve Finsku, kde se tvoří zvláště pro různá specifická pojistná odvětví.

### 2.1 Vyrovnávací rezerva

Hlavním účelem vyrovnávací rezervy je zachování rovnováhy mezi pojistným a pojistným plněním z pohledu několika let. Proto se používá především u cyklických rizik, kdy jsou léta se špatným škodným průběhem kompenzována léty s dobrým škodným průběhem. Tvorba a čerpání vyrovnávací rezervy se často omezuje pouze na výkyvy ve škodách, které je proto potřeba oddělit od ostatního

obchodu pojišťovny.

Vyrovňovací rezerva plní dvě základní funkce. Za první představuje dodatečné prostředky ke krytí technických ztrát a za druhé slouží jako nástroj k vyrovnávání rizik v čase tím, že neočekávané zisky zadrží ke krytí budoucích neočekávaných ztrát. Odčerpáváním části zisků a naopak snižováním ztráty pojišťovna udržuje technický výsledek v určitém pásmu a v podstatě tak reguluje výstupy obchodu v podobě technického zisku. Používání vyrovňovací rezervy zároveň snižuje potřebu zajištění, neboť se tato rezerva chová jako vnitřní stop-loss zajištění. Na druhou stranu jejím používáním dochází ke snížení výplat dividend z neočekávaných technických zisků.

Každá vyrovňovací rezerva je charakterizována určitými pravidly obsluhy. Ty spočívají v definici transferu prostředků  $z$  a do rezervy (tuto veličinu v čase  $n$  budeme dále značit symbolem  $T_n$ ) a dále ve volbě přípustných limitů v čase  $n$ , tj. určení její dolní meze  $M_n$  a horní meze  $C_n$ .

Podle současné evropské legislativy, konkrétně podle směrnice Rady č. 73/239/EHS, která byla dále pozměněna směrnicí č. 87/343/EHS, se povinnost tvorby vyrovňovací rezervy vztahuje pouze na pojištění úvěru a záruky a tvoří se, pokud příslušné zasloužené pojistné překročilo 2,5 mil. EUR nebo pokud tvoří minimálně 4% z celkového pojistného.

Ve směrnici jsou zároveň popsány čtyři metody výpočtu vyrovňovací rezervy, které se považují za ekvivalentní. Označíme-li  $P'_n$  a  $CS_n$  zasloužené pojistné a celkové škody za období  $n$  a položíme-li  $Q_n = CS_n/P'_n$ , můžeme tyto výpočty shrnout do následujících vzorců (symboly  $q_n$  a  $s_n$  zde značí odhad střední hodnoty a směrodatné odchylky škodného poměru  $Q$  na základě posledních 15 – 30 pozorování):

1. metoda:  $M_n = 0$ ,  $C_n = 1,5 \max\{P'_{n-1}, \dots, P'_{n-5}\}$ ,  
 $T_n = \min\{0,75(P'_n - CS_n), 0,12P'_n\}$  pro  $P'_n > CS_n$ , jinak  $T_n = P'_n - CS_n$ ;
2. metoda:  $M_n = 0$ ,  $C_n = 0,268(P'_{n-1} + \dots + P'_{n-5})$ ,  
 $T_n = 0,75(P'_n - CS_n)$  pro  $P'_n > CS_n$ , jinak  $T_n = P'_n - CS_n$ ;
3. metoda:  $M_n = 0$ ,  $C_n = 6s_nP'_n$ ,  $T_n = (q_n - Q_n)P'_n + 0,21s_nP'_n$ ;
4. metoda:  $M_n = 3s_nP'_n$ ,  $C_n = 6s_nP'_n$ ,  $T_n = (q_n - Q_n)P'_n = q_nP'_n - CS_n$ .

*Poznámka.* Poslední dvě metody mohou být dále upraveny, aby zohledňovaly podíl nákladové složky v pojistném, zanechává-li spolu s průměrným škodným poměrem bezpečnostní marži. Příkladem může být postup používaný v Německu, který vychází ze třetí metody, přičemž  $M_n = 0$ ,  $C_n = (4,5s_n - 3(q'_n - q_n))P'_n$  a  $T_n = U_n - V_n + 0,035C_n$ , kde  $q'_n = 0,95 - k_n$  pro přímý obchod a  $q'_n = 0,99 - k_n$  pro nepřímý obchod,  $k_n$  je odhad nákladového poměru na základě posledních tří let,  $V_n = [(Q_n - q_n)_+ P'_n - 0,6(q'_n - q_n)_+]_+$  a  $U_n = (q_n - Q_n)_+ P'_n$ . Aby byla vyrovňovací rezerva tvořena, musí být průměrné zasloužené pojistné za poslední tři roky větší než určitá částka,  $s_n > 0,05$  a  $q_n + k_n > 1$  alespoň jednou za posledních 15 let.

Směrnice řadí vyrovnávací rezervu mezi technické rezervy pojišťoven, a tedy mezi její závazky. Naopak podle mezinárodních účetních standardů (IAS) se nejedná o současný závazek a na vyrovnávací rezervu se nahlíží jako na součást vlastního kapitálu pojišťovny. Podobný přístup bude aplikován v Solventnosti II. V této práci budeme vyrovnávací rezervu považovat za součást vlastních zdrojů pojišťovny a pro jakýkoliv vyrovnávací mechanismus budeme používat pojem rezervní fond.

## 2.2 Rozklad technického zisku/ztráty

Model rezervního fondu, který bude v této práci představen, je založen na několika obecných předpokladech. Pro zjednodušení budeme abstrahovat od provozních nákladů a nákladové přírážky obsažené v pojistném a nebudeme uvažovat ani časovou hodnotu peněz ani výnosy z investování. V základním modelu budeme nejprve uvažovat pouze pojistná rizika spojená s jediným odvětvím neživotního pojištění. Protože rezervní fond budeme tvořit a čerpat v závislosti na technickém zisku a ztrátě v jednotlivých letech, podíváme se nyní ještě krátce na jeho rozklad na základní složky.

V našem zjednodušeném modelu je technický zisk představován rozdílem mezi zaslouženým pojistným a náklady na pojistná plnění. Předpokládejme, že zasloužené pojistné  $P'_n$  za období  $n$  můžeme vyjádřit jako odhad střední hodnoty celkových škod vzniklých v období  $n$ , navýšený o ziskovou přírážku  $l_n$  aplikovanou v čase  $n$ . Označíme-li celkové náklady na škody vzniklé v roce  $n$  symbolem  $X_n$ , pak  $P'_n = \widehat{E}X_n(1 + l_n)$  a pro zasloužené ryzí pojistné  $P_n$  platí  $P_n = \widehat{E}X_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Součin  $P_n l_n$  představuje očekávaný zisk za období  $n$ , případně očekávanou ztrátu, je-li v některém období  $l_n < 0$ .

*Poznámka.* Úpravou výrazu  $P_n l_n$  lze do modelu zahrnout i další očekávané zisky a ztráty, které se vztahují k danému odvětví.

Zisková přírážka  $l_n$  bývá do jisté míry determinována situací na trhu. V souladu s obchodní strategií pojišťovny může být navíc dočasně stanovena jiná úroveň této přírážky, než je na trhu obvyklé. Z těchto důvodů ji v rámci modelu oddělíme od celkového pojistného a objem rizika v roce  $n$  budeme měřit pomocí zaslouženého ryzího pojistného  $P_n$ .

Technický zisk, resp. ztrátu vztahující se k roku  $n$  (tuto veličinu označíme  $TZ_n$ ) můžeme vyjádřit jako zasloužené pojistné snižené o celkové škody  $X_n$ , nebo pomocí upraveného škodného poměru

$$Z_n = \frac{X_n}{P_n}$$

jako

$$TZ_n = P_n(1 + l_n) - X_n = (1 + l_n - Z_n)P_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Budoucí roční zisky/ztráty budeme modelovat právě pomocí upraveného škodného poměru  $Z_n$ . Přitom budeme předpokládat, že veličiny  $Z_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , jsou



vzájemně nezávislé a stejně rozdělené, se střední hodnotou  $EZ = 1$  a směrodatnou odchylkou  $\sigma_Z = \sqrt{\text{Var}Z}$ .

*Poznámka.* Směrodatnou odchylku  $\sigma_Z$  můžeme odhadnout na základě minulých pozorování  $Z_0, \dots, Z_{-k}$  a údajů o zaslouženém ryzím pojistném  $P_0, \dots, P_{-k}$ ,  $k > 0$ . Tento odhad lze případně zkombinovat s příslušnou kolektivní zkušeností na trhu, protože směrodatná odchylka veličiny  $Z$  zároveň odpovídá variačnímu koeficientu veličiny  $X$ ,

$$\sigma_Z = \frac{\sqrt{\text{Var}X}}{EX}.$$

Skutečné technické náklady za rok  $n$  obsahují náklady na škody nahlášené v roce  $n$  a změnu rezervy na škody vzniklé, ale dosud nenahlášené, takže jsou ovlivněny i škodami vzniklými v minulých účetních obdobích. Nicméně stále můžeme skutečný technický zisk, resp. ztrátu  $TZ'_n$  v roce  $n$  rozložit pomocí veličin  $Z_{n-j}^i$ , které značí odhad skutečného upraveného škodného poměru  $Z_{n-j}$  na základě informace o škodách z roku  $n-j$  získané do konce  $i$ -tého účetního období od jejich vzniku.

Uvažovaný rozklad  $TZ'_n$  má tvar

$$TZ'_n = (1 + l_n - Z_n^1)P_n + \sum_{j=1}^r (Z_{n-j}^j - Z_{n-j}^{j+1})P_{n-j}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

První člen na pravé straně (2.1) odpovídá odhadu technického výsledku vztahujícího se k roku  $n$  na základě pozorování během prvního účetního období, tj. během kalendářního roku  $n$ . Rozdíly  $Z_{n-j}^j - Z_{n-j}^{j+1}$ ,  $j = 1, \dots, r$ , představují opravy odhadů škodných poměrů  $Z_{n-j}$  na základě dodatečných informací o škodách vzniklých v letech  $n-j$  a nahlášených v roce  $n$ . Parametr  $r$  vyjadřuje maximální zpoždění ve hlášení škod.

Pozorování, která má pojišťovna v čase  $n = 0$  skutečně k dispozici, tvoří posloupnost

$$Z_0^1, Z_{-1}^2, \dots, Z_{-r+1}^r, Z_{-r}, \dots, Z_{-k}, \quad k > 0,$$

kde se tedy od roku  $-r$  odhadované škodné poměry rovnají skutečným.

*Poznámka.* V případě technického zisku  $TZ'_n$  odpovídá neživotní pojistné riziko v čase  $n = 0$  riziku, že v následujícím roce dojde k technické ztrátě, tj.  $TZ'_1 < 0$ . Toto riziko můžeme dále rozdělit na dvě složky. Riziko pojistného představuje riziko, že zasloužené pojistné nepokryje škody, které nastanou během období 1, tedy riziko, že první člen rozkladu (2.1) bude záporný. Riziko rezerv naopak souvisí s možnou nedostatečností současných škodných rezerv ke krytí škod vzniklých v minulých obdobích – tuto situaci lze ztotožnit se situací, kdy pro  $n = 0$  bude druhý člen rozkladu (2.1) záporný.

V modelu rezervního fondu nebudeme riziko rezerv uvažovat a budeme předpokládat, že odhadované hodnoty upravených škodných poměrů odpovídají sku-

tečným hodnotám, tj.  $Z_n^i = Z_n \forall i = 1, \dots, r$ . Za těchto předpokladů budeme modelovat chování budoucích škod podle data jejich vzniku bez ohledu na zpoždění ve hlášení. Roční technické zisky a ztráty budou tedy obsahovat pouze očekávané zisky  $P_n l_n$  a neočekávané výkyvy v upraveném škodném poměru od střední hodnoty násobené zaslouženým ryzím pojistným  $(1 - Z_n)P_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

## 2.3 Model rezervního fondu

V této části navážeme na předpoklady z předchozí podkapitoly a zavedeme základní model rezervního fondu pro jedno pojistné odvětví. Rezervní fond budeme tvořit z části technického zisku a tyto prostředky budeme čerpat na úhradu technických ztrát. Přitom budeme dodržovat určité pásmo, ve kterém se může rezervní fond pohybovat.

Stav rezervního fondu na konci roku  $n$  označíme  $F_n$  a určíme ho tak, že stav rezervního fondu z konce minulého roku nejprve navýšíme o tvorbu, resp. snížíme o čerpání fondu a tento součet poté upravíme, aby vyhovoval stanoveným mezím příslušejícím času  $n$ . Obecně tedy vycházíme ze situace

$$F_n = g_n(F_{n-1} + T_n), \quad \text{kde } g_n(x) = \max(M_n, \min(x, C_n))$$

a konstanty  $M_n$  a  $C_n$  představují minimální a maximální výši fondu v čase  $n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Posloupnost stavů rezervního fondu na konci každého roku  $\{F_n\}$  tvoří náhodný proces s diskrétním časem. Tento proces považujeme za Markovský v tom smyslu, že při daném  $F_n$  nezávisí budoucí vývoj systému daný posloupností  $\{F_{n+k}, k > 0\}$  na jeho minulých hodnotách  $\{F_{n-k}, k = 1, \dots, n\}$ .

Skutečný přírůstek rezervního fondu za období  $n$  je  $F_n - F_{n-1}$  a k použití mimo odvětví (např. k výplatě dividend) je určen technický zisk snížený o tento skutečný přírůstek fondu, tj.  $(1 + l_n - Z_n)P_n - F_n + F_{n-1}$ . Veličina  $T_n$  odpovídá toku prostředků z/do fondu za období  $n$  bez ohledu na dané meze. Její výše se odvíjí od škodného poměru  $Z_n$  a zaslouženého pojistného v čase  $n$ .

V rámci modelu budeme ryzí pojistné  $P_n$  a ziskovou přírážku  $l_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , považovat za nenáhodné veličiny. Dále budeme předpokládat  $Z \sim \text{LN}(\mu, \sigma^2)$ , kde parametry  $\mu$  a  $\sigma^2$  jsou určeny směrodatnou odchylkou  $\sigma_Z$  za předpokladu  $EZ = 1$  následovně

$$\sigma^2 = \ln(\sigma_Z^2 + 1), \quad \mu = -\frac{\ln(\sigma_Z^2 + 1)}{2}. \quad (2.2)$$

V souladu s ekonomickou interpretací rezervního fondu a s principem vyrovnávací rezervy budeme uvažovat nulovou dolní mez fondu,  $M_n = 0 \forall n > 0$ . Stanovením optimální horní meze  $C_n$  v čase  $n$  se budeme zabývat v následující kapitole.

# Kapitola 3

## Řízené Markovovy řetězce

V této kapitole využijeme teorii řízených Markovových řetězců a určíme optimální řízení rezervního fondu popsaného v předchozí části. Prostřednictvím průměrných výnosů pak budeme zkoumat vlastnosti tohoto řízení v čase. K tomu nejprve zavedeme některé úvodní pojmy.

Uvažujme systém, který v časech  $n = 0, 1, \dots$  nabývá různých hodnot z uzavřeného intervalu  $I$ . Symbolem  $U_n$  označme stav systému v čase  $n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Je-li v čase  $n$  systém ve stavu  $y$ ,  $U_n = y$ , pak pravděpodobnostní rozdělení veličiny  $U_{n+1}$  je dáno distribuční funkcí

$$F_U(x|y; \xi), \quad x, y \in I,$$

která závisí na řídicím parametru  $\xi$ ,  $\xi \in \Xi(y) \subset R^q$ . V dalším budeme považovat  $\Xi(y)$  za uzavřený interval.

Řízení systému spočívá ve volbě řídicího parametru  $\xi$  v čase  $n$ , a to na základě minulých pozorování  $\{U_m = u_m, m = 0, 1, \dots, n\}$ ,  $\xi_n = \xi_n(u_0, \dots, u_n)$ . Řízením systému  $\omega$  rozumíme posloupnost těchto parametrů v čase

$$\omega = \{\xi_n, n = 0, 1, \dots\}.$$

Náhodnou veličinu představující skutečnou hodnotu řídicího parametru v čase  $n$  označíme symbolem  $\Xi_n = \xi_n(U_0, \dots, U_n)$ .

Označíme-li  $F_{U_0}(x)$  distribuční funkci veličiny  $U_0$ , pak pravděpodobnostní chování systému  $\{U_n, n = 0, 1, \dots\}$  s řízením  $\omega$  je charakterizováno podmíněnými pravděpodobnostmi

$$P^\omega(U_0 \leq x) = F_{U_0}(x), \quad x \in I,$$

$$P^\omega(U_{n+1} \leq x \mid U_0 = u_0, \dots, U_n = y) = F_U(x|y; \xi_n(u_0, \dots, y)), \\ u_0, \dots, y, x \in I, \quad n = 0, 1, \dots$$

Dále předpokládejme, že přechod ze stavu  $y$  do stavu  $x$  při volbě řídicího parametru  $\xi$  nám přináší určitý výnos ve výši

$$r(x|y; \xi), \quad \xi \in \Xi(y), \quad x, y \in I.$$

Skutečný výnos, kterého se dosáhne během prvních  $n$  přechodů, je představován náhodnou veličinou

$$R_n = \sum_{m=0}^{n-1} r(U_{m+1}|U_m; \Xi_m), \quad n = 1, 2, \dots$$

Cílem řízení je dosáhnout co nejvyšších výnosů.

### 3.1 Stacionární řízení

**Definice 1.** Jestliže pro řídicí parametry v čase  $n$  platí

$$\xi_n(u_0, \dots, u_n) = \xi(u_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

potom se řízení  $\omega$  nazývá *stacionární* a značí se  $\omega \sim \xi(y)$ .

V případě stacionárního řízení  $\omega \sim \xi(y)$  tvoří posloupnost  $\{U_n, n = 0, 1, \dots\}$  časově homogenní Markovův řetězec, kde pravděpodobnostní rozdělení přechodů je určeno distribuční funkcí  $F_U(x|y; \xi(y))$ . Pro pravděpodobnostní rozdělení veličiny  $U_n$  v čase  $n$ ,  $n \geq 1$ , platí Chapman–Kolmogorova rovnice

$$F_{U_n}(x) = \int F_U(x|y; \xi(y)) dF_{U_{n-1}}(y),$$

a stacionární rozdělení  $F_U(x)$  veličiny  $U$  je tedy určeno vztahem

$$F_U(x) = \int F_U(x|y; \xi(y)) dF_U(y).$$

V dalším textu budeme předpokládat, že existuje podmíněná hustota

$$f_U(x|y; \xi(y)) = \frac{\partial}{\partial x} F_U(x|y; \xi(y)), \quad \xi(y) \in \Xi(y), \quad x, y \in I,$$

spojitě diferencovatelná v intervalu  $\Xi(y)$  a že

$$Er(X|y; \xi(y)) = \int r(x|y; \xi(y)) dF_U(x|y; \xi(y))$$

je spojitě diferencovatelná v  $\Xi(y)$ ,  $y \in I$ . Pro hustotu  $f_U(x)$  veličiny  $U$  ve stacionárním stavu tedy platí

$$f_U(x) = \int_I f_U(x|y; \xi(y)) f_U(y) dy, \quad x \in I, \quad \int_I f_U(x) dx = 1. \quad (3.1)$$

Zaměřme se nyní na výnos dosažený z chování systému v čase při aplikaci řízení  $\omega \sim \xi(y)$  a definujme  $\Theta(\omega)$  jako střední hodnotu výnosu z jednoho přechodu ve stacionárním stavu

$$\Theta(\omega) = \int_I \int_I f_U(y) f_U(x|y; \xi(y)) r(x|y; \xi(y)) dx dy. \quad (3.2)$$

*Poznámka.* Je-li počáteční rozdělení veličiny  $U$  rovno stacionárnímu rozdělení,  $f_{U_0}(x) = f_U(x)$ ,  $x \in I$ , pak očekávaný výnos z  $n$  přechodů je

$$ER_n = n\Theta(\omega), \quad n = 1, 2, \dots$$

**Definice 2.** Stacionární řízení  $\omega \sim \xi(y)$  vedoucí k maximální hodnotě  $\Theta(\omega)$  nazveme *optimální stacionární řízení* a označíme ho  $\omega_0 \sim \xi_0(y)$ .

Podle výše uvedených předpokladů spojitosti na uzavřeném intervalu  $\Xi(y)$  optimální řízení existuje.

**Lemma 1.** Pro dané stacionární řízení  $\omega \sim \xi(y)$  střední výnos  $\Theta(\omega)$  určený (3.2) splňuje integrální rovnici

$$g(y) - \int_I g(x)f_U(x|y; \xi(y))dx = \int_I f_U(x|y; \xi(y))r(x|y; \xi(y))dx - \Theta(\omega), \quad y \in I, \quad (3.3)$$

kde  $g(y)$  je funkce omezená na  $I$ .

*Důkaz.* Nejprve obě strany rovnice (3.3) vynásobíme hustotou  $f_U(y)$  a pak integrujeme podle  $y$  přes interval  $I$ . Využijeme vztahu (3.1) a dostaneme

$$\int_I g(y)f_U(y)dy - \int_I g(x)f_U(x)dx = \int_I \int_I f_U(y)f_U(x|y; \xi(y))r(x|y; \xi(y))dxdy - \Theta(\omega).$$

Pravá strana rovnice je rovna nule, právě když  $\Theta(\omega)$  je dána vztahem (3.2).

Abychom dokázali existenci funkce  $g = g(y)$ , ověříme předpoklady věty o implicitně zadané funkci. Vyjdeme z rovnice

$$h(y, g) = 0, \quad \text{kde} \quad h(y, g) = g - \int_I g(x)f_U(x|y; \xi(y))dx - Er(X|y; \xi(y)) + \Theta(\omega).$$

Jelikož  $\frac{\partial}{\partial g}h(y, g) = 1$  a funkce  $f_U(x|y; \xi(y))$  i  $Er(X|y; \xi(y))$  mají podle předpokladů spojitě derivace podle  $y$ , zbývá ověřit existenci bodu  $(y_0, g_0)$ , pro nějž  $h(y_0, g_0) = 0$ .  $\Theta(\omega)$  představuje střední výnos z jednoho přechodu  $Er(X, Y; \xi(Y))$ . Existuje tedy bod  $y_0$ , tž.  $Er(X|y_0; \xi(y_0)) - \Theta(\omega) = 0$ . Rovnice

$$h(y_0, g) = 0, \quad h(y_0, g) = g(y_0) - \int_I g(x)f_U(x|y_0; \xi(y_0))dx,$$

je podle (3.1) splněna pro  $g(x) = f_U(x)$ , a hledaným bodem  $g_0$  je tedy  $g_0 = f_U(y_0)$ . Podle předpokládaných vlastností funkce  $Er(X|y; \xi(y))$  je pravá strana rovnice (3.3) omezená  $\forall y \in I$ .  $\square$

*Poznámka.* Funkce  $g(y) + k_1$ , kde  $k_1$  je konstanta, také vyhovuje rovnici (3.3), neboť

$$g(y) + k_1 - \int_I (g(x) + k_1)f_U(x|y; \xi(y))dx = g(y) - \int_I g(x)f_U(x|y; \xi(y))dx, \quad y \in I.$$

## 3.2 Řízení rezervního fondu

Rezervní fond popsany v kapitole 2 spočívá v zadržování prostředků na vyrovnávání výkyvů ve škodném poměru. Jeho výše v čase je ovlivněna náhodnou složkou představující výše škod a volbou funkce  $g_n(x) = \max(0, \min(x, C_n))$ . Řízením rezervního fondu zde budeme rozumět volbu řídicího parametru  $C_n$  v čase  $n$ .

Uvažujme veličinu  $U_n$ , která představuje prostředky fondu na počátku roku  $n$  zvýšené o zisk, resp. snížené o ztrátu během  $n$ -tého období,

$$U_n = g_{n-1}(U_{n-1}) + T_n, \quad \text{kde} \quad T_n = (1 + l_n - Z_n)P_n.$$

Dále předpokládejme, že roční výše ryziho pojistného i bezpečnostní přírážky se v čase nemění, tj.  $P_n = P$ ,  $l_n = l$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Na posloupnost veličin  $\{U_n\}$  můžeme nahlížet jako na časově homogenní Markovův řetězec s přechody v okamžicích  $n = 1, 2, \dots$  odpovídajících jednotlivým rokům a s množinou stavů  $I$ . Za podmínky  $U_n = y$  nezávisí budoucí vývoj  $U_{n+k}$ ,  $k \geq 1$ , na minulých pozorováních  $U_{n-k}$ ,  $k \geq 1$ . V souladu s definicemi v úvodní části této kapitoly označíme prostředky na počátku  $(n+1)$ -ního roku  $\xi_n = g_n(y)$  ( $\Xi_n = \xi_n(U_n)$ ). Pravděpodobnostní rozdělení veličiny  $U_{n+1}$  za podmínky  $U_n = y$  je určeno distribuční funkcí

$$F_U(x|y; \xi_n) = F_T(x - \xi_n(y)), \quad \text{kde} \quad \xi_n(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ y, & y \in (0, C_n), \\ C_n, & y \geq C_n, \end{cases} \quad x, y \in I.$$

Protože  $\xi_n \in [0, C_n]$  a  $C_n$ , jakožto horní hranice fondu v čase  $n$ , je přirozeně omezena, budeme  $\Xi(y)$  považovat za uzavřený interval  $[0, C_{\max}]$ , stejný  $\forall y \in I$ . Podobně roční škody  $Z_n P$  budeme považovat za shora omezené částkou  $M_{\max}$  a  $I = [-M_{\max}, (1 + l)P + C_{\max}]$  bude uzavřený interval. Dle předpokladů o logarit-micko-normálním rozdělení veličin  $Z_n$  existuje podmíněná hustota

$$f_U(x|y; \xi_n) = f_T(x - \xi_n(y)) = \frac{1}{P} f_Z\left(1 + l - \frac{x - \xi_n(y)}{P}\right), \quad (3.4)$$

která je spojitě diferencovatelná v  $I$ .

### 3.2.1 Optimální stacionární řízení

Je-li horní mez fondu  $C_n = C$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , představuje

$$\omega \sim \xi(y), \quad \xi(y) = \max(0, \min(y, C)), \quad (3.5)$$

stacionární řízení. Volbou nejvhodnějšího  $C$  určíme optimální stacionární řízení rezervního fondu.

Zvyšování horní meze, a tedy i velikosti fondu, na jedné straně vede k posílení bezpečnostní funkce fondu, na straně druhé však dochází k přílišnému zadržování

prostředků, které nemohou být použity jinak (např. jako dividendy akcionářům), a rostou tak náklady spojené s provozem fondu v podobě ušlého zisku. V rámci optimalizace horní hranice fondu  $C$  je potřeba nalézt kompromis mezi těmito dvěma aspekty.

Funkce výnosů z přechodů mezi jednotlivými stavy rezervního fondu v jednotlivých letech bude v našem případě dvourozměrná. Označme

$$r^1(x|y; \xi(y)) = \begin{cases} 1, & y > \xi(y), \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases} \quad r^2(x|y; \xi(y)) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \quad (3.6)$$

Skutečný výnos z přechodu ze stavu  $Y$  do stavu  $X$  můžeme zapsat jako

$$r(X|Y; \xi(Y)) = (r^1(X|Y; \xi(Y)), r^2(X|Y; \xi(Y))) = (\chi_{\{Y > \xi(Y)\}}, \chi_{\{X > 0\}}),$$

kde symbol  $\chi_A$  označuje indikátor jevu  $A$ .

Celkové výnosy za  $n$  období jsou pak určeny veličinami

$$R_n^1 = \sum_{m=0}^{n-1} r^1(U_{m+1}|U_m; \xi(U_m)) \quad \text{a} \quad R_n^2 = \sum_{m=0}^{n-1} r^2(U_{m+1}|U_m; \xi(U_m)).$$

$R_n^1$  představuje počet případů za  $n$  let, kdy byla překročena horní mez, tj. kdy část zisku vygenerovaného daným odvětvím byla využita i mimo dané odvětví. Podobně  $R_n^2$  představuje počet případů za  $n$  období, kdy nedošlo k vyčerpání fondu, a nebylo tedy potřeba do daného odvětví dodávat prostředky získané z jiných odvětví. U obou těchto veličin preferujeme vyšší hodnoty před nižšími, což v prvním případě vede na minimalizaci horní meze a ve druhém případě na její maximalizaci.

Abychom určili optimální stacionární řízení, pak podle definice chceme najít takové  $C$ , že stacionární řízení  $\omega \sim \xi(y)$  určené vztahem (3.5) povede k optimální kombinaci středních výnosů z jednoho přechodu

$$\begin{aligned} \Theta^1(\omega) &= \mathbb{E}\chi_{\{Y > \xi(Y)\}} = P^\omega(U > C) = 1 - F_U(C), \\ \Theta^2(\omega) &= \mathbb{E}\chi_{\{X > 0\}} = P^\omega(U > 0) = 1 - F_U(0). \end{aligned}$$

Při rozhodování, zda-li a jakou část fondu odvést mimo odvětví, se řídíme vnitřně stanovenou hranicí bezpečnosti  $1 - \epsilon$ . Pokud je pravděpodobnost pokrytí příštích ročních škod nižší než  $1 - \epsilon$ , z důvodu zachování bezpečnostní funkce fondu se žádné prostředky odvádět nebudou. Pokud prostředky stačí na pokrytí příštích škod s dostatečně velkou pravděpodobností (větší než  $1 - \epsilon$ ), můžeme část těchto prostředků uvolnit, ale pouze do té míry, aby zbylé prostředky ve fondu zaručily požadovanou bezpečnost vyjádřenou prostřednictvím parametru  $\epsilon$ . Hodnota  $\epsilon$  tedy představuje pravděpodobnost, že fond nepokryje ztráty během následujícího roku za podmínky, že část fondu byla dnes odvedena.

Výše popsané pravidlo vede k optimálnímu stacionárnímu řízení

$$\omega_0 \sim \xi_0(y), \quad \text{kde} \quad \xi_0(y) = \begin{cases} \max(0, y), & \text{je-li } P(U_{n+1} < 0 | U_n = y) = F_T(-y) > \epsilon, \\ C, & \text{je-li } P(U_{n+1} < 0 | U_n = y) = F_T(-y) \leq \epsilon, \end{cases} \quad (3.7)$$

a  $C$  vyhovuje podmínke

$$\epsilon = F_T(-C) = P(Z > 1 + l + C/P), \quad \text{neboli} \quad C = (z_{1-\epsilon}^Z - 1 - l)P, \quad (3.8)$$

kde  $z_{1-\epsilon}^Z$  je kvantil rozdelení veličiny  $Z$ ,  $P(Z > z_{1-\epsilon}^Z) = \epsilon$ .

*Poznámka.* Uvedené pravidlo s parametrem  $\epsilon$  můžeme aplikovat na jednoletý horizont i na více období, kdy rozhodování o aktuální výši fondu je založeno na dostatečnosti prostředků na pokrytí neočekávaných škod během příštích  $N$  let (více viz další kapitola).

*Poznámka.* Podobně bychom mohli rozhodovat o dolní mezi  $M$  a o dotacích – je-li  $U_n = y < 0$ , je vždy potřeba do odvětví dodat prostředky ve výši  $-y$ . Navíc můžeme požadovat dotaci, aby byly příští škody pokryty s určitou pravděpodobností  $1 - \delta$ , tj.  $P(U_{n+1} > 0 \mid \xi(U_n) = M) = 1 - \delta$ . Hodnota  $1 - \delta$  tak představuje minimální hladinu bezpečnosti,  $1 - \epsilon$  naopak bezpečnost dostatečnou.

Řízení (3.7) určuje obě optimální hodnoty  $\Theta^1(\omega_0)$  a  $\Theta^2(\omega_0)$ . V dalším textu můžeme proto uvažovat pouze druhý typ výnosů daný funkcí  $r^2(x|y; \xi(y))$ . Funkce

$$Er^2(X|y; \xi_0(y)) = P(X < 0 \mid \xi_0(y)) = F_T(-\xi_0(y))$$

je v souladu s předpokladem spojitě diferencovatelná v  $\Xi(y) = [0, C]$ ,  $y \in I$ . Podobně funkce  $f_U(x|y; \xi_0(y)) = f_T(x - \xi_0(y))$  je v  $\Xi(y)$ ,  $y \in I$ , spojitě diferencovatelná.

*Poznámka.* Místo sledování, dojde-li k přeplnění či vyčerpání fondu, můžeme v čase sledovat přímo velikosti těchto překročení. V tom případě bychom uvažovali alternativní výnosy v podobě

$$r_a^1(x|y; \xi(y)) = (y - \xi(y))^+ \quad \text{a} \quad r_a^2(x|y; \xi(y)) = -(x)^-.$$

Střední výnosy z jednoho přechodu pak mají tvar

$$(\Theta_a^1(\omega), \Theta_a^2(\omega)) = (E\{U - C \mid U > C\}, E\{U \mid U < 0\})$$

a  $C$  volíme tak, abychom docílili co největší hodnoty  $\Theta_a^1(\omega)$  a zároveň co největší hodnoty  $\Theta_a^2(\omega)$ . Kritériem rozhodování o velikosti kompromisního  $C$  pak může být např. zachování určité dostatečné bezpečnosti v podobě maximální tolerované výše přečerpání fondu  $u_\epsilon$  během následujícího roku, tedy

$$E\{U_{n+1} \mid U_{n+1} \leq 0, \xi(U_n) = C\} \geq -u_\epsilon.$$

### 3.2.2 Nestacionární řízení

Řídící parametr  $C = (z_{1-\epsilon}^Z - 1 - l)P$  je funkcí kvantilu rozdelení veličiny  $Z$ ,  $Z \sim \text{LN}(-\ln(\sigma_Z^2 + 1)/2, \ln(\sigma_Z^2 + 1))$ , který můžeme vyjádřit jako

$$z_{1-\epsilon}^Z = \exp\left\{-\frac{\ln(\sigma_Z^2 + 1)}{2} + \sqrt{\ln(\sigma_Z^2 + 1)}z_{1-\epsilon}\right\}, \quad (3.9)$$



kde  $z_{1-\epsilon}$  je kvantil  $1 - \epsilon$  normálního rozdělení  $N(0,1)$ .

Výše uvedené optimální stacionární řízení je tedy funkcí směrodatné odchylky  $\sigma_Z$ . Obecně budeme řízení (3.5) v závislosti na tomto parametru značit jako  $\omega \sim \xi(y, s)$ ,  $s \in S$ , značení  $\omega_0 \sim \xi_0(y)$  ponecháme pro skutečnou hodnotu parametru  $s = \sigma_Z$ ,  $\xi_0(y) = \xi(y, \sigma_Z)$ . Množinu  $S$  budeme pro jednoduchost považovat za uzavřený interval  $S = [0, S_{\max}]$ . Vzhledem k tvaru horní meze rezervního fondu  $C$  je  $\xi(y, s) \forall y \in I$  spojitá v  $S$  a podobně podmíněná hustota

$$f_U(x|y; \xi, s) = f_U(x|y; \xi(y, s)), \quad x, y \in I,$$

je spojitá v  $s \in S$ .

Jelikož skutečná hodnota parametru  $\sigma_Z$  není zpravidla známa, založíme naše řízení rezervního fondu v čase na jejím odhadu. Směrodatnou odchylku  $\sigma_Z$  nahradíme v čase  $n$  jejím odhadem  $s_n$  na základě pozorování  $U_0 = u_0, \dots, U_n = u_n$  a nestacionární řízení  $\omega = \{\xi_n(u_0, \dots, u_n), n = 0, 1, \dots\}$  získáme postupným dosazováním těchto odhadů do optimálního stacionárního řízení  $\omega_0 \sim \xi_0(y) = \xi(y, \sigma_Z)$ , tedy

$$\omega = \{\xi_n, n = 0, 1, \dots\}, \quad \text{kde} \quad \xi_n(u_0, \dots, u_n) = \xi(u_n, s_n(u_0, \dots, u_n)). \quad (3.10)$$

Je vidět, že  $\xi_n$  závisí na minulém pozorování pouze prostřednictvím odhadu  $s_n$  v čase  $n$ .

V případě řízení rezervního fondu budeme parametr  $\sigma_Z$  odhadovat metodou maximální věrohodnosti, a to ve smyslu maximálně pravděpodobného dosavadního vývoje fondu,

$$s_n = \arg \max_{s \in S} \prod_{m=0}^{n-1} f_U(u_{m+1}|u_m; \xi_m, s), \quad (3.11)$$

kde  $\xi_m = \xi(u_m, s_m)$  je strategie vybraná v čase  $m$ ,  $m < n$ .

*Poznámka.* Jelikož je stav systému v čase  $n$  závislý pouze na předchozí strategii  $\xi_{n-1}$  a na realizaci náhodné veličiny  $Z_n = z_n$ , je odhad  $s_n$  určený (3.11) stejný jako maximálně věrohodný odhad směrodatné odchylky  $\sigma_Z$  určený na základě pozorování  $Z_1 = z_1, \dots, Z_n = z_n$ ,  $s_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n (z_m - 1)^2}$ .

Maximálně věrohodný odhad  $s_n$  je v případě odhadu směrodatné odchylky náhodné veličiny se známou střední hodnotou nestranný ( $E s_n = \sigma_Z$ ) a má asymptoticky normální rozdělení

$$s_n \stackrel{\text{as.}}{\sim} N(\sigma_Z, (nI(\sigma_Z))^{-1}), \quad (3.12)$$

kde  $I(\sigma_Z)$  je Fisherova míra informace (předpoklad existence  $I(\sigma_Z)$  je v případě logaritmicko–normálního rozdělení splněn).

Zpřesňování odhadu skutečného parametru  $\sigma_Z$  zároveň vede ke zlepšování řízení rezervního fondu, které se blíží optimálnímu stacionárnímu řízení,

$$\Xi_n = \xi(U_n, s_n(U_0, \dots, U_n)) \longrightarrow \xi_0(U_n), \quad n \rightarrow \infty,$$

neboť  $s_n \rightarrow \sigma_Z$  při  $n \rightarrow \infty$  a  $\xi(y, s)$  je spojitá v  $s \in S$ .

### 3.3 Asymptotické vlastnosti řízení

Nyní se budeme zabývat situací, kdy se řízení  $\omega = \{\xi_n, n = 0, 1, \dots\}$  blíží k optimálnímu stacionárnímu řízení  $\omega_0 \sim \xi_0(y)$ . K tomu nejprve zavedeme funkci  $\phi$ , která bude vyjadřovat rozdíl řídicího parametru  $\xi \in \Xi(y)$  a  $\xi_0(y)$  v bodě  $y \in I$ . Pro optimální stacionární řízení  $\omega_0 \sim \xi_0(y)$  existuje střední hodnota výnosu  $\Theta(\omega_0)$  a omezená funkce  $g(y)$ ,  $y \in I$ , která vyhovuje integrální rovnici podle Lemma 1. S pomocí této funkce pro optimální řízení definujeme

$$\phi_{\omega_0}(y, \xi) = \int_I f_U(x|y; \xi)(r(x|y; \xi) + g(x))dx - g(y) - \Theta(\omega_0), \quad \xi \in \Xi(y), \quad y \in I.$$

Funkce  $\phi_{\omega_0}(y, \xi)$  je dle předpokladů o  $f_U(x|y; \xi)$ ,  $r(x|y; \xi)$  omezená v  $I$  a spojitá v  $\Xi(y)$ ,  $y \in I$ . Dále budeme předpokládat, že funkce  $\frac{\partial^2}{\partial y^2} f_U(x|y; \xi)$ ,  $x \in I$  a  $Er(X|y; \xi)$  jsou omezené v  $I$ . Index  $\omega_0$  v zápisu funkce  $\phi_{\omega_0}$  budeme v dalším textu vynechávat.

Z definice funkce  $\phi$  vyplývá, že pro optimální stacionární řízení  $\omega_0 \sim \xi_0(y)$  je

$$\phi(y, \xi_0(y)) = 0, \quad y \in I,$$

a podle následujícího lemma zároveň platí, že

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \phi(y, \xi)|_{\xi=\xi_0(y)} = 0, \quad y \in I.$$

**Lemma 2.** *Pro optimální stacionární řízení platí*

$$\max_{\xi \in \Xi(y)} \phi(y, \xi) = 0, \quad y \in I,$$

a stacionární řízení  $\omega \sim \xi(y)$  je optimální, právě když  $\phi(y, \xi(y)) = 0 \forall y \in I$ .

*Důkaz.* Pro stacionární řízení  $\omega \sim \xi(y)$  se střední hodnotou výnosu z přechodu  $\Theta(\omega)$  je

$$\int_I f_U(y) \phi(y, \xi(y)) dy = \Theta(\omega) - \Theta(\omega_0).$$

$\Theta(\omega) - \Theta(\omega_0) \leq 0$ , neboť v případě optimálního stacionárního řízení odpovídá  $\Theta(\omega_0)$  maximálnímu střednímu výnosu z jednoho přechodu. Kdyby pro nějaké  $y' \in I$  bylo  $\max_{\xi} \phi(y', \xi) > 0$ , existovalo by stacionární řízení  $\tilde{\omega} \sim \tilde{\xi}(y)$ , pro které by  $\phi(y, \tilde{\xi}(y)) \leq 0$ ,  $\phi(y, \tilde{\xi}(y)) \not\equiv 0$ ,  $y \in I$ , a  $\Theta(\tilde{\omega}) - \Theta(\omega_0) > 0$ , což by bylo v rozporu s předpokladem optimálního stacionárního řízení  $\omega_0 \sim \xi_0(y)$ . Funkce  $\phi(y, \xi(y)) \equiv 0$  pouze při řízení  $\omega = \omega_0$ .  $\square$

#### 3.3.1 Martingaly

V této části budeme předpokládat, že  $Y_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , je posloupnost náhodných veličin s konečnou střední hodnotou,  $\{\mathcal{F}_n, n = 0, 1, \dots\}$  je soustava jevových polí,  $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , a  $Y_n$  je  $\mathcal{F}_{n+1}$ -měřitelná,  $n = 0, 1, \dots$ . Pokud

$$E\{Y_n | \mathcal{F}_n\} = 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

potom posloupnost

$$M_n = \sum_{m=0}^{n-1} Y_m, \quad n = 1, 2, \dots,$$

je martingal vzhledem k  $\{\mathcal{F}_n\}$ .

Při studiu asymptotických vlastností výnosů  $R_n$  z řízení rezervního fondu využijeme zákon velkých čísel a centrální limitní větu pro martingaly. Důkazy těchto vět jsou uvedeny např. v [8].

**Věta 1 (Zákon velkých čísel).** *Nechť*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} EY_n^2 < \infty.$$

*Potom*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0 \quad \text{s.j.}$$

**Věta 2 (Centrální limitní věta).** *Nechť*

$$|Y_n| \leq K < \infty \quad \text{s.j.}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} E\{Y_m^2 \mid \mathcal{F}_m\} = \zeta \quad \text{v pravděp.,}$$

kde  $\zeta$  je konstanta. *Potom  $M_n/\sqrt{n}$  má asymptoticky normální rozdělení  $N(0, \zeta)$  při  $n \rightarrow \infty$ .*

Jevová pole  $\mathcal{F}_n$  budou v případě řízených Markovových řetězců určena posloupností náhodných veličin  $U_n$ ,  $\mathcal{F}_n = \{U_0, U_1, \dots, U_n\}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Pomocí výše popsaných funkcí  $\phi(y, \xi)$  a  $g(y)$  příslušejících optimálnímu stacionárnímu řízení  $\omega_0 \sim \xi_0(y)$  zavedeme martingalové diference

$$Y_n = r(U_{n+1}|U_n; \Xi_n) - \Theta(\omega_0) + g(U_{n+1}) - g(U_n) - \phi(U_n, \Xi_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.13)$$

Pro ně platí, že jsou  $\mathcal{F}_{n+1}$ -měřitelné a

$$\begin{aligned} E\{Y_n \mid \mathcal{F}_n\} &= \int_I r(x|U_n; \Xi_n) f_U(x|U_n; \Xi_n) dx - \Theta(\omega_0) + \int_I g(x) f_U(x|U_n; \Xi_n) dx - \\ &\quad - g(U_n) - \phi(U_n, \Xi_n) = \phi(U_n, \Xi_n) - \phi(U_n, \Xi_n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Posloupnost

$$M_n = \sum_{m=0}^{n-1} Y_m = R_n - n\Theta(\omega_0) + g(U_n) - g(U_0) - \sum_{m=0}^{n-1} \phi(U_m, \Xi_m)$$

je tedy martingal vzhledem k  $\{\mathcal{F}_n\}$ .

### 3.3.2 Dosazování maximálně věrohodných odhadů do optimálního stacionárního řízení

Zaměříme se nyní opět na řízení rezervního fondu popsaného v části 3.2.2, které spočívalo v dosazování maximálně věrohodných odhadů parametru  $\sigma_Z$  do optimálního stacionárního řízení  $\omega_0 \sim \xi_0(y) = \xi(y, \sigma_Z)$ ,  $\Xi_n = \xi(U_n, s_n(U_0, \dots, U_n))$ .

V následujících dvou větách ukážeme, že při tomto řízení průměrné výnosy za jedno období  $n^{-1}R_n$  konvergují k  $\Theta(\omega_0)$  a že  $R_n - n\Theta(\omega_0)$  má asymptoticky normální rozdělení při  $n \rightarrow \infty$ .

**Věta 3.** Pro řízení  $\omega = \{\xi_n, n = 0, 1, \dots\}$  definované vztahy (3.10) a (3.11) platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}R_n = \Theta(\omega_0) \quad \text{s.j.}$$

*Důkaz.* Martingalové diference (3.13) jsou podle předpokladu omezenosti funkcí  $r, g, \phi$  omezené, a splňují tedy podmínku  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}EY_n^2 < \infty$ . Podle Věty 1 tedy

$$n^{-1}M_n = n^{-1}R_n - \Theta(\omega_0) + n^{-1}(g(U_n) - g(U_0)) - n^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} \phi(U_m, \Xi_m) \longrightarrow 0 \quad \text{s.j.}$$

pro  $n \rightarrow \infty$ . (3.14)

Pro maximálně věrohodný odhad platí, že  $s_n(U_0, \dots, U_n) \rightarrow \sigma_n$  s.j.,  $n \rightarrow \infty$ . Vzhledem ke spojitosti funkce  $\xi(y, s)$  v bodě  $\sigma_Z$  a funkce  $\phi(y, \xi)$  v bodě  $\xi_0(y) = \xi(y, \sigma_Z)$ ,  $y \in I$ , platí

$$E|\phi(U_n, \Xi_n)| = E|\phi(U_n, \Xi_n) - \phi(U_n, \xi_0(U_n))| \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

a

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} E|n^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} \phi(U_m, \Xi_m)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} E|\phi(U_m, \Xi_m)| = 0.$$

Protože  $n^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} \phi(U_m, \Xi_m) \rightarrow 0$  s.j. pro  $n \rightarrow \infty$ , platí  $n^{-1}R_n \rightarrow \Theta(\omega_0)$  s.j. pro  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Věta 4.** Pro řízení  $\omega = \{\xi_n, n = 0, 1, \dots\}$  definované vztahy (3.10) a (3.11) platí

$$\frac{R_n - n\Theta(\omega_0)}{\sqrt{n}} \underset{\text{as.}}{\approx} N(0, \zeta(\omega_0)),$$

kde  $\zeta(\omega_0)$  je konstanta.

*Důkaz.* Označme

$$r_2(x|y; \xi) = (r(x|y; \xi) - \Theta(\omega_0))^2 + 2g(x)(r(x|y; \xi) - \Theta(\omega_0)) \quad \text{a}$$

$$r_2(y; \xi) = \int_I r_2(x|y; \xi) f_U(x|y; \xi) dx, \quad \xi \in \Xi(y), \quad x, y \in I. \quad (3.15)$$

Funkce  $Er(X|y; \xi)$  je spojitě diferencovatelná v  $\Xi(y)$ ,  $y \in I$ , a  $r_2(x|y; \xi)$  můžeme tedy považovat za určitý výnos z přechodu ze stavu  $y$  do stavu  $x$  při strategii  $\xi$ . Střední hodnotu výnosů určených funkcí  $r_2$  z jednoho přechodu při aplikaci optimálního řízení  $\omega_0 \sim \xi_0(y)$  označíme

$$\zeta(\omega_0) = \int_I \int_I f_U(y) f_U(x|y; \xi_0(y)) r_2(x|y; \xi_0(y)) dx dy = \int_I f_U(y) r_2(y; \xi_0(y)) dy. \quad (3.16)$$

Podle Lemma 1 pro optimální stacionární řízení s výnosy danými funkcí  $r_2$  existuje funkce  $g_2(y)$  omezená v  $I$ , pro kterou platí

$$g_2(y) - \int_I g_2(x) f_U(x|y; \xi_0(y)) dx = r_2(y; \xi_0(y)) - \zeta(\omega_0), \quad y \in I.$$

Definujme

$$\phi_2(y, \xi) = r_2(y; \xi) + \int_I g_2(x) f_U(x|y; \xi) dx - g_2(y) - \zeta(\omega_0), \quad \xi \in \Xi(y), \quad y \in I.$$

Funkce  $\phi_2(y, \xi)$  je spojitá v  $\Xi(y)$ ,  $y \in I$ , a  $\phi_2(y, \xi_0(y)) = 0 \forall y \in I$ . Analogickým postupem jako v důkazu Věty 3 při uvažování martingalových diferencí

$$Y'_n = r_2(U_n; \Xi_n) - \zeta(\omega_0) + g_2(U_{n+1}) - g_2(U_n) - \phi_2(U_n, \Xi_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

dostaneme, že

$$n^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} r_2(U_m; \Xi_m) \longrightarrow \zeta(\omega_0) \quad \text{s.j. pro } n \rightarrow \infty. \quad (3.17)$$

Náhodné veličiny (3.13) jsou omezené a

$$\begin{aligned} E\{Y_n^2 | \mathcal{F}_n\} &= E\{(r(U_{n+1}|U_n; \Xi_n) - \Theta(\omega_0))^2 + 2(r(U_{n+1}|U_n; \Xi_n) - \Theta(\omega_0))g(U_{n+1}) + \\ &\quad + g(U_{n+1})^2 - g(U_n)^2 - 2(r(U_{n+1}|U_n; \Xi_n) - \Theta(\omega_0) + g(U_{n+1}) - \\ &\quad - g(U_n))(g(U_n) + \phi(U_n, \Xi_n)) + \phi(U_n, \Xi_n)^2 | \mathcal{F}_n\} = \\ &= r_2(U_n, \Xi_n) + E\{g(U_{n+1})^2 | \mathcal{F}_n\} - g(U_n)^2 - (2g(U_n) + \phi(U_n, \Xi_n))\phi(U_n, \Xi_n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} E\{Y_m^2 | \mathcal{F}_m\} &= n^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} r_2(U_m; \Xi_m) + n^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} (E\{g(U_{m+1})^2 | \mathcal{F}_m\} - g(U_{m+1})^2) + \\ &\quad + n^{-1} (g(U_n)^2 - g(U_0)^2) - n^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} (2g(U_m) + \phi(U_m, \Xi_m))\phi(U_m, \Xi_m), \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

kde první člen na pravé straně se podle (3.17) pro  $n \rightarrow \infty$  blíží k  $\zeta(\omega_0)$ , druhý člen konverguje k 0 podle Věty 1, neboť  $\sum_{m=0}^{n-1} (E\{g(U_{m+1})^2 | \mathcal{F}_m\} - g(U_{m+1})^2)$  je

martingal a funkce  $g(y)$  je omezená v  $I$ , třetí člen konverguje k 0 a podobně poslední člen, protože funkce  $\phi$  je omezená a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} |\phi(U_m, \Xi_m)| = 0 \quad \text{s.j.}$$

Tedy  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} E\{Y_m^2 | \mathcal{F}_m\} = \zeta(\omega_0)$  s.j. a podle Věty 2 má

$$\frac{M_n}{\sqrt{n}} = \frac{R_n - n\Theta(\omega_0)}{\sqrt{n}} + \frac{g(U_n) - g(U_0)}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=0}^{n-1} \phi(U_m, \Xi_m)$$

asymptoticky normální rozdělení  $N(0, \zeta(\omega_0))$  při  $n \rightarrow \infty$ .

Funkci  $\phi(y, \xi)$  můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\phi(y, \xi(y, s)) = \phi(y, \xi(y, \sigma_Z)) + (s - \sigma_Z) \frac{\partial}{\partial s} \phi(y, \xi(y, \sigma_Z)) + \frac{(s - \sigma_Z)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \phi(y, \xi(y, \tilde{s})),$$

kde  $\tilde{s}$  leží mezi body  $s$  a  $\sigma_Z$ ,  $y \in I$ . Pro optimální stacionární řízení  $\omega_0 \sim \xi_0(y) = \xi(y, \sigma_Z)$  platí

$$\phi(y, \xi_0) = \frac{\partial}{\partial s} \phi(y, \xi(y, \sigma_Z)) = 0 \quad \forall y \in I \quad \text{a}$$

$$\phi(U_n, \Xi_n) = \phi(U_n, \xi(U_n, s_n)) = \frac{(s_n - \sigma_Z)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \phi(U_n, \xi(U_n, \tilde{s})),$$

$\tilde{s}$  leží mezi  $s_n$  a  $\sigma_Z$ . Druhá derivace funkce  $\phi$  je podle předpokladů omezená,  $|\frac{\partial^2}{\partial s^2} \phi(y, \xi(y, s))| \leq k_2 < \infty$ .

Pro maximálně věrohodný odhad parametru  $\sigma_Z$  platí (3.12) a

$$\text{Var } s_n(U_0, \dots, U_n) - \frac{1}{nI(\sigma_Z)} \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Platí  $E(s_n - \sigma_Z)^2 = \mathcal{O}(1/n)$  a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=0}^{n-1} E|\phi(U_m, \Xi_m)| \leq \frac{k_2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=0}^{n-1} E(s_m - \sigma_Z)^2 = 0.$$

Protože pro  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{M_n}{\sqrt{n}} - \frac{R_n - n\Theta(\omega_0)}{\sqrt{n}} = \frac{g(U_n) - g(U_0)}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=0}^{n-1} \phi(U_m, \Xi_m) \longrightarrow 0 \quad \text{s.j.},$$

platí

$$\frac{R_n - n\Theta(\omega_0)}{\sqrt{n}} \stackrel{\text{as.}}{\approx} N(0, \zeta(\omega_0)).$$

□

*Poznámka.* Uvedené asymptotické vlastnosti platí obecně pro řízení dosazováním odhadů parametrů, které se získají pomocí tzv. kontrastní funkce, do optimálního stacionárního řízení (viz [2]). Maximálně věrohodné odhady jsou speciálním případem těchto odhadů.

### 3.4 Příklad

Pro ilustraci nyní předpokládejme skutečnou směrodatnou odchylku náhodné veličiny  $Z$   $\sigma_Z = 0,2$ , bezpečnostní přírážku  $l_n = l = 0,1$  a ryzí pojistné  $P_n = P = 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Hodnota řídicího parametru  $C$  pro optimální stacionární řízení

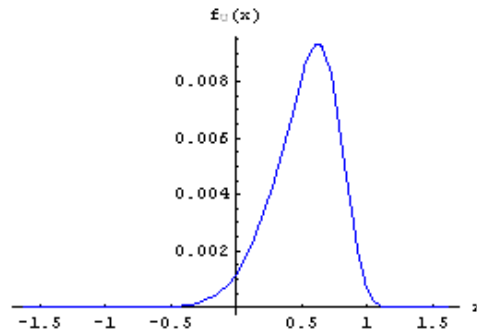
$$\omega_0 \sim \xi_0(y), \quad \xi_0(y) = \xi(y, \sigma_Z) = \max(0, \min(y, C)),$$

je dle (3.8)  $C = (z_{1-\epsilon}^Z - 1 - l)P$ . Zvolme hladinu bezpečnosti  $1 - \epsilon = 0,995$ , pro kterou je horní mez rezervního fondu  $C = 0,5332$ .

Stacionární rozdělení prostředků rezervního fondu na konci  $n$ -tého období

$$U_n = \xi_0(U_{n-1}) + (1 + l - Z_n)P, \quad n = 1, 2, \dots,$$

určíme podle vztahu (3.1), kde rozdělení pravděpodobností přechodu  $f_U(x|y; \xi_0)$ ,  $x, y \in I$ ,  $\xi_0 \in [0, C]$ , je dáno (3.4). Při aproximaci diskrétním rozdělením a uvažování množiny stavů  $I = [-C - (1+l)P, C + (1+l)P]$  dostáváme hustotu zobrazenou na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Hustota stacionárního rozdělení.

Hodnoty optimální kombinace středních výnosů jsou

$$\Theta^1(\omega_0) = 1 - F_U(C) = 0,5531 \quad \text{a} \quad \Theta^2(\omega_0) = 1 - F_U(0) = 0,9693.$$

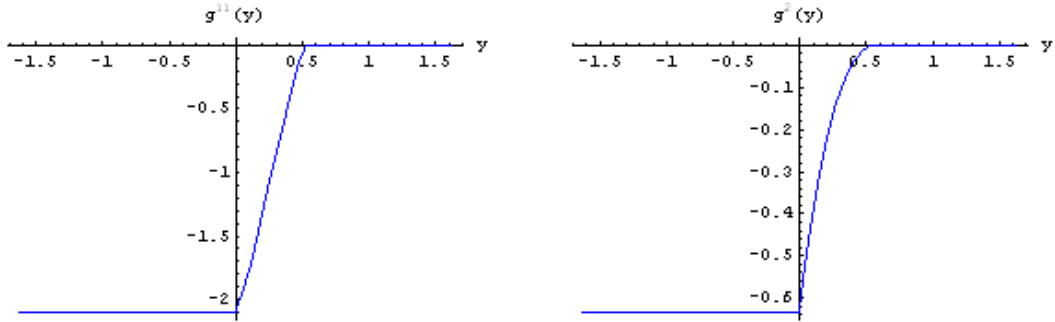
V rámci hledání optimálního stacionárního řízení jsme v části 3.2.1 uvažovali výnosové funkce  $r^1$ ,  $r^2$  dané předpisem (3.6). Funkce  $Er^1(X|y; \xi_0)$  nespĺňuje předpoklad spojitosti v  $I$ , proto nyní přejdeme k výnosové funkci

$$r^{11}(x|y; \xi_0) = \begin{cases} 1, & x > C, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

která vede ke stejné optimální hodnotě  $\Theta^{11}(\omega_0) = \Theta^1(\omega_0)$  a pro kterou je funkce  $Er^{11}(X|y; \xi_0)$  (podobně jako  $Er^2(X|y; \xi_0)$ ) spojitá v  $I$ . Na obrázku 3.2 jsou pro

úplnost znázorněny aproximace funkcí  $g(y)$ ,  $y \in I$ , daných integrální rovnicí (3.3) a příslušející výnosovým funkcím  $r^{11}$  a  $r^2$ . Na základě těchto aproximací můžeme dále podle (3.15) a (3.16) určit hodnoty  $\zeta(\omega_0)$ ,

$$\zeta^{11}(\omega_0) = 0,6403, \quad \zeta^2(\omega_0) = 0,0646.$$

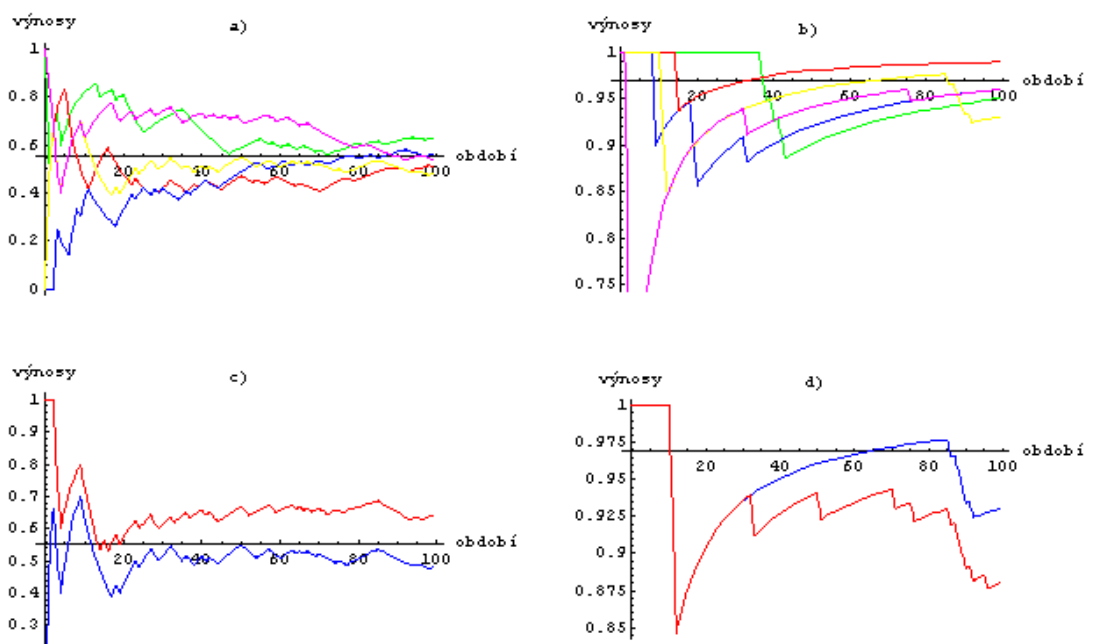


Obrázek 3.2: Funkce  $g(y)$ .

Pro ilustraci chování průměrných výnosů v čase bylo náhodně vygenerováno několik posloupností veličin  $Z_n$ ,  $n = 1, \dots, 100$ , z logaritmicko-normálního rozdělení se směrodatnou odchylkou  $\sigma_Z = 0,2$ , na které bylo postupně aplikováno nestacionární řízení rezervního fondu popsané v části 3.2.2 s počáteční hodnotou  $u_0 = C/2$ . Na obrázku 3.3 jsou znázorněny vývoje skutečných průměrných výnosů  $n^{-1}R_n^{11}$  (obr. 3.3a)) a  $n^{-1}R_n^2$  (obr. 3.3b)) v čase a dále porovnání jednoho případu se situací, kdy skutečná hodnota parametru  $\sigma_Z$  je od počátku známa (obr. 3.3c) a obr. 3.3d)). Červená křivka představuje průměrné výnosy získané nestacionárním řízením, modrá odpovídá průměrným výnosům z optimálního stacionárního řízení. Osa  $x$  vždy protíná osu  $y$  v bodě  $\Theta^{11}(\omega_0)$ , resp.  $\Theta^2(\omega_0)$ .

Aby bylo řízení rezervního fondu v praxi efektivní, je potřeba mít počáteční představu o parametru  $\sigma_Z$ , tedy o riziku spojeném s daným odvětvím.





Obrázek 3.3: Vývoj průměrných výnosů.

# Kapitola 4

## Modelování rezervního fondu

Tato kapitola je věnována modelování rezervního fondu, který byl obecně popsán v kapitole 2 a jehož strukturu dále specifikuje část 4.1. Abychom mohli modelovat chování fondu v budoucnosti nezávisle na počáteční výši fondu, je potřeba nejprve určit jeho nepodmíněné pravděpodobnostní rozdělení – to je předmětem druhé části této kapitoly. Závěry z části 4.2 dále využijeme při analýze bezpečnostní a vyrovnávací funkce fondu. Příklad uvedený v závěru kapitoly pak doplňuje teoretické poznatky o konkrétní výsledky v závislosti na různých parametrech modelu rezervního fondu.

V předchozí kapitole jsme ukázali, že postupné nahrazování neznámých parametrů rozdělení v rámci optimálního řízení maximálně věrohodnými odhady vede k maximálním průměrným výnosům a že postupným dosazováním dosáhneme výsledků nerozlišitelných od případu se znalostí těchto parametrů. Předpokládejme, že neznámé parametry takto průběžně odhadujeme, a dále je pro přehlednost považujeme za známé. V případě rezervního fondu se bude jednat především o směrodatnou odchylku  $\sigma_Z$  náhodné veličiny  $Z \sim \text{LN}(\mu, \sigma^2)$ ,  $\mu = -\sigma^2/2$ ,  $\sigma^2 = \ln(\sigma_Z^2 + 1)$ .

### 4.1 Struktura rezervního fondu

Velikost rezervního fondu  $F_n$  v čase  $n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , je dána stavem fondu na počátku období  $F_{n-1}$ , tvorbou či čerpáním fondu  $T_n$  a dolní (0) a horní ( $C_n$ ) mezí fondu,

$$F_n = g_n(F_{n-1} + T_n), \quad g_n(x) = \max(0, \min(x, C_n)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

V minulé kapitole jsme pro jednoduchost za toky  $T_n$  považovali celý technický zisk, resp. ztrátu za období  $n$ ,  $TZ_n = (1 - Z_n)P_n + l_n P_n$ . Je-li  $Z_n < 1$ , představuje  $(1 - Z_n)P_n$  neočekávaný zisk. Tyto prostředky použijeme na krytí neočekávaných ztrát v budoucích obdobích a navýšíme o ně rezervní fond. Pro posílení bezpečnostní funkce fondu můžeme navíc zadržet i část očekávaného zisku  $l_n P_n$ , je-li  $l_n > 0$ . V případě  $Z_n \geq 1$  neočekávané ztráty nejprve kompenzujeme

očekávanými zisky běžného období. Teprve pokud tyto zisky nestačí na pokrytí neočekávaných škod, čerpáme potřebné prostředky z rezervního fondu. Pokud očekávané zisky plně absorbovaly negativní výkyvy ve škodném poměru, tedy  $Z_n \in [1, 1 + l_n)$ , část celkového zisku opět z bezpečnostních důvodů zadržíme v podobě navýšení fondu jako prostředky do dalších let. Veličinu  $T_n$  můžeme tedy vyjádřit jako

$$T_n = \begin{cases} (1 - Z_n)P_n + jl_nP_n, & Z_n < 1, \\ j(1 + l_n - Z_n)P_n, & Z_n \in [1, 1 + l_n), \\ (1 + l_n - Z_n)P_n, & Z_n \geq 1 + l_n, \end{cases} \quad (4.1)$$

kde konstanta  $j \in [0, 1]$  vyjadřuje, jaké části ziskové přírážky obsažené v pojistném je pojišťovna (v případě, že  $l_nP_n$  nebylo spotřebováno) ochotna se vzdát na pokrytí budoucích neočekávaných ztrát. Je-li v některém období zisková přírážka záporná, rezervní fond na krytí těchto očekávaných ztrát nečerpáme a ve výpočtech klademe  $l_n = 0$ .

*Poznámka.* Takto zavedená obecná struktura přítoků fondu dává prostor pro různé modifikace. Chceme-li např. tvořit, resp. čerpat rezervní fond jako úměrnou část celkových zisků, resp. ztrát,  $T_n^1 = j^1(1 + l_n - Z_n)P_n$ , stačí v (4.1) položit  $j = 1$  a zasloužené ryzí pojistné snížit na hodnotu  $j^1P_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

*Poznámka.* Následující vztahy jsou odvozeny za předpokladu  $j \in (0, 1]$ , pro  $j = 0$  je třeba uvedené výpočty upravit.

Velikost přítoku do rezervního fondu je shora omezená a rozdělení veličiny  $T_n$  v čase  $n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , je dáno hustotou

$$f_{T_n}(x) = \begin{cases} \frac{1}{P_n} f_Z(1 + l_n - \frac{x}{P_n}), & x \leq 0, \\ \frac{1}{jP_n} f_Z(1 + l_n - \frac{x}{jP_n}), & x \in (0, jl_nP_n], \\ \frac{1}{P_n} (1 + jl_n - \frac{x}{P_n}), & x \in (jl_nP_n, (1 + jl_n)P_n], \\ 0, & x > (1 + jl_n)P_n, \end{cases} \quad (4.2)$$

kde  $f_Z$  je hustota veličiny  $Z$ .

Pro momenty veličiny  $T_n$  platí

$$ET_n^i = P_n^i \left[ \int_0^1 (1 + jl_n - z)^i f_Z(z) dz + \int_1^{1+l_n} j^i (1 + l_n - z)^i f_Z(z) dz + \int_{1+l_n}^{\infty} (1 + l_n - z)^i f_Z(z) dz \right], \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Při znalosti pravděpodobnostního rozdělení toků  $z$ /do fondu můžeme určit podmíněné rozdělení velikosti fondu  $F_n$  v čase  $n$  za podmínky, že  $F_{n-1} = y$ ,  $y \in [0, C_{n-1}]$ . Označíme-li  $F_{F_n|F}(x|y) = P(F_n \leq x | F_{n-1} = y)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,

platí

$$F_{F_n|F}(x|y) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - F_Z(1 + l_n - \frac{x-y}{P_n}), & x \in [0, C_n) \text{ \& } x \leq y, \\ 1 - F_Z(1 + l_n - \frac{x-y}{jP_n}), & x \in [0, C_n) \text{ \& } y < x < y + jl_nP_n, \\ 1 - F_Z(1 + jl_n - \frac{x-y}{P_n}), & x \in [0, C_n) \text{ \& } x \geq y + jl_nP_n, \\ 1, & x \geq C_n, \end{cases} \quad (4.4)$$

kde  $F_Z$  je distribuční funkce náhodné veličiny  $Z$ .

Protože cílem této kapitoly je modelovat velikost fondu  $F_n$  v čase  $n$  nezávisle na jeho předchozím vývoji, budeme v následující části hledat nepodmíněné rozdělení rezervního fondu ve stacionárním stavu.

## 4.2 Stacionární rozdělení rezervního fondu

Posloupnost  $\{F_n\}$  tvoří stacionární proces, pokud sdružené rozdělení náhodných veličin  $(F_{n_1}, F_{n_2}, \dots, F_{n_k})$  nezávisí na konkrétních hodnotách  $n_i$ , ale pouze na rozdílech  $n_{i+1} - n_i$ ,  $i = 1, \dots, k - 1$ . Stacionarita procesu bude v našem případě splněna za předpokladu neměnné velikosti portfolia dané zaslouženým ryzím pojistným a stabilní situace na pojistném trhu. Uvažujeme tedy, že od určitého času  $n_0$  platí  $P_n = P$ ,  $l_n = l$ ,  $C_n = C \forall n \geq n_0$ , a v dalším pro přehlednost předpokládáme  $n_0 = 1$ .

Abychom popsali pravděpodobnostní chování rezervního fondu za několik let nezávislé na počátečních podmínkách, potřebujeme určit jeho pravděpodobnostní rozdělení ve stacionárním stavu. Protože jsme rezervní fond ohraničili dvojicí  $\{0, C\}$ , nemůžeme toto rozdělení přímo popsat spojitou funkcí. Podobně jako v podkapitole 3.2 proto nejprve přejdeme od veličin  $F_n$  k veličinám

$$U_n = F_{n-1} + T_n = g(U_{n-1}) + T_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.5)$$

které představují prostředky fondu na počátku období navýšené o tvorbu, resp. snižené o čerpání fondu.

Ve stacionárním stavu platí

$$U \stackrel{\mathcal{D}}{=} g(U) + T.$$

Označíme-li  $f_U(x)$  hustotu stacionárního rozdělení veličiny  $U$  ( $f_U(x) = 0$  pro  $x > C + (1 + jl)P$ ), můžeme tento vztah vyjádřit jako integrální rovnici pro  $f_U(x)$

$$f_U(x) = f_T(x) \int_{-\infty}^0 f_U(u) du + \int_0^C f_U(u) f_T(x - u) du + f_T(x - C) \int_C^{\infty} f_U(u) du. \quad (4.6)$$

Rozdělení rezervního fondu ve stacionárním stavu odpovídá rozdělení náhodné veličiny  $g(U)$ . Ze znalosti funkce  $f_U(x)$  pak určíme toto rozdělení pomocí dvou

diskrétních složek  $p_0, p_1$  a spojitě funkce  $f_F(x)$ ,  $x \in (0, C)$ , kde

$$p_0 = P(F = 0) = \int_{-\infty}^0 f_U(u)du, \quad p_1 = P(F = C) = \int_C^{\infty} f_U(u)du$$

$$\text{a } f_F(x) = f_U(x), \quad 0 < x < C. \quad (4.7)$$

*Poznámka.* Známe-li stacionární rozdělení fondu  $F_F(x) = P(F \leq x)$ , můžeme určit také stacionární rozdělení přírůstků tohoto fondu za jedno období jako

$$F_{\Delta F}(x) = p_0 P(g(T) \leq x) + \int_0^C f_F(y) P(g(T+y) - y \leq x) dy + p_1 P(g(T+C) - C \leq x),$$

$$F_{\Delta F}(x) = \begin{cases} 0, & x < -C, \\ F_T(x)[1 - F_F(-x) + P(F = -x)], & -C \leq x < 0, \\ 1 - F_F(C - x)[1 - F_T(x)] + P(F = C - x)[1 - F_T(x)], & 0 \leq x < C, \\ 1, & x \geq C, \end{cases}$$

kde  $F_T(x) = P(T \leq x)$ . Funkce  $F_{F-F}(x)$  má tedy tři skoky, a to

- v bodě  $-C$  o velikosti  $p_1 F_T(-C)$ ,
- v bodě  $0$  o velikosti  $p_0 F_T(0) + p_1 [1 - F_T(0)]$  a
- v bodě  $C$  o velikosti  $p_0 [1 - F_T(C)]$ .

Hustotu  $f_U(x)$  určenou integrální rovnicí (4.6) nelze v našem případě vyjádřit v analytickém tvaru. Stacionární rozdělení fondu však můžeme aproximovat. Jedna z možností je přejít k limitnímu rozdělení Markovských řetězců s diskrétní množinou stavů, další možnost je aproximace pomocí transformace náhodných veličin majících normální rozdělení. Hlavní výhodou této metody je výsledný analytický tvar hledaného rozdělení. Porovnání obou typů aproximace rozdělení fondu je pak pro vybrané parametry uvedeno v části 4.4.

## Aproximace Markovskými řetězci s diskrétními stavy

Zaměříme se nejprve na aproximaci pomocí diskrétního rozdělení. Interval  $(0, C)$  rozdělme na  $m$  stejně velkých podintervalů o velikosti  $d = C/m$  a předpokládejme, že rezervní fond může nyní nabývat  $m+2$  stavů představovaných bodem  $0$ , intervaly  $(0, d)$ ,  $[(i-1)d, id]$ ,  $i = 2, \dots, m$ , a bodem  $C$ .

Pravděpodobnosti přechodů mezi těmito stavy můžeme vyjádřit pomocí distribuční funkce  $F_T(x) = P(T \leq x)$  následovně

$$f_{ik} = \begin{cases} F_T((-i+1)d), & k = 0, & i = 0, \dots, m+1, \\ F_T((k-i+1)d) - F_T((k-i)d), & k = 1, \dots, m, & i = 0, \dots, m+1, \\ 1 - F_T((m+1-i)d), & k = m+1, & i = 0, \dots, m+1. \end{cases}$$

Rozdělení rezervního fondu ve stacionárním stavu je dáno posloupností  $\{f_0, f_1, \dots, f_m, f_{m+1}\}$ , kde

$$f_0 = P(F = 0), \quad f_1 = P(F \in (0, d)),$$

$$f_i = P(F \in [(i-1)d, id]), \quad i = 2, \dots, m, \quad \text{a} \quad f_{m+1} = P(F = C).$$

Označíme-li  $\mathbf{p} = (f_0, \dots, f_{m+1})$  a  $\mathbf{P} = \{f_{ik}\}_{i,k=0}^{m+1}$ , pak hledané limitní rozdělení určené vektorem  $\mathbf{p}$  získáme řešením soustavy rovnic

$$\mathbf{p} = \mathbf{P}^T \mathbf{p}, \quad \sum_{i=0}^{m+1} f_i = 1.$$

## Aproximace transformací náhodných veličin

V této části budeme vycházet z předpokladu, že posloupnost veličin  $\{U_n\}$  vzniká transformací náhodných veličin  $\{\eta_n\}$ , které mají normované normální rozdělení. Platí  $U_n \doteq h_n(\eta_n)$ , kde  $h_n(x)$  je známá transformační funkce s parametry příslušejícími času  $n$ . Pro veličiny  $U_n$  platí (4.5) a obdobný vztah dostáváme pro veličiny  $\eta_n$ ,

$$h_n(\eta_n) \doteq g_{n-1}(h_{n-1}(\eta_{n-1})) + T_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Přejdeme-li nyní ke stacionárnímu stavu, kdy  $h_n(x) = h(x)$ ,  $g_n(x) = g(x)$ , platí analogicky  $h(\eta) \stackrel{D}{=} g(h(\eta)) + T$ ,  $\eta \sim N(0,1)$ . Z tohoto vztahu můžeme určit parametry transformační funkce  $h(x)$  porovnáním momentů veličin na obou stranách rovnice. Rozdělení náhodné veličiny  $U \doteq h(\eta)$  odhadneme pomocí distribuční funkce  $F_U(x) = \Phi(h^{-1}(x))$ , resp. hustoty  $f_U(x) = \phi(h^{-1}(x))[h(x)]'$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , kde  $\Phi$ , resp.  $\phi$  je distribuční funkce, resp. hustota rozdělení  $N(0,1)$ .

V případě rezervního fondu popsaného v části 4.1 jsou veličiny  $U_n$  shora omezené číslem  $C_n + (1 + jl_n)P_n$  a vzhledem k rozdělení veličin  $T_n$  mají i zápornou šikmost. Abychom zachovali tyto vlastnosti, uvažujme v čase  $n$  transformační funkci

$$h_n(x) = C_n + (1 + jl_n)P_n - e^{a_1^n x + a_0^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ve stacionárním stavu tak na veličinu  $U \doteq h(\eta) = C + (1 + jl)P - e^{a_1 \eta + a_0}$  můžeme pohlížet jako na  $U \doteq C + (1 + jl)P - Y$ , kde náhodná veličina  $Y$  má logaritmicko-normální rozdělení s parametry  $a_0$ ,  $a_1^2$  a hustotou  $f_Y(y)$ ,  $y > 0$ .

Při hledání neznámých parametrů  $a_0$ ,  $a_1$  využijeme toho, že ve stacionárním stavu mají veličiny  $g(U) + T$  a  $U = C + (1 + jl)P - Y$  stejné rozdělení. Porovnáním jejich prvních dvou momentů dostáváme následující dvě rovnice pro dvě neznámé

$$ET + Eg(U) = C + (1 + jl)P - e^{a_0 + \frac{a_1^2}{2}},$$

$$ET^2 + 2ETEg(U) + Eg(U)^2 = (C + (1 + jl)P)^2 - 2(C + (1 + jl)P)e^{a_0 + \frac{a_1^2}{2}} + e^{2a_0 + 2a_1^2}.$$

Střední hodnoty  $ET$ ,  $ET^2$  jsou určeny vztahy (4.3) a

$$Eg(U)^i = \int_0^C u^i f_U(u) du + C^i P(U \geq C), \quad i = 1, 2. \quad (4.8)$$

Střední hodnoty  $Eg(U)$  a  $Eg(U)^2$  můžeme vyjádřit pomocí distribuční funkce  $\Phi$  rozdělení  $N(0,1)$ . K tomu využijeme následující poznámku.

*Poznámka.* Je-li náhodná veličina  $\Omega \sim \text{LN}(a, b^2)$  s hustotou  $f_\Omega(\omega)$ ,  $\omega > 0$ , pak platí

$$\int_0^c f_\Omega(\omega) d\omega = \Phi\left(\frac{a - \ln c}{b}\right), \quad \int_0^c \omega f_\Omega(\omega) d\omega = e^{a+\frac{b^2}{2}} \left(1 - \Phi\left(\frac{a + b^2 - \ln c}{b}\right)\right),$$

$$\int_0^c \omega^2 f_\Omega(\omega) d\omega = e^{2a+2b^2} \left(1 - \Phi\left(\frac{a + 2b^2 - \ln c}{b}\right)\right),$$

kde  $\Phi$  je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení  $N(0,1)$ .

Jelikož  $f_U(u) = f_Y(C + (1 + jl)P - u)$ ,  $u < C + (1 + jl)P$ , pro momenty (4.8) dostáváme

$$Eg(U) = C\Phi\left(\frac{-a_0 + \ln((1 + jl)P)}{a_1}\right) +$$

$$+ (C + (1 + jl)P) \left( \Phi\left(\frac{-a_0 + \ln(C + (1 + jl)P)}{a_1}\right) - \Phi\left(\frac{-a_0 + \ln((1 + jl)P)}{a_1}\right) \right) -$$

$$- e^{a_0 + \frac{a_1^2}{2}} \left( \Phi\left(\frac{a_0 + a_1^2 - \ln((1 + jl)P)}{a_1}\right) - \Phi\left(\frac{a_0 + a_1^2 - \ln(C + (1 + jl)P)}{a_1}\right) \right),$$

$$Eg(U)^2 = C^2\Phi\left(\frac{-a_0 + \ln((1 + jl)P)}{a_1}\right) +$$

$$+ (C + (1 + jl)P)^2 \left( \Phi\left(\frac{-a_0 + \ln(C + (1 + jl)P)}{a_1}\right) - \Phi\left(\frac{-a_0 + \ln((1 + jl)P)}{a_1}\right) \right) -$$

$$- 2(C + (1 + jl)P)e^{a_0 + \frac{a_1^2}{2}} \left( \Phi\left(\frac{a_0 + a_1^2 - \ln((1 + jl)P)}{a_1}\right) - \Phi\left(\frac{a_0 + a_1^2 - \ln(C + (1 + jl)P)}{a_1}\right) \right) +$$

$$+ e^{2a_0 + 2a_1^2} \left( \Phi\left(\frac{\ln(1 + (jl + C)P) - a_0 - 2a_1^2}{a_1}\right) - \Phi\left(\frac{\ln((1 + jl)P) - a_0 - 2a_1^2}{a_1}\right) \right).$$

Získané hodnoty  $a_0$ ,  $a_1$  určují rozdělení náhodné veličiny  $Y$ , hustotu  $f_U$  veličiny  $U$ , a tedy i odhadnuté stacionární rozdělení rezervního fondu dané předpisem (4.7), kde

$$p_0 = 1 - F_Y(C + (1 + jl)P), \quad p_1 = F_Y((1 + jl)P),$$

$$f_F(x) = f_Y(C + (1 + jl)P - x), \quad x \in (0, C), \quad (4.9)$$

a  $F_Y$  je distribuční funkce veličiny  $Y \sim \text{LN}(a_0, a_1^2)$ .

## 4.3 Funkce rezervního fondu

Rezervní fond souvisí se solventností pojišťovny a může sloužit jako jeden z nástrojů jejího řízení. Jelikož rezervní fond představuje zadržené zisky pojišťovny z minulých let, je součástí jejich vlastních zdrojů, a tedy i součástí solventnostní marže (označované také jako disponibilní míra solventnosti). Dolní, resp. horní výše rezervního fondu mohou být navíc stanoveny tak, aby zabezpečily splnění určitých minimálních, resp. ekonomických požadavků na solventnostní marži. Tvorbou a čerpáním fondu pojišťovna zároveň reguluje výstupy svého obchodu, a udržuje je tak v určitém pásmu.

Podstatou používání rezervního fondu je rozložení dopadů nepříznivých a neočekávaných výkyvů ve škodách do několika účetních období, kde jsou kompenzovány zadržnými zisky. Proto zisky, které tvoří rezervní fond, nemohou být rozděleny mezi akcionáře v podobě dividend.

Předmětem této podkapitoly je především analýza dvou základních funkcí rezervního fondu. Tato analýza využívá odhadu stacionárního rozdělení rezervního fondu z předchozí části a její součástí jsou i výsledná kritéria tvorby rezervního fondu, která jsou shrnuta v závěru podkapitoly.

Vedle těchto základních funkcí rezervní fond také poskytuje informace o riziku daného odvětví, a přispívá tak ke zlepšování řízení rizik pojišťovny. Chování rezervního fondu, jakožto položky vlastních zdrojů, je během let zachycováno přímo v účetnictví pojišťovny, takže v základních účetních výkazech lze nalézt informace o minulých stavech rezervního fondu a o jeho skutečné tvorbě a čerpání. To spolu s informacemi o historickém zaslouženém pojistném charakterizuje riziko spojené s příslušným odvětvím.

Zadržováním zisků v podobě rezervního fondu pojišťovna vyrovnává rizika v čase a zvyšuje bezpečnost daného odvětví. Zároveň se však pojišťovna vzdává možnosti využívat tento kapitál alternativním způsobem. Cenu za výše uvedené funkce můžeme tedy vyjádřit jako náklady ušlé příležitosti z prostředků rezervního fondu. Přejdeme-li ke stacionárnímu rozdělení, pak výše rezervního fondu je představována střední hodnotou

$$EF = Eg(U) = CP(U > C) + \int_0^C u f_U(u) du.$$

V souhrnné tabulce v podkapitole 4.4 jsou uvedeny konkrétní hodnoty tohoto ukazatele pro vybrané parametry modelu spolu s dalšími dvěma ukazateli, které určitým způsobem charakterizují bezpečnostní a vyrovnávací funkci fondu. Na základě jejich vzájemného porovnání pak můžeme posoudit celkový přínos rezervního fondu pro pojišťovnu.

### 4.3.1 Shromažďování prostředků

Jedna z funkcí rezervního fondu je krytí negativních výkyvů ve škodném poměru prostředky zadržnými ze zisku v minulých obdobích.



V situaci bez rezervního fondu slouží ke krytí neočekávaných ztrát zisková přírážka obsažená v pojistném. Pravděpodobnost, že tyto očekávané zisky nebudou dostatečné a že dojde k technické ztrátě, je  $P(Z > 1 + l_n)$ . Tuto pravděpodobnost můžeme snížit právě používáním rezervního fondu, který představuje dodatečné prostředky ke krytí těchto ztrát. Pravděpodobnost, že bude potřeba alokovat do odvětví další kapitál na krytí ztrát, pak odpovídá pravděpodobnosti, že dojde k vyčerpání fondu  $P(F_n = 0)$ .

Výše fondu se v čase mění, proto pro porovnání přejdeme opět ke stacionárnímu stavu, kde  $P(F_n = 0) = P(U \leq 0) = p_0$ . Závislost této pravděpodobnosti na směrodatné odchylce  $\sigma_Z$ , ziskové přírážce  $l$  a parametru  $j$  bude názorně ukázána v příkladu v části 4.4. Jeho součástí bude i porovnání bezpečnosti dané pravděpodobností  $p_0$  s pravděpodobností  $P(Z > 1 + l)$  pro konkrétní parametry modelu.

Zásadní vliv na bezpečnostní funkci fondu má stanovení jeho horní meze. V kapitole 3 jsme uvažovali optimální horní mez  $C$  takovou, že s danou pravděpodobností  $1 - \epsilon$  stačí prostředky ve výši  $C$  na pokrytí technických ztrát (neočekávané ztráty snížené o očekávaný zisk) vzniklých během jednoho roku. Při volbě  $\epsilon = 0,005$  tak zároveň hodnota  $C$  odpovídá regulatornímu požadovanému kapitálu ke krytí rizika pojistného (při současném zohlednění očekávaných zisků z pojištění). Z regulatorního hlediska tedy není potřeba držet více kapitálu, a naplněný rezervní fond tak představuje dostatečnou hladinu kapitálu alokovanou danému odvětví.

Protože v případě cyklických rizik může být přiměřenost shromážděných prostředků pojišťovnou posuzována z pohledu několika let, zaměříme se v následující části na stanovení horní hranice fondu pro případ víceletého horizontu.

### Horní mez v horizontu více let

Předpokládejme, že jedním z cílů rezervního fondu je krytí neočekávaných ztrát v průběhu  $N$  let,  $N > 1$ . Opět se zde střetává posílení bezpečnosti se snahou efektivně využívat kapitál a je nutné volit kompromis. Danou výši fondu považujeme za dostatečnou, pokud pravděpodobnost, že během následujících  $N$  let dojde k vyčerpání fondu, je dostatečně malá.

Označme zvolenou hladinu pravděpodobnosti  $\alpha$ . Optimální maximální výše  $C_n$  v čase  $n$  je nyní dána vztahem

$$P\left(\min_{k=1,\dots,N} F_{n+k} = 0 \mid F_n = C_n\right) = \alpha, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.10)$$

Výši  $C_n$  definovanou (4.10) ovšem nelze při podmíněném rozdělení (4.4) explicitně určit, a je tedy potřeba ji vhodně odhadnout.

Plný rezervní fond by měl pokrýt extrémní události, které s velkou pravděpodobností  $(1 - \alpha)$  nebudou překročeny. V rámci následující aproximace se omezíme pouze na takové extrémní situace, kdy v žádném roce nestačí celkové zasloužené pojistné na pokrytí ročních škod, a každý rok tak dochází k čerpání fondu. Dopad těchto situací se budeme snažit volbou  $C_n$  omezit.

Odhad horní meze  $C_n$  tedy hledejme na základě požadavku

$$P\left(\sum_{k=1}^N T_{n+k} > -C_n \ \& \ T_{n+k} \leq 0, \ k = 1, \dots, N\right) = 1 - \alpha.$$

Pro zjednodušení dalšího zápisu přejdeme k náhodným veličinám  $(T_n)^-$  definovaným jako

$$(T_n)^- = \max(0, -T_n) \quad \text{a} \quad P((T_n)^- \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ F_Z(1 + l_n + \frac{x}{P_n}), & x \geq 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Hodnota  $C_n$  nyní vyhovuje rovnici

$$P\left(\sum_{k=1}^N (T_{n+k})^- < C_n\right) = 1 - \alpha$$

a určíme ji jako kvantil rozdělení veličiny  $\sum_{k=1}^N (T_{n+k})^-$ . Protože veličiny  $(T_{n+k})^-$  jsou vzájemně nezávislé, můžeme příslušný kvantil aproximovat pomocí kvantilů rozdělení veličin  $(T_{n+k})^-$ ,  $k = 1, \dots, N$ , tedy

$$C_n = z_{1-\alpha}^{\sum_{k=1}^N (T_{n+k})^-} \doteq \sqrt{\sum_{k=1}^N (z_{1-\alpha}^{(T_{n+k})^-})^2}.$$

Z pravděpodobnostního rozdělení uvedeného v (4.11) vyplývá, že pro dostatečně malé  $\alpha$  je

$$z_{1-\alpha}^{(T_n)^-} = z_{1-\alpha}^{-T_n} = (z_{1-\alpha}^Z - 1 - l_n)P_n, \quad \alpha < 1 - F_Z(1 + l_n),$$

kde  $z_{1-\alpha}^Z$  je určeno obdobně jako v (3.9).

Optimální výši horní meze rezervního fondu v čase  $n$  určené vztahem (4.10) aproximujeme následovně

$$C_n \doteq \sqrt{\sum_{k=1}^N (z_{1-\alpha}^{(T_{n+k})^-})^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^N (z_{1-\alpha}^Z - 1 - l_{n+k})^2 P_{n+k}^2}. \quad (4.12)$$

Speciálně pro  $P_{n+k} = P$ ,  $l_{n+k} = l$ ,  $k = 1, \dots, N$ , dostáváme tento odhad ve tvaru

$$C_n \doteq \sqrt{N}(z_{1-\alpha}^Z - 1 - l)P, \quad \alpha < 1 - F_Z(1 + l).$$

*Poznámka.* Pro ilustraci ještě porovnejme přesnost odhadu horní meze fondu stanovené z pohledu  $N = 2$  období při zvolené hladině  $\alpha = 0,005$ . Přitom uvažujme

$P_{n+k} = P$ ,  $l_{n+k} = l$  pro  $k = 0, 1, 2$ . Optimální maximální výše fondu  $C_n$  v čase  $n$  je dána vztahem (4.10), který můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P(F_{n+1} > 0, F_{n+2} > 0 \mid F_n = C_n) = \\ &= \int_0^{C_n} P(F_{n+2} > 0 \mid F_{n+1} = y)P(F_{n+1} = y \mid F_n = C_n)dy + \\ &\quad + P(F_{n+2} > 0 \mid F_{n+1} = C_n)P(F_{n+1} = C_n \mid F_n = C_n) = \\ &= \int_0^{C_n} F_Z(1 + l + \frac{y}{P})f_Z(1 + l + \frac{C_n - y}{P})dy + F_Z(1 + l + \frac{C_n}{P})F_Z(1 + l). \end{aligned}$$

Pokud nyní do výrazu na pravé straně za optimální hodnotu  $C_n$  dosadíme hodnotu odhadnutou podle (4.12), dostaneme jí odpovídající pravděpodobnost, že během dvou let nedojde k vyčerpání fondu. Tuto pravděpodobnost můžeme porovnat se zvolenou hladinou bezpečnosti  $1 - \alpha = 0,995$ . Při volbě  $P = 1$  a  $l = 0$  se výsledné hodnoty pro  $\sigma_Z \in [0,05, 0,25]$  pohybují v rozmezí od 0,9953 do 0,9963, pro  $l = 0,1$  dostáváme hodnoty okolo 0,997 a podobně pro  $l = 0,2$ ,  $\sigma_Z \in [0,1, 0,25]$ .

Je vidět, že odhad horní meze prostřednictvím (4.12) vede k mírnému navýšení hladiny bezpečnosti v podobě pravděpodobnosti  $1 - \alpha$ .

### 4.3.2 Vyrovnávání rizik v čase

Další důležitou funkcí rezervního fondu je vyrovnání výkyvů ve škodném poměru v čase. Riziko spojené s těmito výkyvy budeme měřit pomocí směrodatné odchylky ročních zisků/ztrát připadajících na jednotku ryzího pojistného.

Pokud pojišťovna nevytváří rezervní fond, pak její zisk/ztráta za období  $n$  je  $TZ_n = (1 + l_n - Z_n)P_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Střední hodnota a směrodatná odchylka této veličiny vydělené zaslouženým ryzím pojistným jsou

$$E(TZ_n/P_n) = l_n, \quad \sqrt{\text{Var}(TZ_n/P_n)} = \sigma_Z.$$

Používáním rezervního fondu pojišťovna reguluje roční zisky/ztráty tím, že je upravuje o tvorbu, resp. čerpání fondu. Skutečný výsledek za období  $n$  je tedy náhodná veličina  $W_n$ ,

$$W_n = (1 + l_n - Z_n)P_n - (F_n - F_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.13)$$

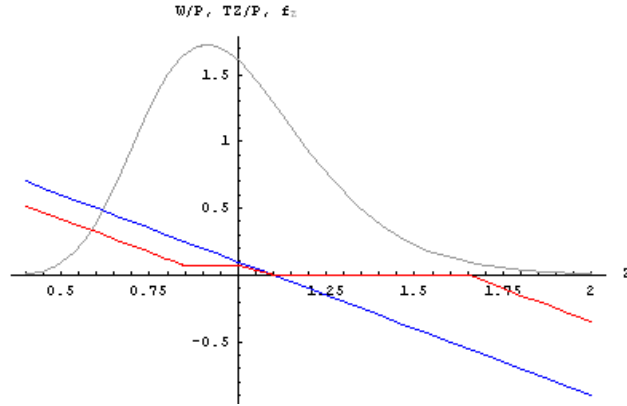
Riziko na jednotku ryzího pojistného je v tomto případě dáno směrodatnou odchylkou  $\sigma_{W_n/P_n} = \sqrt{\text{Var}(W_n/P_n)}$ .

Abychom kvantifikovali riziko regulované veličiny  $W_n/P_n$  nezávisle na stavu  $F_{n-1}$ , přejdeme ke stacionárnímu stavu, kde  $P_n = P$ ,  $l_n = l$ ,  $C_n = C$ , a využijeme stacionárního rozdělení rezervního fondu, které jsme odhadli v části 4.2. Jelikož  $F_n = g_n(F_{n-1} + T_n)$ , můžeme veličinu  $W_n/P$  vyjádřit pomocí stavu fondu na

počátku  $n$ -tého období a náhodné veličiny  $Z_n$  jako

$$\frac{W_n}{P} = \begin{cases} 1 + l - Z_n + \frac{F_{n-1}-C}{P}, & Z_n < 1 \text{ \& } Z_n < 1 + jl + \frac{F_{n-1}-C}{P}, \\ (1-j)l, & Z_n < 1 \text{ \& } Z_n \geq 1 + jl + \frac{F_{n-1}-C}{P}, \\ 1 + l - Z_n + \frac{F_{n-1}-C}{P}, & Z_n \in [1, 1+l) \text{ \& } Z_n < 1 + l + \frac{F_{n-1}-C}{jP}, \\ (1-j)(1+l - Z_n), & Z_n \in [1, 1+l) \text{ \& } Z_n \geq 1 + l + \frac{F_{n-1}-C}{jP}, \\ 0, & Z_n \geq 1+l \text{ \& } Z_n < 1+l + \frac{F_{n-1}}{P}, \\ 1 + l - Z_n + \frac{F_{n-1}}{P}, & Z_n \geq 1+l \text{ \& } Z_n \geq 1+l + \frac{F_{n-1}}{P}. \end{cases}$$

Tato veličina má oproti veličině  $TZ_n/P$  nižší střední hodnotu a menší rozptyl. To je vidět také z následujícího obrázku 4.1, kde je při  $\sigma_Z = 0,25$ ,  $l = 0,1$ ,  $j = 0,25$  a  $F_{n-1} = EF$  zobrazena hodnota  $W_n/P$  (červeně) a  $TZ_n/P$  (modře) v závislosti na realizaci náhodné veličiny  $Z_n$ , jejíž hustota je pro ilustraci také znázorněna.



Obrázek 4.1: Závislost veličin  $W_n/P$  a  $TZ_n/P$  na veličině  $Z_n$ .

Označíme-li  $c = C/P$ , určíme první dva momenty veličiny  $W_n/P$  jako

$$\begin{aligned} E(W_n/P)^i &= E_{F_{n-1}}(E\{(W_n/P)^i | F_{n-1}\}) = p_0 E\{(W_n/P)^i | F_{n-1} = 0\} + \\ &+ \int_0^c E\{(W_n/P)^i | F_{n-1} = fP\} f_F(fP) df + p_1 E\{(W_n/P)^i | F_{n-1} = C\}, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} E\{(W_n/P)^i | F_{n-1} = 0\} &= \int_{1+l}^{\infty} (1+l-z)^i f_Z(z) dz + \\ &+ \chi_{\{jl < c\}} \left[ \int_1^{1+l} (1-j)^i (1+l-z)^i f_Z(z) dz + \int_0^{1+l-j-c} (1+l-z-c)^i f_Z(z) dz + \right. \\ &+ \left. \int_{1+jl-c}^1 (1-j)^i l^i f_Z(z) dz \right] + \chi_{\{jl \geq c\}} \left[ \int_1^{1+l-\frac{c}{j}} (1+l-z-c)^i f_Z(z) dz + \right. \\ &+ \left. \int_{1+l-\frac{c}{j}}^{1+l} (1-j)^i (1+l-z)^i f_Z(z) dz + \int_0^1 (1+l-z-c)^i f_Z(z) dz \right], \end{aligned}$$

$$E\{(W_n/P)^i | F_{n-1} = C\} = \int_{1+l+c}^{\infty} (1+l+c-z)^i f_Z(z) dz + \int_0^{1+l} (1+l-z)^i f_Z(z) dz,$$

$$\begin{aligned} E\{(W_n/P)^i | F_{n-1} = fP, f \in (0, c)\} &= \int_{1+l+f}^{\infty} (1+l+f-z)^i f_Z(z) dz + \\ &+ \chi_{\{f < (c-jl)+\}} \left[ \int_1^{1+l} (1-j)^i (1+l-z)^i f_Z(z) dz + \int_0^{1+jl+f-c} (1+l+f-c-z)^i f_Z(z) dz + \right. \\ &+ \left. \int_{1+jl+f-c}^1 (1-j)^i l^i f_Z(z) dz \right] + \chi_{\{f \geq (c-jl)+\}} \left[ \int_0^{1+l+\frac{f-c}{j}} (1+l+f-c-z)^i f_Z(z) dz + \right. \\ &+ \left. \int_{1+l+\frac{f-c}{j}}^{1+l} (1-j)^i (1+l-z)^i f_Z(z) dz \right]. \end{aligned}$$

Příklad uvedený v části 4.4 porovnává směrodatné odchylky  $\sigma_Z$  a  $\sigma_{W/P} = \sqrt{E(W/P)^2 - (E(W/P))^2}$  při konkrétních parametrech.

### Kritéria tvorby rezervního fondu

Z funkcí rezervního fondu popsaných v této podkapitole plynou zároveň podmínky, za kterých není používání fondu pro pojišťovnu plně efektivní, a je tedy zbytečné jej tvořit. Tyto podmínky můžeme zformulovat do následujících tří kritérií. Rezervní fond se netvoří, pokud

1. se jedná o odvětví s malou významností, tj. zasloužené ryzí pojistné  $P$  je malé (absolutně nebo relativně vzhledem k ostatnímu obchodu pojišťovny) – v tomto případě jsou dopady výkyvů ve škodném poměru v podstatě zanedbatelné;
2. pravděpodobnost  $P(Z > 1+l)$ , že očekávané zisky nepokryjí neočekávané ztráty během jednoho roku, je malá, tj. zisková přírážka  $l$  je dostatečně velká k absorbování negativních výkyvů ve škodách – bezpečnostní funkce fondu je v tomto případě zanedbatelná;

3. výkyvy ve škodném poměru jsou malé, tj.  $\sigma_Z$  je nízká – za tohoto předpokladu jsou roční zisky a ztráty dostatečně vyrovnané a jejich další vyrovnávání v čase je zbytečné.

## 4.4 Příklad

V této podkapitole doplníme závěry z předchozích částí o konkrétní příklady. Všechny výsledky, které jsou zde uvedeny, byly získány s použitím softwaru MATHEMATICA podle výše popsanych postupů.

Aby byla dobře vidět závislost na jednotlivých parametrech modelu, uvedeme výsledky pro různé kombinace  $l \in \{0, 0,1, 0,2\}$  a  $j \in \{0, 0,25, 0,5, 0,75, 1\}$  za předpokladu směrodatné odchylky  $\sigma_Z \in \{0,05, 0,1, 0,15, 0,20, 0,25\}$ . Jako horní mez rezervního fondu  $C$  budeme vždy uvažovat 99,5%-ní kvantil celkových ztrát (tj.  $C = (z_{0,995}^Z - 1 - l)P$ ) a pro přehlednost položíme  $P = 1$ .

V následující tabulce 4.1 jsou uvedeny maximální výše fondu pro různé parametry  $\sigma_Z$  a  $l$ . Pro kombinaci  $l = 0,2$  a  $\sigma_Z = 0,05$  je příslušný kvantil záporný, takže tuto situaci nebudeme dále uvažovat.

$l$	$\sigma_Z$				
	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25
0	0,1359	0,2866	0,4522	0,6332	0,8293
0,1	0,0359	0,1866	0,3522	0,5332	0,7293
0,2		0,0866	0,2522	0,4332	0,6293

Tabulka 4.1: Horní mez rezervního fondu  $C$ .

### 4.4.1 Stacionární rozdělení rezervního fondu

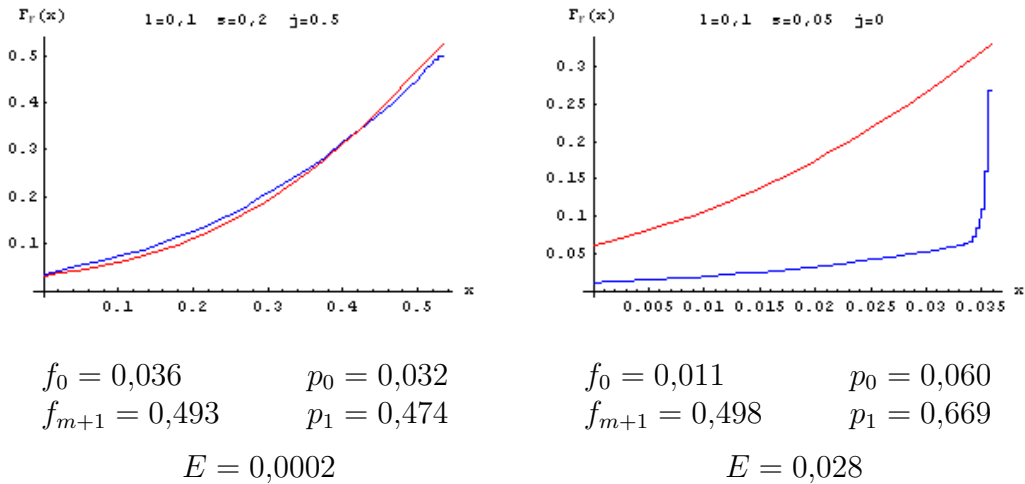
V části 4.2 jsme stacionární rozdělení rezervního fondu aproximovali pomocí transformace náhodné veličiny z  $LN(a_0, a_1^2)$  a pomocí limitního rozdělení Markovova řetězce s diskrétními stavy. Toto rozdělení je v prvním případě určeno pravděpodobnostmi  $p_0, p_1$  a hustotou  $f_F(x)$ ,  $x \in (0, C)$ , a ve druhém případě je dáno vektorem  $(f_0, f_1, \dots, f_m, f_{m+1})$ . Protože volbou dostatečně velkého  $m$  můžeme skutečné stacionární rozdělení aproximovat libovolně přesně, můžeme vhodnost použití odhadu pomocí logaritmicko–normálního rozdělení posoudit na základě porovnání obou zmíněných aproximací.

Shodu obou rozdělení budeme měřit pomocí ukazatele  $E$ ,

$$E = f_0(f_0 - p_0)^2 + f_{m+1}(f_{m+1} - p_1)^2 + \sum_{i=1}^m f_i(f_i - \int_{(i-1)d}^{id} f_F(x)dx)^2,$$

kde  $d = C/m$ . Pro volbu  $m = 100$  se hodnoty tohoto ukazatele pro uvažované kombinace  $l$ ,  $j$  a  $\sigma_Z$  pohybují řádově v tisícinách a desetitisícinách, přičemž nejlepší shody je dosaženo pro  $j = 1$  a  $j = 0,75$ . Výjimkou je naopak situace, kdy směrodatná odchylka veličiny  $Z$  je malá ( $\sigma_Z = 0,05$ ,  $\sigma_Z = 0,1$ ) a zároveň parametr  $j$  je blízký 0.

Na obrázku 4.2 jsou pro vybrané parametry  $l$ ,  $s = \sigma_Z$  a  $j$  a pro volbu  $m = 100$  porovnány distribuční funkce rezervního fondu  $F_F(x)$  v intervalu  $(0, C)$  ve dvou konkrétních případech. Modře je znázorněno limitní rozdělení a červená křivka zde značí odhad pomocí logaritmicke–normálního rozdělení. Zároveň jsou zde uvedeny odhady  $f_0$  a  $p_0$  pravděpodobnosti, že fond je ve stacionárním stavu nulový, a odhady  $f_{m+1}$  a  $p_1$  pravděpodobnosti, že rezervní fond je v plné výši. Formálně je shoda rozdělení vyjádřena pomocí ukazatele  $E$ .



Obrázek 4.2: Porovnání aproximací stacionárního rozdělení rezervního fondu.

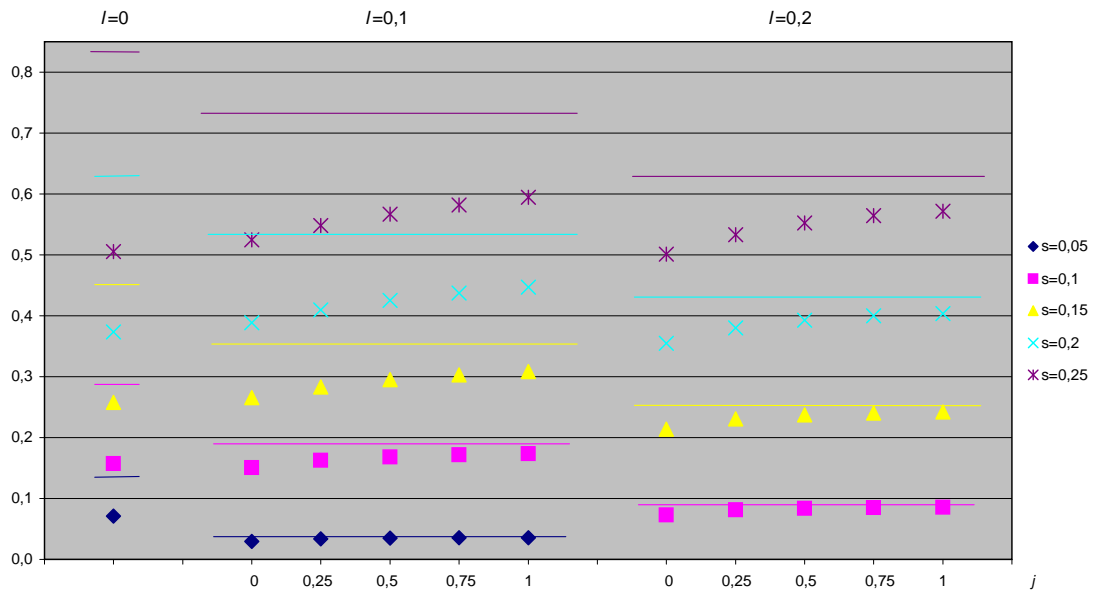
#### 4.4.2 Funkce rezervního fondu

Předmětem podkapitoly 4.3 bylo kvantifikování vlivu používání rezervního fondu na bezpečnost a riziko uvažovaného odvětví. Tento dopad jsme měřili pomocí ukazatelů  $p_0$  a  $\sigma_{W/P}$  v porovnání s hodnotami  $P(Z > 1 + l)$  a  $\sigma_Z$ . Náklady na používání rezervního fondu zároveň představovaly ušlé zisky z prostředků rezervního fondu, které jsme charakterizovali jejich střední výší  $EF$ .

V následujících třech grafech je postupně znázorněna závislost těchto ukazatelů na jednotlivých parametrech  $l$ ,  $j$  a  $s = \sigma_Z$ . Každý graf je horizontálně rozdělen na tři části, které odpovídají situacím, kdy  $l = 0$ ,  $l = 0,1$  a  $l = 0,2$ , přičemž druhá a třetí situace je dále rozdělena podle parametru  $j$  (dolní vodorovná osa). Vyznačené body představují hodnoty sledovaných ukazatelů a jejich odlišné barvy vyjadřují závislost na různé výši parametru  $s = \sigma_Z$ . Barevné vodorovné čáry pak poskytují

určitou doplňující informaci vztahující se k dané velikosti směrodatné odchylky náhodné veličiny  $Z$ .

V grafu na obrázku 4.3 je zobrazena střední hodnota rezervního fondu  $EF$  a její porovnání s horní mezí  $C$ , která opět odpovídá 99,5%-nímu kvantilu celkových technických ztrát. Na obrázku tuto mez pro různá  $l$  a  $\sigma_Z$  představují jednotlivé barevné čáry. V situaci, kdy zisková přírážka  $l$  je nulová, odpovídá hodnota  $EF$  přibližně polovině horní meze  $C$ . V ostatních případech je pro nízkou směrodatnou odchylku  $\sigma_Z$  rezervní fond téměř vždy v plné výši – to platí především pro vyšší ziskovou přírážku  $l$ , kdy je zároveň i maximální výše fondu nižší.



Obrázek 4.3: Střední výše rezervního fondu  $EF$ .

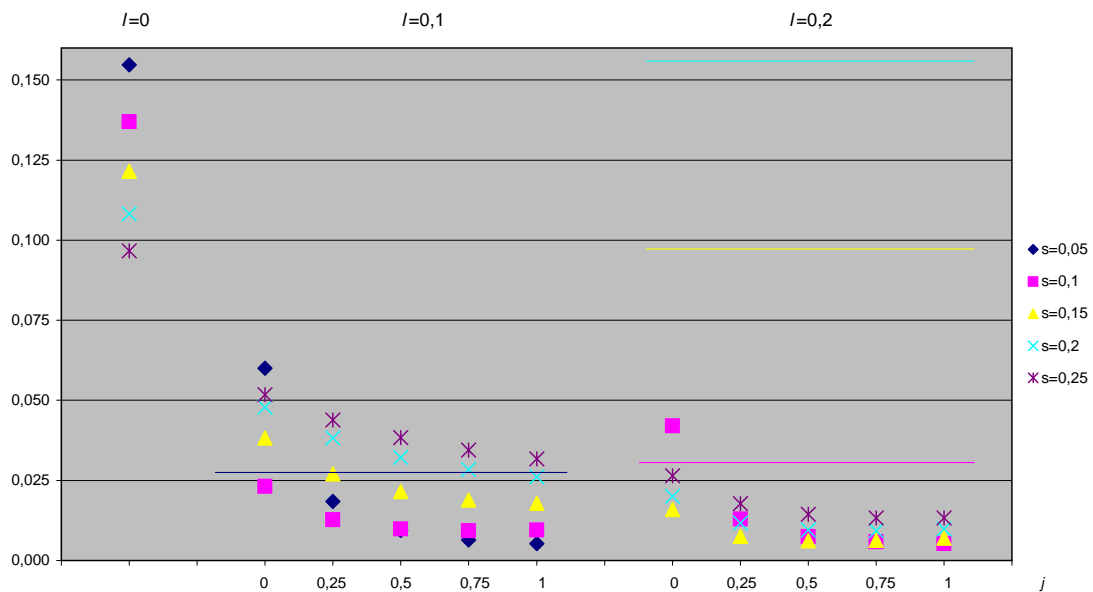
Tabulka 4.2 obsahuje hodnoty  $P(Z > 1 + l)$ , tj. pravděpodobnosti technické ztráty v situaci bez rezervního fondu, pro různé výše ziskové přírážky  $l$  a směrodatné odchylky  $\sigma_Z$ . Tyto pravděpodobnosti můžeme porovnat s příslušnými hodnotami  $p_0$  vyznačenými v grafu na obrázku 4.4, které odpovídají pravděpodobnostem, že prostředky rezervního fondu nestačí na pokrytí roční technické ztráty  $(1 + l - Z)P$ . Pro ilustraci je zde uvedeno i několik hodnot  $P(Z > 1 + l)$  v podobě vodorovných barevných čar. Poněkud extrémní výsledky při kombinaci parametrů  $l = 0,1$ ,  $\sigma_Z = 0,05$  a  $j = 0$  a při  $l = 0,2$ ,  $\sigma_Z = 0,1$  a  $j = 0$  jsou způsobeny vlivem nepřesné aproximace stacionárního rozdělení pro malé  $\sigma_Z$  a  $j = 0$ .

Na obrázku 4.5 je znázorněna výsledná směrodatná odchylka  $\sigma_W$  regulované veličiny  $W$ . Barevné čáry tentokrát odpovídají přímo směrodatné odchylce veličiny  $Z$ , tedy riziku v situaci bez rezervního fondu. Je zřejmé, že toto riziko je používáním rezervního fondu sníženo, přičemž k největšímu snížení rizika dochází v případě  $l = 0$  – zde je riziko sníženo přibližně na polovinu. Pro  $l > 0$  platí, že s rostoucí



$l$	$\sigma_Z$				
	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25
0	0,490	0,480	0,470	0,461	0,451
0,1	0,027	0,157	0,238	0,281	0,305
0,2		0,030	0,097	0,154	0,194

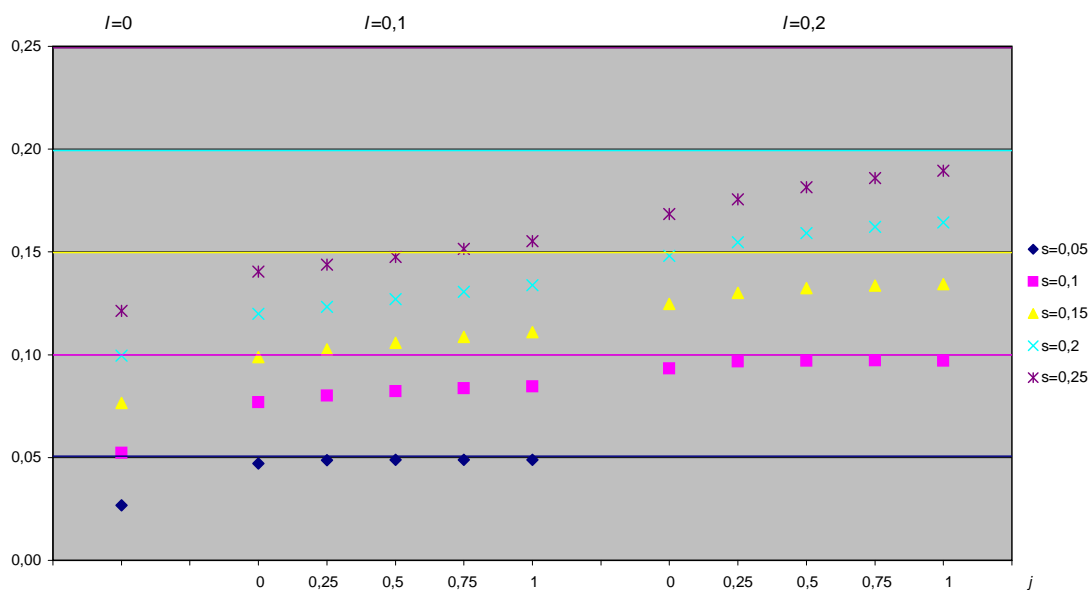
Tabulka 4.2: Pravděpodobnost technické ztráty  $P(Z > 1 + l)$ .



Obrázek 4.4: Pravděpodobnost  $p_0$ .

hodnotou parametru  $\sigma_Z$  je efekt vyrovnání výraznější, naopak pro malá  $\sigma_Z$  je riziko spojené s daným odvětvím dostatečně malé, a používání rezervního fondu tedy nevede k podstatnému vyrovnání. Efekt snížení rizika můžeme přehledně vyjádřit pomocí podílu obou směrodatných odchylek  $\sigma_W/\sigma_Z$ .

Konkrétní hodnoty všech tří ukazatelů  $EF$ ,  $p_0$  a  $\sigma_W/\sigma_Z$  pro jednotlivé kombinace parametrů  $l$ ,  $j$  a  $\sigma_Z$  jsou pro úplnost uvedeny v souhrnné tabulce 4.3. Hodnoty pro  $l = 0,1$ ,  $\sigma_Z = 0,05$ ,  $j = 0$  a pro  $l = 0,2$ ,  $\sigma_Z = 0,1$ ,  $j = 0$  jsou opět zkresleny nepřesnou aproximací.



Obrázek 4.5: Směrodatná odchylka regulované veličiny  $W$ .

$l = 0$

ukazatel	$\sigma_Z$				
	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25
$EF$	0,0713	0,1570	0,2577	0,3737	0,5053
$p_0$	0,155	0,137	0,122	0,108	0,097
$\sigma_W/\sigma_Z$	53,5%	52,2%	51,0%	49,7%	48,6%

$l = 0,1$

$l = 0,2$

$j$	ukazatel	$\sigma_Z$					$\sigma_Z$			
		0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,1	0,15	0,2	0,25
0	$EF$	0,0298	0,1506	0,2655	0,3883	0,5245	0,0731	0,2140	0,3549	0,5009
	$p_0$	0,060	0,023	0,038	0,048	0,052	0,042	0,016	0,020	0,026
	$\sigma_W/\sigma_Z$	94,3%	76,9%	66,0%	59,9%	56,2%	93,4%	83,1%	74,1%	67,4%
0,25	$EF$	0,0337	0,1624	0,2832	0,4094	0,5480	0,0816	0,2308	0,3804	0,5333
	$p_0$	0,018	0,013	0,027	0,038	0,044	0,013	0,008	0,012	0,018
	$\sigma_W/\sigma_Z$	97,5%	80,2%	68,4%	61,7%	57,5%	96,7%	86,7%	77,4%	70,2%
0,5	$EF$	0,0348	0,1683	0,2950	0,4253	0,5669	0,0840	0,2373	0,3929	0,5524
	$p_0$	0,009	0,010	0,022	0,032	0,038	0,007	0,006	0,010	0,014
	$\sigma_W/\sigma_Z$	97,9%	82,3%	70,6%	63,6%	59,0%	97,1%	88,3%	79,6%	72,6%
0,75	$EF$	0,0353	0,1716	0,3030	0,4375	0,5822	0,0849	0,2403	0,3998	0,5642
	$p_0$	0,006	0,009	0,019	0,028	0,034	0,006	0,006	0,009	0,013
	$\sigma_W/\sigma_Z$	97,9%	83,6%	72,5%	65,3%	60,6%	97,2%	89,1%	81,1%	74,4%
1	$EF$	0,0354	0,1735	0,3086	0,4468	0,5945	0,0853	0,2419	0,4038	0,5718
	$p_0$	0,005	0,010	0,018	0,026	0,032	0,005	0,007	0,010	0,013
	$\sigma_W/\sigma_Z$	97,9%	84,5%	74,0%	66,9%	62,1%	97,2%	89,6%	82,1%	75,8%

Tabulka 4.3: Ukazatelé  $EF$ ,  $p_0$  a  $\sigma_W/\sigma_Z$ .

# Kapitola 5

## Model pro dvě odvětví

Tato kapitola je věnována situaci, kdy uvažujeme dvě pojistná odvětví nebo jiné rizikově homogenní skupiny charakterizované upravenými škodnými poměry  $Z^1$  a  $Z^2$ . I nadále budeme předpokládat, že veličiny  $Z^i$  mají logaritmicko-normální rozdělení s parametry  $\mu^i$ ,  $(\sigma^i)^2$ , které jsou určeny směrodatnými odchylkami  $\sigma_{Z^i}$ ,  $i = 1, 2$ . Ty spolu s odhadem kovariance veličin  $Z^1$ ,  $Z^2$  získáme z historických pozorování

$$Z_0^1, \dots, Z_{-k_1}^1, \quad Z_0^2, \dots, Z_{-k_2}^2, \quad k_1 > 0, \quad k_2 > 0. \quad (5.1)$$

V části 5.1 přidáme předpoklad o sdruženém rozdělení upravených škodných poměrů a krátce se zmíníme o celkovém technickém výsledku za uvažovaná odvětví. Druhá podkapitola se bude věnovat modelu oddělených rezervních fondů. Podobně jako v kapitole 4 nejprve odhadneme jejich sdružené rozdělení a poté se zaměříme na analýzu regulovaných zisků a ztrát. Na závěr se ještě podíváme na některé modely vzájemně propojených fondů. Konkrétní příklady jsou tentokrát součástí jednotlivých částí.

Aby byly matematické zápisy v této kapitole přehlednější, budeme předpokládat, že zasloužené pojistné ani zisková přírážka se v čase nemění, tj.  $P_n^1 = P^1$ ,  $l_n^1 = l^1$ ,  $P_n^2 = P^2$ ,  $l_n^2 = l^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$

### 5.1 Celkové zisky a ztráty

Celkové zisky, resp. ztráty  $TZ_n^c$  během  $n$ -tého období za obě uvažovaná pojistná odvětví můžeme vyjádřit ve tvaru

$$TZ_n^c = (1 + l^c - Z_n^c)P^c, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.2)$$

kde  $l^c = w_1 l^1 + w_2 l^2$ ,  $Z_n^c = w_1 Z_n^1 + w_2 Z_n^2$ ,  $w_1 = \frac{P^1}{P^c}$ ,  $w_2 = \frac{P^2}{P^c}$  a  $P^c = P^1 + P^2$ .

Pravděpodobnostní chování veličin (5.2) je určeno sdruženým rozdělením škodných poměrů  $(Z^1, Z^2)$ . Základním předpokladem našeho modelu rezervního fondu bylo  $Z^i = e^{\vartheta^i}$ , kde  $\vartheta^i \sim N(\mu^i, (\sigma^i)^2)$ ,  $i = 1, 2$ , a v dalším budeme podobně

předpokládat  $(\vartheta^1, \vartheta^2) \sim N_2$ . Náhodné veličiny  $Z^1, Z^2$  mají tedy sdružené logaritmicko–normální rozdělení,

$$(Z^1, Z^2) \sim \Lambda_2 \left( \begin{pmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\sigma^1)^2 & \rho\sigma^1\sigma^2 \\ \rho\sigma^1\sigma^2 & (\sigma^2)^2 \end{pmatrix} \right),$$

kde parametr  $\rho$  představuje korelaci mezi veličinami  $\vartheta^1$  a  $\vartheta^2$ .

Distribuční funkci a hustotu náhodného vektoru  $(Z^1, Z^2)$  můžeme vyjádřit ve tvaru

$$F_{Z^1, Z^2}(z_1, z_2) = \Phi_\rho \left( \frac{\ln z_1 - \mu^1}{\sigma^1}, \frac{\ln z_2 - \mu^2}{\sigma^2} \right),$$

$$f_{Z^1, Z^2}(z_1, z_2) = \phi_\rho \left( \frac{\ln z_1 - \mu^1}{\sigma^1}, \frac{\ln z_2 - \mu^2}{\sigma^2} \right) \frac{1}{z_1 \sigma^1} \frac{1}{z_2 \sigma^2}, \quad z_1 > 0, \quad z_2 > 0.$$

Funkce  $\Phi_\rho$  a  $\phi_\rho$  značí distribuční funkci a hustotu rozdělení  $N_2 \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \right)$ .

*Poznámka.* V neživotním pojištění bývá někdy potřeba zohlednit koncovou závislost uvažovaných veličin – k tomu se často využívají různé závislostní struktury charakterizované kopulou  $C_Z$  (např. Gumbelova kopula). Při daných marginálních distribučních funkcích  $F_{Z^1}, F_{Z^2}$  má pak sdružená distribuční funkce vektoru  $(Z^1, Z^2)$  tvar

$$F_{Z^1, Z^2}(z_1, z_2) = C_Z(F_{Z^1}(z_1), F_{Z^2}(z_2)), \quad z_1 > 0, \quad z_2 > 0.$$

V případě sdruženého logaritmicko–normálního rozdělení je funkce  $F_{Z^1, Z^2}$  určena Gaussovou (normální) kopulou

$$C(u, v) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)), \quad u, v \in [0, 1].$$

Její hlavní výhodou je snadná reprezentace pomocí korelačního koeficientu  $\rho$  – především toho využijeme ve výpočtech v dalších částech této kapitoly.

Parametr  $\rho = \frac{\text{Cov}(\vartheta^1, \vartheta^2)}{\sigma^1 \sigma^2}$  určíme pomocí kovariance  $\text{Cov}(Z^1, Z^2)$ , kterou jsme odhadli z pozorování (5.1) a kterou v souladu se závěry kapitoly 3 považujeme za známou. Protože  $\ln(Z^1 Z^2) = \vartheta^1 + \vartheta^2$  a

$$\vartheta^1 + \vartheta^2 \sim N(\mu^1 + \mu^2, (\sigma^1)^2 + (\sigma^2)^2 + 2\sigma^1\sigma^2\text{Cov}(\vartheta^1, \vartheta^2)),$$

platí

$$\text{Cov}(Z^1, Z^2) = \text{E}Z^1 Z^2 - \text{E}Z^1 \text{E}Z^2 = e^{\mu^1 + \mu^2 + \frac{1}{2}((\sigma^1)^2 + (\sigma^2)^2)} (e^{\rho\sigma^1\sigma^2} - 1)$$

a korelační koeficient veličin  $Z^1$  a  $Z^2$  je

$$\text{Corr}(Z^1, Z^2) = \frac{\text{Cov}(Z^1, Z^2)}{\sigma_{Z^1} \sigma_{Z^2}} = \frac{\exp(\rho\sigma^1\sigma^2) - 1}{\sqrt{\exp((\sigma^1)^2) - 1} \sqrt{\exp((\sigma^2)^2) - 1}}.$$

Hledaný koeficient  $\rho$  tedy určíme jako

$$\rho = \frac{1}{\sigma^1 \sigma^2} \ln(1 + \text{Corr}(Z^1, Z^2) \sqrt{\exp((\sigma^1)^2) - 1} \sqrt{\exp((\sigma^2)^2) - 1}).$$

Vraťme se nyní k celkovému ročnímu zisku/ztrátě za uvažovanou dvě odvětví  $TZ^c = (1 - Z^c)P^c + l^c P^c$ . Pokud neuvažujeme existenci žádného rezervního fondu, pak případné neočekávané ztráty mohou být kryty pouze očekávanými zisky běžného období  $ETZ^c = l^c P^c$  a pravděpodobnost technické ztráty odpovídá pravděpodobnosti, že tyto očekávané zisky za jedno období nebudou dostatečné, tj.

$$\begin{aligned} P(TZ^c < 0) &= P(Z^c - 1 > l^c) = P(w_1 Z^1 + w_2 Z^2 > 1 + l^c) = \\ &= 1 - \int_0^{\frac{1+l^c}{w_1}} \int_0^{\frac{1+l^c - z_1 w_1}{w_2}} f_{Z^1, Z^2}(z_1, z_2) dz_2 dz_1. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Celkové riziko spojené s uvažovaným obchodem pojišťovny je charakterizováno směrodatnou odchylkou ročního výsledku technického účtu  $TZ^c$  na jednotku celkového zaslouženého ryzího pojistného  $P^c$ ,

$$\sigma_{TZ^c/P^c} = \sqrt{\text{Var}Z^c}, \quad \text{Var}Z^c = (w_1 \sigma_{Z^1})^2 + (w_2 \sigma_{Z^2})^2 + 2w_1 w_2 \text{Cov}(Z^1, Z^2).$$

## 5.2 Model oddělených fondů

Nyní se budeme blíže věnovat případu, kdy pojišťovna provozuje dvě pojistná odvětví, přičemž pro každé z těchto odvětví vytváří rezervní fond způsobem popsáním v kapitole 4. Zároveň budeme předpokládat, že tyto fondy jsou oddělené v tom smyslu, že tvorba i čerpání jednoho fondu závisí pouze na škodách příslušného odvětví. To znamená, že prostředky každého z rezervních fondů vyrovnávají pouze výkyvy ve škodném poměru svého odvětví. Nestací-li jeden z fondů na pokrytí technických ztrát, neuhrazené roční ztráty jsou kompenzovány zisky druhého odvětví sníženými o skutečné navýšení příslušného fondu. Protože je tvorba a čerpání rezervních fondů v čase zcela oddělena, opět dochází k uchování informací o jednotlivých rizicích a o jejich vzájemném vztahu v účetních výkazech pojišťovny.

Jelikož mezi škodnými poměry obou odvětví existuje určitá závislost daná např.  $\text{Cov}(Z^1, Z^2)$ , nelze modelovat chování rezervních fondů v čase odděleně a je potřeba nejprve nalézt jejich sdružené rozdělení – to je předmětem části 5.2.1. Navazující část se pak podobně jako podkapitola 4.3 zabývá dopadem používání oddělených fondů na chování celkových ročních zisků a ztrát po zohlednění tvorby, resp. čerpání jednotlivých fondů (tzv. regulovaný výsledek technického účtu).

Dále tedy uvažujeme rezervní fondy  $F^1, F^2$ , jejichž výše v čase  $n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , je

$$F_n^i = g^i(F_{n-1}^i + T_n^i), \quad g^i(x) = \max(0, \min(x, C^i)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2,$$

kde jednotlivé toky  $T_n^i$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $i = 1, 2$ , jsou určeny analogickým vztahem

jako (4.1), tedy

$$T_n^i = \begin{cases} {}^1t^i(Z_n^i) = (1 + j^i l^i - Z_n^i)P^i, & Z_n^i \in {}^1I^i = (0, 1), \\ {}^2t^i(Z_n^i) = j^i(1 + l^i - Z_n^i)P^i, & Z_n^i \in {}^2I^i = [1, 1 + l^i], \\ {}^3t^i(Z_n^i) = (1 + l^i - Z_n^i)P^i, & Z_n^i \in {}^3I^i = [1 + l^i, \infty). \end{cases} \quad (5.4)$$

Sdružené rozdělení veličin  $T^1, T^2$  je dáno sdruženým rozdělením škodných poměrů  $Z^1, Z^2$ . Nás bude v dalším textu zajímat především střední hodnota  $ET^1T^2$ , kterou vypočítáme jako součet devíti dílčích středních hodnot,

$$ET^1T^2 = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \int_{kI^1} \int_{lI^2} {}^k t^1(z_1) {}^l t^2(z_2) f_{Z^1, Z^2}(z_1, z_2) dz_2 dz_1, \quad (5.5)$$

kde intervaly  ${}^k I^i$  a funkce  ${}^k t^i(z_i)$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $i = 1, 2$ , jsou určeny v (5.4).

Ze znalosti sdruženého rozdělení vektoru  $(T^1, T^2)$  bychom mohli určit také podmíněné rozdělení velikosti fondů  $(F_n^1, F_n^2)$  v čase  $n$  za podmínky znalosti jejich stavů na počátku období,  $F_{n-1}^1, F_{n-1}^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Pro modelování chování fondů v dalších částech budeme opět hledat nepodmíněné rozdělení vektoru  $(F^1, F^2)$ , a to aproximací transformovanými náhodnými veličinami.

### 5.2.1 Sdružené rozdělení rezervních fondů

Abychom našli nepodmíněné pravděpodobnostní rozdělení rezervních fondů  $F^1$  a  $F^2$ , přejdeme opět nejprve k veličinám  $U_n^i = g^i(U_{n-1}^i) + T_n^i$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , a pomocí jejich sdruženého rozdělení pak určíme sdružené rozdělení fondů  $(F_n^1, F_n^2)$ , neboť  $F_n^i = g^i(U_n^i)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $i = 1, 2$ .

Ve stacionárním stavu pro náhodný vektor  $(U^1, U^2)$  platí

$$\begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \end{pmatrix} \stackrel{D}{=} \begin{pmatrix} g^1(U^1) \\ g^2(U^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T^1 \\ T^2 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Podobně jako v minulé kapitole budeme při odhadu rozdělení vycházet z předpokladu, že  $U^i = C^i + (1 + j^i l^i)P^i - Y^i$ , kde  $Y^i = e^{\eta^i}$  mají logaritmicke–normální rozdělení s distribuční funkcí  $F_{Y^i}$ ,  $i = 1, 2$ . K odhadu rozdělení  $(U^1, U^2)$  zbývá určit sdružené rozdělení vektoru  $(Y^1, Y^2)$ . V souladu s předpokladem  $(Z^1, Z^2) \sim \Lambda_2$ , i v tomto případě využijeme sdruženého logaritmicke–normálního rozdělení a předpokládáme

$$(Y^1, Y^2) = (e^{\eta^1}, e^{\eta^2}) \sim \Lambda_2 \left( \begin{pmatrix} a_0^1 \\ a_0^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (a_1^1)^2 & pa_1^1 a_1^2 \\ pa_1^1 a_1^2 & (a_1^2)^2 \end{pmatrix} \right),$$

kde  $p = \text{Corr}(\eta^1, \eta^2)$ .

Distribuční funkci a hustotu vektoru  $(Y^1, Y^2)$  vyjádříme pomocí distribuční funkce  $\Phi_p$  a hustoty  $\phi_p$  rozdělení  $N_2 \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & p \\ p & 1 \end{pmatrix} \right)$  jako

$$F_{Y^1, Y^2}(y_1, y_2) = \Phi_p \left( \frac{\ln y_1 - a_0^1}{a_1^1}, \frac{\ln y_2 - a_0^2}{a_1^2} \right),$$

$$f_{Y^1, Y^2}(y_1, y_2) = \phi_p \left( \frac{\ln y_1 - a_0^1}{a_1^1}, \frac{\ln y_2 - a_0^2}{a_1^2} \right) \frac{1}{y_1 a_1^1} \frac{1}{y_2 a_1^2}, \quad y_1 > 0, \quad y_2 > 0. \quad (5.7)$$

*Poznámka.* Je-li sdružené rozdělení vektoru  $(Z^1, Z^2)$  definováno kopulou  $C_Z$ , pak typ kopuly  $C_Y$ , která určuje sdruženou distribuční funkci  $F_{Y^1, Y^2}$ , by měl být shodný s typem kopuly  $C_Z$ .

Parametry  $a_0^1, a_1^1, a_0^2, a_1^2$  určíme porovnáním prvních dvou momentů veličin  $U^1$  a  $U^2$ , tj. řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} EU^1 &= E(g^1(U^1) + T^1), & EU^2 &= E(g^2(U^2) + T^2), \\ E(U^1)^2 &= E(g^1(U^1) + T^1)^2, & E(U^2)^2 &= E(g^2(U^2) + T^2)^2. \end{aligned}$$

Aby si rozdělení vektorů na obou stranách v (5.6) odpovídala, musí si odpovídat i jejich závislostní struktury. V našem případě určíme zbývající neznámý parametr  $p$  řešením rovnice

$$EU^1U^2 = E(g^1(U^1) + T^1)(g^2(U^2) + T^2). \quad (5.8)$$

Levou stranu rovnice (5.8) můžeme vyjádřit pomocí hustoty  $\phi_p$  prostřednictvím hustoty  $f_{Y^1, Y^2}$  jako

$$EU^1U^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty (C^1 + (1+j^1l^1)P^1 - y_1)(C^2 + (1+j^2l^2)P^2 - y_2) f_{Y^1, Y^2}(y_1, y_2) dy_2 dy_1.$$

Podobně vyjádříme pravou stranu (5.8)

$$E(g^1(U^1) + T^1)(g^2(U^2) + T^2) = Eg^1(U^1)g^2(U^2) + EF^1ET^2 + EF^2ET^1 + ET^1T^2,$$

kde

$$\begin{aligned} Eg^1(U^1)g^2(U^2) &= C^1C^2 \int_0^{(1+j^1l^1)P^1} \int_0^{(1+j^2l^2)P^2} f_{Y^1, Y^2}(y_1, y_2) dy_2 dy_1 + \\ &+ C^1 \int_0^{(1+j^1l^1)P^1} \int_{(1+j^2l^2)P^2}^\infty (C^2 + (1+j^2l^2)P^2 - y_2) f_{Y^1, Y^2}(y_1, y_2) dy_2 dy_1 + \\ &+ C^2 \int_{(1+j^1l^1)P^1}^\infty \int_0^{(1+j^2l^2)P^2} (C^1 + (1+j^1l^1)P^1 - y_1) f_{Y^1, Y^2}(y_1, y_2) dy_2 dy_1 + \\ &+ \int_{(1+j^1l^1)P^1}^\infty \int_{(1+j^2l^2)P^2}^\infty (C^1 + (1+j^1l^1)P^1 - y_1)(C^2 + (1+j^2l^2)P^2 - y_2) f_{Y^1, Y^2}(y_1, y_2) dy_2 dy_1, \end{aligned}$$

střední hodnota  $ET^1T^2$  je dána (5.5) a  $ET^i, EF^i$  ( $EF^i = Eg^i(U^i)$ ) jsou již známy z předchozího odhadu marginálních rozdělení veličin  $Y^i, i = 1, 2$ .

Nalezená hodnota parametru  $p$  spolu s parametry  $a_0^1, a_1^1, a_0^2, a_1^2$  určuje aproximované sdružené rozdělení rezervních fondů. Pro kovarianci fondů platí

$$\text{Cov}(F^1, F^2) = Eg^1(U^1)g^2(U^2) - EF^1EF^2 \quad (5.9)$$

a distribuční funkci vektoru  $(F^1, F^2)$  můžeme zapsat ve tvaru

$$F_{F^1, F^2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 f_{U^1, U^2}(u_1, u_2) du_2 du_1, & x_1 = 0 \ \& \ x_2 = 0, \\ \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{x_2} f_{U^1, U^2}(u_1, u_2) du_2 du_1, & x_1 = 0 \ \& \ x_2 \in (0, C^2), \\ \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^0 f_{U^1, U^2}(u_1, u_2) du_2 du_1, & x_1 \in (0, C^1) \ \& \ x_2 = 0, \\ \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_{U^1, U^2}(u_1, u_2) du_2 du_1, & x_1 \in (0, C^1) \ \& \ x_2 \in (0, C^2), \\ \int_{-\infty}^0 \int_{C^2}^{\infty} f_{U^1, U^2}(u_1, u_2) du_2 du_1, & x_1 = 0 \ \& \ x_2 = C^2, \\ \int_{C^1}^{\infty} \int_{-\infty}^0 f_{U^1, U^2}(u_1, u_2) du_2 du_1, & x_1 = C^1 \ \& \ x_2 = 0, \\ \int_{-\infty}^{x_1} \int_{C^2}^{\infty} f_{U^1, U^2}(u_1, u_2) du_2 du_1, & x_1 \in (0, C^1) \ \& \ x_2 = C^2, \\ \int_{C^1}^{\infty} \int_{-\infty}^{x_2} f_{U^1, U^2}(u_1, u_2) du_2 du_1, & x_1 = C^1 \ \& \ x_2 \in (0, C^2), \\ \int_{C^1}^{\infty} \int_{C^2}^{\infty} f_{U^1, U^2}(u_1, u_2) du_2 du_1, & x_1 = C^1 \ \& \ x_2 = C^2, \end{cases} \quad (5.10)$$

kde

$$f_{U^1, U^2}(u_1, u_2) = \begin{cases} f_{Y^1, Y^2}(C^1 + (1 + j^1 l^1)P^1 - u_1, C^2 + (1 + j^2 l^2)P^2 - u_2), \\ \quad \text{pro } u_i < C^i + (1 + j^i l^i)P^i, \quad i = 1, 2, \\ 0, \quad \text{jinak,} \end{cases}$$

a funkce  $f_{Y^1, Y^2}$  je dána (5.7).

V tabulce 5.1 jsou pro ilustraci uvedeny korelační koeficienty fondů  $F^1, F^2$ ,

$$\text{Corr}(F^1, F^2) = \frac{\text{Cov}(F^1, F^2)}{\sqrt{\text{E}g^1(U^1)^2 - \text{E}F^1} \sqrt{\text{E}g^2(U^2)^2 - \text{E}F^2}},$$

v závislosti na vybraných hodnotách korelace veličin  $Z^1, Z^2$  pro kombinaci parametrů  $\sigma_{Z^1} = 0,1, \sigma_{Z^2} = 0,2, P^i = 1, l^i = 0,1, j^i = 0,5, i = 1, 2$ .

$\text{Corr}(Z^1, Z^2)$	-0,75	-0,50	-0,25	-0,10	0,00	0,10	0,25	0,50	0,75
$\text{Corr}(F^1, F^2)$	-0,31	-0,26	-0,17	-0,06	0,01	0,01	0,16	0,34	0,55

Tabulka 5.1: Porovnání korelací veličin  $Z^1, Z^2$  a fondů  $F^1, F^2$ .

## 5.2.2 Regulované zisky a ztráty

V části 4.3 jsme ukázali, že používání rezervního fondu v případě jednoho samostatného odvětví vede ke zvýšení bezpečnosti v podobě snížení pravděpodobnosti, že do odvětví bude potřeba dodat další kapitál na krytí technických ztrát, a dále ke snížení rizika spojeného s daným odvětvím, které jsme měřili směrodatnou odchylkou  $\sigma_{W/P}$ . Podobně tomu bude v případě provozování dvou pojistných odvětví.

Jak bylo vidět v části 5.1, pokud pojišťovna nevytváří žádný rezervní fond, jsou její celkové technické zisky/ztráty za  $n$ -té období  $TZ_n^c$  (viz (5.2)), celkové riziko je kvantifikováno prostřednictvím  $\sigma_{TZ_n^c/P^c}$  a pravděpodobnost technické ztráty  $P(TZ_n^c < 0)$  je dána (5.3).



V modelu dvou oddělených fondů jsou zisky, resp. ztráty jednotlivých odvětví nejprve upraveny o příspěvky do fondu, resp. úhrady z příslušného fondu a skutečný roční výsledek technického účtu  $W_n^c$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , je představován součtem regulovaných výsledků jednotlivých odvětví  $W_n^c = W_n^1 + W_n^2$ , tedy

$$W_n^c = (1 + l^1 - Z_n^1)P^1 + (1 + l^2 - Z_n^2)P^2 - (F_n^1 - F_{n-1}^1) - (F_n^2 - F_{n-1}^2), \quad n = 1, 2, \dots$$

Používáním oddělených rezervních fondů dochází (oproti situaci bez fondů) ke snížení pravděpodobnosti celkové ztráty na  $P(W_n^c < 0)$  a ke snížení celkového rizika na úroveň  $\sigma_{W^c/P^c}$  (viz níže). Cenou za tuto bezpečnostní a vyrovnávací funkci fondů jsou opět alternativní výnosy z investování prostředků obou fondů, jejichž střední výše je  $EF^1 + EF^2$ .

### Bezpečnostní funkce

V modelu pro jedno odvětví v podkapitole 4.3 jsme pravděpodobnost, že během  $n$ -tého roku dojde k regulované ztrátě (tj.  $W_n < 0$ ), ztotožnili s pravděpodobností, že rezervní fond v čase  $n$  bude vyčerpán, tj.  $P(W_n < 0) = P(F_n = 0)$ . V případě dvou oddělených fondů je situace jiná, jelikož regulované ztráty (tj. ztráty snížené o výši rezervního fondu) z jednoho odvětví můžeme kompenzovat pouze regulovanými zisky (tj. zisky po přidělu do rezervního fondu) druhého odvětví.

Abychom určili pravděpodobnost, že regulovaný výsledek technického účtu v roce  $n$  za obě odvětví celkem bude záporný, vyjdeme ze vztahu  $W_n^c = W_n^1 + W_n^2$  a pravděpodobnost jevu  $\{W_n^c < 0\}$ , budeme zkoumat zvlášť podle toho, v jakém odvětví došlo i při použití příslušného rezervního fondu k technické ztrátě.

Hledanou pravděpodobnost můžeme tedy vyjádřit jako součet tří dílčích pravděpodobností

$$\begin{aligned} P(W_n^c < 0) &= P(W_n^1 + W_n^2 < 0) = P(W_n^1 + W_n^2 < 0 \& W_n^1 < 0 \& W_n^2 \geq 0) + \\ &+ P(W_n^1 + W_n^2 < 0 \& W_n^1 \geq 0 \& W_n^2 < 0) + P(W_n^1 + W_n^2 < 0 \& W_n^1 < 0 \& W_n^2 < 0). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Označíme-li členy na pravé straně (5.11) postupně  $p_A$ ,  $p_B$ ,  $p_C$ , potom  $p_C$  odpovídá pravděpodobnosti, že oba fondy budou během roku vyčerpány,

$$p_C = P(W_n^1 < 0 \& W_n^2 < 0) = P(F_n^1 = 0, F_n^2 = 0).$$

Tuto pravděpodobnost získáme přímo ze sdruženého rozdělení fondů (5.10).

Nyní se zaměříme na výpočet pravděpodobnosti  $p_A$ , zbývající člen  $p_B$  pak určíme analogickým způsobem. Pomocí sdruženého rozdělení fondů, které jsme odhadli v části 5.2.1, můžeme hledanou pravděpodobnost  $p_A$  určit jako střední hodnotu z podmíněné pravděpodobnosti při daných stavech fondů na počátku  $n$ -tého období,

$$p_A = E_{F_{n-1}^1, F_{n-1}^2} \{P(W_n^1 + W_n^2 < 0 \& W_n^1 < 0 \& W_n^2 \geq 0 \mid F_{n-1}^1, F_{n-1}^2)\}. \quad (5.12)$$

V této fázi již stačí vyšetřit, jaké kombinace upravených škodných poměrů  $Z_n^1$ ,  $Z_n^2$  vedou k situaci, jejíž pravděpodobnost počítáme. Jev  $\{W_n^1 < 0\}$  odpovídá jevu  $\{Z_n^1 > 1 + l^1 + F_{n-1}^1/P^1\}$ , tedy situaci, kdy rezervní fond a zasloužené pojistné nestačí na pokrytí ročních škod prvního odvětví. Sledovaný případ dále rozdělíme podle toho, zda druhý fond je na konci roku  $n$  v plné výši (tato situace nastává, pokud  $Z_n^2 < 1$  a zároveň  $1 + j^2 l^2 - Z_n^2 > \frac{C^2 - F^2}{P^2}$  nebo pokud  $Z_n^2 \in [1, 1 + l^2)$  a zároveň  $j^2(1 + l^2 - Z_n^2) > \frac{C^2 - F^2}{P^2}$ ). Je-li  $F_n^2 = C^2$ , potom regulovaný výsledek je

$$W_n^c = (1 + l^1 - Z_n^1)P^1 + (1 + l^2 - Z_n^2)P^2 + F_{n-1}^1 - (C^2 - F_{n-1}^2).$$

V opačném případě, kdy  $F_n^2 < C^2$ , k situaci  $W_n^c < 0$  dochází, pokud nastane jedna ze dvou následujících možností:

1. druhé odvětví bylo ziskové (tj.  $Z_n^2 < 1 + l^2$ ) a část očekávaných zisků, kterou pojišťovna nezadrží v podobě rezervního fondu, nestačí na pokrytí regulovaných ztrát prvního odvětví, tedy  $W_n^2 < -W_n^1$ , kde

$$W_n^2 = \begin{cases} (1 - j^2)l^2 P^2, & Z_n^2 < 1, \\ W_n^2 = (1 - j^2)(1 + l^2 - Z_n^2)P^2, & Z_n^2 \in [1, 1 + l^2); \end{cases}$$

2. celkové ztráty druhého odvětví jsou plně pokryty prostředky příslušného fondu, tj.  $Z_n^2 \in [1 + l^2, 1 + l^2 + F_{n-1}^2/P^2]$ , a tedy  $W_n^2 = 0$ .

Předpokládáme-li, že  $C^2 < (1 + j^2 l^2)P^2$ , pak podle (5.12) vypočítáme celkovou pravděpodobnost  $p_A$  jako

$$p_A = \int_0^{C^1} \int_0^{C^2} [\chi_{\{f^2 < C^2 - j^2 l^2 P^2\}} (\sum_{i=1}^4 \int_{B_i^1(f^1, f^2)} \int_{B_i^2(f^1, f^2, z_1)} f_{Z^1, Z^2}(z_1, z_2) dz_2 dz_1) + \chi_{\{f^2 \geq C^2 - j^2 l^2 P^2\}} (\sum_{i=5}^{10} \int_{B_i^1(f^1, f^2)} \int_{B_i^2(f^1, f^2, z_1)} f_{Z^1, Z^2}(z_1, z_2) dz_2 dz_1)] dF_{F^1, F^2}(f^1, f^2),$$

kde sdružené rozdělení fondů  $(F^1, F^2)$  je dáno (5.10) a množiny  $B_i^1 = B_i^1(f^1, f^2)$  a  $B_i^2 = B_i^2(f^1, f^2, z_1)$ ,  $i = 1, \dots, 10$ , jsou

$$\begin{aligned} B_1^1 &= (1 + l^1 + \frac{f^1}{P^1} + (1 + l^2) \frac{P^2}{P^1} - \frac{C^2 - f^2}{P^1}, \infty), & B_1^2 &= (0, 1 + j^2 l^2 - \frac{C^2 - f^2}{P^2}), \\ B_2^1 &= (1 + l^1 + \frac{f^1}{P^1} + (1 - j^2) l^2 \frac{P^2}{P^1}, 1 + l^1 + \frac{f^1}{P^1} + (1 + l^2) \frac{P^2}{P^1} - \frac{C^2 - f^2}{P^1}), \\ B_2^2 &= (1 + l^2 - \frac{C^2 - f^2}{P^2} + \frac{f^1 + (1 + l^1 - z_1) P^1}{P^2}, 1 + j^2 l^2 - \frac{C^2 - f^2}{P^2}), \\ B_3^1 &= (1 + l^1 + \frac{f^1}{P^1} + (1 - j^2) l^2 \frac{P^2}{P^1}, \infty), & B_3^2 &= (1 + j^2 l^2 - \frac{C^2 - f^2}{P^2}, 1 + l^2 + \frac{f^2}{P^2}), \\ B_4^1 &= (1 + l^1 + \frac{f^1}{P^1}, 1 + l^1 + \frac{f^1}{P^1} + (1 - j^2) l^2 \frac{P^2}{P^1}), \\ B_4^2 &= (1 + l^2 + \frac{f^1 + (1 + l^1 - z_1) P^1}{P^2}, 1 + l^2 + \frac{f^2}{P^2}), \\ B_5^1 &= (1 + l^1 + \frac{f^1}{P^1} + (1 + l^2) \frac{P^2}{P^1} - \frac{C^2 - f^2}{P^1}, \infty), & B_5^2 &= (0, 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_6^1 &= (1 + l^1 + \frac{f^1}{P^1} + l^2 \frac{P^2}{P^1} - \frac{C^2 - f^2}{P^1}, 1 + l^1 + \frac{f^1}{P^1} + (1 + l^2) \frac{P^2}{P^1} - \frac{C^2 - f^2}{P^1}), \\
B_6^2 &= (1 + l^2 - \frac{C^2 - f^2}{P^2} + \frac{f^1 + (1 + l^1 - z_1)P^1}{P^2}, 1), \\
B_7^1 &= (1 + l^1 + \frac{f^1}{P^1} + \frac{(C^2 - f^2)(1 - j^2)}{P^1 j^2}, \infty), \quad B_7^2 = (1 + l^2 - \frac{C^2 - f^2}{P^2 j^2}, 1 + l^2 + \frac{f^2}{P^2}), \\
B_8^1 &= (1 + l^1 + \frac{f^1}{P^1}, 1 + l^1 + \frac{f^1}{P^1} - \frac{(C^2 - f^2)(1 - j^2)}{P^1 j^2}), \\
B_8^2 &= (1 + l^2 + \frac{f^1 + (1 + l^1 - z_1)P^1}{P^2(1 - j^2)}, 1 + l^2 + \frac{f^2}{P^2}), \\
B_9^1 &= (1 + l^1 + \frac{f^1}{P^1} + l^2 \frac{P^2}{P^1} - \frac{C^2 - f^2}{P^1}, \infty), \quad B_9^2 = (1, 1 + l^2 - \frac{C^2 - f^2}{P^2 j^2}), \\
B_{10}^1 &= (1 + l^1 + \frac{f^1}{P^1}, 1 + l^1 + \frac{f^1}{P^1} + l^2 \frac{P^2}{P^1} - \frac{C^2 - f^2}{P^1}), \\
B_{10}^2 &= (1 + l^2 - \frac{C^2 - f^2}{P^2} + \frac{f^1 + (1 + l^1 - z_1)P^1}{P^2}, 1 + l^2 - \frac{C^2 - f^2}{P^2 j^2}).
\end{aligned}$$

### Vyrovňovací funkce

Vyrovňování ročních výkyvů ve škodách je v situaci dvou oddělených fondů do jisté míry omezeno, neboť nelze vyrovnávat kladné ani záporné výkyvy jednoho odvětví použitím rezervního fondu druhého odvětví. V souladu s kapitolou 4 budeme i nadále riziko spojené s obchodem pojišťovny (sestavajících ze dvou odvětví) měřit prostřednictvím směrodatné odchylky ročních regulovaných zisků/ztrát na jednotku celkového ryzího pojistného  $\sigma_{W_n^c/P^c} = \sqrt{\text{Var}(W_n^c/P^c)}$ , kde

$$W_n^c/P^c = (1 + l^c - Z_n^c) - \frac{F_n^1 - F_{n-1}^1}{P^c} - \frac{F_n^2 - F_{n-1}^2}{P^c}.$$

Jelikož  $W_n^c/P^c = w_1 W_n^1/P^1 + w_2 W_n^2/P^2$ , můžeme rozptýl veličiny  $W_n^c/P^c$  vyjádřit ve tvaru

$$\text{Var}(W_n^c/P^c) = (w_1)^2 (\sigma_{W_n^1/P^1})^2 + (w_2)^2 (\sigma_{W_n^2/P^2})^2 + 2w_1 w_2 \text{Cov}(W_n^1/P^1, W_n^2/P^2).$$

Směrodatné odchylky  $\sigma_{W_n^i/P^i}$  náhodných veličin  $W_n^i/P^i$ ,  $i = 1, 2$ , určíme způsobem popsaným v části 4.3 a zde se zaměříme pouze na výpočet jejich kovariance.

Pro  $i$ -té odvětví jsou regulované zisky/ztráty  $n$ -tého roku na jednotku pojistného ve tvaru

$$W_n^i/P^i = (1 + l^i - Z_n^i) - \frac{F_n^i - F_{n-1}^i}{P^i}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2.$$

Kovarianci těchto veličin proto dále rozložíme na součet čtyř dílčích kovariancí

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(W_n^1/P^1, W_n^2/P^2) &= \text{Cov}(Z_n^1, Z_n^2) + \text{Cov}((F_n^1 - F_{n-1}^1)/P^1, (F_n^2 - F_{n-1}^2)/P^2) + \\
&\quad + \text{Cov}(Z_n^1, F_n^2/P^2) + \text{Cov}(F_n^1/P^1, Z_n^2), \quad (5.13)
\end{aligned}$$

přičemž první z těchto kovariancí je dle předpokladu známa. Protože  $\text{Cov}(F_n^1 - F_{n-1}^1, F_n^2 - F_{n-1}^2) = \text{Cov}(F_n^1, F_n^2)$  a kovariance fondů je určena vztahem (5.9), zbývá spočítat třetí člen (a analogicky pak čtvrtý člen) součtu (5.13).

Platí

$$\text{Cov}(Z_n^1, F_n^2/P^2) = \mathbb{E}Z_n^1 F_n^2/P^2 - \mathbb{E}F_n^2/P^2.$$

Abychom určili střední hodnotu  $\mathbb{E}Z_n^1 F_n^2/P^2$ , využijeme opět přechodu k podmíněné střední hodnotě. Podobně jako v případě veličin  $W_n/P_n$  v části 4.3 nejprve vyjádříme veličinu  $F_n^2/P^2$  v závislosti na počátečním stavu rezervního fondu  $F_{n-1}^2$  a náhodné veličině  $Z_n^2$  následovně

$$\frac{F_n^2}{P^2} = \begin{cases} \frac{C^2}{P^2}, & Z_n^2 < 1 \ \& \ Z_n^2 < 1 + j^2 l^2 + \frac{F_{n-1}^2 - C^2}{P^2}, \\ \frac{F_{n-1}^2}{P^2} + 1 + j^2 l^2 - Z_n^2, & Z_n^2 < 1 \ \& \ Z_n^2 \geq 1 + j^2 l^2 + \frac{F_{n-1}^2 - C^2}{P^2}, \\ \frac{C^2}{P^2}, & Z_n^2 \in [1, 1 + l^2) \ \& \ Z_n^2 < 1 + l^2 + \frac{F_{n-1}^2 - C^2}{j^2 P^2}, \\ \frac{F_{n-1}^2}{P^2} + j^2(1 + l^2 - Z_n^2), & Z_n^2 \in [1, 1 + l^2) \ \& \ Z_n^2 \geq 1 + l^2 + \frac{F_{n-1}^2 - C^2}{j^2 P^2}, \\ \frac{F_{n-1}^2}{P^2} + 1 + l^2 - Z_n^2, & Z_n^2 \geq 1 + l^2 \ \& \ Z_n^2 < 1 + l^2 + \frac{F_{n-1}^2}{P^2}, \\ 0, & Z_n^2 \geq 1 + l^2 \ \& \ Z_n^2 \geq 1 + l^2 + \frac{F_{n-1}^2}{P^2}. \end{cases} \quad (5.14)$$

S ohledem na (5.14) vypočítáme střední hodnotu  $\mathbb{E}Z_n^1 F_n^2/P^2$  jako

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Z_n^1 F_n^2/P^2 = \int_0^{C^2} [\chi_{\{f < (C^2 - j^2 l^2 P^2) +\}} \sum_{i=1}^4 A_i(f) + \\ + \chi_{\{f \geq (C^2 - j^2 l^2 P^2) +\}} \sum_{i=4}^6 A_i(f)] dF_{F^2}(f), \end{aligned}$$

kde rozdělení rezervního fondu  $F^2$  je určeno (4.9) a

$$\begin{aligned} A_1(f) &= \int_0^\infty \int_0^{1+j^2 l^2 + \frac{f-C^2}{P^2}} \frac{C^2}{P^2} z_1 f_{Z^1, Z^2}(z_1, z_2) dz_2 dz_1, \\ A_2(f) &= \int_0^\infty \int_{1+j^2 l^2 + \frac{f-C^2}{P^2}}^1 (\frac{f}{P^2} + 1 + j^2 l^2 - z_2) z_1 f_{Z^1, Z^2}(z_1, z_2) dz_2 dz_1, \\ A_3(f) &= \int_0^\infty \int_1^{1+l^2} (\frac{f}{P^2} + j^2(1 + l^2 - z_2)) z_1 f_{Z^1, Z^2}(z_1, z_2) dz_2 dz_1, \\ A_4(f) &= \int_0^\infty \int_{1+l^2}^{1+l^2 + \frac{f}{P^2}} (\frac{f}{P^2} + 1 + l^2 - z_2) z_1 f_{Z^1, Z^2}(z_1, z_2) dz_2 dz_1, \\ A_5(f) &= \int_0^\infty \int_0^{1+l^2 + \frac{f-C^2}{j^2 P^2}} \frac{C^2}{P^2} z_1 f_{Z^1, Z^2}(z_1, z_2) dz_2 dz_1, \\ A_6(f) &= \int_0^\infty \int_{1+l^2 + \frac{f-C^2}{j^2 P^2}}^{1+l^2} (\frac{f}{P^2} + j^2(1 + l^2 - z_2)) z_1 f_{Z^1, Z^2}(z_1, z_2) dz_2 dz_1. \end{aligned}$$

Analogickým postupem vypočítáme  $\mathbb{E}Z_n^2 F_n^1/P^1$  a určíme výslednou kovarianci  $\text{Cov}(W_n^1/P^1, W_n^2/P^2)$ , na základě které vypočteme hledanou směrodatnou odchylku  $\sigma_{W_n^c/P^c}$ .

### Příklad

Na závěr této části věnované modelu oddělených rezervních fondů uvedeme vybrané ukazatele pro případ dvou nezávislých odvětví. Předpokládejme opět, že

$\sigma_{Z^1} = 0,1$ ,  $\sigma_{Z^2} = 0,2$ ,  $P^i = 1$ ,  $l^i = 0,1$ ,  $j^i = 0,5$ ,  $i = 1, 2$ . Pro tyto hodnoty parametrů dostáváme horní meze rezervních fondů ve výši  $C^1 = 0,1866$  a  $C^2 = 0,5332$ .

Pravděpodobnost, že dojde k technické ztrátě, je  $P(TZ^c < 0) = 0,1782$  a oproti tomu pravděpodobnost, že celkový regulovaný výsledek bude záporný, odpovídá pravděpodobnosti  $P(W^c < 0) = 0,0284$ . Riziko spojené s uvažovanými odvětvími, charakterizované směrodatnou odchylkou  $\sigma_{TZ^c/P^c} = 0,1118$ , se používáním rezervních fondů snížilo na úroveň  $\sigma_{W^c/P^c} = 0,0828$ . Střední výše obou fondů dohromady je přitom  $EF^1 + EF^2 = 0,594$ .

### 5.3 Model vzájemně propojených fondů

Doposud jsme vycházeli z předpokladu, že pro stavy rezervních fondů na konci  $n$ -tého období platí  $F_n^i = g^i(F_{n-1}^i + T_n^i)$ , kde veličina  $T_n^i$  závisí pouze na příslušném škodném poměru,  $T_n^i = t^i(Z_n^i)$ ,  $i = 1, 2$ . Nyní tuto situaci zobecníme a budeme uvažovat, že tvorba a čerpání jednoho rezervního fondu závisí i na stavu druhého fondu a na realizaci obou veličin  $Z^1, Z^2$  v čase  $n$ , tedy

$$F_n^i = g^i(F_{n-1}^i + \tau^i(F_{n-1}^1, F_{n-1}^2, Z_n^1, Z_n^2)), \quad i = 1, 2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Při aproximaci sdruženého rozdělení obou fondů opět využijeme přechodu k veličinám  $U_n^i = g^i(U_{n-1}^i) + \tau^i(U_{n-1}^1, U_{n-1}^2, Z_n^1, Z_n^2)$  a ke stacionárnímu stavu, ve kterém platí

$$\begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \end{pmatrix} \stackrel{D}{=} \begin{pmatrix} g^1(U^1) \\ g^2(U^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau^1(U^1, U^2, Z^1, Z^2) \\ \tau^2(U^1, U^2, Z^1, Z^2) \end{pmatrix}.$$

Získaný odhad rozdělení vektoru  $(F^1, F^2) = (g^1(U^1), g^2(U^2))$  nám dále poslouží při posuzování efektivnosti daného systému, především z hlediska chování regulovaných technických výsledků  $W_n^P$ ,

$$W_n^P = TZ_n^c - (F_n^1 - F_{n-1}^1) - (F_n^2 - F_{n-1}^2), \quad n = 1, 2, \dots$$

Používáním modelu vzájemně propojených fondů (oproti modelu oddělených fondů) dochází k menšímu či většímu zkreslení informací o jednotlivých rizicích v účetnictví.

Jelikož rezervní fondy představují pouze jednu z několika forem vlastních zdrojů pojišťovny, mělo by být jejich čerpání ke krytí ztrát jiného odvětví umožněno jen ve výjimečných případech.

Poslední poznámku věnujme dvěma speciálním případům vzájemně propojených fondů.

#### Společný fond

V modelu oddělených fondů jsme jednotlivé zisky a ztráty nejprve upravovali o skutečné přírůstky rezervních fondů a poté jsme tyto regulované výsledky spolu

kompensovali. Další možností, jak nakládat s ročními technickými výsledky pojištných odvětví, je nejprve vzájemně kompenzovat zisky a ztráty a teprve z celkového zisku zadržet prostředky do dalších let ke krytí celkových ztrát. Tato situace vede na model společného rezervního fondu.

Výše celkových ročních zisků/ztrát závisí na veličině  $Z^c = w_1 Z^1 + w_2 Z^2$ , ziskové přírážce  $l^c$  a zaslouženém ryzím pojistném  $P^c$ . Model jednoho rezervního fondu popsáný v kapitole 4 vycházel z předpokladu, že upravené škodné poměry mají logaritmicko–normální rozdělení. Pokud v (5.2) nahradíme náhodnou veličinu  $Z^c$  veličinou  $Z^3 \sim \text{LN}(\mu^3, (\sigma^3)^2)$ , můžeme rovnou aplikovat tento model na případ dvou pojištných odvětví. Parametry  $\mu^3, (\sigma^3)^2$  opět určíme pomocí směrodatné odchylky  $\sigma_{Z^3}$ ,

$$(\sigma_{Z^3})^2 = (\sigma_{Z^c})^2 = (w_1 \sigma_{Z^1})^2 + (w_2 \sigma_{Z^2})^2 + 2w_1 w_2 \text{Cov}(Z^1, Z^2),$$

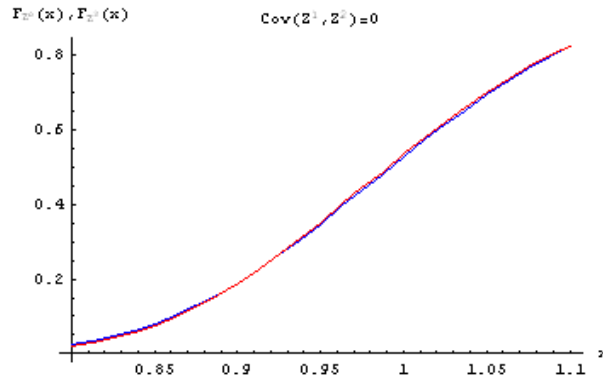
za předpokladu  $EZ^3 = EZ^c = 1$ .

Tato aproximace rozdělení veličiny  $Z^c$  logaritmicko–normálním rozdělením dává dostatečně dobré výsledky. Na obrázku 5.1 jsou na ukázkou porovnány distribuční funkce  $F_{Z^c}$  a  $F_{Z^3}$  veličin  $Z^c$  a  $Z^3$ ,

$$F_{Z^c}(x) = \int_0^{\frac{x}{w_1}} \int_0^{\frac{x-z_1 w_1}{w_2}} \phi_\rho\left(\frac{\ln z_1 - \mu^1}{\sigma^1}, \frac{\ln z_2 - \mu^2}{\sigma^2}\right) \frac{1}{z_1 \sigma^1} \frac{1}{z_2 \sigma^2} dz_2 dz_1,$$

$$F_{Z^3}(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu^3}{\sigma^3}\right), \quad x > 0,$$

v situaci  $\sigma_{Z^1} = 0,1, \sigma_{Z^2} = 0,2, w_1 = w_2 = 0,5$  a  $\rho = 0$ . V tomto případě zároveň dostáváme  $\sigma_{Z^c} = \sigma_{Z^3} = 0,112$ .



Obrázek 5.1: Distribuční funkce  $F_{Z^c}(x)$  a  $F_{Z^3}(x)$ .

Stanovíme-li dále horní mez společného rezervního fondu  $F^3$  ve výši  $C^3 = (z_{0,995}^{Z^3} - 1 - l^c)P^c$  a uvažujeme-li  $P^c = 2, l^c = 0,1$  a  $j^c = 0,5$ , pak střední hodnota tohoto fondu je  $EF^3 = 0,3971$  a pro regulované zisky/ztráty  $W_n^3$ ,

$$W_n^3 = (1 + l^c - Z_n^3)P^c - (F_n^3 - F_{n-1}^3), \quad n = 1, 2, \dots,$$

platí  $P(W^3 < 0) = 0,0122$  a  $\sigma_{W^3/Pc} = 0,0883$ .

Porovnejme nyní používání jednoho společného fondu se dvěma oddělenými fondy z hlediska jednotlivých funkcí. Vyrovnání rizik v čase ( $\sigma_{W^3/Pc}$  vs.  $\sigma_{W^c/Pc}$ ) je v obou situacích podobné, vzhledem k nižší horní mezi dochází k menšímu zadržování prostředků ( $EF^3 \leq EF^1 + EF^2$ ) a zároveň pravděpodobnost potřeby dodatečného kapitálu je v případě jednoho společného fondu nižší ( $P(W^3 < 0) \leq P(W^c < 0)$ ). Nevýhodou tohoto modelu je naopak ztráta informací o rizicích příslušejících jednotlivým odvětvím v účetnictví.

## Hranice vzájemné pomoci

Pravidla vzájemné pomoci rezervních fondů můžeme definovat např. pomocí mezí  $M^i$ ,  $0 \leq M^i \leq C^i$ ,  $i = 1, 2$ . Přitom předpokládáme, že tvorba jednotlivých rezervních fondů je zcela oddělena a ztráty jednotlivých odvětví jsou absorbovány nejprve vlastním rezervním fondem, potom případně regulovanými zisky druhého odvětví a pokud ani tyto prostředky nestačí, použijeme část prostředků druhého rezervního fondu. Výše pomoci tohoto  $i$ -tého fondu závisí na jeho současném stavu a na zvolené bezpečnostní hranici  $M^i$ . K čerpání fondu dochází, pouze pokud je  $F_n^i > M^i$  a maximálně do výše  $F_n^i - M^i$ ,  $i = 1, 2$ .

Do modelu oddělených fondů tedy vstupují další dva parametry  $M^1$  a  $M^2$ . Tyto meze mohou být určeny absolutně nebo relativně vzhledem ke stavům příslušných rezervních fondů, relativně k horním mezím nebo např. jako kvantily celkových ztrát. Situace vzájemné pomoci potom nastává, pokud je jeden fond vyčerpán, druhý fond je větší než stanovená hranice  $M$  a regulované ztráty prvního odvětví převyšují regulované zisky druhého odvětví, tj. platí-li

$$F_n^i = 0, \quad F_n^j > M^j, \quad W_n^i < -W_n^j, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j.$$

Model vzájemné pomoci má hlavní dopad na posílení bezpečnostní funkce oddělených rezervních fondů, kdy dochází ke snížení  $P(W^c < 0)$  na pravděpodobnost, že regulovaný technický výsledek  $W^M$  bude záporný. Rozdíl  $P(W^c < 0) - P(W^M < 0)$  zároveň odpovídá pravděpodobnosti, že dodatečná pomoc změní regulovanou ztrátu na regulovaný zisk, což lze vyjádřit výrazem

$$P(-W_n^2 - (F_n^2 - M^2)^+ < W_n^1 < -W_n^2) + P(-W_n^1 - (F_n^1 - M^1)^+ < W_n^2 < -W_n^1). \quad (5.15)$$

Efekt pomoci charakterizovaný součtem (5.15) je nejvýraznější v případě záporně korelovaných veličin  $Z^1$ ,  $Z^2$ . Je-li mezi škodnými poměry naopak výrazná kladná korelace, je tento efekt zanedbatelný, protože pravděpodobnost nastání situace pomoci je velmi nízká.

Pro úplnost uvedme konkrétní hodnoty pravděpodobnosti, že bude potřeba dodat kapitál na krytí regulovaných ztrát, při použití jednotlivých modelů pro dvě nezávislá odvětví. Vyjděme ze stejných předpokladů jako na konci předchozí podkapitoly a v případě vzájemné pomoci uvažujme dvě různé úrovně hranic,

$M^i = (z_{0,95}^{Z^i} - 1 - l^i)P^i$ , resp.  $M^i = (z_{0,90}^{Z^i} - 1 - l^i)P^i$ ,  $i = 1, 2$ . Výše  $M^1, M^2$  jsou spolu s výslednými pravděpodobnostmi  $P(W < 0)$  uvedeny v tabulce 5.2.

Model	$P(W < 0)$	$M^1, M^2$
Oddělené fondy	0,0284	
Vzájemná pomoc (kvantil 95%)	0,0162	$M^1 = 0,0725, M^2 = 0,2582$
Vzájemná pomoc (kvantil 90%)	0,0132	$M^1 = 0,0307, M^2 = 0,1639$
Společný fond	0,0122	

Tabulka 5.2: Porovnání bezpečnostní funkce fondů.

*Poznámka.* V rámci zjednodušení výpočtu pravděpodobností v (5.15) bylo za sdružené rozdělení fondů  $(F^1, F^2)$  použito odhadnuté rozdělení oddělených rezervních fondů (5.10).



# Kapitola 6

## Závěr

Již jsme uvedli, že vhodně nastavený rezervní fond může sloužit jako nástroj k řízení solventnosti pojišťovny. Rezervní fond představuje jednu z forem vlastního kapitálu, přičemž pravidla jeho tvorby a čerpání během jednotlivých let jsou pojišťovnou předem přesně stanovena. To umožňuje modelovat budoucí vývoj rezervního fondu a analyzovat jeho funkce v závislosti na různých parametrech. Používáním rezervního fondu se přechází od náhodných veličin představujících roční technický výsledek pojišťovny k regulovaným veličinám, které zohledňují úpravu tohoto výsledku o skutečný přírůstek rezervního fondu.

V této práci jsme určili optimální řízení rezervního fondu a uvedli jeho asymptotické vlastnosti. Dále jsme porovnávali směrodatnou odchylku regulovaných veličin s příslušným rizikem v situaci bez rezervního fondu a pravděpodobnost potřeby dodatečného kapitálu s pravděpodobností celkové technické ztráty. Při hodnocení jsme uvažovali také střední výši rezervního fondu, která určitým způsobem charakterizovala náklady na rezervní fond. Z uvedených výsledků pak vyplynuly podmínky, za kterých je neefektivní rezervní fond tvořit.

Navržený model rezervního fondu jsme dále rozšířili na případ dvou pojistných odvětví a zabývali jsme se některými typy modelů rezervních fondů – oddělených i vzájemně propojených.

Model rezervního fondu, který byl v práci popsán, vycházel z několika zjednodušených předpokladů. Tato omezení mohou být postupně uvolňována a do modelu mohou být zahrnuty další veličiny a vztahy, aby odpovídal různým ekonomickým situacím a aby vyhovoval požadavkům kladeným na interní modely Solventnosti II. Uvedené postupy mohou být využity i v rámci složitějších systémů.

# Literatura

- [1] Karten, W.: Schwankungsrückstellung. *Handwörterbuch der Versicherung (HdV)*, D. Farny, E. Helten, P. Koch, R. Schmidt, Karlsruhe, 1988, 763–765.
- [2] Mandl, P.: Estimation and Control in Markov Chains. *Advances in Applied Probability*, Vol. 6, 1974, 40–60.
- [3] Mandl, P.: On the Adaptive Control of Countable Markov Chains. *Probability Theory*, Vol. 5, 1979, 159–173.
- [4] Mandl, P.: Water Storage Models Based on Transformed Normal Distribution. *Ekonomicko–matematický obzor*, č. 4, 1979, 455–467.
- [5] Moran, P. A. P.: *The Theory of Storage*. Wiley & Sons Inc., New York, 1959.
- [6] Pentikäinen, T.: Fluctuation Reserves. *Encyclopedia of Actuarial Science*. Wiley, 2004, 719–721.
- [7] Pentikäinen, T.: Solvency. *Encyclopedia of Actuarial Science*. Wiley, 2004, 1581–1583.
- [8] Štěpán, J.: *Teorie pravděpodobnosti*. Academia, Praha, 1987.
- [9] Wang, S. S.: Aggregation of Correlated Risk Portfolios: Models & Algorithms. *Proc. Casualty Actuarial Soc.*, LXXXV, 1998, 848–939.
- [10] První směrnice Rady 73/239/EEC z 24. července 1973 o koordinaci zákonů, nařízení a správních předpisů týkajících se zahájení a provozování podnikání v přímém jiném než životním pojištění (ve znění pozdějších předpisů).
- [11] Statut Státní pojišťovny schválený usnesením vlády č. 419 ze dne 24. května 1961 a vydaný výnosem ministra financí čj. POJ/210.352/61/S-351/61 ze dne 28. června 1961.
- [12] Vyhláška ministra financí ze dne 25. května 1948 č. 977, o sloučení pojišťoven–národních podniků.