MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Sára Elichová

Barvení grafu a formální gramatiky

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Štěpán Holub, Ph.D.
Studijní program: Obecná matematika
Studijní obor:

Praha 2022

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Chtěla bych poděkovat svému vedoucímu doc. Mgr. Štěpánu Holubovi, Ph.D. za cenné připomínky a pomoc při psaní této práce.

Název práce: Barvení grafu a formální gramatiky

Autor: Sára Elichová

Katedra: Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Štěpán Holub, Ph.D., katedra algebry

Abstrakt: Tato práce se zabývá dvěma ekvivalentními reformulacemi problému čtyř barev. První z nich ukazuje spojitost barvení grafů s vektorovým součinem, druhá na ni navazuje a rozvíjí souvislost s formální gramatikou. Tyto reformulace a důkazy jejich ekvivalence s větou o čtyřech barvách jsou výsledky dvou prací, jejichž motivací je snaha o jednodušší důkaz slavného problému, který byl zatím dokázán jen za pomoci počítače. Přinášejí zajímavý úhel pohledu na problém barvení grafů a nabízejí možnost, jak jej uchopit novým způsobem, který by se mohl ukázat přístupnějším. Tato práce představí důkazy uvedené ve výchozí literatuře a doplní kroky, které tam nejsou podrobně zpracovány. Některé myšlenky se pokusí více formalizovat a přispět tak k lepší srozumitelnosti důkazů.

Klíčová slova: věta o čtyřech barvách, vektorový součin, binární strom

Title: Graph coloring and formal grammars

Author: Sára Elichová

Department: Department of Algebra

Supervisor: doc. Mgr. Štěpán Holub, Ph.D., department of algebra

Abstract: This thesis deals with two equivalent reformulations of the four color problem. The first of them shows the connection between graph coloring and the vector cross product; the second one expands on it and develops a relation to a formal grammar. These reformulations together with the proofs of their equivalence to the four color theorem are the results of two articles motivated by the effort to find a simpler proof of the famous problem, which was proved only by computer. They bring an interesting perspective on the problem of graph coloring and give the possibility to look on it in a new way, which could turn out to be more approachable. This thesis presents the proofs introduced in the source literature and adds the steps that are not elaborated in detail by the authors. It aims to formalize some of the ideas and to contribute to the comprehensibility of the proofs.

Keywords: four color theorem, vector cross product, binary tree

Obsah

Úvod

Otázka, kolik barev je potřeba k obarvení oblastí na libovolné mapě tak, aby žádné dvě sousední oblasti neměly stejnou barvu, byla poprvé vyslovena v polovině 19. století. Soudilo se, že by mohly stačit čtyři barvy, ale tuto domněnku se dlouho nedařilo dokázat. Postupem času byla dokázána věta o pěti barvách, tedy tvrzení, že k obarvení vždy stačí pět barev. Takzvaný problém čtyř barev však ještě dlouho odolával a dokázat jej se podařilo až K. Appelovi a W. Hakenovi v roce 1976 za použití počítačového programu, který umožnil rozbor velkého množství případů. Jelikož se však nejedná o čistě matematický důkaz, který by bylo možné provést a ověřit bez pomoci počítače, stále existují snahy nalézt jednodušší a snáze uchopitelný důkaz. Jeden z nejznámějších problémů teorie grafů tak zůstává stále v jistém smyslu „otevřeným“ problémem.

V této práci si představíme a podrobně vysvětlíme některé částečné výsledky, které v tomto směru byly publikovány, konkrétně dvě ekvivalentní reformulace problému čtyř barev. První z nich, kterou dokázal ve své práci Kauffman (1990) a jíž se budeme zabývat ve druhé kapitole, dává do souvislosti barvení grafů a vektorový součin. Na tuto reformulaci se pak odkazují Cooperová, Rowland a Zeilberger ve svém článku (Cooper, Rowland a Zeilberger, 2012) a odvozují z ní další ekvivalentní tvrzení, které ukazuje spojitost mezi problémem čtyř barev a vlastnostmi určité formální gramatiky a jemuž je zde věnována třetí kapitola.

Cílem této práce je nejen podat přehledný souhrn těchto poznatků, ale také doplnit některé kroky, které v důkazech uvedených ve výše zmíněných článcích chybí nebo nejsou dostatečně vysvětleny. To se týká například téměř celé jedné implikace Kauffmanova tvrzení, jejímuž důkazu není v Kauffmanově článku věnován příliš velký prostor a kterou podrobně rozebereme v sekci 2.3. S tím souvisí i snaha o větší formalizaci některých pojmů a postupů, které jsou ve výchozích článcích používány spíše intuitivně nebo jsou definovány pouze zjednodušeně. V první kapitole proto připomeneme některé základní definice z teorie grafů a zavedeme pojmy, které využijeme v dalších dvou kapitolách.

1. Základní definice

Na začátku pro úplnost připomeňme několik základních pojmů z teorie grafů. Mnohé z následujících definic nebo jejich částí jsou ve velmi podobném znění obsaženy v knize Matouška a Nešetřila *Kapitoly z diskrétní matematiky* (Matoušek a Nešetřil, 2009). Téměř doslovně nebo jen s drobnými úpravami jsou zde použity zejména definice *grafu*, *isomorfního grafu*, *orientovaného grafu*, *kořenového stromu*, *oblouku*, *nakreslení* a *stěny grafu*. Některé pojmy naopak pro účely této práce definujeme trochu jinak, než je běžně zvykem; jedná se především o definici *binárního stromu*, který, tak jak jej zde budeme chápat, je ve skutečnosti jen speciálním případem obecného binárního stromu.

Definice 1.1. Graf *G je uspořádaná dvojice (V,E), kde V je neprázdná množina a E je množina dvouprvkových podmnožin množiny V. Prvky množiny V se nazývají* vrcholy *grafu G a prvky množiny E* hrany *grafu G, hrana mezi vrcholy* u *a* v *má tvar* $\{\mathrm{u},\mathrm{v}\}$. *Dva vrcholy* $\mathrm{u},\mathrm{v} \in V$ *se nazývají* sousední, *pokud mezi nimi vede hrana, tj.* $\{\mathrm{u},\mathrm{v}\} \in E$. *Dvě hrany* $\mathrm{e},\mathrm{f} \in E$ *se nazývají* sousední, *pokud mají právě jeden společný vrchol, tj.* $\mathrm{e} \neq \mathrm{f}$ *a zároveň* $\mathrm{e} \cap \mathrm{f} \neq \emptyset$.

Definice 1.2. *Řekneme, že dva grafy $G = (V,E)$ a $G' = (V',E')$ jsou* isomorfní, *pokud existuje bijekce $f : V \to V'$ taková, že pro každé dva vrcholy* $\mathrm{u},\mathrm{v} \in V$ *platí* $\{\mathrm{u},\mathrm{v}\} \in E$, *právě když* $\{f(\mathrm{u}),f(\mathrm{v})\} \in E'$.

Definice 1.3. Orientovaný graf *G je uspořádaná dvojice (V,E), kde V je neprázdná množina a E je podmnožina kartézského součinu $V \times V$. Prvky V se nazývají* vrcholy, *prvky E nazýváme* orientované hrany. *Orientovaná hrana, která vychází z vrcholu* u *a končí ve vrcholu* v, *má tvar* (u,v). *Říkáme, že vrchol* u *je* otec *vrcholu* v *a vrchol* v *je* syn *vrcholu* u.

Definice 1.4. Symetrizace orientovaného grafu *$G = (V,E)$ je neorientovaný graf $G' = (V,E')$, kde* $\{\mathrm{u},\mathrm{v}\} \in E'$ *právě tehdy, když* $(\mathrm{u},\mathrm{v}) \in E$ *nebo* $(\mathrm{v},\mathrm{u}) \in E$.

Definice 1.5. Stupeň vrcholu v *v grafu G je počet hran grafu G obsahujících vrchol* v. *Vrchol stupně* 1 *se nazývá* list.

Definice 1.6. Kubický graf *je graf, jehož každý vrchol má stupeň* 3.

Definice 1.7. Sled *v grafu, resp. orientovaném grafu $G = (V,E)$ je posloupnost* $(\mathrm{v}_0,\mathrm{e}_1,\mathrm{v}_1,\mathrm{e}_2,\ldots,\mathrm{e}_n,\mathrm{v}_n)$, *kde* $\mathrm{v}_0,\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n \in V$, $\mathrm{e}_1,\ldots,\mathrm{e}_n \in E$ *a pro každé* $i \in \{1,\ldots,n\}$ *platí* $\mathrm{e}_i = \{\mathrm{v}_{i-1},\mathrm{v}_i\}$, *resp.* $\mathrm{e}_i = (\mathrm{v}_{i-1},\mathrm{v}_i)$.
Cesta *v (orientovaném) grafu G je sled, ve kterém se každý vrchol vyskytuje nejvýše jednou (tedy* $\mathrm{v}_i \neq \mathrm{v}_j$ *pro každé* $i,j \in \{0,\ldots,n\}, i \neq j$*).*
Kružnice *v (orientovaném) grafu G je sled, ve kterém platí* $\mathrm{v}_0 = \mathrm{v}_n$ *a* $\mathrm{v}_i \neq \mathrm{v}_j$ *pro každé* $i,j \in \{1,\ldots,n\}, i \neq j$.

Definice 1.8. *Graf G je* souvislý, *pokud v něm mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta. Orientovaný graf G je* (slabě) souvislý, *pokud jeho symetrizace je souvislý graf.*

Definice 1.9. Strom *T je souvislý graf, který neobsahuje kružnici.* Orientovaný strom *T je orientovaný graf, jehož symetrizace je strom.*

Definice 1.10. Kořenový strom *je dvojice* (T,r)*, kde* T *je strom a* r *je jeden zvolený vrchol* T*, zvaný* kořen*.*

Předchozí definice umožňují zavést klíčový pojem *binární strom*, který pro naše účely definujeme tímto způsobem:

Definice 1.11. Orientovaný binární strom *je orientovaný kořenový strom. Jeho orientaci budeme volit dvěma způsoby:*

- Kladně orientovaným binárním stromem *nazveme takový orientovaný kořenový strom, z jehož kořene existuje cesta do všech vrcholů stromu, každý vrchol má buď žádného, nebo dva syny a každý vrchol s výjimkou kořene má právě jednoho otce; kořen žádného otce nemá.*

- Záporně orientovaným binárním stromem *nazveme takový orientovaný kořenový strom, z jehož každého vrcholu existuje cesta do kořene stromu, každý vrchol má buď žádného, nebo dva otce a každý vrchol s výjimkou kořene má právě jednoho syna; kořen žádného syna nemá.*

Neorientovaným binárním stromem *budeme rozumět strom, který je symetrizací nějakého orientovaného binárního stromu.*

Kladnou orientaci lze tedy jinými slovy popsat jako orientaci „od kořene k listům“, zápornou potom „od listů ke kořeni“. Binární stromy budeme vždy zobrazovat tak, aby jejich orientace odpovídala směru „shora dolů“, tedy kladně orientované stromy budou znázorněny s kořenem nahoře a listy dole a záporně orientované stromy opačně.

V této práci budeme pracovat především s *rovinnými* grafy. Abychom je mohli definovat, je nutné zavést ještě několik pomocných pojmů.

Definice 1.12. Oblouk *je podmnožina roviny tvaru* $\gamma = f([0,1]) = \{f(x); x \in [0,1]\}$*, kde* $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *je spojité a prosté zobrazení uzavřeného intervalu* $[0,1]$ *do roviny. Body* $f(0)$ *a* $f(1)$ *se nazývají* koncové body *oblouku* γ*. Řekneme, že množina* $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *je* obloukově souvislá*, pokud pro* $\forall x,y \in A$ *existuje oblouk* $\gamma \subseteq A$ *s koncovými body* x *a* y*.*

Definice 1.13. Nakreslením grafu $G = (V,E)$ *rozumíme zobrazení* b*, které*

- *každému vrcholu* $\mathrm{v} \in V$ *přiřazuje bod* $b(\mathrm{v})$ *roviny, přičemž pro každé dva vrcholy* $\mathrm{u},\mathrm{v} \in V, \mathrm{u} \neq \mathrm{v}$*, platí* $b(\mathrm{u}) \neq b(\mathrm{v})$

- *každé hraně* $\mathrm{e} = \{\mathrm{u},\mathrm{v}\} \in E$ *přiřazuje oblouk* $\gamma(\mathrm{e})$ *v rovině s koncovými body* $b(\mathrm{u}), b(\mathrm{v})$*, přičemž žádný z bodů tvaru* $b(\mathrm{v})$ *není nekoncovým bodem žádného z oblouků* $\gamma(\mathrm{e})$

Nakreslení se nazývá rovinné*, pokud pro každé dvě hrany* $\mathrm{e},\mathrm{f} \in E, \mathrm{e} \neq \mathrm{f}$*, mají oblouky* $\gamma(\mathrm{e}),\gamma(\mathrm{f})$ *společné nejvýše koncové body (tj. hrany se „nekříží“).*

Definice 1.14. Rovinný graf *je graf, pro který existuje rovinné nakreslení.*

S rovinnými grafy souvisí ještě pojem *stěny* a *duálního grafu*, které budeme rovněž potřebovat.

Definice 1.15. *Nechť $G = (V,E)$ je rovinný graf s daným rovinným nakreslením a označme $X = \bigcup_{\mathrm{e} \in E} \gamma(\mathrm{e})$ sjednocení všech oblouků tohoto nakreslení. Pak* stěny *grafu G (při daném nakreslení) jsou komponenty obloukové souvislosti množiny $\mathbb{R}^2 \setminus X$, tj. maximální (vzhledem k inkluzi) obloukově souvislé podmnožiny množiny $\mathbb{R}^2 \setminus X$.*

Každý rovinný graf má jednu neomezenou stěnu; tuto stěnu nazveme vnější stěnou*. Ostatní stěny nazveme* vnitřními stěnami.

Řekneme, že hrana $\mathrm{e} \in E$ je incidentní se stěnou S*, pokud oblouk $\gamma(\mathrm{e})$ tvoří část hranice stěny S.* Stupněm stěny *S budeme rozumět počet hran incidentních s S. Dvě stěny S_1,S_2 nazveme* sousedními*, pokud „sdílejí“ hranu, tedy pokud existuje hrana $\mathrm{e} \in E$ incidentní s oběma stěnami S_1,S_2.*

Definice 1.16. *Nechť $G = (V,E)$ je rovinný graf s daným rovinným nakreslením a Σ je množina jeho stěn.* Duálním grafem *grafu G nazveme graf $G^* = (\Sigma,E^*)$, kde $\{S_1,S_2\} \in E^*$ právě tehdy, když $S_1,S_2 \in \Sigma$ jsou sousední stěny grafu G.*

Zřejmě platí, že duální graf rovinného grafu je vždy rovinný. Nyní ještě formálně definujeme obarvení grafu.

Definice 1.17. *Nechť $k \in \mathbb{N}$ a mějme barvy $b_1,\dots,b_k$.* Řádné obarvení vrcholů *grafu $G = (V,E)$ k* barvami *je zobrazení $\chi_v : V \to \{b_1,\dots,b_k\}$, kde pro každé dva sousední vrcholy $\mathrm{u},\mathrm{v} \in V$ platí $\chi_v(\mathrm{u}) \neq \chi_v(\mathrm{v})$, tj. žádné dva sousední vrcholy nemají stejnou barvu.*

Řádné obarvení hran *grafu $G = (V,E)$ k* barvami *je zobrazení $\chi_e : E \to \{b_1,\dots,b_k\}$, kde pro každé dvě sousední hrany $\mathrm{e},\mathrm{f} \in E$ platí $\chi_e(\mathrm{e}) \neq \chi_e(\mathrm{f})$, tj. žádné dvě sousední hrany nemají stejnou barvu.*

Nechť $G = (V,E)$ je rovinný graf s daným rovinným nakreslením a Σ je množina jeho stěn. Řádné obarvení stěn *grafu G k* barvami *je zobrazení $\chi_s : \Sigma \to \{b_1,\dots,b_k\}$, kde pro každé dvě sousední stěny $S_1,S_2 \in \Sigma$ platí $\chi_s(S_1) \neq \chi_s(S_2)$, tj. žádné dvě sousední stěny nemají stejnou barvu.*

Nakonec uveďme formální znění problému čtyř barev. Protože s ním budeme pracovat jako s tvrzením, jehož platnost chceme dokázat, budeme pro něj používat možná o něco přesnější název Věta o čtyřech barvách.

Věta 1.1 (o čtyřech barvách)**.** *Pro libovolný rovinný graf existuje řádné obarvení jeho vrcholů 4 barvami.*

Ekvivalentní znění této věty říká, že pro každý rovinný graf s daným rovinným nakreslením existuje řádné obarvení jeho *stěn* 4 barvami. Tato ekvivalence je zřejmá — stačí přejít k duálním grafům.

V následujícím textu budeme často pro stručnost používat výraz *obarvení vrcholů grafu čtyřmi barvami*. Vždy tím budeme rozumět řádné obarvení čtyřmi barvami ve smyslu Definice 1.17. Analogické vyjádření budeme používat také pro barvení hran či stěn grafu.

2. Kauffmanova reformulace

Cílem této kapitoly je reformulovat problém čtyř barev pomocí vektorového součinu v třídimenzionálním eukleidovském prostoru. Její obsah vychází z Kauffmanova článku *Map Coloring and the Vector Cross Product* (Kauffman, 1990) a velké části této kapitoly jsou jeho parafrází, případně je v nich částečně využit překlad znění některých definic a vět.

2.1 Motivace a základní pojmy

Abychom mohli formulovat Kauffmanovo tvrzení, je nutné nejprve zavést některé pojmy a struktury, které následně procházejí i celým důkazem. Na nich také nejlépe uvidíme souvislost vektorového součinu s barvením grafu, která na první pohled není příliš patrná. První z těchto struktur je *algebra s vektorovým součinem*, kterou Kauffman (1990) v úvodu druhé sekce svého článku definuje takto:

Definice 2.1. *Označme i,j,k vektory kanonické báze 3-dimenzionálního eukleidovského prostoru ($\mathbb{R}^3$). Pak* algebra s vektorovým součinem *je definována následujícími rovnostmi (spolu s distributivitou a skalární linearitou):*
$00 = 0$
$0i = 0j = 0k = 0 = i0 = j0 = k0$
$ii = jj = kk = 0$
$ij = k, ji = -k$
$jk = i, kj = -i$
$ki = j, ik = -j$

Jedná se o běžné vlastnosti vektorového součinu v $\mathbb{R}^3$. Vzhledem k tomu, že bude z kontextu vždy jasné, ve které struktuře pracujeme a o jaký součin se jedná, budeme v celé kapitole značit vektorový součin dvou vektorů $\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{w}$ stejně jako v definici výše, tedy jednoduše $\boldsymbol{vw}$ namísto obvyklého $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$. Toto značení je přejaté z Kauffmanova článku. Dodejme, že značení bázových vektorů, které bylo použito, ukazuje nejen určitou podobnost s kvaterniony, ale také první možnou souvislost s barvením grafů, totiž čtyřprvkovou množinu základních symbolů, které v rovnostech vystupují: i,j,k,0. Touto myšlenkou se budeme podrobně zabývat později; nyní jde jen o to, upozornit na spojitost, která se v dalším postupu ukáže být podstatnou. V této chvíli je však důležitější ještě jedna vlastnost vektorového součinu: neasociativita. Ta je zřejmá už z následujícího jednoduchého příkladu, který Kauffman (1990) uvádí ve svém článku.

Příklad. Platí např. $(ii)j = 0j = 0$, $i(ij) = ik = -j$, tedy vektorový součin není asociativní.

Právě neasociativita vektorového součinu je základní motivací Kauffmanovy reformulace a vede k následujícím definicím. Klíčová je Definice 2.3, která vychází z Kauffmanovy definice *ostrého řešení rovnice* (viz Kauffman, 1990, Definition 2.1). Oproti Kauffmanovi však více formalizujeme pojmy související s uzávorkováními vektorového součinu a rovnicemi, ve kterých budou uzávorkované součiny vystupovat. K tomu nám bude sloužit značení, které zavedeme v Definici 2.2.

Definice 2.2. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a mějme uspořádanou n-tici po dvou různých proměnných $(X_1, \ldots, X_n)$. Dále nechť $S = (s_1, \ldots, s_n) \in \{i,j,k\}^n$ je libovolná uspořádaná n-tice hodnot z množiny $\{i,j,k\}$ a L je nějaké uzávorkování vektorového součinu $X_1 \cdots X_n$ (čili libovolné korektní umístění levých a pravých závorek mezi proměnné $X_1, \ldots, X_n$ v jejich součinu). Zavedeme následující značení:*

- *Výrazem $L(\boldsymbol{X})$ budeme rozumět součin $X_1 \cdots X_n$ uzávorkovaný uzávorkováním L.*
- *Výrazem $L^*(\boldsymbol{X})$ budeme rozumět výraz, který je zrcadlovým obrazem výrazu $L(\boldsymbol{X})$, tedy součin $X_n \cdots X_1$ uzávorkovaný uzávorkováním, které je zrcadlově převrácené oproti uzávorkování L.*
- *Výrazem $L(S)$ budeme rozumět hodnotu uzávorkovaného součinu $L(\boldsymbol{X})$ v algebře s vektorovým součinem (viz Definici 2.1) po dosazení hodnot $s_1, \ldots, s_n$ za proměnné $X_1, \ldots, X_n$.*
- *Symbolem S^* označíme zrcadlový obraz n-tice S, tedy $S^* = (s_n, \ldots, s_1)$.*

Zrcadlový obraz uzávorkovaného součinu je konstrukce převzatá z Kauffmanova článku, kterou Kauffman (1990) definoval pouze neformálně a ilustroval ji následujícím příkladem, který je zde zapsán pomocí námi zavedeného značení:

Příklad. Pro uzávorkovaný součin $L(\boldsymbol{X}) = (X_1(X_2(X_3X_4)))X_5$ má jeho zrcadlový obraz následující tvar: $L^*(\boldsymbol{X}) = X_5(((X_4X_3)X_2)X_1)$.

Definice 2.3. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a mějme uspořádanou n-tici po dvou různých proměnných $(X_1, \ldots, X_n)$. Nechť L,R jsou libovolná dvě uzávorkování součinu $X_1 \cdots X_n$ a S je uspořádaná n-tice hodnot z množiny $\{i,j,k\}$. Řekneme, že S je* ostré řešení *rovnice $L(\boldsymbol{X}) = R(\boldsymbol{X})$ (v algebře s vektorovým součinem), pokud $L(S) = R(S)$ a zároveň $L(S),R(S) \neq 0$.*

Nyní již také můžeme uvést onu Kauffmanovu reformulaci problému čtyř barev (viz Kauffman, 1990, Theorem A), jejíž důkaz je předmětem Kauffmanova článku a cílem této kapitoly:

Věta 2.1. *Věta o čtyřech barvách je ekvivalentní tvrzení, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a libovolná dvě uzávorkování L,R součinu $X_1 \cdots X_n$ (kde $(X_1, \ldots, X_n)$ je uspořádaná n-tice po dvou různých proměnných) existuje ostré řešení rovnice $L(\boldsymbol{X}) = R(\boldsymbol{X})$.*

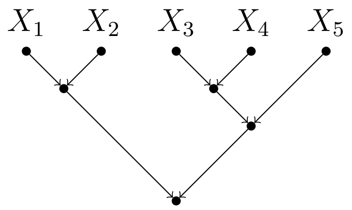
2.2 Souvislost mezi uzávorkováním a grafem

Abychom mohli Větu 2.1 dokázat, musíme ještě dále rozvinout souvislost mezi uzávorkováními vektorových součinů a konkrétními grafy. Základem je reprezentace daného uzávorkování pomocí binárního stromu. Ve zbytku kapitoly budeme uvažovat pouze $n \geq 2$, protože pro $n = 1$ triviálně existují právě 3 ostrá řešení (i,j a k), čili tento případ neovlivní platnost Věty 2.1, a konstrukce, které budeme zavádět, by pro $n = 1$ neměly smysl.

Je vidět, že každý uzávorkovaný součin n proměnných lze popsat pomocí záporně orientovaného binárního stromu s právě n listy tak, že každá vstupující proměnná odpovídá jednomu listu, výsledný produkt jeho kořeni a každý jiný vrchol odpovídá součinu jeho dvou otců. V tomto případě jsme zvolili zápornou orientaci binárního stromu, protože přirozeněji vystihuje strukturu postupného násobení a je také vhodnější pro další úpravy, které budeme s grafy provádět. Orientaci však využijeme pouze při postupném násobení a přiřazování hodnot vrcholům, poté již většinou budeme pracovat se symetrizací těchto stromů.

Reprezentace uzávorkování pomocí binárního stromu je jednou z hlavních myšlenek Kauffmanova článku (Kauffman, 1990), ovšem s tím rozdílem, že Kauffman používá pouze neorientované stromy. Nám zde bude orientace sloužit jako pomocná konstrukce, která umožní hovořit o mezisoučinech uvnitř stromů formálnějším způsobem. Následující ilustrační příklad je rovněž převzat z Kauffmanova článku a grafické znázornění binárního stromu je inspirováno příslušným Kauffmanovým obrázkem (Kauffman, 1990, Fig. 2).

Příklad. Pro $n = 5$ a proměnné $X_1,\dots,X_5$ můžeme jejich uzávorkovaný součin $(X_1X_2)((X_3X_4)X_5)$ reprezentovat následujícím binárním stromem:



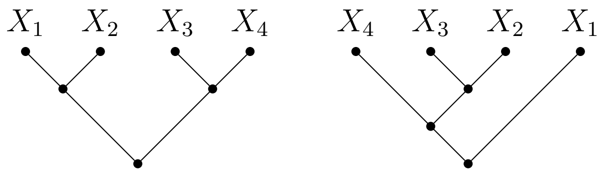
Je zřejmé, že pro každý takový binární strom s n listy naopak existuje nějaký uzávorkovaný součin, který je tímto stromem popsán. Ve skutečnosti existuje právě jeden a záporně orientované binární stromy o n listech jsou v bijekci s uzávorkovanými součiny n proměnných (a tedy i samotnými uzávorkováními).

Nyní máme připraveno vše potřebné, abychom mohli zavést konstrukci, která nám umožní propojit existenci ostrých řešení s barvením konkrétních grafů. Mějme tedy $n \in \mathbb{N}$, n-tici proměnných $(X_1,\dots,X_n)$ a dvě libovolná uzávorkování L,R součinu $X_1 \cdots X_n$. Označme $T(L)$ binární strom, který reprezentuje uzávorkovaný součin $L(\boldsymbol{X})$ (tak, jak bylo popsáno výše), a $T(R^*)$ strom reprezentující $R^*(\boldsymbol{X})$. Jedná se o značení, které Kauffman (1990) používá pro neorientované verze (čili symetrizace) stromů reprezentujících daná uzávorkování. Konstrukce, která následuje, je potom stěžejní myšlenkou Kauffmanova článku.

Označme k_l, resp. k_r kořen stromu $T(L)$, resp. $T(R^*)$ a pro každé $i = 1,\dots,n$ označme l_i, resp. r_i list stromu $T(L)$, resp. $T(R^*)$, který v něm zastupuje proměnnou X_i. Nechť dále u_i, resp. v_i je syn listu l_i, resp. r_i. Graf, pro který Kauffman (1990) zavádí značení $M(L,R)$, vznikne tak, že umístíme symetrizace stromů $T(L),T(R^*)$ vedle sebe a „propojíme“ je následujícím způsobem. Přidáme hranu $\{k_l,k_r\}$, čili spojíme hranou jejich kořeny, a pro každé i přidáme hranu $\{l_i,r_i\}$, čili spojíme dvojice listů zastupujících tutéž proměnnou. Zde je vidět, proč chceme $T(L)$ propojit s $T(R^*)$ namísto $T(R)$: vyhneme se tím křížení hran spojujících jejich listy a graf $M(L,R)$ bude vždy rovinný. Poté ještě pro každé i „smažeme“ vrcholy l_i,r_i (což jsou v tuto chvíli jediné vrcholy stupně 2) a místo tří hran $\{u_i,l_i\}$, $\{l_i,r_i\}$, $\{r_i,v_i\}$ vznikne pouze jedna („delší“) hrana $\{u_i,v_i\}$. Nyní už jsou všechny vrcholy takto vytvořeného grafu $M(L,R)$ stupně 3, a graf $M(L,R)$ je proto kubický.

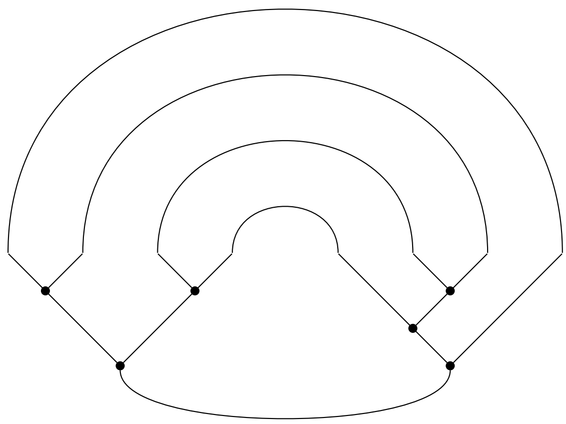
Následující příklad vychází z dalšího Kauffmanova ilustračního obrázku (Kauffman, 1990, Fig. 3), kterým Kauffman definuje graf $M(L,R)$.

Příklad. Mějme proměnné $X_1, \dots, X_4$ a dvě uzávorkování L,R jejich součinu taková, že $L(\boldsymbol{X}) = (X_1X_2)(X_3X_4)$ a $R(\boldsymbol{X}) = X_1((X_2X_3)X_4)$. Potom ze symetrizací stromů $T(L)$ a $T(R^*)$ sestrojíme graf $M(L,R)$ následujícím způsobem:



symetrizace $T(L)$ symetrizace $T(R^*)$

$\downarrow$



graf $M(L,R)$

Společně s touto konstrukcí zavádí Kauffman (1990) ještě jednu strukturu, kterou při barvení grafů rovněž využijeme:

Definice 2.4. *Mějme prvky E,I,J,K. Na nich definujeme algebraickou strukturu následujícími rovnostmi:*

$EE = E$
$EI = I, EJ = J, EK = K$
$II = JJ = KK = E$
$IJ = K$

Kauffman dodává (a je snadno vidět), že se jedná se o komutativní a asociativní systém, který je běžně označován jako Kleinova čtyřprvková grupa. Všimněme si také, že pro součiny dvou různých prvků z množiny $\{I,J,K\}$ platí v této struktuře podobné rovnosti jako v algebře dané Definicí 2.1, zde pouze „ignorují“ znaménko.

Nyní se můžeme přesunout k samotnému důkazu Věty 2.1.

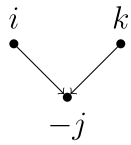
2.3 Implikace $\Leftarrow$

Nejdříve se zaměříme na důkaz implikace zprava doleva, tedy tvrzení, že z existence ostrého řešení rovnice $L(\boldsymbol{X}) = R(\boldsymbol{X})$ pro libovolná dvě uzávorkování L,R plyne platnost Věty o čtyřech barvách pro libovolný obecný (rovinný) graf. Právě tato implikace je důležitým krokem v pokusu o alternativní důkaz Věty o čtyřech barvách. Kauffman (1990) se ve svém článku více zabývá důkazem opačné implikace a této věnuje jen několik zběžných poznámek. Důkaz, který bude uveden v této sekci, tedy volně pracuje s konstrukcemi a obecnými myšlenkami zavedenými Kauffmanem a doplňuje chybějící články důkazu Kauffmanovy reformulace.

Předpokládejme tedy, že pro n-tici proměnných $(X_1, \ldots, X_n)$ a libovolná dvě uzávorkování L,R jejich součinu existuje ostré řešení rovnice $L(\boldsymbol{X}) = R(\boldsymbol{X})$. Označme S uspořádanou n-tici hodnot z množiny $\{i,j,k\}$, která po dosazení do n-tice proměnných $(X_1, \ldots, X_n)$ dá nějaké ostré řešení této rovnice. Platí tedy $L(S) = R(S)$, kde hodnoty na obou stranách jsou nenulové.

Nyní uvažujme stromy $T(L)$ a $T(R^*)$ reprezentující uzávorkování L a R^*. Jejich listy označíme symboly i,j,k podle toho, jaké hodnoty nabývá příslušná proměnná v n-tici S (resp. S^* pro $T(R^*)$). Dále budeme postupovat ve stromech směrem dolů a každý vrchol označíme součinem (ve smyslu Definice 2.1) hodnot přiřazených jeho dvěma otcům. Kořen pak ponese hodnotu výsledného produktu.

Příklad. Vrchol, jehož dva otcové nesou hodnoty i a k (v tomto pořadí), označíme hodnotou $ik = -j$.



Podobné schéma uvádí Kauffman v obecnosti pro dvě proměnné a jejich součin (viz Kauffman, 1990, Scheme 1).

Pro stromy $T(L)$ a $T(R)$ by kořen nutně musel mít stejnou hodnotu, protože $L(S) = R(S)$. Jak tomu však bude pro stromy $T(L)$ a $T(R^*)$? Dokážeme následující jednoduché lemma:

Lemma 2.2. *Platí* $R^*(S^*) = R(S)$ *nebo* $R^*(S^*) = -R(S)$.

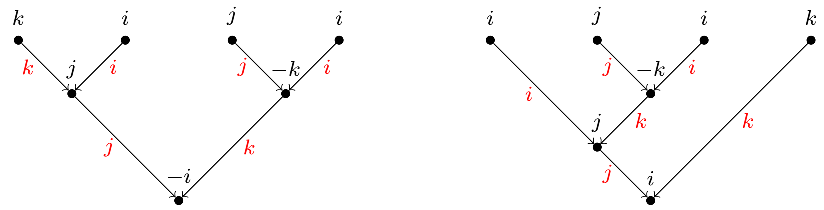
Důkaz. V uzávorkování R^* násobíme postupně mezisoučiny stejných proměnných jako v uzávorkování R, pouze každou dvojici mezisoučinů násobíme v opačném pořadí. V případě, že alespoň jeden ze dvou takových činitelů je roven 0, je jejich součin rovněž nulový (nezávisle na pořadí činitelů) a tvrzení platí, protože $R(S) = R^*(S^*) = 0$. Nechť se tedy jedná o součin dvou hodnot z množiny $\{\pm i, \pm j, \pm k\}$. Změna pořadí činitelů pak implikuje změnu znaménka jejich součinu (Definice 2.1), ale absolutní hodnota každého mezisoučinu zůstane stejná jako absolutní hodnota odpovídajícího mezisoučinu v uzávorkování R. Z toho plyne $R^*(S^*) = \pm R(S)$.

$\square$

Důsledek. Speciálně platí, že $R(S) \neq 0$, právě když $R^*(S^*) \neq 0$.

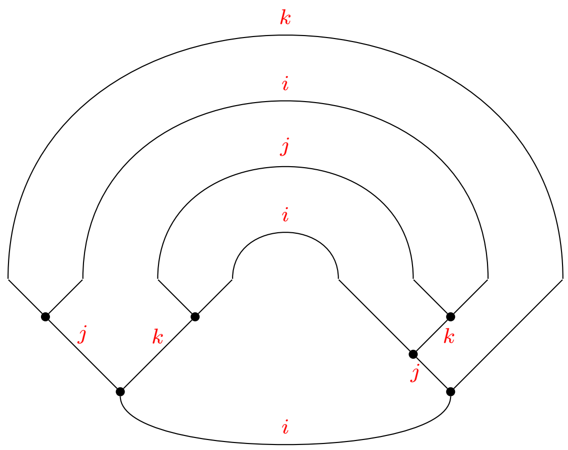
V obou stromech $T(L), T(R^*)$ označme každou hranu absolutní hodnotou hodnoty vrcholu, ze kterého vychází. Když poté symetrizace obou stromů spojíme do grafu $M(L,R)$, máme již označené všechny hrany této mapy kromě spojnice kořenů a hran obsahujících listy výchozích stromů. Hranu vedoucí mezi kořeny označíme absolutní hodnotou hodnot přiřazených kořenům. To lze udělat, protože podle Lemmatu 2.2 platí $L(S) = R(S) = \pm R^*(S^*)$, a proto $|L(S)| = |R^*(S^*)|$. Hrany obsahující listy označíme absolutní hodnotou hodnot těchto listů, což je možné vzhledem k tomu, že tyto hrany spojují listy reprezentující stejné proměnné, a listy obsažené v téže hraně proto musí mít stejnou hodnotu.

Příklad. Vraťme se k příkladu ze sekce 2.2. Máme-li $L(\boldsymbol{X}) = (X_1X_2)(X_3X_4)$ a $R(\boldsymbol{X}) = X_1((X_2X_3)X_4)$, pak ostré řešení rovnice $L(\boldsymbol{X}) = R(\boldsymbol{X})$ je např. čtveřice $S = (k,i,j,i)$, protože platí $(ki)(ji) = j(-k) = -i$ a také $k((ij)i) = k(ki) = kj = -i$. Tuto čtveřici „dosadíme“ do stromů $T(L)$,$T(R^*)$ tak, jak bylo popsáno na začátku této sekce, a dopočítáme hodnoty všech vrcholů (na obrázku níže zapsány černě). Následně aplikujeme postup popsaný výše — označíme hrany obou stromů příslušnými absolutními hodnotami (zapsány červeně) a vytvoříme obarvený graf $M(L,R)$.



$T(L)$ $T(R^*)$

$\downarrow$



graf $M(L,R)$

Nyní tedy můžeme říci, že jsme „obarvili“ hrany grafu $M(L,R)$ třemi barvami i,j,k. Toto obarvení je navíc takové, že žádné dvě sousední hrany nemají stejnou barvu — to plyne přímo z vlastností násobení v algebře z Definice 2.1. Jak již bylo řečeno, $M(L,R)$ je kubický graf. Jedna z hran vedoucích z daného vrcholu je vždy obarvena absolutní hodnotou součinu ostatních dvou hran, které tento vrchol obsahují. Tyto dvě hrany nemohou být obarveny stejnou barvou, jinak by jejich součin byl nulový, což je ve sporu s nenulovostí výsledného produktu (ostrého řešení $L(\boldsymbol{X}) = R(\boldsymbol{X})$). Jedná se tedy o dvě různé hodnoty z množiny $\{i,j,k\}$ a podle Definice 2.1 je jejich součinem (v absolutní hodnotě) třetí hodnota z této množiny. Tedy v každém vrcholu spolu sousedí právě jedna hrana barvy i, jedna hrana barvy j a jedna hrana barvy k. Nakonec provedeme ještě jeden krok, který nám dále umožní s barvami hran snáze pracovat: všechny hrany barvy i „přebarvíme“ na I, hrany barvy j na J a hrany barvy k na K.

Toto hranové obarvení použijeme k tomu, abychom obarvili *stěny* tohoto grafu čtyřmi barvami E,I,J,K. Protože libovolná permutace těchto barev neovlivní řádnost obarvení (tj. odlišnost barev sousedních stěn), můžeme bez újmy na obecnosti obarvit vnější stěnu barvou E. Ostatní stěny potom obarvíme tak, aby platilo, že každá hrana nese hodnotu rovnou součinu hodnot stěn, které tuto hranu sdílejí.

Algoritmus, kterým vytvoříme takové obarvení, je velmi jednoduchý. Stačí začít od vnější stěny a postupovat shora dolů, kdy při každém „přechodu“ hrany, původně vzniklé ze spojnice listů, přiřadíme další stěně součin hodnoty předchozí stěny a hodnoty dané hrany.

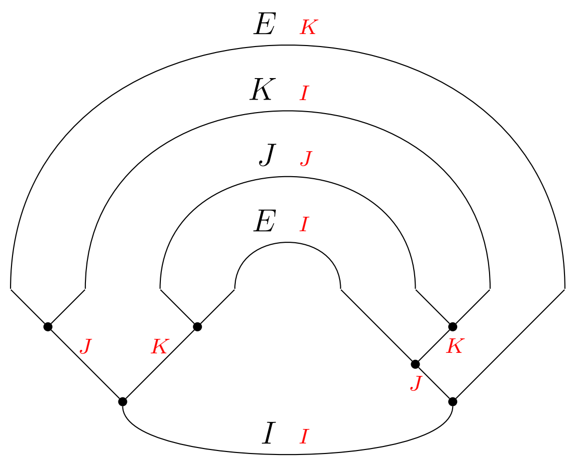
O něco formálněji můžeme barvicí algoritmus popsat takto:

1. Pro $i = 1,\ldots,n$ označíme h_i hranu grafu $M(L,R)$, která odpovídá proměnné X_i ve výchozích stromech $T(L),T(R^*)$. Barvu hrany h_i (příslušný prvek Kleinovy grupy) označíme $B(h_i)$.

2. Dále označíme S_0 vnější stěnu grafu $M(L,R)$ a pro $i = 1,\ldots,n$ induktivně označíme S_i stěnu, která sousedí se stěnou S_{i-1} přes hranu h_i.

3. Stěně S_0 přiřadíme barvu $B(S_0) = E$ a pro každé $i = 1,\ldots,n$ přiřadíme stěně S_i barvu $B(S_i) = B(S_{i-1}) \cdot B(h_i)$.

Příklad. Výsledné obarvení stěn pro graf $M(L,R)$ z předchozího příkladu bude vypadat takto (červeně jsou popsány přeznačené hodnoty hran, černě obarvení stěn vygenerované algoritmem):



Podobný obrázek lze najít v Kauffmanově článku (viz Kauffman, 1990, Fig. 4), kde však má ilustrovat spíše opačnou implikaci, totiž že řádné obarvení stěn určuje nějaké ostré řešení příslušné rovnice. My naopak potřebujeme ukázat, že obarvení stěn, generované ostrým řešením za použití postupu uvedeného výše, je skutečně řádným obarvením grafu $M(L,R)$.

Tvrzení 2.3. *Barvicí algoritmus popsaný výše generuje řádné obarvení stěn grafu $M(L,R)$ čtyřmi barvami E,I,J,K.*

Důkaz. Z vlastností násobení v Kleinově grupě (viz Definici 2.4) je zřejmé, že pro každé $i \in \{1,\ldots,n\}$ platí $B(S_i) \neq B(S_{i-1})$, protože $B(h_i) \neq E$ pro každé i. Nyní uvažujme dvě sousední stěny S_k,S_l, kde $k,l \in \{0,\ldots,n\}, k < l-1$. Tyto stěny tedy nesdílejí žádnou z hran h_i. Potřebujeme ukázat, že i v tomto případě platí $B(S_k) \neq B(S_l)$.

Hrana h, přes kterou sousedí stěny S_k,S_l, odpovídá mezisoučinu proměnných X_i pro $k+1 \leq i \leq l$. Násobení v Kleinově grupě je asociativní, takže barva $B(h)$ hrany h je rovna $\prod_{i=k+1}^{l} B(h_i)$. Algoritmus dává $B(S_l) = B(S_k) \cdot \prod_{i=k+1}^{l} B(h_i)$, tedy $B(S_l) = B(S_k) \cdot B(h)$. Protože $B(h) \neq E$ (barvy hran jsou prvky množiny $\{I,J,K\}$), platí $B(S_l) \neq B(S_k)$.

□

Z asociativity násobení v Kleinově grupě tedy plyne i to, že pokud bychom barvicím algoritmem obarvili stěny v jiném pořadí než shora dolů a přes hrany odpovídající spojnicím listů, dostali bychom stále stejné obarvení (při pevně dané barvě vnější stěny $B(S_0) = E$).

Příklad. Na obrázku výše spolu sousedí stěny S_2,S_4 a máme $B(S_2) = J, B(S_4) = I$. Dle barvicího algoritmu platí $B(S_4) = B(S_3) \cdot B(h_4) = B(S_2) \cdot B(h_3) \cdot B(h_4)$. Součin $B(h_3) \cdot B(h_4) = JI = K$ odpovídá barvě hrany, přes kterou spolu stěny S_2,S_4 sousedí (jde o hranu barvy K v levé části grafu). Barvu stěny S_4 bychom tedy ekvivalentně mohli dostat přímo přechodem ze stěny S_2 přes tuto hranu.

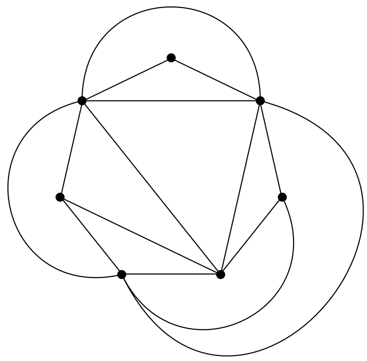
Zatím jsme dokázali, že pro každý rovinný kubický graf vzniklý spojením dvou binárních stromů do grafu $M(L,R)$ lze jeho stěny řádně obarvit čtyřmi barvami. K dokončení důkazu této implikace Kauffmanovy reformulace budeme potřebovat větu, která je jedním z výsledků Whitneyho práce *A Theorem on Graphs* (Whitney, 1931). Kauffman (1990) na tento Whitneyho článek odkazuje v jedné z poznámek na konci druhé sekce své práce, kde uvádí, že se jedná o větu nutnou k dokončení důkazu Věty 2.1. Vztah této věty ke grafům typu $M(L,R)$, které jsou stěžejní myšlenkou Kauffmanova důkazu, však naznačuje jen velmi stručně. My se pokusíme tuto souvislost rozebrat podrobněji, ačkoli samotnou Whitneyho větu dokazovat nebudeme; její důkaz je možné nalézt ve výše zmíněném Whitneyho článku.

Než však budeme moci tuto větu formulovat, je třeba zavést ještě jednu konstrukci, kterou Whitney (1931) nazývá *normální forma* grafu nebo také *polygonální konfigurace*. My pro ni budeme používat označení *polygonální triangulace*, které její podstatu vystihuje možná o něco přesněji. Definice, kterou zde uvedeme, vychází z Whitneyho popisu normální formy a příslušného ilustračního obrázku (viz Whitney, 1931, Fig. 2), ale zavádí tuto konstrukci trochu odlišným způsobem a doplňuje ji o několik dalších pojmů, které dále využijeme.

Definice 2.5. *Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Nechť G je souvislý rovinný graf na n vrcholech, ve kterém existuje kružnice na všech n vrcholech (čili je hamiltonovský). Nechť dále pro graf G existuje rovinné nakreslení takové, že tato kružnice na n vrcholech je reprezentována pravidelným n-úhelníkem v rovině a navíc stupeň každé stěny grafu (včetně vnější stěny) je při tomto nakreslení roven* 3. *Graf G spolu s tímto jeho nakreslením nazveme* polygonální triangulací na n vrcholech.

U každé polygonální triangulace budeme rozlišovat 3 *typy hran. Hrany reprezentované stranami n-úhelníku nazveme* základními hranami*, hrany reprezentované oblouky uvnitř n-úhelníku nazveme* vnitřními hranami *a hrany reprezentované oblouky vně n-úhelníku nazveme* vnějšími hranami*.*

Příklad. Polygonální triangulace na 7 vrcholech může vypadat například takto:



Rozmyslíme si následující vlastnost polygonálních triangulací:

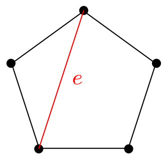
Tvrzení 2.4. *Počet vnitřních hran polygonální triangulace P na n vrcholech je stejný jako počet jejích vnějších hran a je roven $n-3$.*

Důkaz. Uvažujme polygonální triangulaci P' na n vrcholech, jejíž vnitřní hrany jsou tvořeny vnějšími hranami P a vnější hrany naopak vnitřními hranami P. Hrany téhož typu (vnitřní nebo vnější) se v P navzájem nekříží a tato vlastnost se nezmění, když vnitřní hrany zaměníme za vnější a naopak. P' je tedy stejně jako P rovinný graf a obě polygonální triangulace jsou navzájem isomorfní. Pokud ukážeme, že každá polygonální triangulace má $n-3$ vnitřních hran, pak počet vnějších hran P, který se rovná počtu vnitřních hran P', je také roven $n-3$.

Stačí tedy určit počet vnitřních hran P. Budeme postupovat indukcí podle n.

Pro $n=3$ tvrzení zřejmě platí, protože polygonální triangulace na 3 vrcholech je tvořena pouze trojúhelníkem a kromě hran tvořených jeho stranami žádné další (vnitřní ani vnější) hrany nemá.

Pro $n \geq 4$ platí, že P musí mít alespoň jednu vnitřní hranu (označíme ji e), jinak by v P existovala stěna stupně více než 3. Hrana e dělí n-úhelník na dva menší mnohoúhelníky, které sdílejí tuto hranu, tedy na k-úhelník a l-úhelník, kde $k,l \geq 3, k+l=n+2$.



Počet vnitřních hran P je o 1 větší (hrana e) než součet počtů vnitřních hran obou menších mnohoúhelníků. Použijeme-li indukční předpoklad na počet vnitřních hran k-úhelníku a l-úhelníku, dostaneme, že počet vnitřních hran P je roven $(k-3)+(l-3)+1=k+l-5=n+2-5=n-3$, což jsme chtěli dokázat. □

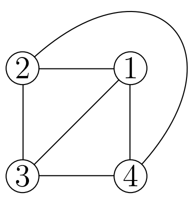
Nyní již můžeme uvést Whitneyho ekvivalentní reformulaci Věty o čtyřech barvách, kterou použijeme k dokončení důkazu. Jedná se o upravené znění věty, která se nachází na konci první sekce Whitneyho článku (viz Whitney, 1931, Equivalent Statement of the Four Color Map Problem).

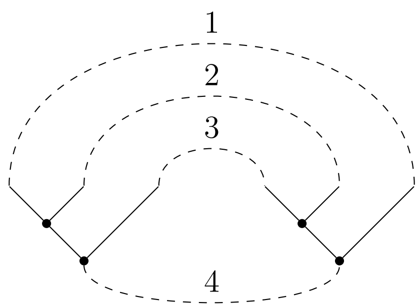
Věta 2.5. *Věta o čtyřech barvách platí právě tehdy, když vrcholy každé polygonální triangulace lze obarvit čtyřmi barvami.*

To znamená, že Větu o čtyřech barvách stačí dokázat pro tento speciální typ grafů. Zbývá tedy ukázat, jak souvisí polygonální triangulace s grafy tvaru $M(L,R)$, které již obarvit umíme. Ve skutečnosti dokážeme, že každá polygonální triangulace tvoří duální graf nějakého grafu tvaru $M(L,R)$.

Mějme libovolnou polygonální triangulaci P na n vrcholech. Myšlenkou našeho důkazu bude, že hrany P téhož typu (vnitřní či vnější) lze určitým způsobem reprezentovat binárním stromem s $n-1$ listy. Pro každý typ hran potom dostaneme jeden takový binární strom a spojením obou těchto stromů vznikne graf tvaru $M(L,R)$ (s n stěnami). Nejlépe je to zřejmé z následujícího příkladu.

Příklad. Na obrázku níže je jednoduchá polygonální triangulace na 4 vrcholech a graf tvaru $M(L,R)$, který je jejím duálním grafem. Ten sestává ze dvou propojených binárních stromů, z nichž levý reflektuje vztahy dané vnitřními hranami (v tomto případě jednou hranou) polygonální triangulace a pravý vztahy dané vnějšími hranami (hranou). Vrcholy a stěny označené stejným číslem si navzájem odpovídají.





Duální graf polygonální triangulace P na n vrcholech musí mít n stěn. Je snadno vidět, že graf tvaru $M(L,R)$ má n stěn právě tehdy, když se skládá ze dvou binárních stromů s $n-1$ listy. Dále platí, že každý (záporně orientovaný) binární strom s $n-1$ listy má právě $n-2$ dalších vrcholů včetně kořene (to plyne přímo z definice — všechny vrcholy kromě listů mají právě dva otce a všechny vrcholy kromě kořene mají právě jednoho syna). Tedy takový graf $M(L,R)$ má $2n-4$ vrcholů.

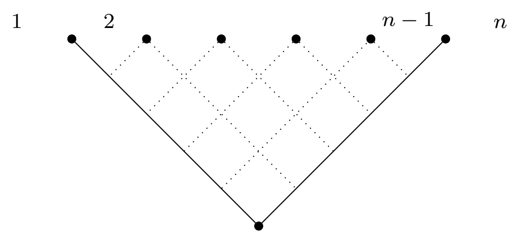
Podle Tvrzení 2.4 má P $n-3$ vnitřních a $n-3$ vnějších hran. Oblouky vnitřních hran tedy dělí vnitřek n-úhelníku na $n-2$ oblastí — stěn grafu P. Totéž platí pro vnější hrany a oblasti vně n-úhelníku. Dohromady tedy máme, že počet stěn P je roven počtu vrcholů grafu $M(L,R)$ o n stěnách, což je nutnou podmínkou, aby takový graf $M(L,R)$ mohl být duálním grafem polygonální triangulace P. Důležité je také to, že graf $M(L,R)$ je kubický, protože v triangulaci P sousedí každá stěna právě se třemi jinými stěnami.

Každé stěně P musí odpovídat jeden vrchol grafu $M(L,R)$. Jak už jsme naznačili výše, budeme se snažit zobrazit stěny „uvnitř“ n-úhelníku na vrcholy jednoho z binárních stromů, tvořících graf $M(L,R)$, a stěny „vně“ n-úhelníku na vrcholy toho druhého stromu. Bez újmy na obecnosti můžeme pro stěny „uvnitř“ n-úhelníku zvolit levý binární strom.

Dále si uvědomme, že stačí zkonstruovat jen jeden z binárních stromů, např. ten levý. Pro pravý strom pak stačí přejít k polygonální triangulaci P' (jako v důkazu Tvrzení 2.4), která vznikne z P zaměněním vnitřních a vnějších hran, a zkonstruovat pro ni levý strom. Pravý strom pro P bude odpovídat zrcadlovému obrazu levého stromu pro P'.

Nyní si tedy odmyslíme všechny vnější hrany P a vnitřní stěny zbylého grafu se budeme snažit převést na vrcholy té části grafu $M(L,R)$, která je tvořena levým binárním stromem. Vrcholy P označíme postupně po obvodu n-úhelníku (v libovolném směru) čísly $1,\ldots,n$. Stěny grafu $M(L,R)$ očíslujeme rovněž $1,\ldots,n$, a to opět vzestupně směrem „shora dolů“ (tedy číslo 1 náleží vnější stěně). Vztahy dané základními hranami P jsou tak v $M(L,R)$ obsaženy triviálně.

Představíme si jakousi „osnovu“ levého binárního stromu, kde jsou pevně dané pouze listy, kořen a spojnice kořene a krajních listů a zbytek tvoří „souřadnicový systém“, kde souřadnicemi jsou jednotlivé očíslované stěny. Do tohoto souřadnicového systému se nyní budeme snažit doplnit zbývající vrcholy tak, aby vztahy mezi stěnami $M(L,R)$ odrážely vztahy mezi vrcholy P dané vnitřními hranami P.

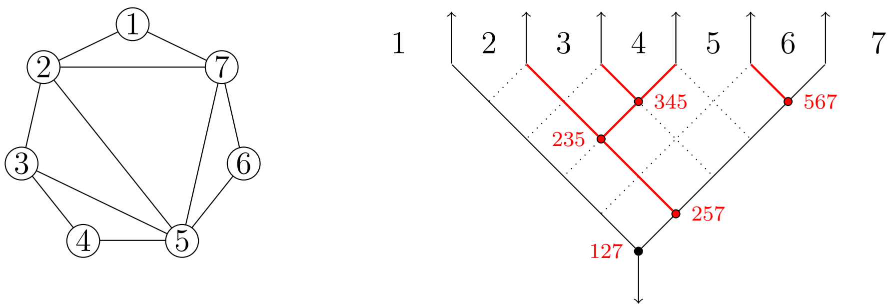


Pokud budeme uvažovat stejné nakreslení stromu, jaké jsme používali v celé této kapitole pro reprezentaci uzávorkování pomocí binárních stromů, vidíme, že z každého listu musí vést hrana směrem šikmo dolů jedním ze dvou směrů — doleva nebo doprava. Totéž potom bude platit pro každý další umístěný vrchol. Vezmeme postupně všechny stěny vytvořené uvnitř n-úhelníku vnitřními hranami P. Každý z těchto „trojúhelníků“ jednoznačně určuje jeden vrchol $M(L,R)$ v tom smyslu, že „vybírá“ jeden ze dvou směrů, kterým musí vést některá hrana v $M(L,R)$. Pouze jeden směr totiž umožňuje, aby se v některém vrcholu $M(L,R)$ setkaly 3 stěny příslušné vrcholům daného trojúhelníku v P.

Je důležité si uvědomit, že i kořen, který je pevně daný, odpovídá jednomu z trojúhelníků, a sice tomu s vrcholy 1 a n. Pokud bychom měli naznačit algoritmus, jakým je možné určit všechny vrcholy $M(L,R)$ co nejjednodušším způsobem, pak poznamenejme, že je výhodné začít trojúhelníky, jejichž vrcholy tvoří tři po sobě jdoucí vrcholy n-úhelníku. Tyto trojúhelníky totiž představují syny listů v binárním stromu, a tedy umožní postupovat ve stromě shora dolů od nejvíce zřejmých vztahů k těm méně zřejmým. Pokračovat pak můžeme trojúhelníky, které s těmi předchozími v P sousedí, a odpovídají tedy synům vrcholů $M(L,R)$, které byly vytvořeny v předchozím kroku.

Alternativním přístupem je induktivní algoritmus, kdy naopak budeme postupovat směrem od kořene k listům. Jak bylo řečeno, kořeni odpovídá trojúhelník tvaru $1nk$ (kde $k \in \{2,\ldots,n-1\}$). Vnitřek P lze rozdělit na dvě menší polygonální triangulace (resp. jejich vnitřky) s vrcholy $\{1,\ldots,k\}$ a $\{k,\ldots,n\}$, které sousedí přes trojúhelník $1nk$ (ten nepatří ani do jedné z nich). Ve speciálním případě, kdy $k = 2$ nebo $k = n - 1$ bude jedna z těchto menších triangulací „prázdná“. Kořeny binárních stromů, příslušné dvěma menším triangulacím, pak budou tvořit dva otce původního kořene (reprezentovaného trojúhelníkem $1nk$). Dále tedy stačí zkonstruovat binární stromy pro obě menší polygonální triangulace. Ty lze, dokud je to možné, v dalších krocích dělit na ještě menší triangulace a postupně tak určit všechny vrcholy stromu pro P jako kořeny stále menších částí P. Může být také výhodné kombinovat tento způsob s tím, který byl popsán v předchozím odstavci.

Příklad. Pro $n = 7$ a polygonální triangulaci P z příkladu za Definicí 2.5 můžeme vnitřní hrany P reprezentovat pomocí (symetrizace) levého binárního stromu způsobem ukázaným na obrázku níže. Strom je znázorněn jako část grafu $M(L,R)$, tj. listy jsou vynechány a šipky ukazují propojení se zbytkem grafu. Černě jsou očíslovány vrcholy P a odpovídající stěny $M(L,R)$. Plnou čarou je znázorněna „osnova“ stromu, tečkovanou čarou je naznačen „souřadnicový systém“. Červeně jsou zakresleny postupně přidané vrcholy a hrany, červené trojice čísel označují vrcholy P tvořící trojúhelník, který je daným vrcholem $M(L,R)$ reprezentován.



Poznámka. Je vidět, že jedné polygonální triangulaci může odpovídat více různých grafů typu $M(L,R)$, resp. dvojic uzávorkování, protože záleží na tom, jak očíslujeme vrcholy triangulace (kterým směrem a kterému vrcholu přiřadíme číslo 1). Polygonální triangulace tedy nejsou v bijekci s dvojicemi uzávorkování. Nám však stačí, že pro každou triangulaci existuje alespoň jeden graf typu $M(L,R)$, který je jejím duálním grafem.

Tím je důkaz této implikace dokončen. Pokud obarvíme stěny grafu typu $M(L,R)$, který je duálním grafem P, čtyřmi barvami a vrcholy P následně obarvíme stejnou barvou jako příslušné stěny $M(L,R)$, dostaneme řádné obarvení vrcholů P čtyřmi barvami. Podle Věty 2.5 tedy platí Věta o čtyřech barvách.

2.4 Implikace $\Rightarrow$

Nyní dokážeme opačnou implikaci, která říká, že za předpokladu, že platí Věta o čtyřech barvách, existuje pro libovolná dvě uzávorkování L,R ostré řešení rovnice $L(\boldsymbol{X}) = R(\boldsymbol{X})$. Důkaz této implikace je v článku (Kauffman, 1990) rozepsán poměrně podrobně, proto se v této sekci budeme většinou držet myšlenky důkazu, jak ho provedl Kauffman, a pouze doplníme chybějící podrobnosti či vysvětlení některých souvislostí.

Mějme tedy n-tici proměnných $(X_1, \ldots ,X_n)$ a libovolná dvě uzávorkování L,R jejich součinu. Sestrojme graf $M(L,R)$ tak, jak bylo popsáno v sekci 2.2. Graf $M(L,R)$ je rovinný, a tedy podle předpokladu lze jeho stěny obarvit čtyřmi barvami E,I,J,K. Navíc je kubický, takže v každém jeho vrcholu se setkávají právě tři stěny (navzájem různé barvy), a přiřadíme-li každé hraně součin hodnot dvou stěn, které tuto hranu sdílejí, získáme řádné obarvení hran třemi barvami I,J,K. Řádnost obarvení a to, že se v něm nebude vyskytovat barva E, plyne přímo z vlastností násobení v Kleinově grupě (viz Definici 2.4).

Každý vrchol je obsažen právě ve třech hranách, z nichž jedna nese hodnotu I, jedna hodnotu J a jedna hodnotu K. Pokud si do grafu $M(L,R)$ dosadíme orientaci, která platila ve výchozích stromech $T(L)$ a $T(R^*)$ (tedy zápornou orientaci shora dolů), můžeme říci, že hodnota hrany vycházející z daného vrcholu je součinem hodnot dvou hran, které v něm končí (ve smyslu Definice 2.4). Nyní nahradíme symboly I,J,K odpovídajícími hodnotami i,j,k ($I \to i$, $J \to j$, $K \to k$).

Poznámka. Tento postup barvení hran grafu $M(L,R)$ používá i Kauffman a doplňuje jej obrázkem, který jsme uvedli v minulé sekci (s. 12) jako ilustraci barvicího algoritmu (Kauffman, 1990, Fig. 4).

Kauffman (1990) dále popisuje, jak toto obarvení hran generuje ostré řešení rovnice $|L(\boldsymbol{X})| = |R(\boldsymbol{X})|$, což si uveďme o něco podrobněji. Hodnota hrany, která v grafu $M(L,R)$ spojuje kořeny výchozích stromů, odpovídá hodnotě řešení rovnice $|L(\boldsymbol{X})| = |R^*(\boldsymbol{X})|$. Toto řešení je nenulové (v algebraické struktuře dané Definicí 2.4 odpovídá 0 prvku E, který se v obarvení hran grafu $M(L,R)$ nevyskytuje) a podle Lemmatu 2.2 je to rovněž hodnota řešení rovnice $|L(\boldsymbol{X})| = |R(\boldsymbol{X})|$. Nakonec hodnoty hran, které vznikly spojením a následným smazáním listů výchozích stromů, můžeme provizorně přiřadit daným listům ve výchozích stromech. Když následně přečteme hodnoty listů stromu $T(L)$, resp. $T(R^*)$ zleva doprava, dostaneme n-tici S, resp. S^*, která dosazením do uzávorkování L, resp. R^* generuje zmíněné ostré řešení rovnice $|L(\boldsymbol{X})| = |R^*(\boldsymbol{X})|$, a tedy i rovnice $|L(\boldsymbol{X})| = |R(\boldsymbol{X})|$.

Máme tedy n-tici S, která reprezentuje ostré řešení rovnice $|L(\boldsymbol{X})| = |R(\boldsymbol{X})|$, jinými slovy se jedná buď o ostré řešení rovnice $L(\boldsymbol{X}) = R(\boldsymbol{X})$, nebo o ostré řešení rovnice $L(\boldsymbol{X}) = -R(\boldsymbol{X})$. Zbývá ukázat, že toto znaménko bude vždy kladné, tedy nastane první možnost a skutečně jsme dostali hledané ostré řešení rovnice $L(\boldsymbol{X}) = R(\boldsymbol{X})$. Tomu se budeme věnovat ve zbytku této sekce a stejně jako Kauffman při tom využijeme pojem *formace* (Kauffman ve spojení s tímto pojmem odkazuje na práci Spencer-Browna). Ještě předtím však pro úplnost přidáme i definici *křivky v rovině* a souvisejících pojmů.

Definice 2.6. *Nechť $a,b \in \mathbb{R}, a \leq b$.* Křivka v rovině *je spojité zobrazení uzavřeného intervalu $[a,b]$ do $\mathbb{R}^2$.* Obrazem křivky *rozumíme její obor hodnot.*

Počátečním bodem *křivky $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ rozumíme bod $\phi(a)$,* koncovým bodem *bod $\phi(b)$. Tyto dva body budeme někdy označovat souhrnným názvem* krajní body*. Křivka ϕ se nazývá* uzavřená*, pokud $\phi(a) = \phi(b)$, a* jednoduchá*, pokud je zobrazení ϕ prosté.*

Jednoduchá uzavřená křivka je tedy (zjednodušeně řečeno) křivka, jejíž obraz s výjimkou krajních bodů neprotíná sám sebe a jejíž počáteční a koncový bod jsou totožné.

Následující definice vychází z definice formace, uvedené v Kauffmanově článku (viz Kauffman, 1990, Definition 3.1).

Definice 2.7. Formace F *je sjednocení* $R \cup B$ *dvou množin* R,B *jednoduchých uzavřených křivek v rovině s následujícími vlastnostmi:*

1. *Obrazy křivek náležejících do téže množiny jsou po dvou disjunktní.*
2. *Křivky* ϕ,ψ *takové, že* $\phi \in R$ *a* $\psi \in B$*, mohou sdílet část obrazu. V takovém případě buď jedna křivka druhou protne* (křížení)*, nebo se jí pouze dotkne, aniž by ji překřížila* (odraz)*.*

Jinými slovy, nazveme-li R množinou červených křivek a B množinou modrých křivek, pak platí, že křivky stejné barvy se navzájem nedotýkají ani neprotínají, zatímco křivky odlišné barvy mohou sdílet část obrazu jedním ze dvou způsobů, které jsou schematicky znázorněné na obrázku níže. Totéž znázornění spolu s příkladem formace lze nalézt v Kauffmanově článku (viz Kauffman, 1990, Fig. 5).

křížení odraz

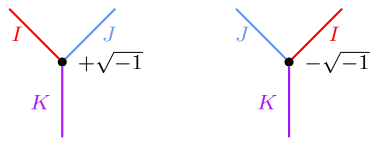
Kauffman dále uvádí, že z každé formace můžeme vytvořit kubický graf tak, že oba krajní body křížení či odrazu dvou křivek budou představovat vrcholy grafu a části obrazu křivek mezi každými dvěma vrcholy budou představovat jeho hrany. U všech sdílených částí obrazu sloučíme obrazy obou křivek (červené a modré), které ho tvoří, v jednu hranu, kterou obarvíme nějakou třetí barvou, například fialovou. Dohromady dostaneme graf, jehož hrany jsou obarveny třemi barvami tak, že barva každých dvou sousedních hran se liší.

křížení odraz

Kauffman také zmiňuje, že naopak každý kubický graf s hranami obarvenými třemi barvami určuje nějakou formaci — stačí fialové hrany zpětně rozdělit na dvojice paralelních hran, modré a červené. Přidejme stručné vysvětlení, proč takto vzniklé křivky skutečně tvoří formaci. Každá fialová hrana na obou koncích sousedí s právě jednou červenou a právě jednou modrou hranou, takže vzniklé křivky v žádném vrcholu nekončí, a musejí být tudíž uzavřené. Výsledné dvě množiny červených a modrých křivek budou každá obsahovat křivky s po dvou disjunktními obrazy, protože hrany grafu se nekřížily (jedná se o rovinný graf).

Z toho zároveň plyne, že všechny vzniklé křivky jsou jednoduché, a jedná se tedy skutečně o formaci.

Vezměme nyní libovolný kubický graf G spolu s obarvením C jeho hran třemi barvami I,J,K, kde I odpovídá červené, J modré a K fialové barvě v původním značení. V každém vrcholu se stýkají právě tři navzájem různobarevné hrany. Když začneme u hrany I a přečteme hodnoty těchto tří hran po směru hodinových ručiček, můžeme dostat pouze dvě možná pořadí: I,J,K nebo I,K,J. V prvním případě označíme daný vrchol hodnotou $+\sqrt{-1}$, v druhém případě hodnotou $-\sqrt{-1}$. Součin hodnot všech vrcholů grafu pro dané obarvení C potom označíme $P(C)$.



Postup popsaný v předchozím odstavci je převzatý z Kauffmanova článku, kde lze nalézt i schéma podobné obrázku výše (viz Kauffman, 1990, Scheme 2). Kauffman v souvislosti s označováním vrcholů hodnotami $\pm\sqrt{-1}$ zmiňuje, že se jedná o Penrosovu metodu.

Budeme chtít ukázat, že vždy musí platit $P(C) = 1$. Důkaz využívá Jordanovu větu pro křivky, jejíž znění zde pro úplnost uvedeme.

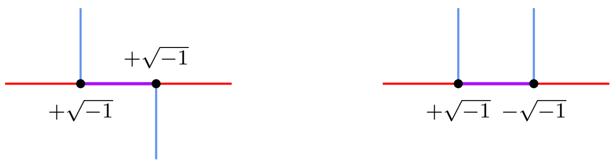
Věta 2.6 (Jordanova věta pro křivky)**.** *Nechť ϕ je jednoduchá uzavřená křivka v rovině. Pak její doplněk (ve smyslu množiny bodů v rovině, které nenáležejí křivce ϕ) sestává právě ze dvou souvislých komponent, z nichž jedna je omezená (vnitřní) a jedna neomezená (vnější). Křivka ϕ tvoří hranici obou komponent.*

Poznámka. Souvislými komponentami se zde rozumí vzájemně disjunktní množiny bodů, které jsou souvislé v topologickém smyslu, tedy žádná z nich není sjednocením dvou disjunktních neprázdných otevřených množin.

Následující věta a její důkaz téměř přesně odpovídají tomu, jak je uvádí Kauffman (viz Kauffman, 1990, Theorem 3.2). Stejně tak ilustrační obrázek zahrnutý v důkazu odpovídá příslušnému obrázku v Kauffmanově článku (Kauffman, 1990, Fig. 7).

Věta 2.7. *Nechť C je obarvení hran kubického grafu G třemi barvami. Pak součin $P(C)$ imaginárních hodnot přiřazených vrcholům G je roven* 1.

Důkaz. Nechť F je formace určená grafem G při obarvení C. Každý vrchol je součástí právě jedné interakce (křížení nebo odrazu) dvou křivek odlišné barvy — vede z něj právě jedna fialová hrana (hrana hodnoty K) — a každá interakce zahrnuje právě dva vrcholy grafu G. (To odpovídá skutečnosti, že graf G má sudý počet vrcholů, což plyne například i z principu sudosti, jehož důsledkem je, že v libovolném grafu je počet vrcholů lichého stupně sudý. V kubickém grafu G mají všechny vrcholy stupeň 3.) Součin imaginárních hodnot dvou vrcholů náležejících jedné interakci nazveme *příspěvkem* dané interakce. Je vidět, že u křížení mají oba vrcholy stejnou hodnotu, a příspěvek je tedy -1. U odrazu mají vrcholy opačné hodnoty, čemuž odpovídá příspěvek $+1$. $P(C)$ je součinem příspěvků všech interakcí.



Formace F sestává ze dvou množin jednoduchých uzavřených křivek v rovině. Z Jordanovy věty pro křivky vyplývá, že mezi nimi je sudý počet křížení (křivky jsou uzavřené). Z toho plyne, že součin příspěvků všech křížení je roven 1, a proto také $P(C) = 1$.

□

Nyní se již můžeme vrátit ke grafu $M(L,R)$ a dokončit důkaz Věty 2.1. Budeme postupovat stejně jako Kauffman v důkazu poslední věty svého článku (viz Kauffman, 1990, Theorem 3.3). Označme m počet vrcholů výchozího stromu $T(L)$, tedy i počet vrcholů stromu $T(R^*)$ a $T(R)$. Hrany grafu $M(L,R)$ byly obarveny třemi barvami I,J,K, jedná se tedy o kubický graf spolu s nějakým obarvením C a v souladu s postupem uvedeným výše lze každému jeho vrcholu přiřadit hodnotu $+\sqrt{-1}$ nebo $-\sqrt{-1}$.

Podle Věty 2.7 platí $P(C) = 1$. Zároveň můžeme psát $P(C) = ZW^*$, kde Z, resp. W^* je součin hodnot všech vrcholů $M(L,R)$, které původně náležely stromu $T(L)$, resp. $T(R^*)$. Máme tedy $ZW^* = 1$.

Platí, že ve stromu $T(R)$ má každý vrchol hodnotu s opačným znaménkem, než jaká je jeho hodnota ve stromu $T(R^*)$, jinými slovy hodnoty vrcholů stromu $T(R)$ jsou komplexně sdružené s hodnotami ve stromu $T(R^*)$. Toto tvrzení je poměrně zřejmé a Kauffman je používá bez důkazu, ale je dobré si uvědomit, proč tomu tak musí být. Strom $T(R^*)$ je zrcadlovým obrazem stromu $T(R)$, a proto pořadí hodnot hran (I,J,K nebo I,K,J) okolo vrcholů po směru hodinových ručiček vychází opačně. Dostáváme tedy, že $W^* = \bar{W}$, kde W je součin hodnot vrcholů stromu $T(R)$ (a $\bar{W}$ značí hodnotu komplexně sdruženou s W).

Máme nyní $Z\bar{W} = 1$. Z tohoto vztahu Kauffman přímo vyvozuje, že $Z = W$. Opět přidejme stručné objasnění této rovnosti. Součin Z může nabývat hodnot z množiny $\{\pm 1, \pm\sqrt{-1}\}$. Pro $Z = \pm 1$ dostaneme $\bar{W} = Z$, a tedy $W = \bar{W}$, protože $\bar{W}$ má nulovou imaginární složku. Pro $Z = \pm\sqrt{-1}$ dostaneme $\bar{W} = -Z$, a tedy $W = -\bar{W}$, protože $\bar{W}$ má nulovou reálnou složku. Ve všech případech platí $Z = W$.

Zbývá ještě objasnit souvislost součinů Z,W se znaménkem v rovnici $|L(\boldsymbol{X})| = |R(\boldsymbol{X})|$. Tuto souvislost Kauffman naznačuje v závěru důkazu jen velmi stručně a trochu nejasně, proto se zde pokusíme o podrobnější vysvětlení. Uvažujme, že graf $M(L,R)$ zpětně „roztrhneme“ na výchozí stromy $T(L)$ a $T(R^*)$ a listům přiřadíme symboly i,j,k odpovídající barvě I,J,K hrany, jejíž součástí byl daný list v grafu $M(L,R)$. Každému dalšímu vrcholu potom přiřadíme součin hodnot jeho dvou otců, zatímco hrany ponecháme obarvené původními barvami I,J,K. Barva každé hrany tedy bude rovna absolutní hodnotě odpovídajícího symbolu i,j,k u vrcholu, z nějž hrana vychází.

Hodnoty listů mají kladné znaménko, ale hodnoty ostatních vrcholů již mohou nabývat všech hodnot z množiny $\{\pm i, \pm j, \pm k\}$. Na znaménko součinu hodnot dvou vrcholů mají vliv dva faktory: znaménka vstupních činitelů, která se násobí běžným způsobem, a pořadí činitelů, protože systém je antikomutativní (Definice 2.1). Lze si všimnout, že tato „antikomutativní“ složka znaménka přímo koresponduje s pořadím barev hran okolo vrcholu, který reprezentuje daný součin. Bude kladná právě tehdy, když hrany obklopující daný vrchol budou po směru hodinových ručiček obarveny v pořadí I,J,K, a záporná právě tehdy, když toto pořadí bude I,K,J. Tedy příspěvek antikomutativní složky znaménka u každého mezisoučinu (vrcholu) ve stromech $T(L), T(R^*)$ je stejný jako znaménko hodnoty $(\pm\sqrt{-1})$ téhož vrcholu v grafu $M(L,R)$.

Znaménko výsledného produktu každého stromu, tedy součinu odpovídajícího jeho kořeni, je rovno součinu znamének všech mezisoučinů (vrcholů). Přitom první složka znaménka, ovlivněná znaménky jednotlivých postupných činitelů, nezávisí na pořadí těchto činitelů uvnitř každé dvojice, a proto bude nutně u obou stromů stejná vzhledem k tomu, že do obou stromů vstupují stejné kladné hodnoty listů. Tím, co by mohlo způsobit opačná znaménka výsledných produktů u stromů $T(L)$ a $T(R)$, je antikomutativní složka. Z předchozího však vyplývá, že tato složka je u produktu stromu $T(L)$, resp. $T(R)$ rovna znaménku součinu Z, resp. W. Jak jsme již ukázali, platí $Z = W$, a proto také $L(S) = R(S)$. Tedy skutečně existuje ostré řešení rovnice $L(\boldsymbol{X}) = R(\boldsymbol{X})$ a důkaz Věty 2.1 je dokončen.

3. Reformulace pomocí formální gramatiky

Nyní se přesuneme k další ekvivalentní reformulaci problému čtyř barev, která ukáže jeho souvislost s formálními gramatikami. Tato ekvivalence a její důkaz se nacházejí v článku Cooperové, Rowlanda a Zeilbergera s názvem *Toward a language theoretic proof of the four color theorem* (Cooper, Rowland a Zeilberger, 2012) a jsou výchozím bodem pro snahy dokázat problém čtyř barev pomocí binárních stromů a s nimi sdružených slov, podléhajících pravidlům zvolené jednoduché gramatiky.

3.1 Formální gramatika

Nejdříve zavedeme několik definic, týkajících se formálních gramatik a jejich souvislosti s binárními stromy. V samotném výchozím článku (Cooper a kol., 2012) tyto definice uvedeny nejsou a s některými pojmy jeho autoři pracují volněji, zde se však budeme snažit přizpůsobit postupy, představené v jejich článku, formálním definicím. Teorie související s gramatikami je zpracována např. v knize *Automaty a gramatiky* (Chytil, 1984).

Definice 3.1. Abeceda *je libovolná konečná množina, její prvky nazýváme* znaky.

Slovo *nad abecedou A je libovolná konečná posloupnost znaků abecedy A.* Délka slova *w je počet znaků posloupnosti w (slovo délky* 0 *se nazývá* prázdné slovo*.)*

Definice 3.2. Gramatika *G je čtveřice (N,T,P,S), kde*

- *N je libovolná abeceda; její prvky se nazývají* neterminály
- *T je libovolná abeceda taková, že $N \cap T = \emptyset$; její prvky se nazývají* terminály
- *P je konečná množina* přepisovacích pravidel *tvaru $u \to v$, kde u,v jsou slova nad abecedou $N \cup T$ a pro u platí, že obsahuje alespoň jeden neterminál. V libovolném slově nad abecedou $N \cup T$, které obsahuje slovo u jako podposloupnost, nahradí přepisovací pravidlo $u \to v$ posloupnost u posloupností v.*
- *S je libovolný prvek N; nazývá se* počáteční symbol.

Definice 3.3. *Gramatika $G = (N,T,P,S)$ se nazývá* bezkontextová*, pokud pro každé přepisovací pravidlo $(u \to v) \in P$ platí, že slovo u obsahuje právě jeden neterminál a neobsahuje žádný terminál.*

Jinými slovy, bezkontextová gramatika je taková gramatika, u které lze neterminál obsažený v nějakém slově vždy nahradit nějakou posloupností znaků (dle přepisovacích pravidel) bez ohledu na kontext, tedy to, jaké znaky neterminálu ve slově předcházejí nebo po něm následují.

Nyní zavedeme jednoduchou bezkontextovou gramatiku, se kterou budeme dále pracovat.

Definice 3.4. *Gramatiku G^* definujme jako gramatiku $(\{I,J,K,S\}, \emptyset, P^*, S)$, kde $P^* = \{(S \to I), (S \to J), (S \to K), (I \to JK), (I \to KJ), (J \to IK), (J \to KI), (K \to IJ), (K \to JI)\}$.*

Jedná se o tutéž gramatiku, s níž pracují Cooperová a kol. (Cooper a kol., 2012), kteří však prvky její abecedy značí 0,1,2. My jsme zde označení neterminálů gramatiky G^* písmeny I,J,K schválně zvolili proto, aby přepisovací pravidla v určitém smyslu odpovídala vztahům pro násobení prvků Kleinovy grupy. Ve skutečnosti by bylo možné zadefinovat gramatiku G^* i bez symbolu S jako gramatiku se třemi počátečními symboly I,J,K. To je také definice, kterou používají autoři článku (s počátečními symboly 0,1,2.). Abychom se však drželi formální definice gramatiky, která připouští pouze jeden počáteční symbol, rozšířili jsme abecedu neterminálů o symbol S, který nemá jiný než inicializační význam. Další odlišností od běžného pojetí gramatiky je to, že zatímco obvyklé je zkoumat jazyk vznikající z terminálů, my zde budeme pracovat pouze se slovy nad abecedou neterminálů a abeceda terminálů je u gramatiky G^* prázdná.

Nyní definujeme, co znamená, že nějaký binární strom je *rozborem slova* nad abecedou $\{I,J,K\}$. Cooperová a kol. tento pojem zavádějí spíše intuitivně a ilustrují jej několika příklady, my se s využitím pojmů zavedených předchozími definicemi pokusíme o trochu formálnější popis.

Definice 3.5. *Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, a w je slovo délky n nad abecedou $A = \{I,J,K\}$. Řekneme, že kladně orientovaný binární strom T s n listy je* rozborem slova w, *pokud lze jeho vrcholy označit prvky abecedy A tak, že jsou splněny následující podmínky:*

1. *Označení vrcholů je kompatibilní s přepisovacími pravidly gramatiky G^*. To znamená, že pro každou trojici vrcholů x_1,x_2,x_3 označených znaky $a_1,a_2,a_3 \in A$, kde vrcholy x_2,x_3 jsou synové vrcholu x_1, platí, že $(a_1 \to a_2a_3) \in P^*$.*

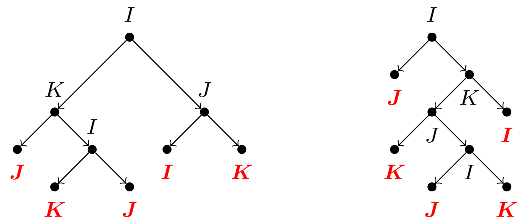
2. *Pokud očíslujeme listy stromu T zleva doprava a shora dolů (v daném nakreslení stromu T) a následně vytvoříme posloupnost délky n z prvků A, které přísluší listům v takto vytvořeném pořadí, tato posloupnost se rovná slovu w.*

Pro $n = 1$ definujeme strom T, který je rozborem slova $w = a$, $a \in A$, délky 1 jako kladně orientovaný binární strom, který má pouze jeden vrchol (jenž je nutně jeho kořenem) a tento vrchol je označen znakem a.

Kladně orientovaný binární strom T, který splňuje podmínku 1. (a tedy existuje slovo, jehož je T rozborem), nazveme odvozující strom (v gramatice G^*).

Poznámka. Důvodem pro speciální definici rozborového stromu pro $n = 1$ je fakt, že neexistuje kladně orientovaný binární strom s právě jedním listem, neboť v souladu s naší definicí kladně orientovaného binárního stromu musí mít jeho kořen buď žádného, nebo dva syny.

Příklad. Například oba následující stromy jsou rozborem slova $JKJIK$, protože lze zvolit označení jejich vrcholů vyhovující Definici 3.5:



Sekci zakončíme definicí *(úplné) nejednoznačnosti* gramatiky, která odpovídá definicím uvedeným v článku Cooperové a kol. (Cooper a kol., 2012).

Definice 3.6. *Gramatika G^* je* nejednoznačná*, pokud existují alespoň dva různé stromy, které jsou rozborem téhož slova. Gramatika G^* je* úplně nejednoznačná*, pokud pro každou dvojici odvozujících stromů se stejným počtem listů existuje alespoň jedno slovo takové, že oba tyto stromy jsou jeho rozborem.*

3.2 Souvislost s Kauffmanovým tvrzením

Cílem této sekce bude dokázat následující větu, která ukazuje ekvivalenci mezi nejednoznačností gramatiky G^* a vektorovým součinem a jeho uzávorkováním ve smyslu předchozí kapitoly. Cooperová a kol. (Cooper a kol., 2012), aniž by tuto větu explicitně formulovali, věnují důkazu této ekvivalence druhou sekci svého článku. Nyní už se vrátíme ke klasickému značení vektorového součinu symbolem $\times$, abychom jej odlišili od běžné operace násobení, se kterou zde budeme více pracovat.

Věta 3.1. *Gramatika G^* je úplně nejednoznačná, právě když pro každé $n \in \mathbb{N}$ a libovolná dvě uzávorkování L,R součinu $X_1 \times \cdots \times X_n$ (kde $(X_1, \ldots, X_n)$ je uspořádaná n-tice po dvou různých proměnných) existuje ostré řešení rovnice $L(\boldsymbol{X}) = R(\boldsymbol{X})$.*

V předchozí kapitole jsme používali dvě struktury — algebru s vektorovým součinem, omezenou na množinu $\{0, \pm i, \pm j, \pm k\}$ (viz Definici 2.1), a Kleinovu čtyřprvkovou grupu, definovanou na množině $\{E,I,J,K\}$ (viz Definici 2.4). V této sekci budeme navíc potřebovat grupu kvaternionů $\boldsymbol{Q}$, pro jejíž prvky zde použijeme poněkud neobvyklé značení $\mathfrak{i}$,$\mathfrak{j}$,$\mathfrak{k}$, abychom se vyhnuli kolizi se značením již zavedených struktur.

Definice 3.7. Grupa kvaternionů *je grupa* $\boldsymbol{Q} = (Q, \cdot, ^{-1}, 1)$*, kde* $Q = \{\pm 1, \pm \mathfrak{i}, \pm \mathfrak{j}, \pm \mathfrak{k}\}$ *a operace násobení splňuje následující vztahy:*

$(-1)^2 = 1$
$(-1) \cdot \mathfrak{i} = \mathfrak{i} \cdot (-1) = -\mathfrak{i}, \quad (-1) \cdot \mathfrak{j} = \mathfrak{j} \cdot (-1) = -\mathfrak{j}, \quad (-1) \cdot \mathfrak{k} = \mathfrak{k} \cdot (-1) = -\mathfrak{k}$
$\mathfrak{i}^2 = \mathfrak{j}^2 = \mathfrak{k}^2 = -1$
$\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{j} = \mathfrak{k}, \quad \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{i} = -\mathfrak{k}$
$\mathfrak{j} \cdot \mathfrak{k} = \mathfrak{i}, \quad \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{j} = -\mathfrak{i}$
$\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{i} = \mathfrak{j}, \quad \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{k} = -\mathfrak{j}$

Poznámka. V práci Cooperové a kol. jsou kvaterniony značeny běžným způsobem písmeny i,j,k, zatímco pro prvky algebry s vektorovým součinem jsou použity symboly $\hat{\imath}$,$\hat{\jmath}$,$\hat{k}$.

Důležitým rozdílem oproti násobení v algebře s vektorovým součinem je to, že v grupě kvaternionů je součin asociativní.

Cooperová a kol. dále uvažují zobrazení $\phi : \{\pm i, \pm j, \pm k\} \to \{\pm \mathfrak{i}, \pm \mathfrak{j}, \pm \mathfrak{k}\}$, které převádí nenulové prvky algebry s vektorovým součinem na prvky $\boldsymbol{Q}$ řádu 4 následujícím přímočarým způsobem:
$\phi(i) = \mathfrak{i}, \quad \phi(-i) = -\mathfrak{i}$
$\phi(j) = \mathfrak{j}, \quad \phi(-j) = -\mathfrak{j}$
$\phi(k) = \mathfrak{k}, \quad \phi(-k) = -\mathfrak{k}$

Snadno lze vidět, že pro vektory $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v} \in \{\pm i, \pm j, \pm k\}$ takové, že $\boldsymbol{u} \neq \pm \boldsymbol{v}$, platí $\phi(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \phi(\boldsymbol{u}) \cdot \phi(\boldsymbol{v})$ (Cooperová a kol. zmiňují tuto vlastnost a v této souvislosti nazývají zobrazení ϕ „částečným homomorfismem“).

Nyní můžeme uvést následující důležité tvrzení, které lze nalézt i v článku Cooperové a kol., stejně jako jeho důkaz (viz Cooper a kol., 2012, Proposition 3). Zde jejich znění pouze přizpůsobíme námi zavedenému značení.

Tvrzení 3.2. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $(X_1, \ldots, X_n)$ je uspořádaná n-tice po dvou různých proměnných a L je libovolné uzávorkování součinu $X_1 \times \cdots \times X_n$. Dále nechť $S = (s_1, \ldots, s_n) \in \{i,j,k\}^n$ je uspořádaná n-tice prvků (vektorů) z množiny $\{i,j,k\}$ taková, že $L(S) \neq 0$. Pak $L(S) = \phi^{-1}(\phi(s_1) \cdots \phi(s_n))$.*

Důkaz. Protože $L(S) \neq 0$, platí, že také každý mezisoučin musí být nenulový. V žádném kroku postupného násobení tedy nedojde k součinu $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$, kde $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ nebo $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{v}$. V každém kroku tedy platí $\phi(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \phi(\boldsymbol{u}) \cdot \phi(\boldsymbol{v})$ a postupně, s využitím asociativity násobení $\cdot$ v $\boldsymbol{Q}$, dostaneme rovnost $\phi(L(S)) = \phi(s_1) \cdots \phi(s_n)$.

Z toho, že $L(S) \neq 0$, navíc plyne, že $\phi(L(S)) \neq \pm 1$, protože nenulovost každého mezisoučinu v algebře s vektorovým součinem je ekvivalentní tomu, že každý mezisoučin je různý od ± 1 v $\boldsymbol{Q}$. Proto musí platit také $\phi(s_1) \cdots \phi(s_n) \neq \pm 1$, tedy inverz $\phi^{-1}(\phi(s_1) \cdots \phi(s_n))$ existuje a můžeme psát $L(S) = \phi^{-1}(\phi(s_1) \cdots \phi(s_n))$. $\square$

Cooperová a kol. jako důsledek tohoto tvrzení uvádějí, že existence ostrého řešení rovnice $L(\boldsymbol{X}) = R(\boldsymbol{X})$ pro libovolná dvě uzávorkování L,R součinu $X_1 \times \cdots \times X_n$ je ekvivalentní existenci uspořádané n-tice $S = (s_1, \ldots, s_n) \in \{i,j,k\}^n$ prvků množiny $\{i,j,k\}$ takové, že $L(S) \neq 0$ a zároveň $R(S) \neq 0$. Z nenulovosti $L(S)$ a $R(S)$ totiž přímo vyplývá, že $L(S) = R(S) = \phi^{-1}(\phi(s_1) \cdots \phi(s_n))$.

Zároveň je zajímavé si uvědomit, že toto tvrzení nám vlastně dává alternativní důkaz implikace $\Rightarrow$ z předchozí kapitoly (sekce 2.4), lépe řečeno její velké části, kde jsme dokazovali, že znaménko hodnot na obou stranách rovnice vyjde stejné. Zatímco důkaz podle Kauffmana, využívající formace, více zvýrazňuje souvislost s obarvením a reprezentací uzávorkování pomocí binárních stromů, předchozí tvrzení nabízí bezesporu mnohem kratší a velmi elegantní řešení tohoto problému.

Nyní se vrátíme k odvozujícím stromům v gramatice G^*. Nejdříve definujeme ještě jeden pomocný pojem, který nám umožní snáze hovořit o označování vrcholů těchto stromů.

Definice 3.8. *Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, a $S = (s_1, \ldots, s_n) \in \{i,j,k\}^n$ je uspořádaná n-tice prvků množiny $\{i,j,k\}$. Nechť T je libovolný kladně orientovaný binární strom* *s n listy.* Vyhodnocením stromu T nad S *budeme rozumět označení jeho vrcholů hodnotami z množiny* $\{0, \pm i, \pm j, \pm k\}$*, které vznikne následujícím způsobem:*

1. *Vytvoříme posloupnost listů stromu T podobně jako v Definici 3.5, tedy očíslujeme listy stromu T zleva doprava a shora dolů (v daném nakreslení stromu T). Následně pro každé $k = 1, \ldots, n$ označíme k-tý list hodnotou s_k.*

2. *Každý vrchol stromu T, který není listem, označíme hodnotou součinu jeho dvou synů (v pořadí „levý syn, pravý syn") v algebře s vektorovým součinem.*

Je vidět, že se jedná o postup podobný tomu, který jsme používali v minulé kapitole. Zde pouze provádíme postupné součiny „proti orientaci" stromu T. Kořen stromu i v tomto případě nese hodnotu $L(S)$ součinu v uzávorkování L popsaném daným stromem. V práci Cooperové a kol. se pojem „vyhodnocení stromu" rovněž vyskytuje, ale není přímo definován a je jím míněn spíše až výsledný součin plynoucí z daného uzávorkování a příslušného stromu (čili hodnota kořene). Nám se zde bude hodit mít zároveň označené všechny vrcholy daného stromu příslušnými mezisoučiny.

Definujme zobrazení $\tau : \{0, \pm i, \pm j, \pm k\} \to \boldsymbol{K}$, kde $\boldsymbol{K}$ je Kleinova grupa, následujícími vztahy:
$\tau(0) = E$
$\tau(i) = \tau(-i) = I$
$\tau(j) = \tau(-j) = J$
$\tau(k) = \tau(-k) = K$

Definice zobrazení τ vychází z definice dvou pomocných zobrazení, σ a τ, v druhé sekci článku Cooperové a kol. (Cooper a kol., 2012).

Cooperová a kol. v samotném závěru druhé sekce používají důležitou souvislost mezi nenulovostí součinu a rozborovými stromy, kterou formulujeme v následujícím tvrzení a k níž přidáme podrobný důkaz.

Tvrzení 3.3. *Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, a $S = (s_1, \ldots, s_n) \in \{i,j,k\}^n$ je uspořádaná n-tice prvků množiny $\{i,j,k\}$. Nechť T je libovolný kladně orientovaný binární strom s n listy. Pak hodnota kořene stromu T ve vyhodnocení T nad S je nenulová, právě když strom T je rozborem slova $w = \tau(s_1) \ldots \tau(s_n)$.*

Důkaz. Mějme vyhodnocení stromu T nad S.

Pokud je kořen označen nenulovou hodnotou, pak také každý mezisoučin musí být nenulový, a tedy hodnoty všech vrcholů stromu T v tomto označení jsou z množiny $\{\pm i, \pm j, \pm k\}$. Přeznačením hodnot vrcholů na jejich obrazy při zobrazení τ dostaneme značení, vyhovující Definici 3.5. Strom T je tedy rozkladem slova $\tau(s_1) \ldots \tau(s_n)$.

Naopak pokud kořen nese hodnotu 0, pak alespoň pro jeden vrchol musela nastat situace, že oba jeho synové jsou označeni nenulovými hodnotami v_1, v_2, kde $v_1 = \pm v_2$. Pokud jejich hodnoty nahradíme příslušnými obrazy $\tau(v_1), \tau(v_2)$, dostaneme se do rozporu s přepisovacími pravidly gramatiky G^*, kde se na pravé straně nikdy nevyskytuje dvojice stejných neterminálů z množiny $\{I,J,K\}$. Navíc platí, že znaménko hodnot z množiny $\{\pm i, \pm j, \pm k\}$ neovlivní absolutní hodnotu jejich součinu, a tedy ani obraz jejich součinu při zobrazení τ. Z tohoto důvodu neexistuje žádné vyhovující označení vrcholů znaky I,J,K (které jsou v bijekci s absolutními hodnotami prvků z množiny $\{\pm i, \pm j, \pm k\}$) a strom T nemůže být rozborem slova w.

$\square$

Cooperová a kol. uzavírají důkaz ekvivalence uvedené ve Větě 3.1 formulací následující bijekce mezi n-ticemi a slovy. K tomuto poslednímu kroku zde ještě přidáme stručné vysvětlení.

Z Tvrzení 3.3 pro každé $n \geq 2$ vyplývá, že pro každý kladně orientovaný binární strom T s n listy jsou n-tice S, pro které je hodnota kořene ve vyhodnocení T nad S nenulová, v bijekci se slovy, jejichž rozborem strom T je. Stačí si uvědomit, že každá n-tice $S = (s_1, \ldots, s_n) \in \{i,j,k\}^n$ určuje právě jedno slovo $w = \tau(s_1) \ldots \tau(s_n)$ a naopak každé slovo $w = v_1 \ldots v_n$, kde $v_1, \ldots, v_n \in \{I,J,K\}$, jednoznačně určuje n-tici $S = (\tau^{-1}(v_1), \ldots, \tau^{-1}(v_n))$, protože hodnoty $\tau^{-1}(v_1), \ldots, \tau^{-1}(v_n)$ volíme pouze z množiny $\{i,j,k\}$.

Pro $n = 1$ toto platí triviálně, protože kořen (a zároveň jediný vrchol) kladně orientovaného binárního stromu můžeme označit pouze třemi hodnotami, i,j,k, které jsou zřejmě v bijekci se znaky I,J,K.

Tím jsme dokázali Větu 3.1. Z předchozího totiž plyne, že pokud vezmeme libovolné dva odvozující stromy v gramatice G^*, pak existence slova, jehož rozborem jsou oba tyto stromy, je ekvivalentní existenci ostrého řešení rovnice $L(\boldsymbol{X}) = R(\boldsymbol{X})$, kde L,R jsou uzávorkování popsaná těmito stromy.

Závěrečným důsledkem je následující věta, která nám umožní nahlížet na problém čtyř barev opět z jiné perspektivy:

Věta 3.4. *Věta o čtyřech barvách je ekvivalentní tvrzení, že gramatika G^* je úplně nejednoznačná.*

Tato reformulace je hlavní motivací autorů článku (Cooper a kol., 2012), kteří se ve zbytku své práce zabývají možnostmi důkazu úplné nejednoznačnosti gramatiky G^*, který by znamenal nalezení alternativního důkazu Věty o čtyřech barvách. V této práci však již tyto další snahy rozebírat nebudeme a skončíme u tohoto uceleného výsledku, který je jejich výchozím bodem.

Závěr

Po formálním úvodu, který tvořil první kapitolu, jsme si ve druhé kapitole ukázali ekvivalenci mezi větou o čtyřech barvách a existencí ostrého řešení rovnice pro každou dvojici uzávorkování vektorového součinu. Vycházeli jsme při tom z Kauffmanovy práce (Kauffman, 1990) a podrobně popsali a formalizovali jeho myšlenku reprezentace uzávorkování pomocí binárních stromů, rovnice mezi uzávorkovanými součiny pomocí grafů typu $M(L,R)$ a nakonec řešení těchto rovnic pomocí barvení hran příslušného grafu.

Pro případný alternativní důkaz věty o čtyřech barvách je důležitá pouze ta implikace Kauffmanovy reformulace, jejímž důkazem jsme se zabývali v sekci 2.3. Právě u této implikace bylo nutné většinu kroků důkazu doplnit, zejména vysvětlit souvislost grafů typu $M(L,R)$ s Whitneyho ekvivalentní formulací problému čtyř barev, kterou Kauffman (1990) použil k dokončení důkazu. V sekci 2.4 jsme potom uvedli i důkaz druhé implikace, který již byl ve výchozím článku rozepsán poměrně podrobně. Většina sekce 2.4 byla tedy parafrází Kauffmanovy práce s občasným doplněním detailů či souvislostí. Pouze v závěru této sekce jsme přidali delší vysvětlení vztahu mezi součiny imaginárních hodnot vrcholů a hledanými znaménky v rovnici dané uzávorkováními. Ačkoli se později v průběhu třetí kapitoly ukázalo, že celou problematiku znaménka je možné řešit jednodušším způsobem, uvedli jsme i tento rozsáhlejší důkaz, který využívá několika zajímavých konstrukcí a na němž je lépe vidět souvislost s obarvením grafu.

Třetí kapitola patřila formálním gramatikám a ekvivalenci mezi Kauffmanovou reformulací a úplnou nejednoznačností zvolené jednoduché gramatiky, kterou jsme označili G^*. Tato ekvivalence ve svém důsledku přinesla druhou reformulaci problému čtyř barev. Vycházeli jsme z prvních dvou sekcí článku Cooperové a kol. (Cooper a kol., 2012) a formalizovali jejich myšlenku odvozujících binárních stromů pro slova v této gramatice. Binární stromy tak měly v celé práci klíčovou roli. Důkaz této reformulace je opět z velké části parafrází druhé sekce výchozí práce (Cooper a kol., 2012), doplněné o důkazy či vysvětlení několika tvrzení.

Formální gramatika jako taková byla v této počáteční fázi úvah o odvozujících stromech trochu upozaděna; v předvedených důkazech bychom ve skutečnosti snadno mohli vztahy mezi vrcholy binárních stromů popsat i jiným způsobem než prostřednictvím přepisovacích pravidel gramatiky G^*, například využitím podobných konstrukcí jako ve druhé kapitole. V práci Cooperové a kol. (Cooper a kol., 2012) však na tyto úvodní výsledky navazují složitější úvahy o odvozujících stromech, kde se již více uplatňuje postupné generování slov na základě vztahů povolených přepisovacími pravidly.

Každá z představených reformulací nabízí jeden nezávislý směr, kterým je možné se vydat při hledání alternativního důkazu problému čtyř barev. Obě reformulace však navíc samy o sobě implikují zajímavá tvrzení o rovnicích s vektorovým součinem nebo odvozujících stromech v gramatice G^*, protože ačkoli jsme o nich hovořili v rámci snahy o nalezení důkazu věty o čtyřech barvách, víme zároveň, že tato věta platí. To je také důvod, proč bylo u obou reformulací užitečné uvést důkaz obou implikací jejich ekvivalence s větou o čtyřech barvách, přestože pro důkaz problému čtyř barev je podstatná pouze jedna z implikací.

Seznam použité literatury

CHYTIL, M. (1984). *Automaty a gramatiky.* Vydání první. Státní nakladatelství technické literatury, Praha. ISBN neuvedeno.

COOPER, B., ROWLAND, E. a ZEILBERGER, D. (2012). Toward a language theoretic proof of the four color theorem. *Advances in Applied Mathematics*, **48**, 414–431.

KAUFFMAN, L. H. (1990). Map Coloring and the Vector Cross Product. *Journal of Combinational Theory, Series B*, **48**, 145–154.

MATOUŠEK, J. a NEŠETŘIL, J. (2009). *Kapitoly z diskrétní matematiky.* Čtvrté, upravené a doplněné vydání. Univerzita Karlova v Praze, Nakladatelství Karolinum, Praha. ISBN 978-80-246-1740-4.

WHITNEY, H. (1931). A Theorem on Graphs. *The Annals of Mathematics, 2nd Ser.*, **32**, 378–390.