MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Pavlína Šteflová

Komplexní projektivní přímka

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce:	Mgr. Lukáš Krump, Ph.D.
Studijní program:	Matematika se zaměřením na vzdělávání
Studijní obor:	MDUP

Praha 2022

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Především chci poděkovat Mgr. Lukášovi Krumpovi, Ph.D. za pomoc s výběrem a zpracováním tématu, za trpělivost a konzultace během vedení práce. Dále bych chtěla poděkovat Michaele Dvořákové za korekturu celé práce.

Název práce: Komplexní projektivní přímka

Autor: Pavlína Šteflová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Lukáš Krump, Ph.D., Matematický ústav UK

Abstrakt: Práce pojednává o rozšíření reálné projektivní přímky na přímku komplexní. První kapitola je věnována stručné historii projektivní geometrie. Následuje kapitola připomínající definice a základní poznatky o reálné projektivní přímce, rovině, projektivní transformaci a dvojpoměru. Třetí kapitola pojednává o komplexní projektivní přímce a tématech, která s ní souvisejí, například möbiových transformacích, kocirkularitě nebo stereografické projekci. Stručně jsou v ní také připomenuty základní poznatky o komplexních číslech.

Klíčová slova: komplexní projektivní přímka, projektivní geometrie, komplexní číslo,Möbiovy transformace

Title: The complex projective line

Author: Pavlína Šteflová

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: Mgr. Lukáš Krump, Ph.D., Mathematical Institute of Charles University

Abstract: This thesis is about the expansion of the real projective line to the complex projective line. The first chapter is dedicated to a brief history of projective geometry. The next chapter introduces definitions and basic facts about the real projective line, plane, projective transformation and the cross-ratio. The third chapter concerns the complex projective line and related themes such as möbius transformation, cocircularity or stereographic projection. The chapter also briefly summarizes basic facts about complex numbers.

Keywords: The complex projective line, Projective geometry, Complex numbers, Möbius transformations

Obsah

Úvod

Tato bakalářská práce seznamuje čtenáře s komplexní projektivní přímkou a pojmy, které s ní souvisí, jako například kocirkularitou bodů, möbiovými transformacemi nebo stereografickou projekcí. Práce vychází především z knihy[1], která je publikována pouze v anglickém jazyce. Jednou z motivací pro tuto práci bylo seznámit čtenáře s danou problematikou v češtině.

Práce je určena především čtenářům, kteří se s projektivní geometrií již setkali. Jedná se o rozšíření reálného na komplexní projektivní prostor dimenze jedna. Text předpokládá znalost některých netriviálních pojmů, jako například vlastnosti a definice dvojpoměru, základní poznatky o komplexních číslech nebo projektivních transformacích. Práce slouží především k širšímu seznámení s komplexním projektivním prostorem pro zájemce o tuto tématiku.

Práce je členěna na tři kapitoly, které jsou dále rozděleny na kratší podkapitoly. V první kapitole se stručně seznámíme s historií projektivní geometrie a dozvíme se, jaká byla motivace jejího vzniku. Ve druhé kapitole narazíme na pojmy reálná projektivní přímka, rovina, projektivní tranformace a dvojpoměr, abychom si připomněli jejich definice, základní vlastnosti a geometrické interpretace.

Ve třetí kapitole se již věnujeme komplexní projektivní přímce a tématům s ní souvisejícím, jako například Möbiovým transformacím, stereografické projekci nebo kocirkulárním bodům. Poznatky jsou často ilustrovány pomocí názorných obrázků. Většina tvrzení je uvedena s důkazy, avšak některé kroky důkazů nejsou podrobněji rozepsány. Většinou se jedná o přímé důsledky výše uvedených poznatků nebo o ověření spočívající v algebraických úpravách výrazů.

Práce je vysázena pomocí systému LaTeX. Některé obrázky byly vytvořeny v grafickém softwaru Inkscape, obrázky Möbiových transformací byly vytvořeny pomocí MATLABu.

Kapitola 1

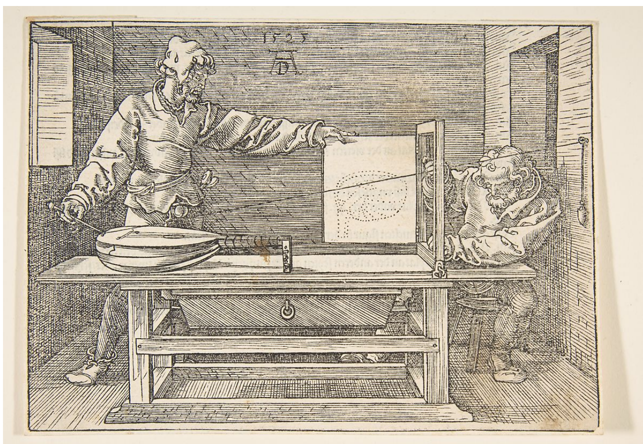
Stručná historie projektivní geometrie

V této úvodní kapitole se jen stručně seznámíme s historií projektivní geometrie. Zmíníme motivaci jejího vzniku a uvedeme několik jmen s ní spojených. Celá tato kapitola vychází z [2].

Některé problémy a věty projektivní geometrie byly známé už okolo roku 300 př. n. l. starým Řekům. Byli to však až renesanční umělci na počátku 14. století, kteří přiměli matematiky zabývat se problémy projektivní geometrie. Středověké malby a portréty byly všechny malovány v podobném stylu, který je od reálného pohledu a vidění světa velice vzdálený.

S příchodem renesance se lidé snažili zachytit svět kolem sebe realisticky. Používali různé metody, jak toho dosáhnout. Při jedné z nejznámějších metod malíř pozoruje malovaný objekt přes destičku s otvorem pouze na jedno oko. Co pozoruje, zakresluje na plátno před sebou.

Spojení mezi geometrií a vznikajícími obrazy můžeme popsat takto: Z každého bodu malovaného objektu vede do oka světelný paprsek. V místě, kde tento paprsek protne plátno, se nachází obraz daného bodu. Množinu všech těchto svě-



Obrázek 1.1: Metoda kresby v perspektivě
Zdroj:
http://www.kenneymencher.com/2015/04/how-linear-perspective-works.html

telných paprsků můžeme nazvat promítacími paprsky.

Jeden z nejznámějších matematiků, který je světu znám spíše jako umělec, zabývající se tímto problémem, byl Albrecht Dürer (1471–1528). Díky své práci je někdy Dürer považován za skutečně prvního zakladatele deskriptivní geometrie. Založení této vědní disciplíny je však přisuzováno francouzskému matematikovi Gaspardu Mongeovi (1746–1818).

Velice důležitým matematikem pro geometrii obecně byl Girard Desargues (1591–1661), který byl znám především jako francouzský architekt. Jeho práce byla motivována problémy, se kterými se umělci setkávali v perspektivě. Jeho dílo vzbudilo zájem u jiného Francouze, Blaise Pascala (1623–1662), který se jako první zabýval problémy projektivní geometrie bez aplikace ve výtvarném umění.

Kvůli novým objevům analytické geometrie se po těchto začátcích projektivní geometrie dostala do ústraní. Až do 19. století nikdo o její studium nejevil zájem. Díky učení Gasparda Monge na École Polytechnique se dostala do povědomí jeho žáka, jímž byl Jean-Victor Poncelet (1788–1867). Během ruského zajetí za napoleonských válek napsal knihu „Traité des propriétés projectives des figures“ vydanou v roce 1822. Od této chvíle byla projektivní geometrie znovu zkoumána, jak analyticky, tak synteticky.

Kapitola 2

Základní poznatky projektivní geometrie

Tato kapitola slouží jako stručné připomenutí poznatků projektivní geometrie, které bude čtenář potřebovat. Připomeneme například reálnou projektivní přímku a rovinu, dvojpoměr a projektivní transformaci na reálné projektivní přímce. Kapitola vychází z přednášek Projektivní geometrie I, konaných na MFF UK v akademickém roce 2020/2021.

2.1 Reálná projektivní přímka

Předtím, než vyslovíme definici projektivní reálné přímky, zmiňme zavedení homogenních souřadnic. Je-li $v = (x_1,x_2)$ nenulový vektor v $\mathbb{R}^2$, potom označme $\langle v \rangle$ přímku generovanou vektorem v a platí

$$\langle v \rangle = \langle (x_1,x_2) \rangle = \langle (ax_1,ax_2) \rangle, \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

V kontextu projektivní geometrie označujeme $\langle v \rangle$ jako geometrický bod a vektor v je jeho aritmetický zástupce. Geometrický bod má nekonečně mnoho aritmetických zástupců, všechny se liší nenulovým λ násobkem.

$$\langle v \rangle = \langle \lambda \cdot v \rangle \, (\lambda \neq 0)$$

Je-li $v = (x_1,x_2)$ nenulový vektor v $\mathbb{R}^2$, potom $\langle v \rangle = [x_1 : x_2]$ jsou homogenní souřadnice geometrického bodu, které jsou určeny jednoznačně až na nenulový násobek. Například body $[-2 : 2]$ a $[-3 : 3]$ po vydělení hodnotou λ reprezentují ten stejný bod $[-1 : 1]$.

Na reálné projektivní přímce chceme umět rozlišit body vlastní a nevlastní. Pokud je souřadnice $x_2 = 0$, říkáme, že se jedná o nevlastní bod. Nevlastní bod také někdy označujeme jako bod v nekonečnu.

Definice 1.1: *Projektivní přímkou rozumíme množinu všech přímek v rovině procházejících počátkem.*

$$\mathbb{RP}^1 = \{\langle v \rangle \, , v \in \mathbb{R}^2 - (0,0)\}$$

Možnost reprezentovat vektor v nekonečně mnoha homogenními souřadnicemi ve tvaru $[x_1 : x_2]$ nás přivádí k alternativní definici projektivní přímky.

Definice 1.2: *Řekneme, že bod a je ekvivalentní bodu a' právě tehdy, když:*

$$\exists\, \lambda \neq 0\ ;\ a = \lambda \cdot a'$$

Formálně můžeme projektivní přímku popsat jako

$$\mathbb{RP}^1 = \frac{\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}}{\mathbb{R} - \{0\}}$$

2.2 Projektivní transformace

Zobrazení, které každému bodu (x',y') přiřadí bod (x,y) vztahem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

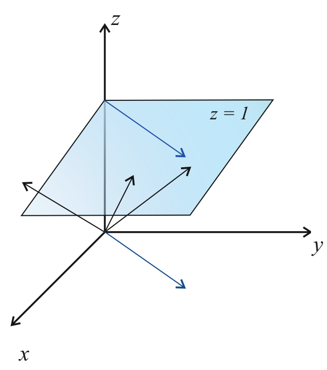
nazýváme projektivní transformace. Je dána regulární maticí s koeficienty $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, určenou až na nenulový násobek. Uvažujeme-li bod v homogenních souřadnicích $[\lambda' : 1]$, kde $\lambda' \in \mathbb{R}$, potom pro λ platí:

$$\lambda = \tfrac{a\cdot\lambda'+b}{c\cdot\lambda'+d}$$

2.3 Reálná projektivní rovina

Definice 1.3: *Projektivní rovinou rozumíme množinu všech přímek v prostoru procházejících počátkem.*

Zvolme v $\mathbb{R}^3$ rovinu o souřadnicích $z = 1$. Všechny přímky procházející počátkem (kromě přímek s touto rovinou rovnoběžných) protnou z v právě jednom bodě. Vezmeme-li libovolný bod na přímce o souřadnicích (x, y, z) a vydělíme-li tyto souřadnice z, dostáváme průsečík dané přímky s rovinou. Pokud $z \neq 0$, každá přímka se dá reprezentovat homogenními souřadnicemi $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)$. Označíme-li



Obrázek 2.1: Reálná projektivní rovina

$x_1 = \dfrac{x}{z}$ a $x_2 = \dfrac{y}{z}$, vidíme, že každý vektor o souřadnicích $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ je reprezentován homogenními souřadnicemi ve tvaru $[x_1 : x_2 : 1]$.

Pokud $z = 0$, pak souřadnice všech takových bodů reprezentují nevlastní přímku.

2.4 Dvojpoměr

Dvojpoměrem čtyř různých kolineárních bodů A, B, C, D rozumíme podíl jejich dělicích poměrů a značíme jej $(A,B;C,D)$.

$$(A,B;C,D) = \frac{(A,B;C)}{(A,B;D)},$$

kde $(A,B;C)$ je dělící poměr bodu C vůči bodům A,B.[1]

Výše uvedená definice však není projektivní, jedná se o definici dvojpoměru v eukleidovské rovině. Připomeňme si nyní projektivní definici dvojpoměru.

Nechť a, b, c, d jsou čtyři vektory v $\mathbb{R}^2$, každé dva lineárně nezávislé. Potom existují čísla $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ taková, že platí

$$\begin{aligned} c &= \alpha_1 a + \beta_1 b \\ d &= \alpha_2 a + \beta_2 b. \end{aligned}$$

Pak definujeme dvojpoměr $(a,b;c,d) = \dfrac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2}$. Hodnota dvojpoměru nezávisí na nenulovém násobku žádného z vektorů a,b,c,d. Zvolme například $(a,b;cr,d)$. Potom hodnota tohoto dvojpoměru bude

$$(a,b;cr,d) = \frac{\alpha_2\beta_1 r}{\alpha_1 r \beta_2} = (a,b;c,d)$$

Označíme-li $A = \langle a \rangle$, potom dvojpoměr $(A,B;C,D)$ je definován jako dvojpoměr jejich aritmetických zástupců.

Pro nás bude později důležité, že dvojpoměr je invariantní vůči projektivní transformaci, tzn. projektivní transformace zachovávají dvojpoměr.

Ztotožníme-li každý vlastní bod s jeho souřadnicí, tj. $A = [A : 1]$, platí pro dvojpoměr čtyř vlastních bodů

$$(A,B;C,D) = \tfrac{(C-A)(D-B)}{(D-A)(C-B)}$$

.

[1]Dělícím poměrem v eukleidovské rovině rozumíme reálné číslo, které zapisujeme $(A,B;C)$ a platí $|(ABC)| = |AC| \,/\, |BC|$.

Kapitola 3

Komplexní projektivní přímka

Dále se již budeme zabývat komplexní projektivní přímkou. Na začátek stručně připomeňme komplexní čísla a jejich geometrickou interpretaci, ikdyž předpokládáme, že čtenář je již s tímto pojmem obeznámen. Poté zavedeme pojem komplexní projektivní přímka a budeme se věnovat tématům s ní souvisejícím, jako například kocirkularitě bodů, Möbiovým transformacím a na závěr stereografické projekci. Celá tato kapitola vychází z knihy [1], kapitola 16,17. Obrázky 3.9 až 3.13 byly vytvořeny v MATLABu.

3.1 Komplexní čísla

Historie komplexních čísel je úzce spjata s hledáním řešení polynomiálních rovnic. Zajímavostí je, že byla poprvé objevena jako kořeny kubické, a ne kvadratické rovnice.

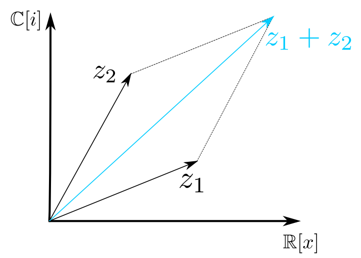
Komplexními čísly $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$ rozumíme čísla tvaru $x + iy$, kde i označuje imaginární jednotku, pro kterou platí $i^2 = -1$. Komplexní čísla mají tedy 2 složky, jednu reálnou a druhou imaginární.

Pro nás bude později velice důležitá geometrická interpretace komplexních čísel. Každé komplexní číslo $a + i \cdot b$ je sdružené s bodem (a,b) v reálném prostoru $\mathbb{R}^2$.

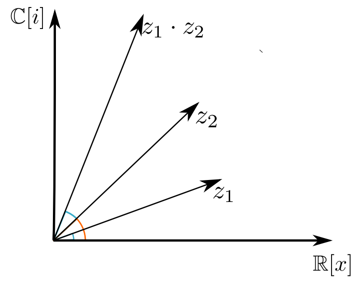
Sčítáním komplexních čísel tvaru $z_1 = a_1 + i \cdot b_1$ a $z_2 = a_2 + i \cdot b_2$ rozumíme sčítání jejich imaginárních a reálných jednotek. To však není nic jiného než sčítání vektorů. Sčítání komplexních čísel se dá tedy interpretovat jako sčítání vektorů.

Násobení komplexních čísel je již o trochu složitější. Velikostí komplexního čísla $z = a + bi$ rozumíme výraz

$$|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Obrázek 3.1: Sčítání komplexních čísel



Obrázek 3.2: Násobení komplexních čísel

Argumentem tohoto nenulového komplexního čísla rozumíme orientovaný úhel ψ, který svírá vektor (a,b) s vektorem $(1,0)$. Každé nenulové z tedy můžeme zapsat ve tvaru (jednoduše vyplývajícím z trigonometrie)

$$z = r(\cos(\psi) + i\sin(\psi)), \text{ kde } r = \sqrt{a^2 + b^2},\ \psi \in [0,2\pi)\,.$$

Vynásobíme-li mezi sebou dvě nenulová komplexní čísla z a z', kde

$$z' = s(\cos(\phi) + i\sin(\phi)),$$

dostaneme číslo

$$z \cdot z' = r(\cos(\psi) + i\sin(\psi)) \cdot s(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) = rs(\cos(\psi + \phi) + i\sin(\psi + \phi)).$$

Pozorujme, co se stane, pokud násobíme komplexní číslo $z_1 = a + bi$ s komplexním číslem z_2, které je definováno svou velikostí a orientovaným úhlem ψ.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(r(\cos(\psi) + ir\sin(\psi))) \\ = (ar\cos(\psi) - br\sin(\psi) + i(br\cos(\psi) + ar\sin(\psi))) \end{aligned}$$

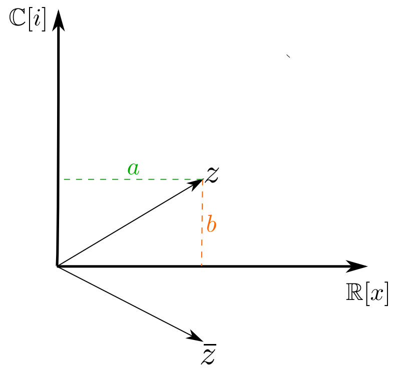
Zestručníme-li výsledek $z_1 \cdot z_2 = a' + ib'$, potom se výsledek předchozí rovnice dá zapsat pomocí násobení matic jako

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Násobit komplexním číslem o velikosti r a úhlu ψ tedy znamená otáčet vektor kolem počátku o úhel ψ a násobit r.

Poslední pojem, jehož geometrické znázornění nás bude zajímat, je číslo komplexně sdružené. Označíme-li $z = a + ib$, potom $\bar{z} = a - ib$, kde $\bar{z}$ je komplexně sdružené k číslu z. Toto tvrzení se dá geometricky chápat jako osová souměrnost podle vodorovné osy. Pro základní aritmetické operace platí:

- $z + \bar{z} = 2a$
- $z - \bar{z} = 2ib$
- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = r^2$



Obrázek 3.3: Čísla komplexně sdružená

Třetí rovnice implikuje, že pro absolutní hodnotu komplexního čísla také platí $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.

Protože jsou komplexní čísla algebraicky uzavřená (každá polynomická rovnice má nad tělesem komplexních čísel řešení), každé dva objekty budou mít obecně průsečík. Například vždy bude existovat průsečík kuželosečky a přímky.

Později budeme potřebovat znát *Eulerův vzorec* komplexního čísla, který reprezentuje vztah mezi komplexními čísly, trigonometrickými funkcemi a exponenciálními funkcemi. Tento vzorec můžeme napsat takto

$$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x).$$

Pokud bychom se snažili tento vzorec nějakým způsobem interpretovat, musíme se zaměřit především na to, co to vlastně znamená e^{ix}. K tomu, abychom daný vzorec pochopili, musíme využít Taylorových polynomů.

Taylorovy polynomy funkcí $e^x, \sin(x), \cos(x)$ jsou definovány jako

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \dots \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots \end{aligned}$$

a dá se ukázat, že konvergují pro všechna komplexní čísla.

Všechny členy rozvoje e^x se postupně, až na znaménka, objevují v rozvoji $\cos(x)$ nebo $\sin(x)$. Rozepíšeme-li si, jak vypadá rozvoj $e^{ix}, \cos(x)$ a $i\sin(x)$

$$\begin{aligned} e^{xi} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} \dots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} \dots \\ i\sin(x) &= ix - i\frac{x^3}{3!} + i\frac{x^5}{5!} \dots \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots \end{aligned}$$

,

můžeme pozorovat, že platí

$$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x).$$

Další důležitou aplikací tohoto vzorce je možnost vyjádřit komplexní číslo přímo jeho délkou r a úhlem ψ. Nenulové komplexní číslo z potom můžeme psát ve tvaru

$$z = r \cdot e^{i\psi}.$$

Kdybychom chtěli násobit komplexní čísla z a z', kde $z' = s \cdot e^{i\phi}$, dostaneme komplexní číslo ve tvaru

$$z \cdot z' = (r \cdot e^{i\psi})(s \cdot e^{i\phi}) = rse^{i(\psi+\phi)}.$$

3.2 Zavedení komplexní projektivní přímky

Komplexní projektivní přímka je nejjednodušším případem komplexního projektivního prostoru. Podobným způsobem, jako jsme zavedli reálnou projektivní přímku, můžeme zavést i přímku komplexní.

Mějme bod $z \in \mathbb{C}$. Každému takovému bodu z přiřadíme homogenní souřadnice ve tvaru $[z_1 : z_2]$ pro $z_2 \neq 0$. Pokud $z_2 = 0$, potom bod $[z_1 : 0]$ reprezentuje bod v nekonečnu. Celkem vzato získáme prostor $\mathbb{CP}^1$ definovaný jako

$$\mathbb{CP}^1 = \frac{\mathbb{C}^2 - \{(0{,}0)\}}{\mathbb{C} - \{0\}}.$$

Tento prostor se dá ztotožnit se všemi komplexními čísly a bodem v nekonečnu, píšeme $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

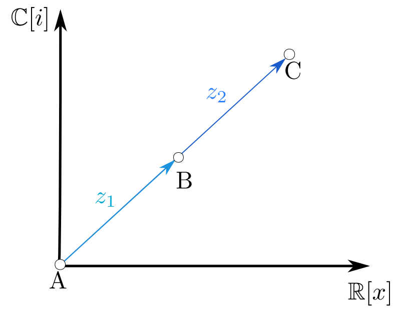
Z pohledu reálných čísel je těleso komplexních čísel dvoudimenzionální, jelikož k popisu jednoho komplexního čísla jsou potřeba dva reálné parametry. Mohli bychom tedy říci, že i $\mathbb{CP}^1$ je 2D objekt, jelikož se liší od $\mathbb{C}$ přidáním pouze jednoho bodu.

Z pohledu komplexních čísel je však $\mathbb{C}$ pouze jednodimenzionální, obsahuje jen jeden komplexní parametr. Jestliže $\mathbb{R}$ je reálná číselná osa, potom $\mathbb{C}$ je komplexní číselná osa a $\mathbb{C}$ je tedy 1-dimenzionální. Prostor $\mathbb{CP}^1$ označujeme jako komplexní projektivní přímku, i přes to, že k popisu jednoho bodu jsou potřeba dva reálné parametry.

3.3 Kocirkulární body

Také v $\mathbb{CP}^1$ zavádíme dvojpoměr čtyř bodů s obdobnými vlastnostmi jako v $\mathbb{RP}^1$. Za zmínku stojí, že v $\mathbb{CP}^1$ je definován pro libovolnou čtveřici bodů, ne jen pro body kolineární. Pozorujme, co platí pro dva body z_1 a z_2 v komplexní rovině, leží-li v jedné přímce.

Mějme $z_1 = r_1 e^{i\psi_1}$ a $z_2 = r_2 e^{i\psi_2}$ vektory v komplexní rovině v polárních souřadnicích. Pokud tyto vektory ukazují stejným směrem, musí platit, že $\psi_1 = \psi_2$ a podíl z_1 a z_2 je kladné reálné číslo. Ukazují-li směrem opačným, potom $\psi_1 =$



Obrázek 3.4: Kolineární body

$\pi + \psi_2$, a protože $e^{-i\pi} = -1$, je poměr z_1 a z_2 záporné reálné číslo. Z předchozího pozorování tedy plyne následující tvrzení.

Nechť A, B, C jsou tři různé body reprezentované souřadnicemi v komplexní rovině. Řekneme, že tři body A, B, C jsou kolineární, pokud podíl $(B-A)/(C-A)$ je reálný. Všimněme si, že výraz

$$\frac{(B-A)}{(C-A)}$$

je dělicí poměr bodů $(B{,}C; A)$. Tři body v komplexní rovině jsou kolineární, pokud je jejich dělicí poměr reálné číslo.

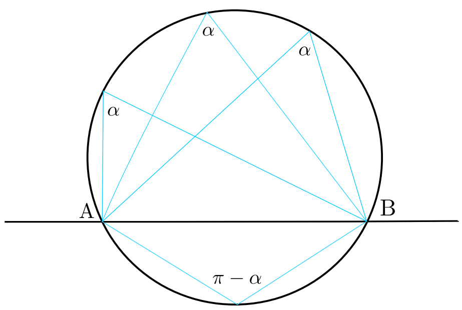
To, že jsou čtyři body kocirkulární znamená, že všechny leží na jedné kružnici. Abychom dokázali určit, zda čtyři body leží na kružnici, si budeme muset uvědomit několik věcí.

Na začátek připomeňme jednu ze základních planimetrických vět o obvodovém úhlu.

Věta 2.1: *Všechny obvodové úhly příslušné k dané sečně v jedné polorovině, určené touto sečnou, jsou shodné.*[1]

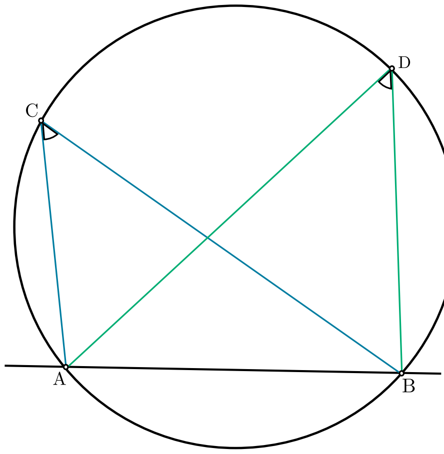
Lze říci, že součet libovolných dvou úhlů na pravé a levé straně od dané sečny je π. Pokud tedy pro čtyři body $A{,}B{,}C{,}D$ v rovině platí, že součet velikostí $\angle(A{,}C{,}B) + \angle(A{,}D{,}B) = \pi$, jsou kocirkulární.

Zformulujme nyní analogickou větu pro čísla komplexní.



Obrázek 3.5: Věta o obvodovém úhlu

[1]Důkaz zde vynecháme, lze dohledat např. v [4]



Obrázek 3.6: Věta 2.2

Věta 2.2: *Nechť A, B, C, D jsou 4 body ležící na kružnici v komplexní rovině. Potom rozdíl velikostí orientovaných úhlů $\angle(A,C,B)$ a $\angle(A,D,B)$ je násobek π.*

Pokud C a D leží ve stejných polorovinách určených přímkou AB (to znamená ve stejné části kružnice, vymezené sečnou AB), úhly jsou shodné a jejich rozdíl je tedy roven 0. Kdyby ležely v polorovinách opačných, rozdíl velikostí by byl $+\pi$ nebo $-\pi$, v závislosti na pořadí daných bodů.

Z geometrických vlastností komplexních čísel plyne, že $|\angle(A,C,B)|$ se dá spočítat jako argument ψ_1 čísla

$$\frac{C-A}{C-B} = r_1 e^{i\psi_1}$$

Podobně $|\angle(A,D,B)|$

$$\frac{D-A}{D-B} = r_2 e^{i\psi_2}$$

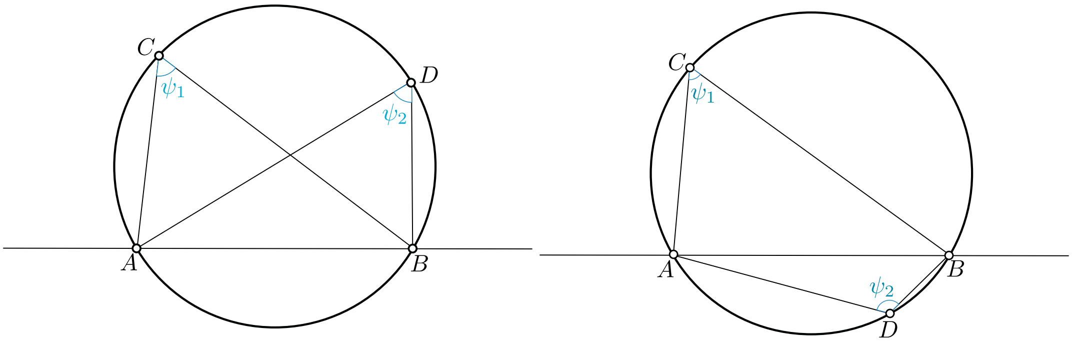
Rozdíl velikostí těchto úhlů můžeme získat vydělením

$$\frac{\frac{C-A}{C-B}}{\frac{D-A}{D-B}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\psi_1-\psi_2)}$$

Z věty 2.2 plyne, že toto číslo bude reálné, pokud body A, B, C, D leží na jedné kružnici, protože $e^{ik\pi} \in \mathbb{R}$. Číslo na levé straně rovnice není nic jiného než dvojpoměr daných bodů $(A,B;C,D)$. Z toho plyne, že čtyři body leží na kružnici, pokud je jejich dvojpoměr roven reálnému číslu. Obrácená implikace také platí, musíme se však vypořádat s případem, kdy se jedná o zobecněnou kružnici (viz strana 16, odstavec 6). Pokud jsou body A, B, C, D kolineární, potom jejich dvojpoměr je také reálné číslo. Je roven ∞, pokud $C = B$ nebo $D = A$.

Ihned získáváme následující tvrzení:

Věta 2.3: *Body $A, B, C, D \in \mathbb{CP}^1$ jsou kolineární nebo kocirkulární právě tehdy, když $(A,B;C,D) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.*



$(A,B,C,D) > 0$ $(A,B,C,D) < 0$

Obrázek 3.7: Lemma 2.4

Později budeme potřebovat následující lemma.

Lemma 2.4: *Pokud pro čtyři různé kocirkulární body v* $\mathbb{CP}^1$ *dvojice* (A,B) *odděluje dvojici* (C,D)*, potom* $(A,B;C,D) < 0$*. Pokud dvojice* (A,B) *dvojici* (C,D) *neodděluje, potom* $(A,B;C,D) > 0$

3.3.1 Ptolemaiova věta

Věta Ptolemaiova: *Je dán tětivový čtyřúhelník* A, B, C, D*. Označíme-li* a, b, c, d *popořadě délky jeho stran a* e, f *délky jeho úhlopříček, potom*

$$ac + bd = ef.$$

Ptolemaiova věta je jedna ze základních vět planimetrie a její planimetrický důkaz je možno nalézt například v [5].Podívejme se nyní na netypický důkaz této věty.

Než provedeme důkaz Ptolemaiovy věty pomocí kocirkulárních bodů, musíme se podívat na zajímavou vlastnost determinantů. Nechť a,b,c,d jsou čtyři vektory v $\mathbb{C}^2$.

Označme $[a,b]$ determinant matice $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$. Tvrdíme, že platí následující věta.

Věta 2.5: *Pro* $a,b,c,d \in \mathbb{C}^2$ *platí*[2]

$$[a,b][c,d] - [a,c][b,d] + [a,d][b,c] = 0.$$

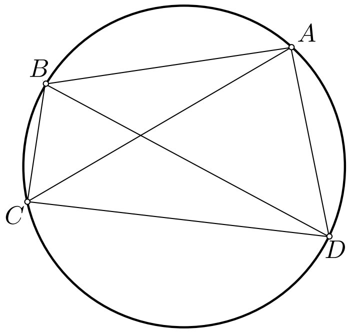
Tuto větu nazýváme Grassmannův-Plückerův vztah a má několik užitečných interpretací. Dá se jí například rozumět jako rozvoji determinantu podle sloupce, resp. podle řádku, nebo jako výpočtu délek úseček, ve vyšší dimenzi i rovnoběžnostěnů. V poslední řadě pomocí ní můžeme znázornit například Cramerovo pravidlo. [3]

Označme $|AB|$ vzdálenost bodu A od bodu B v eukleidovském prostoru.

Věta 2.6: *Nechť* A,B,C,D *jsou čtyři body v eukleidovské rovině, potom platí*

$$|AB||CD| + |AD||BC| \geq |AC||BD|.$$

[2]Důkaz lze provést pouhým dosazením a dopočítáním, je možno jej nalézt v [1], strana 103.
[3]Více v [1], kapitola 6.



Obrázek 3.8: Ptolemaiova věta

Rovnost nastává právě tehdy, když tyto čtyři body leží na kružnici.

Důkaz:

Nejprve si všimněme podobnosti mezi danou nerovností a Grassmann-Plückerovým vztahem. Pokud bychom danou nerovnost přepsali do tvaru

$$|AB||CD| - |AC||BD| \geq |AD||BC|,$$

a porovnali se vztahem

$$[AB][CD] - [AC][BD] + [AD][BC] = 0, \text{ kde } A, B, C, D \in \mathbb{CP}^1,$$

vidíme jistou podobnost. Součin $[AB][CD]$ není nic jiného než komplexní číslo, které můžeme v polárních souřadnicích napsat jako $r_\alpha e^{i\psi}$.Jsou-li $A, B \in \mathbb{CP}^1$, $A = [a : 1]$, $B = [b : 1]$, pak $[AB] = \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - b$, a délka tohoto komplexního čísla je $|a - b| = |AB|$. Označme α, β, γ komplexní čísla a jejich velikost $r_\alpha, r_\beta, r_\gamma$ v tomto pořadí. Můžeme tedy psát, že $r_\alpha = |AB|\,|CD|$. Podobně bychom mohli napsat $r_\beta = |AC|\,|BD|$ a $r_\gamma = |AD|\,|BC|$. Předcházející rovnost můžeme tedy zapsat ve tvaru

$$\alpha - \beta + \gamma = 0,$$

neboli

$$\alpha + \gamma = \beta.$$

Komplexní čísla interpretujeme jako úsečky v rovině a pro jejich velikosti platí trojúhelníková nerovnost.

$$r_\alpha + r_\gamma \geq r_\beta,$$

čímž dostáváme požadované tvrzení. Rovnost nastává, pokud $|AB|\,|CD| + |AD|\,|BC| = |AC|\,|BD|$. Tedy pokud všechna tři čísla α, β, γ jsou kolineární,$\alpha + \gamma = \beta$ a mají stejnou orientaci. To platí, pokud dělicí poměry

$$\tfrac{\alpha}{\gamma} \in \mathbb{R}^+ \text{ a } \tfrac{\beta}{\gamma} \in \mathbb{R}^+.$$

To nastává právě tehdy, když body A,B,C,D leží na kružnici v tomto pořadí, podle Lemmatu 2.4. $\square$

Je-li čtyřúhelník tvořený body A, B, C, D obdélníkem, právě dokázané tvrzení není nic jiného, než Pýthagorova věta.

3.4 Möbiovy transformace

Mějme vektor $(z'_1,z'_2) \in \mathbb{C}^2$, který reprezentuje bod (je aritmetickým zástupcem bodu) v $\mathbb{CP}^1$ homogenními souřadnicemi. Projektivní tranformací rozumíme zobrazení $\tau : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$, které každému vektoru (z'_1,z'_2) přiřadí vektor (z_1,z_2) vztahem

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix},$$

kde a,b,c,d mohou být jak reálná, tak komplexní čísla a matice transformace musí být regulární. Protože matice transformace má čtyři komplexní parametry a je určena až na nenulový násobek, máme tři stupně volnosti.

To znamená, že projektivní transformace v $\mathbb{CP}^1$ je dána třemi páry odpovídajících si bodů. Tato transformace zachovává dvojpoměr, jinak řečeno, dvojpoměr je invariantní vůči této transformaci. Z předchozího plyne, že pokud $(A,B;C,D)$ je reálné číslo, potom i $(\tau(A),\tau(B);\tau(C),\tau(D))$ bude reálné číslo.

Věta 2.7: *Nechť τ je projektivní transformace $\mathbb{CP}^1$ a nechť A,B,C,D jsou body na kružnici nebo přímce. Potom jejich obrazy $\tau(A),\tau(B),\tau(C),\tau(D)$ také leží na kružnici nebo přímce.*

Důkaz: To, zda dané body leží na kružnici nebo přímce, určujeme pomocí dvojpoměru těchto bodů. Z předchozích úvah ale víme, že pokud dvojpoměr bodů $(A,B;C,D) \in \mathbb{R}\cup\infty$, leží tyto body na kružnici nebo přímce. Dvojpoměr je invariatní vůči projektivní transformaci, a tedy i obrazy daných bodů leží na kružnici nebo přímce.

$\square$

Zobecněnou kružnicí budeme rozumět kružnici s nekonečným poloměrem, respektive přímku. Předcházející větu můžeme formulovat takto:

Věta 2.8:*Projektivní transformace zobrazuje každou zobecněnou kružnici na zobecněnou kružnici.*

Nechť z je komplexní číslo. Zobrazení, které každému číslu z přiřadí číslo

$$z' = \frac{az+b}{cz+d},$$

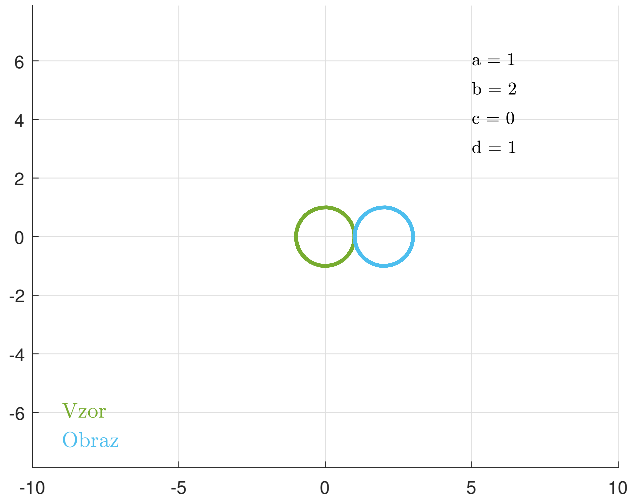
se nazývá *Möbiova transformace*. V homogenních souřadnicích můžeme číslo z' zapsat tvarem

$$\left[\frac{az+b}{cz+d} : 1\right] = [az+b : cz+d].$$

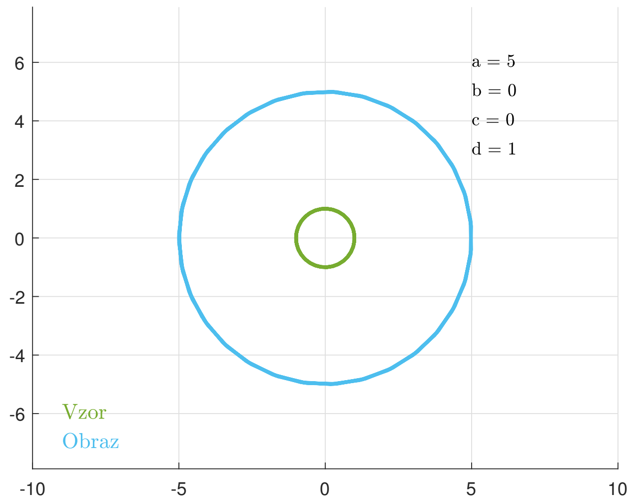
Nevlastnímu bodu $[1 : 0]$ je přiřazen bod $[a : c]$, neboť

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

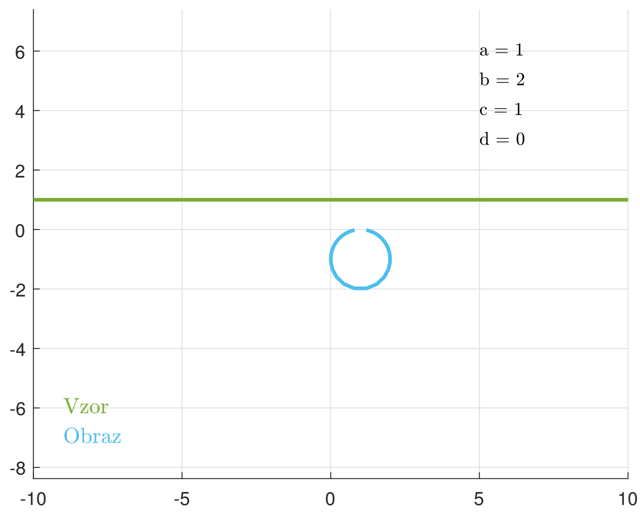
Bodu $z = -\frac{d}{c}$ přiřadí tato transformace bod o souřadnicích $[1 : 0]$, tedy bod nevlastní. Möbiovy transformace tedy nejsou nic jiného než projektivní transformace v $\mathbb{CP}^1$. Jsou dány čísly a,b,c,d, která mohou být jak reálná, tak imaginární. Je-li $c = 0$ a $d = 1$, potom obrazem bodu z je $az + b$. Pokud navíc $a = 1$, jedná se o posunutí o daný vektor b. Pokud $b = 0$ a $a \in \mathbb{R}$, jedná se o stejnolehlost. Na následujících obrázcích uvedeme několik příkladů Möbiových transformací.



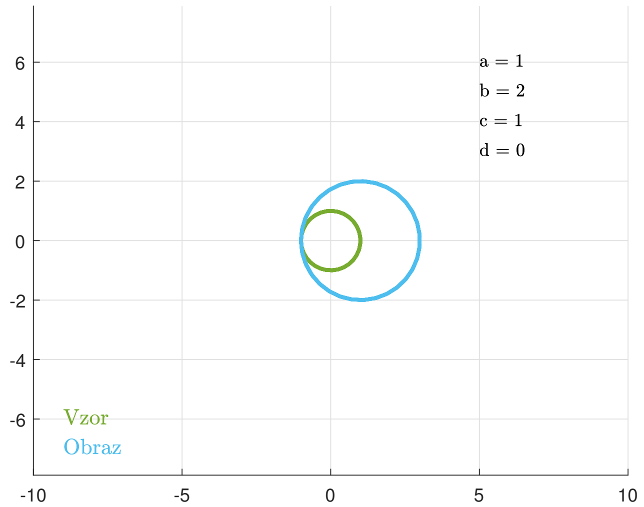
Obrázek 3.9: Speciální případ tranformace; posunutí o vektor b



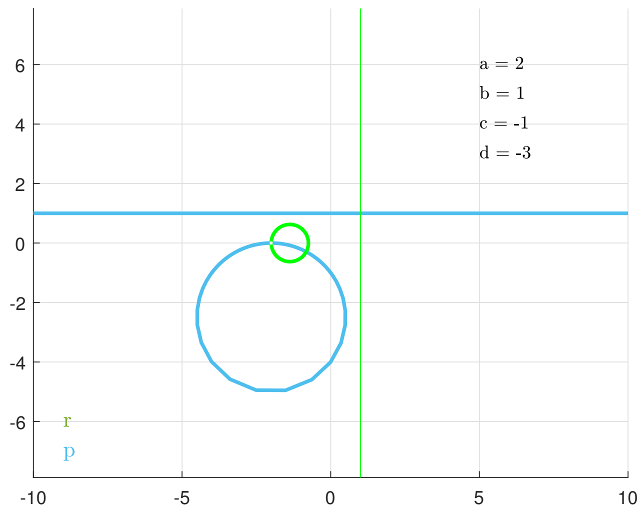
Obrázek 3.10: Obraz kružnice $k([0,0], r = 1)$



Obrázek 3.11: Transformace přímky rovnoběžné s osou x procházející bodem [0,1]



Obrázek 3.12: Transformace kružnice $k([0,0], r = 1)$



Obrázek 3.13: Tranformace dvou přímek p,r

Důležitou vlastností projektivního zobrazení, a tedy i Möbiových transformací, je zachování orientace. Abychom mohli porozumět orientované kružnici, musíme nejprve tento pojem určitým způsobem zavést.

Nechť je kružnice dána třemi body A, B, C. Potom orientovanou kružnicí $\bigcirc(A{,}B{,}C)$ rozumíme takovou kružnici, kde záleží na pořadí, v jakém procházíme body A, B, C.

Sestrojíme v každém z těchto tří bodů směrový vektor tečny a otočíme o 90° proti směru hodinových ručiček. Pokud tento vektor příslušný k danému bodu směřuje do vnitřní části kružnice, říkáme, že je tato strana kladnou stranou kružnice. Pokud vektor směřuje do vnější části kružnice, označíme vnější stranu jako kladnou.

Dříve jsme si rozmysleli, že pokud jsou body A, B, C, D kocirkulární, je imaginární složka jejich dvojpoměru rovna 0. Pokud bod D na kružnici neleží, je imaginární složka dvojpoměru buď záporná, nebo kladná. Záleží na tom, zda bod D leží ve vnější, nebo vnitřní části kružnice. Tato geometrická představa má jednoduchou algebraickou interpretaci. Můžeme ji tedy zapsat jako formální definici.

Definice 2.9: *Nechť A, B, C jsou tři body v $\mathbb{CP}^1$ ležící na kružnici. Kladnou stranou kružnice $\bigcirc(A{,}B{,}C)$ definovanou body $A{,}B{,}C$ rozumíme množinu*

$$\left\{ D \in \mathbb{CP}^1 \,|\, \text{imaginární část}(A{,}B; C{,}D) \text{ je kladná} \right\}$$

Imaginární část daného dvojpoměru je tedy kladná na kladné straně kružnice, záporná na záporné straně kružnice a rovna nule přímo na kružnici.

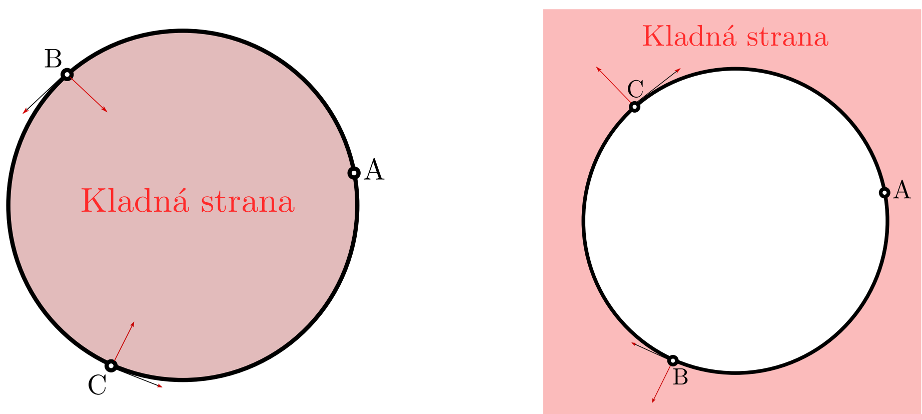
Z předcházející úvahy plyne následující tvrzení:

Věta 2.10: *Nechť A, B, C jsou tři body v $\mathbb{CP}^1$ a nechť τ je projektivní tranformace. Potom τ zobrazí kladnou stranu kružnice $\bigcirc(A{,}B{,}C)$ na kladnou stranu kružnice $\bigcirc(\tau(A){,}\tau(B){,}\tau(C))$.*

Důkaz:

Protože projektivní transformace zachovávají dvojpoměr, imaginární část tohoto dvojpoměru se nezmění.

$\square$



Obrázek 3.14: Orientovaná kružnice

Neexistuje projektivní transformace, která by měnila strany kružnice, tedy taková, která by zaměňovala vnější a vnitřní body kružnice.

Möbiovy transformace zachovávají vnitřní a vnější body kružnice. Zobrazení, které zobrazuje kružnice na kružnice, ale mění jejich vnější a vnitřní body, se nazývají anti-Möbiovy transformace. Příkladem takového zobrazení je $z \to \bar{z}$, tedy komplexně sdružená čísla. Dalším příkladem takového zobrazení je $z \to \frac{1}{\bar{z}}$. Toto zobrazení se někdy nazývá kruhová inverze. Obě tato zobrazení jsou involutorní, tzn. složení tohoto zobrazení samo se sebou je identita.

3.5 Průsečíkové úhly

Nechť c_1 a c_2 jsou dvě orientované kružnice v $\mathbb{CP}^1$, které mají dva průsečíky. Průsečíkovým úhlem těchto dvou kružnic rozumíme ten z úhlů (c_1,c_2), který dostaneme rotací tečného vektoru kružnice c_1 do polohy tečného vektoru kružnice c_2 tak, že tyto vektory mají poté stejnou orientaci.

Na obrázku 3.15 si lze povšimnout, že tato definice nezáleží na volbě daného průsečíku. Nyní ukážeme, jak souvisí průsečíkové úhly s dvojpoměrem.

Buďte P_1 a P_2 průsečíky zadaných orientovaných kružnic c_1 a c_2. K určení orientace nám poslouží body $Q_1 \in c_1$ a $Q_2 \in c_2$. Definujme tedy orientované kružnice $c_1 = \bigcirc(P_1,Q_1,P_2)$ a $c_2 = \bigcirc(P_1,Q_2,P_2)$. Potom průsečíkový úhel může být snadno spočítán podle následující věty.

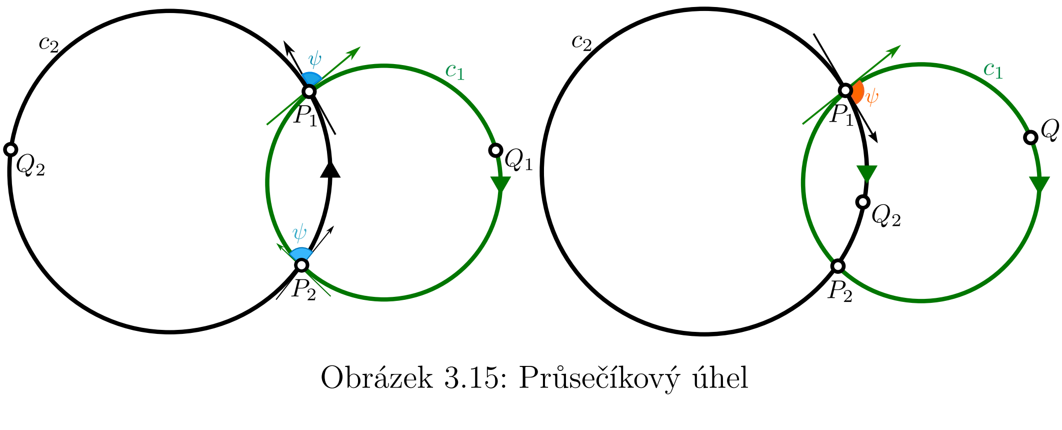
Věta 2.11: *Mějme orientované kružnice c_1,c_2 a body Q_1,Q_2,P_1,P_2 definované výše. Nechť $re^{i\psi} = (Q_1,Q_2;P_1,P_2)$ je dvojpoměr čtyř bodů. Potom ψ je průsečíkový úhel kružnic c_1 a c_2.*

Důkaz:

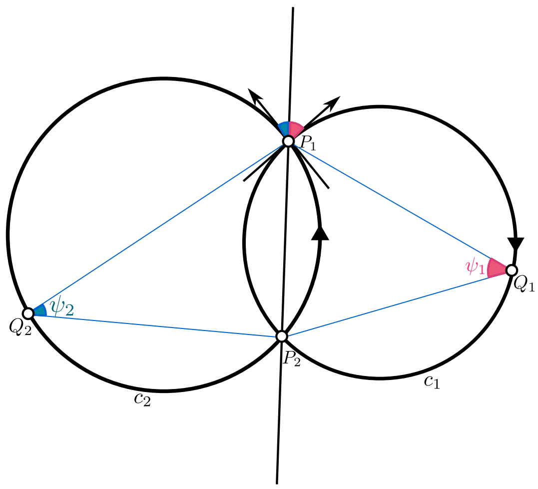
Úhel, pod kterým vidíme body P_1 a P_2 z bodu $Q_1 \in c_1$, je podle *Věty 2.1* konstantní. Podíl $\frac{Q_1-P_1}{Q_1-P_2} = r_1 e^{i\psi_1}$ je komplexní číslo a ψ_1 daný obvodový úhel. To samé platí pro Q_2, ze kterého vidíme body P_1,P_2 pod stále stejným úhlem ψ_2, kde $Q_2 \in c_2$. Proto dvojpoměr bodů $(Q_1,Q_2;P_1,P_2)$ nezávisí na volbě bodů Q_1,Q_2, závisí pouze na orientaci daných kružnic.

Pro dvojpoměr $(Q_1,Q_2;P_1,P_2)$ platí

$$\frac{Q_1-P_1}{Q_1-P_2} \cdot \frac{Q_2-P_2}{Q_2-P_1} = \frac{Q_1-P_1}{Q_2-P_1} \cdot \frac{Q_2-P_2}{Q_1-P_2}.$$



Obrázek 3.15: Průsečíkový úhel



Obrázek 3.16: Důkaz Věty 2.8

V limitním případě, kdy se Q_1 blíží P_1, popisuje výraz $\dfrac{Q_1 - P_1}{Q_2 - P_1}$ stejný úhel, jako je úhel průsečíkový, neboť jmenovatel i čitatel daného zlomku reprezentují komplexní číslo, které má stejný směr jako orientovaný vektor tečny v bodě P_1. Výraz $\dfrac{Q_2 - P_2}{Q_1 - P_2}$ má úhel nulový, jelikož bod P_2 je různý od bodu P_1, ke kterému se limitně blíží jak bod Q_1, tak bod Q_2.

Dvojpoměr $(Q_1,Q_2;P_1,P_2)$ tedy nezávisí na volbě Q_1 a Q_2 a zároveň úhel, který reprezentuje, je shodný s průsečíkovým úhlem.

$\square$

Protože Möbiovy transformace nemění dvojpoměr, získáváme okamžitě následující tvrzení.

Důsledek 2.12: *Möbiovy transformace zachovávají průsečíkové úhly. Anti-Möbiovy transformace všechny průsečíkové úhly zobrazí na opačné (mění orientaci tečných vektorů).*

3.6 Stereografická projekce

Další zajímavou geometrickou vlastností $\mathbb{CP}^1$ je její ekvivalence se sférou. Každému bodu na komplexní projektivní přímce můžeme jednoznačně přiřadit bod na sféře. Nejprve ztotožníme komplexní projektivní přímku s rovinou xy ve třírozměrném reálném vektorovém prostoru tak, že každému bodu $x+iy$ přiřadíme vektor $(x,y,0)^T$.

Předpokládejme, že daná sféra má poloměr 1 a dotýká se počátku soustavy souřadnic v reálném vektorovém prostoru. Rovina xy je tedy tečnou rovinou této sféry. Taková sféra je dána rovnicí $x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$. Severní pól má souřadnice $N = (0,0,2)^T$. Zvolme tento bod jako střed projekce roviny xy na sféru. Protože promítací paprsek, neboli přímka spojující N s každým bodem $\mathbb{CP}^1$, protne sféru právě v jednom bodě, je toto zobrazení jednoznačné (bijekce).

Analyticky se dá toto zobrazení vyjádřit následujícím způsobem. Vezmeme $p = (x_1,y_1,0)^T$, libovolný bod v rovině xy, a hledáme prusečík přímky $l = \lambda p + (1-\lambda)N$ s danou sférou. Parametricky můžeme přímku l zapsat takto

$$\begin{aligned} x &= 0(1-\lambda) + \lambda x_1 \\ y &= 0(1-\lambda) + \lambda y_1 \\ z &= 2(1-\lambda) + 0\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

a dosadit tyto hodnoty do rovnice sféry. Potom dostáváme rovnici

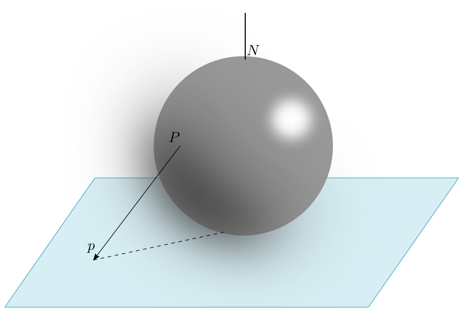
$$\lambda^2 x_1^2 + \lambda^2 y_1^2 + (2(1-\lambda)-1)^2 = 1$$

Když tuto rovnici upravíme a vyjádříme λ, dojdeme ke dvěma řešením. Buď $\lambda = 0$, což je řešení odpovídající severnímu pólu. Druhé řešení je

$$\lambda = \frac{4}{x_1^2 + y_1^2 + 4},$$

což je řešení, odpovídající druhému průsečíku dané přímky l a sféry. Dosadíme-li příslušné λ do parametrického vyjádření přímky, získáme hledaný průsečík. Čím více je bod v rovině vzdálený od jižního pólu, tím blíže se zobrazí k severnímu pólu. V limitním případě se tedy bod ∞ zobrazí na severní pól, a tedy platí

$$\mathbb{CP}^1 \approx \mathbb{C} \cup \{\infty\} \approx S^2.$$



Obrázek 3.17: Stereografická projekce

Protože je dané zobrazení bijektivní, můžeme pozorovat zajímavé vlastnosti tohoto zobrazení. Bez důkazu uvedeme jen některé z nich.

- Kružnice v $\mathbb{CP}^1$ se zobrazí na kružnice na S^2.
- Kružnice na S^2 se zobrazí na kružnice v $\mathbb{CP}^1$.
- Stereografická projekce zachovává průsečíkové úhly.

Möbiovy transformace můžeme interpretovat pomocí stereografické projekce následujícím způsobem. Zobrazíme $\mathbb{CP}^1$ na sféru, tu otočíme, zvětšíme a posuneme tak, že daná rovina xy je stále její tečnou rovinou, a potom takto upravenou sféru zobrazíme ze severního pólu zpátky do $\mathbb{CP}^1$.

Kružnice na sféře zobrazí Möbiovy transformace opět na kružnice. Prochází-li kružnice bodem N, který se zobrazí do bodu nevlastního, zobrazí se tato kružnice na přímku.

Je-li dána kružnice na sféře, anti-Möbiovy transformace ji zobrazí na jinou kružnici na sféře, zamění však vnější body za vnitřní a obráceně.

Závěr

Úkolem této bakalářské práce bylo rozšíření reálné projektivní přímky na přímku komplexní. V úvodní kapitole jsme se pouze stručně seznámili s historií projektivní geometrie. Dále jsme si ve druhé kapitole připomněli některé poznatky projektivní geometrie, které jsme potřebovali znát. V poslední kapitole jsme definovali komplení projektivní přímku a některé pojmy s ní související, jako například kocirkularitu bodů, möbiovy transformace, průsečíkové úhly a stereografickou projekci.

Tato práce jistě zcela nepokrývá problematiku komplexní projektivní přímky a celkově rozšíření reálného projektivního prostoru na komplexní. Některé odborné články se věnují komplexnímu projektivnímu prostoru a zaměřují se na jeho vlastnosti (např. [6]). Pro zájemce doporučuji k přečtení zbývající kapitoly v knize [1].

Seznam obrázků

Literatura

[1] Jürgen Richter-Gebert: *Perspectives on Projective Geometry.* Springer, první vydání, Berlín, 2010. ISBN 3642172857.

[2] George Maurice Speed: *A Brief History of Projective Geometry.* George Peabody College for Teachers, disertační práce, Michigan, 1964.

[3] Daniel Mrkvička: *Rekonstrukce 3D objektů z více pohledů.* VUT Brno, diplomová práce, Brno, 2018.

[4] Vlasta Moravcová, Jana Hromadová: *Základy planimetrie: pro učitelské studium.* Matfyzpress, první vydání, Praha, 2021.

[5] Zbyněk Šír: *Řecké matematické texty.* OIKOYMENH, první vydání, Praha, 2011.

[6] Carlo Gagliardi: *On the genus of the complex projective plane.* Aeq. Math. 37, 130–140, 1989.