Posudek na Ph.D. disertační práci
Easton's theorem and large cardinals
Mgr. Radka Honzíka

Bohuslav Balcar

31. července 2008

Téma práce se týká moderní teorie množin a zabývá se zkoumáním slučitelnosti globálních kardinálních funkcí popisujících mohutnosti potence regulárních kardinálů a zachováváním velkých kardinálních čísel.

Aktuálnost problematiky ukážeme trochu více v historickém kontextu. Krátce po rozšíření Cantorovy naivní teorie množin vznikly pojmy jako nedosažitelný a slabě nedosažitelný kardinál. Paul Mahlo třídí nedosažitelná kardinální čísla - vzniká pojem Mahlova kardinálu [P. Mahlo, 1911]. Možnost rozšířit Lebesgueovu míru na všechny podmnožiny reálných čísel za současné platnosti axiomu výběru vede k reálně měřitelnému kardinálu a přirozená otázka po σ-aditivní dvouhodnotové míře vede k měřitelnému kardinálu.

Přenesení vlastností systémů množin, kde hraje důležitou roli konečnost na analogickou situaci, kde konečnost ($< \omega$) je nahrazena menší mohutností než κ ($< \kappa$) vede k pojmu slabě kompaktního kardinálu a zobecnění Ramseyovy věty na $\kappa \rightarrow (\kappa)^2_2$ a dále pokud každý κ centrovaný systém na libovolné množině má rozšíření do κ-úplného ultrafiltru dostáváme silně kompaktní kardinál. Zásluhu na intenzivním zkoumání velkých kardinálních čísel a jejich hierarchie má Alfred Tarski a jeho škola. Koncem 50. let minulého století je publikována fundamentální práce A. Tarského a R. Vaughta o elementárních podstrukturách.Na počátku 60. let tuto metodu D. Scott aplikuje na velké kardinály a ukazuje, že existence měřitelného kardinálu je neslučitelná s Gödelovým axiomem $V = L$ a to v době, kdy ještě není známo zda $V = L$ není odvoditelné z axiomů teorie množin. Tento výsledek a shoda dalších událostí ještě dnes v některých lidech vzbuzuje nedůvěru v existenci měřitelného kardinálu.

Scottova metoda přináší na světlo elementární vnoření $j : V \rightarrow M$ universální třídy do vnitřního tranzitivního modelu M s nejmenším ordinálním číslem κ, pro který $j(\kappa) > \kappa$, tzv. kritický bod zobrazení j. Existence takového elementárního vnoření je ekvivalentní s existencí měřitelného kardinálu.

Na vlastnosti zobrazení j a třídy M se kladou další silnější požadavky, definují se tak hyperměřitelný kardinál, superkompaktní kardinál atd, ale tyto požadavky mají svou mez, a to Kunenovu bariéru. V ZFC neexistuje elementární vnoření $j : V \rightarrow V$ s kritickým bodem. Kardinály, které jsou spjaty s existencí takových vnoření se nazývají opravdu velké, ostatním se někdy říká malé velké kardinály.

V 60. letech nastal bouřlivý rozvoj teorie množin, P. Cohen v roce 1963 publikuje svoji metodu forcingu, ukazuje konzistenci že kontinuum může být libovolně veliké a tím také pochopitelně prokazuje konzistenci $V \neq L$.

Nyní je snadné sestrojit model, kde pro dané κ je 2^κ libovolně veliké. Ale jak porušit hypotézu kontinua globálně? Jak to udělat pro všechny regulární kardinální čísla ukazuje W. Easton v své disertaci v roce 1970.

Eastonovou funkcí se rozumí zobrazení F definované na regulárních kardinálech s hodnotami v kardinálních číslech, takové že:

(i) $\kappa < \lambda \rightarrow F(\kappa) \leq F(\lambda)$,

(ii) $\kappa < cf(F(\kappa))$.

Easton konstuuje součinový typ třídového forcingu, který rozšiřuje univerzum V s GCH do generického modelu $V[G]$, který zachovává kofinality a realizuje Eastonovu funkci F.

V recenzované práci v části 2. jsou hlavní kroky Eastonovy konstrukce srozumitelně popsány i s důkazem stěžejního Eastonova lemmatu.

Měřitelné kardinály jsou regulární, v Eastonově rozšíření zůstanou regulární, ale jejich měřitelnost je zavražděna.

Dlouho se nedařilo "naforsovat" porušení hypotézy kontinua pro singulární silně limitní kardinální čísla. Ukázalo se záhy, že pro měřitelný kardinál κ, pokud platí hypotéza kontinua pro skoro všechna nedosažitelná čísla pod ním, platí i pro κ. V roce 1972 Silver dokazuje týž výsledek i pro všechny singuláry s nespočetnou kofinalitou. V roce 1975 R. Jensen a K. Devlin v Marginálíích zavádějí Covering Lemma a ukazují, že za jeho platnosti není možné $2^\kappa > \kappa$ pro κ silně limitní se spočetnou kofinalitou. Z neplatnosti Covering Lemmatu plyne existence elementárního vnoření $j : L \rightarrow L$ s kritickým bodem, neboli $0^\#$ a z $2^\kappa > \kappa$ pro silně limitní kardinál plyne existence vnitřního modelu s měřitelným kardinálem.

Dnes se s velkými kardinály setkáváme v teorii množin na každém kroku. Namátkou uveďme:

- Deskriptivní teorie množin: Borelovská determinovanost je dokazatelná v ZFC, Analytická determinovanost plyne z existence měřitelného kardinálu (fakticky je ekvivalentní s $(\exists a^\#)(\forall a \subseteq \omega)$).
- Ideály na ω: maximální p-ideály na ω nemusí existovat (vhodný množinový forcing [S. Shelah]). Neexistence p-ideálu na ω, který nemá Baireovu vlastnost jakožto podmnožina Cantorova diskontinua implikuje konsistenci velkého kardinálu.
- Mnohé důsledky PFA (Proper Forcing Axiom), které neplynou z $\mathrm{MA}(\omega_1)$, např. Každá úplná ccc slabě distributivní Booleova algebra nese striktně positivní spojitou submíru.
- V teorii kategorií se stal populární Vopěnkův princip. P. Vopěnka jej formuloval s vírou, že někdo brzy dokáže jeho spornost. Nestalo se, a dnes je zasazen do hierarchie velkých kardinálů.

Proč tak dlouhé extempore? Kolují tlusto-spisy, které údajně dokazují spornost měřitelného kardinálu s teorií množin. Nechtěně k tomu přispěl i R. Jensen, který v 70. letech nechal chvíli kolovat mylnou informaci, že to dokázal.

Svým mladším kolegům v Praze říkám, nemusíte milovat problematiku velkých kardinálů, ale nemůžete ji ignorovat, nevíte kdy může váš problém s velkými kardinály souviset. Nevěřte, že někdo kdy prokáže spornost měřitelného kardinálu se ZFC a hlavně neplýtvejte sami časem při pokusech to ukázat.

Práce je rozdělena do 5-ti částí. Jednostránková část 1. lapidárně popisuje o čem se v práci pojednává.

Je-li dána Eastonova funkce F na regulárních kardinálech, co musí F splňovat, aby existovalo (třídové) generické rozšíření V_1, V_2 univerza V tak aby platilo:

(i) V_1 zachová všechny kofinality, realizuje F (to již udělal Easton) a zachovává měřitelné kardinály (to je nové a nesnadné).

(ii) Generické rozšíření V_2 zachovává všechny kardinály ve V, realizuje F a globálně porušuje SCH (Singular Continuum Hypothesis).

V části 2. je krátce, ale srozumitelně pojednána Easton produkt-style iterace. Je připomenuta definice extenderu a hyperměřitelného kardinálu, kde místo $\{V_\alpha\}$ hierarchie je použita $\{H_\alpha\}$ hierarchie. Čtenář se může seznámit s liftingem elementárního vnoření na odpovídající množinová generická rozšíření.

Část 3. ukazuje že původní Easton forcing nemůže pracovat pro cíl (i), protože vraždí měřitelnost kardinálů. Navíc chceme-li porušit $2^\kappa = \kappa^+$ pro měřitelný kardinál musíme též porušit hypotézu kontinua pro mnoho menších nedosažitelných kardinálů.

Je zde podána obecná forma forcingu kombinujícího reverzní Eastonovu iteraci se součinovým stylem a dokázáno v 3.8 za předpokladu GCH, že takto definovaný forcing zachová všechny kofinality.

V části 4. se čtenář seznámí se zobecněným Sacksovým forcingem na nedosažitelném kardinálu, tvoří jej speciální perfektní stromy a odvozeným forcingem "side by side" iterací a konečné vyvrcholení přichází ve větě 4.8 kde se forcingem zvedne 2^κ na λ, pro κ λ-hyperměřitelný kardinál.

V části 5. je jeden z hlavních výsledků práce. Pro Eastonovu funkci F ve $V \models GCH$ existuje forcing zachovávající kofinality, realizující F a zachovávající měřitelnost pro "dobré" kardinály vůči F, třída dobrých kardinálů se značí $\triangle$. Důkaz tohoto tvrzení zabírá 10 stran textu.

V části 6. za stejných předpokladů se další iterací zachovají všechna kardinální čísla a všechny kardinály z $\triangle$ získají spočetnou kofinalitu.

Závěrem, pan Honzík mě příjemně překvapil hloubkou dosažených výsledků a pečlivým zpracováním. Našel jsem velmi málo překlepů.

Otázka: Co se rozumí v práci non-trivial forcing? Znamená to bez atomů?

Nelíbí se mi, že v referencích u publikovaných prací nejsou uvedeny stránky. Pokud je to nově zaváděný trend, ostře protestuji.

O kvalitě práce nemám pochyb. **Doporučuji na základě této práce a splnění dalších náležitostí udělit Mgr. R. Honzíkovi titul Ph.D.**