

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

# **BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Viktor Rosman

**Interakce bodového náboje a pohybujících se vodičů**

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. David Kofroň, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Obecná fyzika

Praha rok 2022

Děkuji vedoucímu práce Mgr. Davidu Kofroňovi, Ph.D. za jeho ochotu, odborné konzultace a poskytnutou literaturu. Dále bych rád poděkoval své rodině za podporu v mém dosavadním studiu.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne.....

.....

Podpis autora

Název práce: Interakce bodového náboje a pohybujících se vodičů

Autor: Viktor Rosman

Katedra: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. David Kofroň, Ph.D., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: V této práci se zabýváme interakcí bodového náboje s vodiči. Chování vodičů v elektrostatickém poli bodového náboje (ale i v obecném elektrodynamickém poli) je dobře známo. Přítomnost vodiče vytváří silové působení, které vyvolá pohyb volného bodového náboje. Řešení tohoto elektrodynamického problému je však věnována jen velmi malá pozornost, a proto je i předmětem našeho studia. Konkrétně se zaměříme na studium pohybu bodového náboje umístěného v přítomnosti vodiče, který není obecně ideální (má jistý nenulový elektrický odpor). Ve většině případů řešíme daný problém v kvazistatickém přiblížení (v rámci klasické fyziky). Pouze u jednoho případu, a tím je bodový náboj umístěný nad ideálně vodivou rovinou, se pokusíme nalézt relativistické řešení. Získané poznatky o chování soustavy pohybující se bodový náboj v přítomnosti vodiče se pokusíme rozšířit na případ pohybujícího se vodiče. Neboli naším posledním předmětem studia bude interakce bodového náboje a pohybujících se vodičů.

Klíčová slova: klasická elektrodynamika, elektromagnetická interakce

Title: Interaction of point charge with moving conductors

Author: Viktor Rosman

Department: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: Mgr. David Kofroň, Ph.D., Institute of Theoretical Physics

Abstract: In this thesis we deal with interaction of a point charge with conductors. The behaviour of conductors in the electrostatic field of a point charge (but also in the general electrodynamic field) is well known. The presence of a conductor creates a force that causes the free point charge to move. However, the solution of this electrodynamic problem is given very little attention and is therefore the subject of our study. Specifically, we focus on the study of the motion of a point charge placed in the presence of a conductor, which is not generally ideal (it has certain non-zero electrical resistance). In most cases, we solve the problem in a quasi-static approximation (within classical physics). In only one case, and the point charge is located above an ideally conductive plane, we will try to find a relativistic solution. We will try to extend the acquired knowledge about the behaviour of a system of moving point charge in the presence of a conductor to the case of a moving conductor. So, our last subject of study will be the interaction point charge with moving conductors.

Keywords: classical electrodynamics, electromagnetic interaction

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>1. Chování vodičů v elektrostatickém poli</b>	<b>3</b>
1.1. Pojem vodiče, elektrostatická indukce	3
1.2. Metody řešení výsledného elektrostatického pole	5
1.2.1. Řešení Laplaceovy rovnice	6
1.2.2. Jiné metody řešení výsledného elektrostatického pole	13
1.2.3. Dutý vodič	14
1.3. Řešené příklady	16
1.3.1. Bodový náboj umístěný v blízkosti uzemněné vodivé desky	16
1.3.2. Bodový náboj umístěný v blízkosti uzemněné vodivé koule	18
1.3.3. Bodový náboj umístěný v blízkosti uzemněného vodivého elipsoidu	22
1.3.4. Bodový náboj umístěný v blízkosti uzemněného vodivého válce	25
<b>2. Bodový náboj pohybující se v přítomnosti nepohybujícího se vodiče</b>	<b>29</b>
2.1. Obecné úvahy	29
2.2. Pohyb bodového náboje v blízkosti vodiče	30
2.2.1. Časový vývoj soustavy pohybující se bodový náboj v blízkosti vodiče	30
2.2.2. Elektromagnetické pole pohybujícího se bodového náboje	31
2.2.3. Ohmův zákon a jeho meze	35
2.2.4. Rovnice elektromagnetického pole v kvazistatickém přiblížení a se započtením Ohmova zákona	39
2.2.5. Ideální vodič	46
2.2.6. Pohybová rovnice	47

2.3. Řešené příklady	49
2.3.1. Pohyb bodového náboje umístěného v blízkosti ideálně vodivé roviny	50
2.3.2. Pohyb bodového náboje umístěného v blízkosti neideálně vodivé roviny	58
2.3.3. Pohyb bodového náboje umístěného v blízkosti izolované vodivé koule	64
<b>3. Interakce bodového náboje a pohybujících se     vodičů</b>	<b>68</b>
3.1. Obecná teorie	68
3.2. Řešené příklady	73
3.2.1. Bodový náboj umístěný nad pohybující se vodivou rovinou	73
3.2.2. Bodový náboj umístěný v blízkosti rotující vodivé kulové skořepiny	81
3.3. disipativní účinky v důsledku konečné vodivosti vodič	87
<b>Závěr</b>	<b>89</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>93</b>

# Úvod

Člověk přicházel do styku s elektrickými jevy již od nepaměti. Avšak elektrické jevy byly systematicky zkoumány teprve až v 17. a 18. století. K prvním zkoumaným jevům patřilo i chování vodiče v elektrickém poli.

Jeden z nejzručnějších experimentátorů *Henry Cavendish* (1731–1810) a *Joseph Priestley* (1733–1804) experimentálně potvrdili, že volný elektrický náboj se zdržuje pouze na povrchu vodiče. *Charles August Coulomb* (1736–1806) nezávisle na Cavendishovi proměřil rozložení náboje na povrchu vodiče a určil vztah mezi plošnou hustotou náboje na povrchu vodiče a elektrickou intenzitou v blízkosti povrchu vodiče, který je dnes označován jako Coulombova věta. Coulomb rovněž změřil sílu působící na náboj v blízkosti povrchu nabitého vodiče. Dále, kdo se zabýval elektrickými jevy související s vodiči, byl anglický fyzik *Michael Faraday* (1791–1867). Chováním vodičů v elektrickém poli se zabýval i český fyzik a katolický kněz *Prokop Diviš* (1698–1765).

Elektrické jevy související s vodivými tělesy byly zkoumány i řadou jiných fyziků. V podstatě veškeré poznatky o jevech týkající se vodičů umístěných v elektrostatickém pole jsou již završeny.

Jevy týkající se vodičů umístěných v elektrickém poli mají velký význam pro praxi. Příkladem můžeme uvést Faradayovu klec nebo bleskosvod. Kromě technického uplatnění hrálo chování vodiče v elektrostatickém poli důležitou roli k nepřímému důkazu Coulombova zákona, který můžeme považovat za jeden z nejdůležitějších zákonů elektrostatiky.

V naší práci budeme jako zdroj elektrického pole uvažovat bodový náboj, jakožto nejjednodušší možné rozložení náboje a hmoty. Zaměříme se tedy na soustavu bodový náboj umístěný v blízkosti vodiče. Mezi vodičem a bodovým nábojem existuje vzájemné silové působení. Pokud chceme, aby se daná soustava nacházela v klidu, musíme bodový náboj a vodič určitým způsobem „zafixovat“. Předpokládáme, že vodič je pevně zafixován. Ale co se bude dít, pokud bude bodový náboj volný? Jinými slovy, co se stane, když bodový náboj pustíme? Jak se bude pohybovat?

Zodpovězení těchto otázek je stěžejní téma této práce. Přičemž přesné řešení pohybu bodového náboje v přítomnosti vodiče není známo. V literatuře je tomuto problému věnována pouze malá pozornost. Ve většině případů se řeší úlohy o pohybu bodového náboje vyvolaným silovým působením ideálního vodiče – vodiče s nulovým elektrickým odporem (např. [8]). Avšak každý reálný vodič má jistý nenulový odpor – konečnou elektrickou vodivost (elektrická vodivost je převrácená hodnota elektrického odporu). Proto se pokusíme daný problém řešit i pro neideální vodiče navzdory tomu, že se daný problém pak stane matematicky výrazně složitějším. Nejprve se budeme zabývat interakcí bodového náboje a vodiče, který je v klidu. Poté se pokusíme rozšířit řešení daného problému na případ pohybujícího se vodiče.

V první kapitole shrneme již známé poznatky o chování vodiče vloženého do elektrostatického pole v případě, že již nastal rovnovážný stav. Zároveň představíme některé postupy řešení dané úlohy a pro lepší představu si ukážeme i řešení pro některé vybrané soustavy bodového náboje umístěného v blízkosti vodiče. Konkrétně máme na mysli, že danou úlohu budeme řešit pro různé tvary vodičů.

Ve druhé kapitole se budeme zabývat chováním systému pohybující se bodový náboj v přítomnosti vodiče. Především budeme studovat pohyb volného náboje, který je vyvolán v důsledku silového působení vodiče. Předmětem našeho studia bude jak klasické, tak i relativistické řešení. I zde pro lepší pochopení dané problematiky spočítáme některé příklady.

Ve třetí kapitole se pokusíme poznatky z druhé kapitoly rozšířit na případ pohybujícího se vodiče. Konkrétně se zaměříme na případ pohybu vodiče, který respektuje symetrii daného vodiče. Pro lepší názornost si danou problematiku opět ukážeme na některých vybraných příkladech. V podstatě budeme uvažovat případ, kdy se u pohybujícího se vodiče nachází klidový bodový náboj a naším úkolem bude důkladnější studium tohoto systému. Především se zaměříme na proud tekoucí vodičem, který je vyvolán samotným pohybem vodiče a zároveň budeme zkoumat silové působení na bodový náboj. Na závěr se zamyslíme, jak by se choval volně pohybující se vodič v elektrostatickém poli bodového náboje.



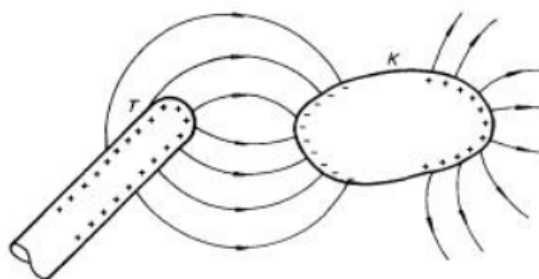
# Kapitola 1. Chování vodičů v elektrostatickém poli

## 1.1. Pojem vodiče, elektrostatická indukce

Elektrickým vodičem rozumíme těleso, které je vyplněné látkou obsahující volné elektricky nabitě částice (například kovový vodič obsahuje volné elektrony). Vodiče můžeme rozdělovat jednak podle jejich vnitřních vlastností – vlastností vodivé látky (například kovový vodič, polovodič) a jednak podle jejich tvaru. V naší práci se budeme konkrétně zabývat *objemovým vodičem* – vodič tvořený trojrozměrným tělesem, jehož vodivá část zaujímá určitý objem a *plošným vodičem* – vodič tvořený určitou plochou. V reálné situaci je každý vodič objemový. Plošné vodiče jsou jistou matematickou idealizací. Avšak existuje mnoho případů, kdy je možné použít model plošného vodiče. Příkladem můžeme uvést velmi tenký plech.

Vložíme-li izolované vodivé těleso do elektrostatického pole ve vakuovaném prostředí, bude na každého volného nositele náboje působit elektrická síla, která způsobí makroskopický pohyb těchto volných nositelů náboje. Kladné volné náboje se budou pohybovat ve směru intenzity vnějšího elektrického pole a záporné volné náboje se zas budou pohybovat proti směru intenzity vnějšího elektrického pole. Volné náboje budou postupně putovat směrem k povrchu vodiče a po ustanovení rovnovážného stavu se na povrchu vodiče určitým způsobem rozloží. Tedy na povrchu vodiče se objeví separované kladné a záporné makroskopické náboje. Avšak celkový elektrický náboj původně nenabitého izolovaného vodiče je roven nule (vodič zůstane elektricky neutrální). Tato skutečnost triviálně vyplývá ze zákona zachování elektrického náboje.

Uvedený jev, kdy vlivem vnějšího elektrického pole vzniknou na povrchu vodiče makroskopické náboje, nazýváme *elektrostatická indukce*.



Obr. 1.1. K výkladu elektrostatické indukce. Vodič  $K$  je vložen do vnějšího elektrostatického pole, které generuje kladně nabitá tyč  $T$ . Převzato z [1].

Nyní si položíme otázku, jak se v případě rovnovážného stavu rozloží náboje na povrchu vodiče. Aby mohl nastat rovnovážný stav, kdy nedochází k žádnému pohybu volných nositelů náboje, nesmí na volné nositele náboje působit žádná síla. Předpokládáme-li, že na volné nositele náboje působí pouze elektrostatické síly, musí pak celková elektrická intenzita všude uvnitř vodiče být nulová. Zároveň k dosažení rovnovážného stavu je nutné, aby tečná složka intenzity výsledného elektrického pole (tečná k povrchu vodiče) byla nulová v každém bodě na povrchu vodiče.

Elektrostatické pole je potenciální, a proto můžeme elektrickou intenzitu vyjádřit jako záporně vzatý gradient potenciálu. Z toho vyplývá, je-li výsledné elektrické pole uvnitř vodiče nulové, je pak uvnitř vodiče konstantní potenciál. Z nulovosti tečné složky elektrické intenzity na povrchu vodiče vyplývá, že i na povrchu vodiče je konstantní potenciál, který v důsledku požadavku spojitosti potenciálu má stejnou hodnotu jako potenciál uvnitř vodiče. Jinými slovy, celý objem vodivého tělesa zaujímá *ekvipotenciální objem* a povrch vodiče tvoří *ekvipotenciální plochu*.

Pokud uvnitř vodiče je elektrická intenzita nulová, vyplývá z Gaussova zákona, že celková hustota náboje uvnitř vodiče je nulová. Dané vzniklé makroskopické náboje se tedy objevují pouze na povrchu vodiče. Přičemž makroskopické náboje se rozloží tak, že jejich elektrické pole vykompenzuje uvnitř vodiče vnější elektrické pole – celková elektrická intenzita v celém objemu vodiče je nulová. (Nulové jsou i tečné složky elektrické intenzity na povrchu vodiče.)

Výsledné elektrické pole je nenulové pouze vně vodiče, přičemž z nulovosti tečných složek celkové elektrické intenzity na povrchu vodiče vyplývá, že těsně u povrchu vodiče je vektor celkové elektrické intenzity kolmý k povrchu vodiče.

Zabývejme se nyní otázkou, jak se bude chovat vodič umístěný do vnějšího elektrického pole v případě, že je uzemněný – vodivě spojený se zemí. Rovnovážný stav nastane ve chvíli, kdy celkový potenciál uvnitř i na povrchu vodiče se vyrovná s potenciálem země. V tuto chvíli je napětí mezi vodičem a zemí nulové, a proto již neteče žádný proud mezi zemí a vodičem, tudíž nastává rovnovážný stav. Vzhledem k tomu, že potenciál země je nulový, výsledný potenciál uvnitř i na povrchu uzemněného vodiče je rovněž nulový.

## 1.2. Metody řešení výsledného elektrostatického pole

Nyní nás může zajímat, jak bude vypadat elektrostatické pole soustavy bodový náboj nacházející se v blízkosti vodiče. Dále se můžeme ptát, jaká bude plošná hustota náboje naindukovaného na povrchu vodiče anebo jakou silou je bodový náboj přitahován k danému vodiči.

Pro zodpovězení těchto otázek je nejprve nutné nalézt elektrostatické pole vodiče. Předpokládejme, že se vodič i bodový náboj nacházejí ve vakuu. Potom intenzita elektrostatického pole vodiče  $\mathbf{E}_v$  splňuje následující rovnice

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_v = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \delta_\Omega, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_v = 0, \quad (1.2)$$

kde  $\sigma$  označuje plošnou hustotu náboje naindukovaného na povrchu vodiče,  $\varepsilon_0$  je permitivita vakua,  $\delta_\Omega$  označuje *Diracovu delta distribuci* a  $\Omega$  je povrch vodiče (lépe řečeno, množina všech bodů ležících na povrchu vodiče.)

Z rovnice (1.2) vyplývá, že elektrostatické pole vodiče je potenciální, jak jsme se již zmínili, potom vektor elektrické intenzity pole vodiče je určen vztahem

$$\mathbf{E}_v = -\operatorname{grad} \Phi_v. \quad (1.3)$$

Po dosazení vztahu (1.3) do rovnice (1.1) dostáváme *Poissonovu rovnici*

$$\Delta \Phi_v = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \delta_\Omega. \quad (1.4)$$

Z předchozí rovnice (1.4) vyplývá, že v každém bodě kromě bodů na povrchu vodiče je splněna *Laplaceova rovnice*

$$\Delta \Phi_{v_{1,2}} = 0, \quad (1.5)$$

kde index 1 a 2 označuje oblasti, které odděluje povrch vodiče. Oblasti 1 a 2 jsou určeny tak, že normálový vektor k povrchu vodiče míří z oblasti 1 do oblasti 2. V případě objemového vodiče oblast 1 odpovídá vnitřní a oblast 2 odpovídá vnější oblasti vodiče. Takto definované číslování daných oblastí vodiče budeme užívat i nadále. Na povrchu vodiče není elektrická intenzita definována. Při průchodu povrchem vodiče má elektrická intenzita jistý skok.

Poznamenejme, že potenciál pole vodiče je nějaká *harmonická funkce*, jak je v matematice označeno řešením Laplaceovy rovnice. Potenciál, který získáme řešením Laplaceovy rovnice, je jednoznačně určen až po zadání jisté okrajové podmínky, kterou lze zadat několika způsoby. Okrajová podmínka se zpravidla zadává dvěma způsoby.

První způsob je zadání konkrétní konstantní hodnoty výsledného potenciálu na povrchu vodiče. Většinou uvažujeme případ, který je po matematické stránce výhodný. Jedná se o uzemněný vodič, na jehož povrchu je výsledný potenciál nulový.

Druhý způsob zadání okrajové podmínky spočívá v tom, že na povrchu vodiče má výsledný potenciál neznámou konstantní hodnotu a celkový naindukovaný náboj je roven konkrétně zadané hodnotě. Nejčastěji se tato okrajová podmínka formuluje pro úlohu s izolovaným vodičem, kdy nedochází ke změně hodnoty celkového naindukovaného náboje. Typickým příkladem je neutrální izolovaný vodič, na jehož povrchu je celkový naindukovaný náboj nulový.

V našem obojím zadání okrajové podmínky vystupuje výsledný potenciál. Proto je nutné znát i průběh potenciálu bodového náboje – elektrostatické pole bodového náboje určuje elektrostatické pole vodiče. Potenciál bodového náboje splňuje následující *Poissonovu rovnici*

$$\Delta\Phi_Q = -\frac{Q}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q), \quad (1.6)$$

kde  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q)$  označuje Diracovu delta distribuci. Obecné řešení rovnice (1.6) je dáno vztahem

$$\Phi_Q(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|} \quad (1.7)$$

jako funkce polohy  $\mathbf{r}$ . Polohový vektor  $\mathbf{r}_Q$  označuje místo, kde sídlí bodový náboj  $Q$ .

V matematice se řešení diferenciální rovnice, na jejíž pravé straně se nachází Diracova delta distribuce, nazývá *Greenova funkce*. Avšak v naší terminologii budeme řešení rovnice (1.6) neustále označovat pojmem potenciál bodového náboje.

### 1.2.1. Řešení Laplaceovy rovnice

Nyní nastíníme postup řešení Laplaceovy rovnice. Konkrétně představíme postup řešení Laplaceovy rovnice podle metody *separace proměnných* [2], která je v podstatě vůbec nejobecnější a nejpraktičtější metodou.

Zvolme ortogonální souřadnicový systém  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  takový, že jedna z jeho souřadnicových ploch bude kopírovat povrch vodiče. Avšak zdůrazněme, že se jedná o předpoklad, který není splněn pro každý povrch vodiče. (Například nelze tímto způsobem vyjádřit povrch krychle). Předpokládejme, že souřadnicová plocha odpovídající povrchu vodiče je  $\xi^1 = a = konst.$  Tato volba souřadnic nám umožňuje nejjednodušší matematické vyjádření hraniční oblasti – oblasti, na níž je zadána okrajová podmínka.

Následně separujeme Laplaceovu rovnici. Ale musíme si uvědomit, že Laplaceovu rovnici nelze separovat úplně ve všech možných souřadnicových systémech.

Pokusme se stanovit podmínky, za jakých je možné separovat Laplaceovu rovnici. Laplaceova rovnice má v ortogonálních souřadnicích  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  následující tvar

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left( \frac{\sqrt{g}}{h_i^2} \frac{\partial \Phi_{v_{1,2}}}{\partial \xi^i} \right) = 0, \quad \sqrt{g} = h_1 h_2 h_3, \quad (1.8)$$

kde  $h_1, h_2, h_3$  jsou Lamého (Laméovy) koeficienty. Vycházejme z předpokladu, že Lamého koeficienty splňují podmínku

$$\frac{\sqrt{g}}{h_i^2} = M_i H_1(\xi^1) H_2(\xi^2) H_3(\xi^3). \quad (1.9)$$

U koeficientu  $M_i$  požadujeme, aby nezávisel na proměnné  $\xi^i$ , ale může záviset na ostatních proměnných.

Předpokládejme, že potenciál vodiče v jeho vnitřní i vnější oblasti lze vyjádřit jako součin tří funkcí jedné proměnné

$$\Phi_{v_{1,2}} = F_1(\xi^1) F_2(\xi^2) F_3(\xi^3). \quad (1.10)$$

Potom lze Laplaceovu rovnici (1.5) zapsat ve tvaru

$$\sum_{i=1}^3 \frac{M_i}{H_i F_i} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left( H_i \frac{\partial F_i}{\partial \xi^i} \right) = 0. \quad (1.11)$$

Pokud jsou koeficienty  $M_i$  racionální funkce, lze předchozí rovnici (1.11) separovat na tři obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu

$$\hat{L}_i F_i - \lambda_i F_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.12)$$

kde  $\lambda_i$  je určitá číselná konstanta a  $\hat{L}_i$  značí lineární operátor zahrnující všechny derivace podle  $\xi^i$  a všechny funkce proměnné  $\xi^i$ . V obecné případě může operátoru  $\hat{L}_i$  obsahovat i konstantu  $\lambda_j$ ,  $i \neq j$ .

Konstanta  $\lambda_i$  odpovídá vlastnímu číslu operátoru  $\hat{L}_i$ . Konstanty  $\lambda_i$  jsou na sobě závislé (součet všech tří konstant  $\lambda_i$  je roven nule – to vyplývá přímo z rovnice (1.11)). Jedno  $\lambda_i$  lze vyjádřit pomocí dvou  $\lambda_j$  ( $i \neq j$ ). Konstanty  $\lambda_i$  lze pak vyjádřit pomocí dvou parametrů  $k$  a  $n$ , které lze označit jako *separační konstanty*.

Výše uvedené podmínky, za jakých je možné separovat Laplaceovu rovnici, nejsou sice nejobecnější, ale na druhou stranu zahrnují všechny běžně používané souřadnicové systémy. Takže uvedené podmínky můžeme považovat za zcela dostačující k určení kritéria separovatelnosti Laplaceovy rovnice.

Funkce  $F_i$  jsou vlastní funkce operátoru  $\hat{L}_i$ . Vlastní čísla operátoru  $\hat{L}_i$  nemusí nabývat jediné hodnoty. Konkrétně hodnoty vlastních čísel, a tedy i separačních konstant tvoří buď diskrétní spektrum nebo spojité spektrum. (Případně se může jednat o

spektrum částečně diskrétní a částečně spojité.) Zda je spektrum separačních konstant diskrétní nebo spojité, záleží na konkrétní situaci.

Potenciál vodiče můžeme tedy zapsat jako lineární kombinaci součinů tří funkcí  $F_1(k, \xi^1)F_2(n, \xi^2)F_3(k, n, \xi^3)$ . Do argumentu funkcí jsme přidali i separační konstanty, čímž chceme zdůraznit, že vlastní funkce pochopitelně závisí i na hodnotě separační konstanty.

Naše řešení potenciálu pole vodiče vyjádřené pomocí funkcí, které generuje řešení Laplaceovy rovnice pomocí metody separace proměnných, označme jako rozvoj do *báze harmonických funkcí*. Takto zavedené označení vyjadřuje tu skutečnost, že zmíněný postup řešení generuje bázi funkcí, které řeší Laplaceovu rovnici – tedy generuje bázi harmonických bázi.

Nyní nastíníme postup řešení rovnice (1.6) v daném souřadnicovém systému  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ . Pro řešení daného problému je vhodné vyjádřit potenciál bodového náboje pomocí báze harmonických funkcí získané řešením Laplaceovy rovnice. To, že potenciál bodového náboje lze vyjádřit vzhledem k bázi harmonických funkcí vyplývá ze skutečnosti, že pro hodnoty  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_Q$  potenciál bodového náboje řeší Laplaceovu rovnici. Nejprve musíme vhodně vyjádřit distribuci  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q)$  v daném souřadnicovém systému  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ , ve kterém máme [5]:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) = \frac{1}{\sqrt{g}} \delta(\xi^1 - \xi_Q^1) \delta(\xi^2 - \xi_Q^2) \delta(\xi^3 - \xi_Q^3). \quad (1.13)$$

Nechť  $f(\xi^1) = F_1$  a  $g(\xi^2, \xi^3) = F_2(\xi^2)F_3(\xi^3)$ . Potom ze vztahu (1.5) vyplývá

$$\frac{\Delta f}{f} + \frac{\Delta g}{g} = 0. \quad (1.14)$$

Z předchozího vztahu je patrné, že můžeme psát

$$-\Delta g = \lambda g, \quad (1.15)$$

kde  $\lambda$  (předpokládejme  $\lambda \geq 0$ ) označuje koeficient, který může být i funkcí  $\xi^1$ .

Uvažujme, že spektrum operátoru  $-\Delta$  je diskrétní. Jelikož operátor  $-\Delta$  je hermitovský, řešením rovnice (1.15) jsou funkce  $g_{n,k}(\xi^2, \xi^3)$ , které tvoří *ortogonální systém*. Speciálním případem ortogonálního systému je *ortonormální systém*, kdy norma funkce  $g_{n,k}(\xi^2, \xi^3)$  je rovna jedné. V případě, že funkce  $g_{n,k}(\xi^2, \xi^3)$  tvoří *úplný ortonormální systém* můžeme  $\delta(\xi^2 - \xi_Q^2)\delta(\xi^3 - \xi_Q^3)$  vyjádřit jako

$$\delta(\xi^2 - \xi_Q^2)\delta(\xi^3 - \xi_Q^3) = \sum_k \sum_n g_{k,n}^*(\xi_Q^2, \xi_Q^3) g_{n,k}(\xi^2, \xi^3), \quad (1.16)$$

kde  $g_{k,n}^*$  označuje komplexně sdruženou funkci k  $g_{n,k}$ . Funkce  $g_{n,k}$  může být v obecném případě i komplexní (přesněji řečeno, komplexní funkce reálné proměnné). Vztah (1.16) vyjadřuje tzv. *relace úplnosti*.

Relace úplnosti zapsané ve tvaru (1.16) platí za předpokladu, kdy v argumentu funkce  $g_{n,k}(\xi^2, \xi^3)$  vystupují pouze proměnné  $\xi^2$  a  $\xi^3$ . Tím máme na mysli, že se nejedná o složenou funkci. V případě, že bychom získali složenou funkci ve tvaru  $g_{n,k}(u_2(\xi^2), u_3(\xi^3))$ , tak by na levé straně rovnosti (1.16) vystupoval výraz  $\delta(u_2(\xi^2) - u_3(\xi_Q^3)) \delta(u_2(\xi^2) - u_3(\xi_Q^3))$ . Postup řešení v případě složené funkce zůstává stejný jako v případě, kdy funkce není složená. V podstatě můžeme provést substituci  $\zeta_2 = u_2(\xi^2)$  a  $\zeta_3 = u_3(\xi^3)$ , čímž přejdeme k novým proměnným  $\zeta_2$  a  $\zeta_3$ . Potom rovnost (1.16) si zachová svoji platnost právě v těchto nově zvolených proměnných  $\zeta_2$  a  $\zeta_3$ .

Vraťme se k postupu řešení rovnice (1.6). Dosadíme vyjádření (1.16) do (1.13) a následně (1.13) dosadíme do (1.6). Pak dostáváme

$$\Delta\Phi_Q = -\frac{Q}{\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_k \sum_n g_{k,n}^*(\xi_Q^2, \xi_Q^3) g_{n,k}(\xi^2, \xi^3) \delta(\xi^1 - \xi_Q^1). \quad (1.17)$$

Předpokládejme, že potenciál bodového náboje lze zapsat ve tvaru

$$\Phi_Q = \sum_k \sum_n f_{k,n}(\xi^1) g_{k,n}^*(\xi_Q^2, \xi_Q^3) g_{n,k}(\xi^2, \xi^3). \quad (1.18)$$

Dosadíme (1.18) do (1.17) a předpokládejme, že po dosazení je možné provést úpravu vedoucí na tvar

$$\hat{L}f_{k,n} = -\frac{Q}{\varepsilon_0} \alpha(\xi_Q^1) \delta(\xi^1 - \xi_Q^1), \quad (1.19)$$

kde operátor  $\hat{L}$ , který obecně závisí na  $k$  a  $n$ , zahrnuje všechny derivace podle  $\xi^1$  a všechny funkce proměnné  $\xi^1$ . Navíc požadujeme, aby koeficient před druhou derivací byl roven jedné. Funkce  $\alpha_1(\xi_Q^1)$  je vyplývá z matematických úprav rovnice (1.17). Úlohu (1.19) budeme řešit na dvou oblastech:  $\xi^1 < \xi_Q^1$  (oblast 1) a  $\xi^1 > \xi_Q^1$  (oblast 2). Pro  $\xi^1 \neq \xi_Q^1$  přejde rovnice (1.19) na tvar

$$\hat{L}_1 f_{k,n} = 0. \quad (1.20)$$

Rovnice (1.20) představuje lineární diferenciální rovnici druhého řádu, která má dvě lineárně nezávislá řešení, která označme jako  $f_{k,n1}$  a  $f_{k,n2}$ . Potom obecné řešení rovnice (1.20) lze zapsat ve tvaru

$$f_{k,n} = A_1 f_{k,n1} + A_2 f_{k,n2}, \quad (1.21)$$

kde  $A_1$  a  $A_2$  jsou číselné konstanty.

Předpokládejme, že funkce  $f_{k,n1}$  jsou omezené na oblasti  $\xi^1 < \xi_Q^1$  ( $f_{k,n2}$  jsou na této oblasti neomezené, potom  $A_2 = 0$ ) a  $f_{k,n2}$  jsou omezené na oblasti  $\xi^1 > \xi_Q^1$  ( $f_{k,n1}$  jsou na této oblasti neomezené, potom  $A_1 = 0$ ). Pak pro obě zmíněné oblasti můžeme psát

$$f_{k,n}(\xi^1) = A_Q(k, n) f_{k,n2}(\xi_Q^1) f_{k,n1}(\xi^1), \quad \xi^1 < \xi_Q^1, \quad (1.22)$$

$$f_{k,n}(\xi^1) = A_Q(k, n) f_{k,n1}(\xi_Q^1) f_{k,n2}(\xi^1), \quad \xi^1 > \xi_Q^1. \quad (1.23)$$

Takto zvolené funkce (1.22) a (1.23) splňují podmínku spojitosti potenciálu bodového náboje. Tedy daný potenciál musí být spojitý i na oblasti  $\xi^1 = \xi_Q^1$  (kromě bodu  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_Q$ , kde potenciál bodového náboje diverguje.)

Hodnota koeficientu  $A_Q(k, n)$  je určena rovností

$$A_Q(k, n) \left( f_{k,n2}(\xi_Q^1) \frac{\partial f_{k,n1}(\xi^1)}{\partial \xi^1} - f_{k,n1}(\xi_Q^1) \frac{\partial f_{k,n2}(\xi^1)}{\partial \xi^1} \right)_{\xi^1 = \xi_Q^1} = \alpha(\xi_Q^1) \frac{Q}{\varepsilon_0}, \quad (1.24)$$

kteřá vyplývá ze skutečnosti, že první derivace funkce  $f_k$  je nespojitá v bodě  $\xi_Q^1$ . Jednostranné derivace mají v bodě  $\xi_Q^1$  skok (rozdíl pravostranné a levostranné derivace), který je roven koeficientu (v bodě  $\xi_Q^1$ ) vystupující před distribucí  $\delta(\xi^1 - \xi_Q^1)$ .

Výraz v kulaté závorce představuje *Wronského determinant* funkcí  $f_2(\xi^1)$ ,  $f_1(\xi^1)$  spočtený pro hodnotu  $\xi^1 = \xi_Q^1$ . Wronského determinant budeme pro stručnost označovat jako *wronskián*. Pro daný wronskián použijeme značení

$$\begin{aligned} W[f_{k,n2}(\xi^1), f_{k,n1}(\xi^1)](\xi^1 = \xi_Q^1) \\ = \left( f_{k,n2}(\xi^1) \frac{\partial f_{k,n1}(\xi^1)}{\partial \xi^1} - f_{k,n1}(\xi^1) \frac{\partial f_{k,n2}(\xi^1)}{\partial \xi^1} \right)_{\xi^1 = \xi_Q^1}. \end{aligned}$$

Z rovnosti (1.24) pro koeficient  $A_Q(k, n)$  získáváme

$$A_Q(k, n) = \alpha(\xi_Q^1) \frac{Q}{\varepsilon_0} \frac{1}{W[f_{k,n2}(\xi^1), f_{k,n1}(\xi^1)](\xi^1 = \xi_Q^1)}. \quad (1.25)$$

Po dosazení vyjádřeného koeficientu  $A_Q(k, n)$  do (1.18) pak pro potenciál bodového náboje (rozloženého do báze harmonických funkcí) dostáváme

$$\Phi_Q = \sum_k \sum_n A_Q(k, n) f_{k,n2}(\xi_Q^1) f_{k,n1}(\xi^1) g_{k,n}^*(\xi_Q^2, \xi_Q^3) g_{n,k}(\xi^2, \xi^3), \quad \xi^1 < \xi_Q^1 \quad (1.26)$$

$$\Phi_Q = \sum_k \sum_n A_Q(k, n) f_{k,n1}(\xi_Q^1) f_{k,n2}(\xi^1) g_{k,n}^*(\xi_Q^2, \xi_Q^3) g_{n,k}(\xi^2, \xi^3), \quad \xi^1 > \xi_Q^1. \quad (1.27)$$



Rozklad potenciálu do báze harmonických funkcí je v mnoha běžně používaných souřadnicových systémech dobře známý. Avšak budeme-li mít vodič poněkud specifického tvaru, jehož povrch budeme nuceni popsat pomocí speciálního, nepříliš známého, souřadnicového systému, musíme výše uvedené rozklady potenciálu (1.26) a (1.27) v daných speciálních souřadnicích najít podle výše uvedených postupů.

Pro jednoduchost jsme předpokládali diskrétní spektrum vlastních čísel operátorů  $\hat{L}_i$ . Samozřejmě pokud bychom získali spojitě spektrum vlastních čísel, sumy by se nahradily dvojitým integrálem. Dokonce může nastat případ, že spektrum vlastních čísel jednoho operátoru je diskrétní a druhého operátoru je zas spojitě. To potom znamená, že ve vztazích (1.26) a (1.27) by se jedna suma nahradila integrací. Sumu jsme zvolili jako speciální příklad, na kterém se pokusíme vysvětlit konstrukci řešení elektrostatického pole naší soustavy bodový náboj v přítomnosti vodiče daného řešení. Ale samotná podstata řešení nezávisí na tom, zda máme diskrétní či spojitě spektrum vlastních čísel nebo dokonce jejich kombinaci. Totiž neexistuje přímé značení, které by zahrnovalo sumaci i integraci. Proto jako příklad uvádíme sumace a vzhledem ke stejné podstatě problému, můžeme podle potřeby sumaci vyskytující se v obecném řešení nahradit integrací.

Předpokládejme, že se bodový náboj nachází v oblasti 2 ( $\xi_Q^1 > a$ ). Potom na základě tvaru rozloženého potenciálu bodového náboje předpokládejme potenciál pole vodiče ve tvaru

$$\Phi_{v_1} = \sum_k \sum_n A(k, n, a) f_{k,n_2}(a) f_{k,n_1}(\xi^1) g_{k,n}^*(\xi_Q^2, \xi_Q^3) g_{n,k}(\xi^2, \xi^3) , \quad (1.28)$$

$$\Phi_{v_2} = \sum_k \sum_n A(k, n, a) f_{k,n_1}(a) f_{k,n_2}(\xi^1) g_{k,n}^*(\xi_Q^2, \xi_Q^3) g_{n,k}(\xi^2, \xi^3) , \quad (1.29)$$

Takto zvolené vyjádření potenciálu vodiče v obou jeho oblastech vyhovuje jak požadavku spojitosti potenciálu (na povrchu vodiče se  $\Phi_{v_1}$  rovná  $\Phi_{v_2}$ ), tak i požadavku konstantnosti celkového potenciálu na povrchu i uvnitř vodiče.

Důvod, že funkce proměnné  $\xi^1$  je jiná pro každou oblast vodiče, má kromě svého matematického opodstatnění (omezenost funkce proměnné  $\xi^1$  na každé oblasti vodiče) i fyzikální podstatu. Na povrchu vodiče se indukují náboj s určitou plošnou hustotou. To potom znamená, že tečné složky elektrické intenzity pole vodiče jsou při průchodu povrchem vodiče spojitě, kdežto normálové složky elektrické intenzity jsou při průchodu povrchem vodiče nespojitě. Právě tato skutečnost je skryta v takto zvolených vztazích (1.28) a (1.29). Můžeme nahlédnout, že gradient potenciálu, jehož záporně vzata hodnota odpovídá elektrické intenzitě, je ve směru tečném k povrchu vodiče spojitý při průchodu povrchem vodiče, kdežto v normálovém směru k povrchu vodiče je nespojitý při průchodu povrchem vodiče.

Nyní můžeme určit neznámé koeficienty  $A(k, n, a)$ , dále jen  $A_{k,n}$ . Koeficienty  $A_{k,n}$  určíme z okrajové podmínky, kterou jsme zadali dvěma způsoby.

1) Na povrchu vodiče je celkový potenciál známé konstantní hodnoty. Pro jednoduchost uvažujme, že vodič je uzemněn, tedy na jeho povrchu je nulový celkový potenciál. Ze vztahů (1.26) a (1.28) vyplývá, že pro uzemněný vodič je koeficient  $A_{k,n}$  roven

$$A_{k,n} = -\frac{A_Q(k, n)}{f_2(a)}. \quad (1.30)$$

2) Na povrchu vodiče je naindukován celkový náboj známé hodnoty  $q$  a zároveň celkový potenciál na povrchu vodiče dosahuje konstantní neznámé hodnoty. Náboj naindukovaný na povrchu vypočítáme ze vztahu

$$Q_{ind} = \int_{\Omega} \sigma \, dS, \quad (1.31)$$

kde  $\Omega$  označuje povrch vodiče. Plošná hustota  $\sigma = \sigma(\xi^2, \xi^3)$  náboje rozloženého na povrchu vodiče je rovna [1]

$$\sigma = \varepsilon_0 (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)_{\Omega} \cdot \mathbf{n}, \quad (1.32)$$

kde  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_{\xi^1}$  označuje normálu k povrchu vodiče. (Bázový vektor  $\mathbf{e}_{\xi^1}$  označuje jednotkový vektor ve směru souřadnicové osy  $\xi^1$ ,  $\mathbf{e}_{\xi^1} = \text{grad } \xi^1$ ). Index 1 respektive 2 určuje elektrickou intenzitu v oblasti 1 respektive 2. Poznamenejme, že daný vztah (1.32) přímo vyplývá z rovnice (1.4). Pokud se bodový náboj nachází v oblasti 2, je  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{0}$  a vztah (1.32) přejde na tvar

$$\sigma = \varepsilon_0 (\mathbf{E}_2)_{\Omega} \cdot \mathbf{n} \quad (1.33)$$

známý jako Coulombova věta.

Elektrická intenzita vodiče není na povrchu vodiče definována. Tedy i celková elektrická intenzita  $\mathbf{E}$  není definována na povrchu vodiče. Zápis  $(\mathbf{E}_{1,2})_{\Omega}$  chápeme jako limitu

$$(\mathbf{E}_1)_{\Omega} = \lim_{\xi^1 \rightarrow a^-} \mathbf{E}, \quad (\mathbf{E}_2)_{\Omega} = \lim_{\xi^1 \rightarrow a^+} \mathbf{E}.$$

Elektrická intenzita pole bodového náboje je spojitá při průchodu povrchem vodiče, a tedy nepřispívá k plošné hustotě naindukovaného náboje. Proto můžeme psát

$$\sigma = \varepsilon_0 (\mathbf{E}_{v_2} - \mathbf{E}_{v_1})_{\Omega} \cdot \mathbf{n}. \quad (1.34)$$

Vyjádříme-li elektrickou intenzitu pomocí potenciálu, dostaneme

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0}{h_1} \left( \frac{\partial \Phi_{v_1}}{\partial \xi^1} - \frac{\partial \Phi_{v_2}}{\partial \xi^1} \right)_{\xi^1=a}. \quad (1.35)$$

Po dosazení za potenciál pole vodiče získáváme plošnou hustotu ve tvaru

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0}{h_1} \sum_k \sum_n A_{k,n} \left( f_{k,n2}(a) \frac{\partial f_{k,n1}(\xi^1)}{\partial \xi^1} - f_{k,n1}(a) \frac{\partial f_{k,n2}(\xi^1)}{\partial \xi^1} \right)_{\xi^1=a} \times \\ \times g_{k,n}^*(\xi_Q^2, \xi_Q^3) g_{n,k}(\xi^2, \xi^3). \quad (1.36)$$

Výraz v kulaté závorce opět představuje wroskián funkcí  $f_2(\xi^1)$ ,  $f_1(\xi^1)$ , tentokrát spočtený pro hodnotu  $\xi^1 = a$ . Potom pro plošnou hustotu máme vztah

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0}{h_1} \sum_k \sum_n A_{k,n} W[f_{k,n2}(\xi^1), f_{k,n1}(\xi^1)](\xi^1 = a) g_{k,n}^*(\xi_Q^2, \xi_Q^3) g_{n,k}(\xi^2, \xi^3). \quad (1.37)$$

Pokud má být na povrchu vodiče konstantní celkový potenciál, musí se na povrchu vodiče vyrušit ty členy, které závisí na dvou proměnných  $\xi^2$  a  $\xi^3$ . Tím pádem jsou koeficienty  $A_{k,n}$  u členů závislých na proměnných  $\xi^2$  a  $\xi^3$  určeny vztahem (1.30). Aby na povrchu vodiče mohl výsledný potenciál nabývat konstantní obecně nenulové hodnoty, nesmí jeden člen záviset na proměnných  $\xi^2$  a  $\xi^3$ . Tento člen nazvěme jako konstantní člen (ale uvědomme si, že závisí na proměnné  $\xi^1$ , konstantním se stává až po dosazení  $\xi^1 = a$ ) a jeho koeficient  $A_{k,n}$  určíme ze vztahu (1.31).

Z relací ortogonality vyplývá, že integrál z funkcí  $g_{n,k}(\xi^2, \xi^3)$  přes povrch vodiče je roven nule. Pouze jediný nenulový integrál z konstantního členu nám s pomocí vztahu (1.31) určí poslední neznámý koeficient  $A_{k,n}$  (zakomponovaný v konstantním členu). Tím pádem budeme znát i hodnotu předtím neznámého celkového potenciálu na povrchu vodiče.

Na bodový náboj nacházející se v elektrostatickém poli vodiče působí elektrická síla

$$\mathbf{F} = -Q(\text{grad } \Phi_{v_2})_{r=r_Q}. \quad (1.38)$$

Výše uvedený postup nalezení elektrického pole bodového náboje a vodiče je poměrně abstraktní. Proto pro hlubší pochopení si později ukážeme postup řešení na konkrétně vybraných úlohách. Zároveň jsme vyslovili mnoho předpokladů. Takže řešení konkrétních úloh může podpořit správnost námi stanovených předpokladů.

### 1.2.2. Jiné postupy při řešení našeho elektrostatického problému

Elektrostatické pole vně vodiče, které generuje samotný vodič, lze vyjádřit i jako elektrostatické pole, které generuje nábojové rozložení ve vnitřním prostoru vodiče. Jedná se o fiktivní rozložení náboje, neboť ve vodiči se žádné volné náboje nenacházejí. To

znamená, že někdy můžeme hledat takový zdroj elektrostatického pole, že výsledný potenciál na povrchu vodiče nabývá konstantní hodnoty. Této metodě,

kdy elektrostatické pole generované vodičem nahrazujeme elektrostatickým polem od rozložení náboje umístěného uvnitř vodiče, se říká *metoda elektrostatického zobrazení*.

Existují i jiné metody, jak nalézt elektrostatické pole vodičů umístěných ve vnějším elektrostatickém poli. Jedna z metod využívá skutečnosti, že v případě elektrostatické rovnováhy je energie výsledného elektrostatického pole vodiče minimální. Toto znění vystihuje *Thomsonova věta*. Hledání minimálního elektrostatického pole vede na variační počet a po matematické stránce se jedná o náročnou disciplínu. Hledání potenciálu pomocí variačního počtu je vhodné v případě numerických problémů.

Další metoda využívá vlastnosti *holomorfních komplexních funkcí*, jejichž reálná i imaginární část splňuje Laplaceovu rovnici. To přímo vyplývá z *Cauchy-Riemannových podmínek*. Zároveň víme, že funkce splňující Laplaceovu rovnici popisují potenciál elektrostatického pole. Můžeme tedy zavést tzv. *komplexní potenciál* jako holomorfní komplexní funkci. Reálná část bude popisovat ekvipotenciální křivky a imaginární část bude popisovat siločáry. Bude-li daný komplexní potenciál konformně zobrazovat tvar daného vodiče na přímku, bude jeho reálná část popisovat ekvipotenciální křivky, z nichž jedna ekvipotenciální křivka odpovídá tvaru vodiče.

Výše uvedenou metodu konformního zobrazení lze použít v případě dvojrozměrných problémů. Avšak lze i tuto metodu použít pro trojrozměrné problémy v případě, že potenciál výsledného elektrostatického pole a vodič jsou translačně symetrické. Tím máme na mysli, že elektrostatické pole je symetrické vůči posunutí v jednom konkrétním směru. Potom výsledné elektrostatické pole závisí pouze na dvou prostorových souřadnicích a lze daný původně trojrozměrný problém převést na dvojrozměrný problém. Typickým příkladem soustavy, u které lze použít metody konformního zobrazení, je homogenně nabitá přímka umístěná v blízkosti uzemněného válce. Protože se výhradně zabýváme soustavami bodový náboj umístěný v blízkosti vodiče, není možné v tomto případě metodu konformního zobrazení použít.

### 1.2.3. Dutý vodič

Dosud jsme uvažovali vodiče, které byly v celém svém objemu vyplněny vodivou látkou. Co se ale bude dít, kdyby vodič nebyl plný, tedy kdyby byl dutý?

Zajímavá situace nastane, pokud se uvnitř dutiny nenacházejí volné náboje. To potom znamená, že pro dosažení rovnovážného stavu, je nutná nulovost výsledného elektrostatického pole pouze tam, kde se nacházejí volné náboje. Z čehož vyplývá, že povrch vodiče musí tvořit ekvipotenciální plochu a oblast, kde se nacházejí volné náboje, tvoří ekvipotenciální objem. Avšak pro dosažení rovnovážného stavu není nutné,

aby uvnitř dutiny bylo elektrostatické pole nulové. Přestože není nutná nulovost elektrostatického pole uvnitř dutiny vodiče, tak v případě konstantní velikosti celkového potenciálu na povrchu vodiče je elektrostatické pole uvnitř dutiny vodiče vždy nulové. Tato zajímavá skutečnost má své matematické opodstatnění, které přímo vyplývá z Laplaceovy rovnice. Řešením Laplaceovy rovnice je spojitá funkce, která nikde nenabývá lokálního extrému. To potom znamená, že jediné možné řešení výsledného potenciálu uvnitř vodiče, které nenabývá žádného lokálního extrému a spojitě se napojuje na hodnotu výsledného potenciálu na vnitřním povrchu vodiče, je konstantní potenciál, který je roven hodnotě výsledného potenciálu na vnitřním povrchu vodiče. Z toho vyplývá, že elektrická intenzita i uvnitř dutiny vodiče je vždy nulová.

Zjištění nulovosti výsledného elektrostatického pole uvnitř dutiny vodiče má zásadní praktický význam. Často se setkáváme se situací, kdy chceme například nějaký citlivý přístroj chránit před účinky vnějšího elektrostatického pole. Nejjednodušším způsobem, jak ochránit nějaký přístroj před nežádoucími účinky elektrostatického pole, je jeho uložení do dutiny vodiče. V praxi to znamená, že daný přístroj vložíme například do kovového kontejneru. (Jedná se o princip Faradayovy klece.)

Můžeme i rozebrat situaci, kdy máme dutý vodič, do jehož dutiny umístíme bodový náboj. Podmínka rovnovážného stavu, kdy nedochází k přesunu volných nábojů je pořád stejná. Výsledné elektrostatické pole v celém objemu vodivé látky musí být nulové. Uvnitř dutiny máme určité nenulové elektrostatické pole. V prostoru mezi vnitřním a vnějším povrchem dutého vodiče je elektrostatické pole nulové. Ale jaké elektrostatické pole je vně vodiče, uvažujeme-li, že ve vnějším prostoru se nenacházejí žádné elektrické náboje?

Nejprve předpokládejme, že dutý vodič je izolován. V důsledku elektrostatické indukce se na vnitřním povrchu dutého vodiče indukuje náboj velikosti bodového náboje, ale opačného znamení. (To přímo vyplývá z Gaussova zákona.) Jelikož je dutý vodič izolovaný, musí se na jeho vnějším povrchu objevit náboj velikosti bodového náboje. Z toho potom vyplývá, že je-li uvnitř dutiny vodiče umístěn bodový náboj, pak elektrostatické pole vně tohoto dutého vodiče není nulové. Tudíž v tomto případě není možné chránit prostředí vně vodiče před účinky elektrostatického pole bodového náboje umístěného uvnitř dutiny vodiče.

Ovšem jiná situace nastává v případě uzemněného dutého vodiče, kdy v jeho vodivém objemu (a i na jeho vnitřním a vnějším povrchu) je výsledný potenciál nulový. Snadno lze odhadnout, že potenciál výsledného elektrického pole klesá v nekonečnu k nule. Ze spojitosti a neexistence lokálního extrémů vyplývá, že výsledný potenciál všude vně vodiče musí být nulový. Potom elektrická intenzita vně vodiče je nulová a náboj se indukuje pouze na vnitřní straně dutého vodiče. Pak je možné chránit prostředí vně vodiče před účinky elektrostatického pole bodového náboje umístěného v dutině uzemněného vodiče.

### 1.3. Řešené příklady

Následně se pokusíme řešit úlohu o bodovém náboji nacházejícím se v blízkosti předem vybraného tvaru uzemněného vodiče. Volíme uzemněný vodič z důvodu početně výhodné okrajové podmínky – nulovosti výsledného potenciálu na povrchu vodiče. Konkrétně představíme řešení pro následující čtyři vodiče: nekonečná rovina, koule, rotační elipsoid a nekonečně dlouhý válec. K samotnému výpočtu využijeme metodu elektrostatického zobrazení, kdy se pokusíme nalézt takové fiktivní rozložení náboje, které nám zaručí nulovost výsledného potenciálu na povrchu vodiče. Nebo pokud nebude jednoduché dané rozložení fiktivního náboje uhodnout, použijeme metodu separace proměnných. Rovněž spočítáme plošnou hustotu náboje naindukovaného na povrchu vodiče a sílu, kterou je daný bodový náboj k uzemněnému vodiči přitahován.

#### 1.3.1. Bodový náboj umístěný v blízkosti uzemněné vodivé roviny

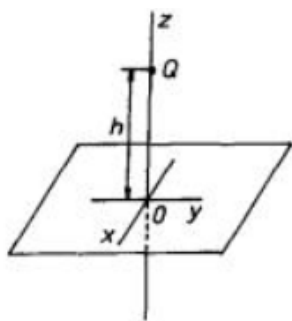
Mějme v rovině  $z = 0$  uzemněnou nekonečnou vodivou rovinou (dále jen vodivá rovina). Umístěme bodový náboj velikosti  $Q$  na osu  $z$  do výšky  $h$  od vodivé roviny. A ptáme se, jak bude vypadat výsledný potenciál elektrostatického pole této soustavy v prostoru, kde je umístěn bodový náboj velikosti  $Q$ , tedy v oblasti  $z > 0$ .

Poměrně jednoduše lze uhádnout, že když do bodu  $[0,0,-h]$  umístíme bodový náboj velikosti  $-Q$ , získáme takové výsledné elektrostatické pole, jehož potenciál na povrchu vodivé roviny je nulový. Neboli elektrostatické pole soustavy bodového náboje umístěného v blízkosti uzemněné vodivé roviny (v oblasti  $z > 0$ ) odpovídá elektrostatickému poli soustavy bodového náboje velikosti  $Q$  a bodového náboje velikosti  $-Q$  umístěného zrcadlově souměrně k vodivé rovině. K nalezení výsledného potenciálu dané soustavy jsme využili metody elektrostatického zobrazení. Konkrétně se v tomto případě daná metoda nazývá zrcadlení náboje, neboť povrch vodivé desky se chová jako zrcadlo. V předmětovém prostoru se nachází náboj  $Q$  a v obrazovém prostoru se nachází „zrcadlený“ náboj  $-Q$ . Avšak toto „zrcadlo“ má takovou vlastnost, že převrací znaménko náboje.

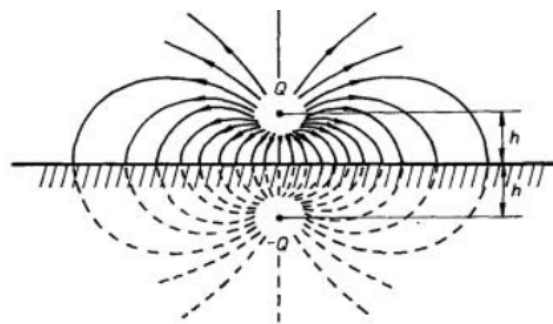
Celkový potenciál pro  $z > 0$  je tedy dán vztahem

$$\Phi_2 = \Phi_Q + \Phi_{v_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z+h)^2}} \right], \quad (1.39)$$

kde  $\rho^2 = x^2 + y^2$ .



Obr. 1.2. Bodový náboj umístěný nad vodivou rovinou.  
Převzato z [1].



Obr. 1.3. K metodě zrcadlení náboje.  
Převzato z [1].

Plošnou hustotu náboje naindukovaného na povrchu vodivé roviny nejjednodušeji získáme ze vztahu (1.33):

$$\sigma = \varepsilon_0 \mathbf{E}_2(z=0) \cdot \mathbf{e}_z = -\varepsilon_0 \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right)_{z=0}. \quad (1.40)$$

Po dosazení dostáváme

$$\sigma = -\frac{Qh}{2\pi(\rho^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.41)$$

Následně spočítáme sílu, kterou je bodový náboj k vodivé rovině přitahován. Ze symetrického rozložení plošné hustoty naindukovaného náboje lze usoudit, že na bodový náboj působí síla pouze ve směru opačném k ose  $z$ . Ze vztahu (1.38) přímo vyplývá

$$F_z = -Q \left( \frac{\partial \Phi_{v_2}}{\partial z} \right)_{\rho=0, z=h} = -\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 h^2}. \quad (1.42)$$

Všimněme si, že síla působící mezi bodovým nábojem a vodivou rovinou odpovídá vzájemnému silovému působení dvou nábojů  $Q$  a  $-Q$  umístěných ve vzájemné vzdálenosti  $2h$ . To přímo vyplývá ze skutečnosti, že elektrostatické pole vodivé desky pro  $z > 0$  odpovídá elektrostatickému poli fiktivního bodového náboji  $-Q$ .

### 1.3.2. Bodový náboj umístěný v blízkosti uzemněné vodivé koule

Uvažujme uzemněnou vodivou kouli o poloměru  $R$ , jejíž střed leží v počátku souřadnic. Na osu  $z$  do vzdálenosti  $r = h$  ( $h > R$ ) opět umístíme náboj velikosti  $Q$ . Nyní nás bude zajímat výsledné elektrostatické pole vně uzemněné vodivé koule.

Danou úlohu lze řešit rovněž metodou elektrostatického zobrazení. Na osu  $z$  umístíme náboj velikosti  $Q'$  a to do vzdálenosti  $r = a$  menší než poloměr vodivé koule. Náš fiktivní náboj  $Q'$  se tedy nachází uvnitř vodivé koule. Výsledné elektrostatické pole na povrchu koule je potom dáno vztahem

$$\Phi_2 = \Phi_Q + \Phi_{Q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{r} + \frac{Q'}{r'} \right). \quad (1.43)$$

Příčemž  $r$  značí vzdálenost mezi bodovým nábojem velikosti  $Q$  a vybraným bodem  $A$  ležícím na povrchu koule,  $r'$  označuje vzdálenost mezi bodovým nábojem  $Q'$  a vybraným bodem  $A$ . V libovolné bodě na povrchu koule musí být výsledný potenciál roven nule. Odtud pro velikost bodového náboje  $Q'$  dostáváme

$$Q' = -\frac{r'}{r} Q. \quad (1.44)$$

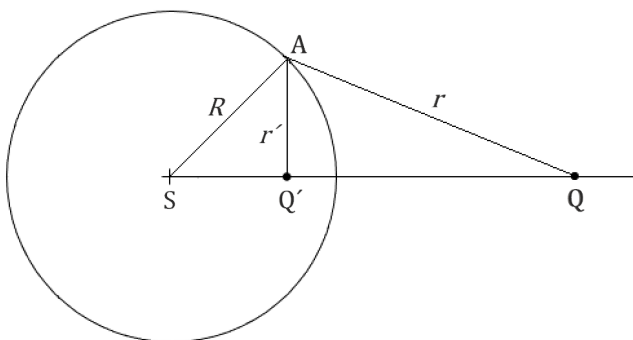
Poměr  $r'/r$  musí být na celém povrchu koule konstantní. Toho lze dosáhnout, pokud trojúhelníky  $SQA$ ,  $AQQ'$  a  $SAQ'$  budou podobné (viz obr. 1.4). Z podobnosti daných trojúhelníků vyplývá

$$\frac{R}{h} = \frac{r'}{r} = \frac{a}{R}. \quad (1.45)$$

Odtud pro velikost bodového náboje  $Q'$  a vzdálenost  $a$  dostáváme

$$Q' = -\frac{R}{h} Q, \quad a = \frac{R^2}{h}. \quad (1.46)$$

Metodu elektrostatického zobrazení, kdy umístíme fiktivní bodový náboj dovnitř uzemněné vodivé koule, nazýváme kulová inverze.



Obr. 1.4. Kulová inverze.



Vyjádříme celkový potenciál vně vodivé koule ve sférických souřadnicích  $(r, \vartheta, \varphi)$ . Pro tento problém je nejsnadnější použít *cosinovu větu*, kdy úhel sevřený mezi polohovým vektorem  $\mathbf{r}_Q$  a polohovým vektorem zkoumaného místa  $\mathbf{r}$  odpovídá azimutálnímu úhlu  $\vartheta$ . Podobně pro úhel sevřený mezi  $\mathbf{r}_{Q'}$  (polohový vektor vyjadřující polohu fiktivního náboje) a  $\mathbf{r}$  je rovněž úhel  $\vartheta$ , neboť oba bodové náboje  $Q$  a  $Q'$  leží na ose  $z$ . Na základě cosinovy věty dostáváme:

$$\Phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{\sqrt{r^2 + h^2 - 2rh\cos\vartheta}} + \frac{Q'}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2racos\vartheta}} \right). \quad (1.47)$$

Plošnou hustotu náboje naindukovaného na povrchu vodivé koule nejjednodušeji získáme opět ze vztahu (1.33):

$$\sigma = \epsilon_0 (\mathbf{E}_2)_{r=R} \cdot \mathbf{e}_r = -\epsilon_0 \left( \frac{\partial\Phi_2}{\partial r} \right)_{r=R}. \quad (1.48)$$

Po dosazení získáváme

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{Q(R - h\cos\vartheta)}{(R^2 + h^2 - 2Rh\cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{Q'(R - a\cos\vartheta)}{(R^2 + a^2 - 2Ra\cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (1.49)$$

Dosadíme-li za velikost fiktivního náboje  $Q'$  a vzdálenost  $a$  z (1.46), dostaneme vztah

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{Q(R - h\cos\vartheta)}{(R^2 + h^2 - 2Rh\cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{Q(h^2 - Rh\cos\vartheta)}{R(R^2 + h^2 - 2Rh\cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}} \right], \quad (1.50)$$

který lze upravit na tvar

$$\sigma = - \frac{Q(h^2 - R^2)}{4\pi R(R^2 + h^2 - 2Rh\cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.51)$$

Síla, kterou je bodový náboj ke kouli přitahován, je rovna síle, kterou na sebe vzájemně působí bodový náboj  $Q$  a fiktivní náboj  $Q'$ . Jelikož dané plošné rozložení náboje naindukovaného na povrchu vodivé koule je axiálně symetrické, bude výsledná síla působící na daný bodový náboj  $Q$  mít směr opačný ke směru osy  $z$ :

$$F_z = - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{hR}{(h^2 - R^2)^2}. \quad (1.52)$$

### **Bodový náboj se nachází uvnitř duté koule**

Můžeme rovněž uvažovat případ, kdy uzemněná vodivá koule je dutá. Uvažujme, že dutina má tvar soustředné koule. Pokud bodový náboj umístíme do dutiny vodivé

koule, lze pro řešení daného problému použít rovněž kulovou inverzi. Dokonce můžeme přímo využít předchozí řešení. Tentokrát se bodový náboj  $Q'$  nachází na ose  $z$  ve vzdálenosti  $a$  uvnitř koule a fiktivní náboj  $Q$  se nachází na ose  $z$  ve vzdálenosti  $h$ . Pro výpočet plošné hustoty náboje naindukovaného na vnitřním povrchu duté vodivé koule můžeme použít vztah (1.32). Ale uvědomme si, že výsledné elektrické pole je uvnitř dutiny nenulové a vně duté vodivé koule nulové, pak můžeme použít vztah (1.48), který musíme ještě vynásobit mínus jedničkou.

Vzhledem k tomu, že máme bodový náboj  $Q'$  umístěný ve vzdálenosti  $a$ , musíme plošnou hustotu danou vztahem (1.51) vyjádřit právě pomocí  $Q'$  a vzdálenosti  $a$ . Pokud chceme zachovat původní značení – bodový náboj  $Q$  se nachází ve vzdálenosti  $h$ , přeznačíme vzdálenost  $a$  jako  $h$  a náboj  $Q'$  jako  $Q$ . Potom plošná hustota náboje naindukovaného na vnitřním povrchu koule bude dána vztahem

$$\sigma = -\frac{Q(R^2 - h^2)}{4\pi R(R^2 + h^2 - 2Rh\cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}}, \quad (1.53)$$

kde  $R$  tentokrát značí poloměr kulové dutiny.

Nyní se podívejme na speciální případ, kdy se bodový náboj nachází ve středu koule ( $h = 0$ ). Potom pro plošnou hustotu náboje naindukovaného na vnitřním povrchu kulové plochy dostáváme

$$\sigma = -\frac{Q}{4\pi R^2}. \quad (1.54)$$

V tomto případě je náboj rozložen rovnoměrně po celém vnitřním povrchu vodivé kulové plochy.

### Postup řešení pomocí rozkladu potenciálu

Pokud bychom neznali kulovou inverzi, můžeme danou úlohu bodový náboj nacházející se v blízkosti uzemněné vodivé koule můžeme řešit pomocí naší metody přímého nalezení potenciálu uzemněného vodiče, která vychází z řešení Laplaceovy rovnice pomocí separace proměnných.

Nejprve je potřeba zvolit vhodný systém souřadnic. Zajímáme-li se o vodič tvaru koule, zvolíme sférické souřadnice  $(r, \vartheta, \varphi)$ . Následně potenciál bodového náboje vyjádřený ve sférických souřadnicích rozložíme:

$$\Phi_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{h^{n+1}} P_n(\cos\vartheta), \quad r < h \quad (1.55)$$

$$\Phi_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\vartheta), \quad r > h \quad (1.56)$$

kde  $P_n(x)$  označuje Legendreovy polynomy. Protože k samotnému výpočtu nás zajímá potenciál v blízkosti povrchu vodivé koule, využijeme pouze rozvoj (1.55).

Poté, co jsme našli rozklad potenciálu bodového náboje, jsme již schopni vyjádřit potenciál pole vodiče v jeho vnější oblasti. Ze vztahů (1.28) a (1.29) vyplývá:

$$\Phi_{v_1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{r^n}{R^{n+1}} P_n(\cos \vartheta) . \quad (1.57)$$

$$\Phi_{v_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{R^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \vartheta) . \quad (1.58)$$

Neznámé koeficienty  $A_n$  nalezneme z okrajové podmínky nulovosti výsledného potenciálu na povrchu koule. Ze vztahu (1.30) obdržíme

$$A_n = -\left(\frac{R}{h}\right)^{n+1} . \quad (1.59)$$

Nalezené koeficienty  $A_n$  dosadíme do vztahů (1.57) a (1.58). Po dosazení dostáváme

$$\Phi_{v_1} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{h^{n+1}} P_n(\cos \vartheta) . \quad (1.60)$$

$$\Phi_{v_2} = -\frac{QR}{4\pi\epsilon_0 h} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R^2}{h}\right)^n \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos \vartheta) . \quad (1.61)$$

Zavedeme následující substituce

$$Q' = -\frac{R}{h} Q , \quad a = \frac{R^2}{h} .$$

Řada (1.60) se liší od řady (1.55) pouze znaménkem a její sečtení odpovídá záporně vzaté hodnotě potenciálu bodového náboje. To bychom očekávali, neboť výsledný potenciál uvnitř koule je nulový. Sečteme-li řadu (1.61), získáme očekávaný potenciál  $\Phi_{v_2}$  (potenciál fiktivního náboje  $Q'$ ), který vystupuje ve vztahu (1.47). Jednoduše řečeno, řešení pomocí rozkladu potenciálu bodového náboje přináší stejné výsledky, jaké jsme získali řešením kulovou inverzí.

Kdybychom chtěli řešit úlohu, kdy je bodový náboj umístěn uvnitř duté koule, pomocí metody přímého nalezení potenciálu uzemněného vodiče, použili bychom pro potenciál bodového náboje vztah (1.56).

### 1.3.3. Bodový náboj umístěný v blízkosti vodivého rotačního elipsoidu

Mějme uzemněný vodivý rotační elipsoid, jehož osa symetrie je totožná s osou  $z$ . Rotační elipsoid vznikne rotací elipsy kolem jedné z její os. Rotujeme-li elipsu kolem její hlavní osy, na níž leží její ohniska, získáme tzv. *protáhlý rotační elipsoid*. Rotujeme-li elipsu kolem její vedlejší osy, získáme tzv. *zploštělý rotační elipsoid*.

Naši úlohu budeme řešit pouze pro protáhlý rotační elipsoid. Mějme tedy uzemněný vodivý protáhlý rotační elipsoid (dále jen vodivý rotační elipsoid), jehož osa symetrie je totožná s osou  $z$ . Hlavní poloosu daného vodivého rotačního elipsoidu označme jako  $a$  a jeho vedlejší poloosu označme jako  $b$  ( $a > b$ ).

Rotační elipsoid je axiálně symetrické těleso. Proto pro zjednodušení situace umístíme bodový náboj na osu  $z$  do vzdálenosti  $z = h$  ( $h > a$ ), čímž získáme jednodušší axiálně symetrické elektrostatické pole vodiče.

Řešení daného problému nebudeme provádět pomocí metody elektrostatického zobrazení. Nalézt takové fiktivní rozložení náboje, jehož elektrostatické pole by nahrazovalo elektrostatické pole rotačního elipsoidu, je v podstatě nemožné. Proto se pokusíme zkonstruovat řešení na základě nalezení rozkladu bodového náboje v protáhlých sféroidních souřadnicích  $(\xi, \eta, \varphi)$ , které jsou definovány

$$\begin{aligned}x &= e\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos \varphi, \\y &= e\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \sin \varphi, \\z &= e\xi\eta, \\ \xi &\geq 1, \quad \eta \in (-1, 1), \quad \varphi \in (0, 2\pi).\end{aligned}\tag{1.62}$$

Konstanta  $e$  má rozměrový charakter délky, neboť souřadnice  $(\xi, \eta, \varphi)$  jsou bezrozměrné. Souřadnicové plochy  $\xi = konst.$  odpovídají povrchu rotačního elipsoidu a souřadnicové plochy  $\eta = konst.$  odpovídají povrchu hyperboloidu.

Nás zajímá taková souřadnicová plocha  $\xi = \xi_0$ , která bude odpovídat povrchu našeho vodivého rotačního elipsoidu, který je určen délkou hlavní poloosy  $a$  a délkou vedlejší poloosy  $b$ . Délky každé z obou poloos  $a$  a  $b$  pak jednoznačně určují neznámé hodnoty konstanty  $e$  a souřadnice  $\xi_0$ .

Poloosy  $a$  a  $b$  jsou určeny vztahy

$$a = e\xi_0, \quad b = e\sqrt{(\xi_0^2 - 1)}.\tag{1.63}$$

Ze vztahů (1.63) pro  $e$  a  $\xi_0$  vyplývají vztahy

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad \xi_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}.\tag{1.64}$$

Nyní když víme, jak vyjádřit povrch vodivého elipsoidu v protáhlých sféroidních souřadnicích, můžeme přistoupit k rozkladu potenciálu bodového náboje v protáhlých sféroidních souřadnicích [3]:

$$\Phi_Q = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 e} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Q_n\left(\frac{h}{e}\right) P_n(\xi)P_n(\eta), \quad e\xi < h \quad (1.65)$$

$$\Phi_Q = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 e} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n\left(\frac{h}{e}\right) Q_n(\xi)P_n(\eta), \quad e\xi > h \quad (1.66)$$

kde  $P_n(x)$  označuje Legendreovy polynomy, které řeší Legendreovu diferenciální rovnici a již jsme se s nimi setkali při řešení úlohy bodový náboj umístěný v blízkosti vodivé koule. Druhým lineárně nezávislým řešením Legendreovy diferenciální rovnice jsou funkce  $Q_n(x)$ . Někdy se zavádí následující terminologie. Funkce  $P_n(x)$  se označují jako *Legendreovy funkce prvního druhu* a funkce  $Q_n(x)$  se označují jako *Legendreovy funkce druhého druhu*.

### 1. Bodový náboj se nachází vně rotačního elipsoidu

Pokud se bodový náboj nachází vně rotačního elipsoidu, k výpočtům využijeme vztah (1.65). Jelikož známe rozklad potenciálu bodového náboje, můžeme rovnou využít námi sestavených postupů obecného řešení (vycházející z metody separace proměnných). Podle vztahů (1.28) a (1.29) pro potenciál pole vodiče dostáváme následující vztahy

$$\Phi_{v_1} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 e} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n Q_n(\xi_0) P_n(\xi)P_n(\eta), \quad (1.67)$$

$$\Phi_{v_2} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 e} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n P_n(\xi_0) Q_n(\xi)P_n(\eta). \quad (1.68)$$

Neznámé koeficienty  $A_n$  určíme z nulovosti výsledného potenciálu na povrchu rotačního elipsoidu. Potom pro koeficienty  $A_n$  dostáváme

$$A_n = -\frac{Q_n\left(\frac{h}{e}\right)}{Q_n(\xi_0)}. \quad (1.69)$$

S již známými koeficienty  $A_n$  mají potenciály  $\Phi_{v_1}$  a  $\Phi_{v_2}$  následující tvar

$$\Phi_{v_1} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 e} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Q_n\left(\frac{h}{e}\right) P_n(\xi)P_n(\eta), \quad (1.70)$$

$$\Phi_{v_2} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 e} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Q_n\left(\frac{h}{e}\right) \frac{P_n(\xi_0)}{Q_n(\xi_0)} Q_n(\xi) P_n(\eta). \quad (1.71)$$

Nyní když známe potenciál pole vodivého rotačního elipsoidu, můžeme spočítat plošnou hustotu náboje naindukovaného na jeho povrchu. K samotnému výpočtu použijeme vztah (1.37). Potom ale musíme určit Lamého koeficient  $h_1$  a wronskián funkcí  $Q_n(\xi); P_n(\xi)$ , oboje pro  $\xi = \xi_0$ . Lamého koeficient  $h_1$  pro  $\xi = \xi_0$  je určen vztahem [2]

$$h_1 = \sqrt{\frac{\xi_0^2 - \eta^2}{\xi_0^2 - 1}} e. \quad (1.72)$$

a daný wronskián je pro  $\xi = \xi_0$  roven [4]

$$W[Q_n(\xi), P_n(\xi)](\xi = \xi_0) = \frac{1}{\xi_0^2 - 1}. \quad (1.73)$$

Po dosazení vyjádřeného Lamého koeficientu  $h_1$  a daného wronskiánu do vztahu (1.37) a následné úpravě dostáváme

$$\sigma = -\frac{Q}{2\pi e^2} \frac{1}{\sqrt{(\xi_0^2 - 1)(\xi_0^2 - \eta^2)}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{Q_n\left(\frac{h}{e}\right)}{Q_n(\xi_0)} P_n(\eta). \quad (1.74)$$

Nyní spočteme sílu, kterou je bodový náboj přitahován k rotačnímu elipsoidu. Daná síla je určena vztahem (1.38). Z axiálně symetricky naindukovaného náboje na rotačním elipsoidu vyplývá, že síla, která působí na bodový náboj, má směr opačný ke směru osy  $z$ :

$$F_z = -\frac{Q}{e} \left( \frac{\partial \Phi_{v_2}}{\partial \xi} \right)_{\xi=\frac{h}{e}, \eta=1}. \quad (1.75)$$

Všimněme si, že Lamého koeficient  $h_1$  v případě  $\eta = 1$  je roven  $e$ . Po dosazení za  $\Phi_{v_2}$  ze vztahu (1.71) a s použitím vlastnosti  $P_n(1) = 1$  pak pro  $z$ -ovou složku síly působící na bodový náboj dostáváme

$$F_z = \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0 e^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{P_n(\xi_0)}{Q_n(\xi_0)} Q_n\left(\frac{h}{e}\right) \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} Q_n(\xi) \right]_{\xi=\frac{h}{e}}. \quad (1.76)$$

Poznamenejme, že pro  $P_n(1) = 1$  a derivace funkce  $Q_n(\xi)$  v bodě  $\xi = h/e$  můžeme vyjádřit pomocí vztahu [4]

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \xi} Q_n(\xi) \right]_{\xi=\frac{h}{e}} = \frac{\alpha^2}{h^2 - \alpha^2} \left[ Q_{n-1}\left(\frac{h}{e}\right) - \frac{h}{\alpha} Q_n\left(\frac{h}{e}\right) \right]. \quad (1.77)$$

## 2. Bodový náboj se nachází uvnitř dutého rotačního elipsoidu

Můžeme rovněž uvažovat situaci, kdy máme uzemněný dutý rotační elipsoid. Předpokládejme, že dutina má tvar souosého (protáhlého) rotačního elipsoidu  $\xi = \xi_0$ . Do dutiny rotačního elipsoidu umístíme bodový náboj. Můžeme se potom ptát, jaká bude plošná hustota náboje naindukovaného na vnitřním povrchu dutého rotačního elipsoidu?

Postup výpočtů bude podobný jako v případě, kdy se bodový náboj nachází vně rotačního elipsoidu. V případě, že se bodový náboj nachází uvnitř rotačního elipsoidu, použijeme pro rozklad potenciálu bodového náboje vztah (1.66). Potenciál pole rotačního elipsoidu bude určen opět vztahy (1.70) a (1.71). Ale tentokrát jsou koeficienty  $A_n$  určeny vztahem

$$A_n = - \frac{P_n\left(\frac{h}{e}\right)}{P_n(\xi_0)} . \quad (1.78)$$

Plošnou hustotu náboje naindukovaného na vnitřní povrchu rotačního elipsoidu získáme opět pomocí vztahu (1.37). Po dosazení koeficientů (1.78) do (1.37) pak pro plošnou hustotu náboje naindukovaného na vnitřní straně vodivého rotačního elipsoidu dostáváme

$$\sigma = - \frac{Q}{2\pi e^2} \frac{1}{\sqrt{(\xi_0^2 - 1)(\xi_0^2 - \eta^2)}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) \frac{P_n\left(\frac{h}{e}\right)}{P_n(\xi_0)} P_n(\eta) . \quad (1.79)$$

### 1.3.4. Bodový náboj umístěný v blízkosti uzemněného vodivého válce

Mějme uzemněný vodivý nekonečně dlouhý válec (dále jen vodivý válec) o poloměru  $R$  daný tak, aby jeho osa symetrie byla totožná s osou  $z$ . Bodový náboj umístíme tentokrát na osu  $x$  do vzdálenosti  $x = h$  ( $h > R$ ).

Řešení dané úlohy pro vodivý válec bychom teoreticky mohli získat i z řešení pro vodivý protáhlý rotační elipsoid tak, že by se hlavní poloosa rotačního elipsoidu v limitě protáhla do nekonečna, čímž bychom získali nekonečně dlouhý válec. Avšak takovýto postup zde provádět nebudeme. Danou úlohu vyřešíme přímo pomocí již používaného postupu, kdy nalezneme rozklad potenciálu ve vhodně zvoleném souřadnicovém systému, z něhož jsme potom schopni pomocí námi stanovených kroků zkonstruovat samotné řešení dané úlohy.

Nejprve zavedeme vhodnou soustavu souřadnic. Jelikož řešíme úlohu, v níž vystupuje válec, zvolíme válcové souřadnice  $(\rho, \varphi, z)$ . Dále vhodně rozložíme potenciál bodového náboje vyjádřený v těchto souřadnicích:

$$\Phi_Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{\rho^2 + h^2 - 2\rho h \cos \varphi + z^2}}. \quad (1.80)$$

Potenciál bodového náboje vyjádříme jako Fourierovu transformaci modifikované Besselovy funkce druhého druhu  $K_0$  [5]:

$$\Phi_Q = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0} \int_0^\infty K_0(k\sqrt{\rho^2 + h^2 - 2\rho h \cos \varphi}) \cos(kz) dk. \quad (1.81)$$

Výraz  $K_0(k\sqrt{\rho^2 + h^2 - 2\rho h \cos \varphi}) = K_0(ku)$  lze rozložit do řady modifikovaných Besselových funkcí prvního druhu  $I_n$  a druhého druhu  $K_n$  [5]:

$$K_0(ku) = K_0(kh)I_0(k\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_n(kh)I_n(k\rho) \cos n\varphi, \quad \text{pro } \rho < h \quad (1.82)$$

$$K_0(ku) = I_0(kh)K_0(k\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(kh)K_n(k\rho) \cos n\varphi. \quad \text{pro } \rho > h \quad (1.83)$$

### 1. Bodový náboj se nachází vně vodivého válce

Nejprve se zabýváme řešením úlohy, kdy se bodový náboj nachází vně vodivého válce. Vzhledem k tomu, že nás zajímá elektrostatické pole vně válce v blízkosti jeho povrchu, použijeme vztah (1.82). Potenciál pole vodiče pro jeho dvě oblasti zapišme ve tvaru

$$\Phi_{v_1} = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0} \int_0^\infty \left[ A_0(k)K_0(kR)I_0(k\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n(k)K_n(kR)I_n(k\rho) \cos n\varphi \right] \times \\ \times \cos(kz) dk. \quad (1.84)$$

$$\Phi_{v_2} = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0} \int_0^\infty \left[ A_0(k)I_0(kR)K_0(k\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n(k)I_n(kR)K_n(k\rho) \cos n\varphi \right] \times \\ \times \cos(kz) dk. \quad (1.85)$$

Neznámé koeficienty  $A_n(k)$ , které jsou funkcemi proměnné  $k$ , určíme z nulovosti výsledného potenciálu na povrchu válce. Potom pro koeficienty  $A_n(k)$  dostáváme

$$A_n(k) = - \frac{K_n(kh)}{K_n(kR)}, \quad \text{pro } n \geq 0. \quad (1.86)$$

Nyní když známe potenciál pole vodiče, můžeme spočítat plošnou hustotu náboje naindukovaného na povrchu válce. K samotnému výpočtu opět použijeme



vztah (1.37). Jak asi tušíme, musíme pro výpočet plošné hustoty určit Lamého koeficient  $h_1$  a wronskián funkcí  $K_n(kR)$ ,  $I_n(kR)$ , oboje pro  $\rho = R$ . Lamého koeficient  $h_1$  je v tomto případě roven jedné a daný wronskián je pro  $\rho = R$  roven [4]

$$W[K_n(k\rho), I_n(k\rho)](\rho = R) = \frac{1}{R} \quad (1.87)$$

Po dosazení vyjádřeného wronskiánu do vztahu (1.37) dostáváme

$$\sigma = -\frac{Q}{2\pi^2 R} \int_0^\infty \left[ \frac{K_0(kh)}{K_0(kR)} + 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{K_n(kh)}{K_n(kR)} \cos n\varphi \right] \cos(kz) dk. \quad (1.88)$$

Následně spočteme sílu, kterou je bodový náboj přitahován k válci. Daná síla je rovna součinu velikosti náboje a elektrické intenzity pole generovaného samotným válcem. Ze symetrie plošné hustoty náboje naindukovaného na válci vyplývá, že síla, která působí na bodový náboj, má směr opačný ke směru radiály  $\rho$  (v našem případě síla proti směru osy  $x$ ):

$$F_\rho = -Q \left( \frac{\partial \Phi_{v_2}}{\partial \rho} \right)_{\rho=h, z=0} = \frac{Q^2}{2\pi^2 \varepsilon_0} \times \\ \times \int_0^\infty \left[ K_0(kh) \frac{I_0(kR)}{K_0(kR)} \frac{\partial}{\partial \rho} K_0(k\rho) + 2 \sum_{n=1}^\infty K_n(kh) \frac{I_n(kR)}{K_n(kR)} \frac{\partial}{\partial \rho} K_n(k\rho) \cos n\varphi \right]_{\rho=h} dk. \quad (1.90)$$

Derivaci funkcí  $K_n(k\rho)$  lze vyjádřit přímo pomocí funkcí  $K_n(k\rho)$  [4]:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} K_0(k\rho) = -kK_1(k\rho) \\ \frac{\partial}{\partial \rho} K_n(k\rho) = (-1)^{n-1} \frac{k}{2} [K_{n-1}(k\rho) + K_{n+1}(k\rho)], \quad \text{pro } n \geq 1 \quad (1.91)$$

Po úpravě pro sílu, kterou je bodový náboj přitahován k válci, dostáváme vztah

$$F_\rho = -\frac{Q^2}{2\pi^2 \varepsilon_0} \int_0^\infty k \left[ M_0(k, h, R) + \sum_{n=1}^\infty M_n(k, h, R) \cos n\varphi \right] dk, \quad (1.92)$$

kde  $M_n(k, h, R)$  definujeme vztahy

$$M_0(k, h, R) = \frac{I_0(kR)}{K_0(kR)} K_0(kh) K_1(kh), \\ M_n(k, h, R) = (-1)^n \frac{I_n(kR)}{K_n(kR)} K_n(kh) [K_{n-1}(kh) + K_{n+1}(kh)], \quad \text{pro } n \geq 1.$$

(1.93)

Můžeme rovněž uvažovat situaci, kdy máme dutý válec. Předpokládejme, že dutina má tvar souosého válce. Do dutiny válce umístíme bodový náboj. Jaká bude plošná hustota náboje naindukovaného na vnitřním povrchu válce?

## 2. Bodový náboj se nachází uvnitř vodivého válce

Postup výpočtů bude podobný jako v případě, kdy se bodový náboj nachází vně válce. V případě, že se bodový náboj nachází uvnitř válce, pro rozklad potenciál bodového náboje využijeme vztah (1.83). Potenciál pole rotačního elipsoidu bude určen opět vztahy (1.84) a (1.85). Ale tentokrát jsou koeficienty  $A_n$  určeny vztahem

$$A_n(k) = - \frac{I_n(kh)}{I_n(kR)}, \quad \text{pro } n \geq 0. \quad (1.94)$$

Plošnou hustotu náboje naindukovaného na vnitřní straně povrchu vodivého válce získáme opět pomocí vztahu (1.37). Po dosazení koeficientů (1.94) do (1.37) pak pro plošnou hustotu náboje naindukovaného na vnitřní straně vodivého válce dostáváme

$$\sigma = - \frac{Q}{2\pi^2} \int_0^\infty \left[ \frac{I_0(kh)}{I_0(kR)} + 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{I_n(kh)}{I_n(kR)} \cos n\varphi \right] \cos(kz) dk, \quad (1.95)$$

kde  $R$  tentokrát značí poloměr válcové dutiny.

Můžeme se ještě podívat na jeden speciální případ, kdy bodový náboj umístíme na osu válce (konkrétně do počátku souřadnic). Potom se vztah (1.95) výrazně zjednoduší, neboť  $I_0(0) = 1$  a  $I_n(0) = 0$ , pro  $n \geq 1$ . Pro plošnou hustotu náboje naindukovaného na vnitřní povrchu v případě, že se bodový náboj nachází na ose válce, dostáváme

$$\sigma = - \frac{Q}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\cos(kz) dk}{I_0(kR)}. \quad (1.96)$$

Lze pokračovat v hledání výsledného elektrostatického pole pro různé tvary vodičů, ale to není náš hlavní záměr. Naším cílem bylo na uvedených příkladech ukázat „sílu“ a především hlubší pochopení metody „separace proměnných“ či „rozkladu“ potenciálu bodového náboje. Uvedené metody umožňují řešit daný problém pro mnohem širší třídu tvarů vodičů, než je pouze vodivá rovina a koule, u kterých si vystačíme s fiktivními náboji. Představený „rozklad potenciálu“ je opravdu velmi silná metoda umožňující řešení úlohy bodový náboj v blízkosti vodiče pro jeho různé tvary, a to analyticky!

## Kapitola 2. Bodový náboj pohybující se v přítomnosti nepohybujícího se vodiče

### 2.1. Obecné úvahy

V první kapitole jsme podrobně rozebrali chování vodiče vloženého do elektrostatického pole. Konkrétně jsme se zabývali interakcí vodiče a bodového náboje. Zjistili jsme, že mezi bodovým nábojem a vodičem existuje přitažlivé silové působení, které je důsledkem elektrostatické indukce. Jak jsme již zjistili, aby mohl nastat rovnovážný stav, musí se bodový náboj nacházet v klidu. Proto musí na bodový náboj působit jiná vnější síla (neelektrostatické povahy), která je v rovnováze se silou, kterou na daný bodový náboj působí vodič. Co se stane, když tato vnější síla přestane působit?

Přestane-li působit vnější síla, počne se bodový náboj pohybovat směrem k vodiči, neboť mezi vodičem a bodovým nábojem existuje přitažlivé silové působení. Jelikož se bodový náboj pohybuje směrem k vodiči, objeví se na povrchu vodiče i nenulové tečné složky elektrické intenzity. Dokonce se objeví i nenulové elektrické pole uvnitř vodiče. Existence nenulového elektrického pole v objemu i na povrchu vodiče způsobí makroskopický pohyb náboje.

Na jedné straně máme bodový náboj, který se v obecném případě pohybuje po nějaké křivce a pro jeho popis pohybu si vystačíme s mechanikou hmotného bodu. Na druhé straně máme vodič, v němž dochází k složitým makroskopickým pohybům náboje, na které můžeme nahlížet jako na pohyb kontinua.

Situace se komplikuje i skutečností, že elektrické pole vodiče, s nímž interaguje bodový náboj, je závislé na poloze bodového náboje. Jedná se o případ, kdy změna polohy bodového náboje vyvolá změnu rozložení naindukovaného náboje. Tato změna zas vyvolá změnu elektrického pole vodiče, které interaguje s bodovým nábojem.

Dále si můžeme uvědomit, že bodový náboj pohybující se s nenulovým zrychlením vyzařuje elektromagnetické vlny. Energie bodového náboje je odnášena v podobě elektromagnetického vlnění, z čehož vyplývá, že vyzařování se projevuje jako brzdná síla, která působí na daný bodový náboj.

Navíc uvažujeme, že v důsledku silového působení se pohybuje pouze bodový náboj. Polohu vodiče máme pevně fixovanou. Můžeme se i ptát, jak se bude pohybovat bodový náboj, v případě pohybujícího se vodiče, nebo když bude vodič volný. Ale zatím se problematikou pohybujícího se vodiče zabývat nebude. Naše poznatky se pokusíme rozšířit pro případ pohybujícího se vodiče až v následující kapitole.

Vyřešit problém pohybu bodového náboje v důsledku přítomnosti vodiče se započtením veškerých odehrávaných procesů není vůbec jednoduché. Nalézt například

časovou závislost polohy bodového náboje pomocí analytických metod je v nejobecnějších situacích téměř nemožné a nezbyvá nám nic jiného než použít účinné numerické metody.

Položme si alespoň otázku, jak daný systém bodový náboj umístěný v blízkosti vodiče popsat. Konkrétně se pokusíme nalézt rovnice, které by popisovaly časový vývoj daného systému.

## 2.2. Pohyb bodového náboje v blízkosti vodiče

### 2.2.1. Časový vývoj soustavy pohybující se bodový náboj v blízkosti vodiče

Nyní se budeme zabývat pohybem bodového náboje vyvolaným v důsledku silového působení vodiče. Uvažujeme případ, kdy se vodič nachází v klidu. V případě pohybu bodového náboje se generuje elektromagnetické pole, na rozdíl od elektrostatického případu, kdy je magnetické pole nulové. U dynamických problémů je již nutné mluvit o elektromagnetické interakci.

Časový vývoj elektromagnetického pole vodiče poté, co do jeho blízkosti umístíme pohybující se bodový náboj, je popsán *Maxwellovými rovnicemi*.

Nechť index 1 označuje elektromagnetické pole uvnitř vodiče a index 2 označuje elektromagnetické pole vně vodiče. Používáme stejné značení jako jsme použili v případě elektrostatické úlohy. Potom pro elektromagnetické pole vodiče (souhrnně v jeho obou oblastech) dostáváme následující rovnice

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_{v,1,2} = 0, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_{v,1,2} = 0, \quad (2.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_{v,1,2} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{v,1,2}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}_{v,1,2} = \mu_0 \mathbf{j}_{1,2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_{v,1,2}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

kde  $\mathbf{E}_{v,1,2}$  opět značí intenzitu elektrického pole vodiče a  $\mathbf{B}_{v,1,2}$  značí indukci magnetického pole vodiče. Konstanty  $\mu_0$  a  $\epsilon_0$  označují permeabilitu a permitivitu vakua. Uvažujeme, že daný vodič není dielektrikum ani magnetikum a připomeňme, že daný vodič se spolu s bodovým nábojem nacházejí ve vakuu. Součin permitivity a permeability vakua je roven převrácené druhé mocnině rychlosti světla  $c$ .

Všimněme si, že uvažujeme nulovou objemovou hustotu volného náboje uvnitř vodiče v každém čase ( $\operatorname{div} \mathbf{E}_{v,1} = 0$ ). Za jakých podmínek je možné splnit tento předpoklad, si ukážeme v podkapitole 2.2.3.

Hustoty objemových proudů  $\mathbf{j}_{1,2}$  jsou určeny následujícími vztahy

$$\mathbf{j}_1 = \mathbf{j}(t, \mathbf{r}), \quad (2.5)$$

$$\mathbf{j}_2 = \mathbf{0}. \quad (2.6)$$

Elektromagnetické pole bodového náboje pohybujícího se rychlostí  $\mathbf{v}$  je popsáno rovnicemi

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_Q = \frac{Q}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q), \quad (2.7)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_Q = 0, \quad (2.8)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_Q = -\frac{\partial \mathbf{B}_Q}{\partial t}, \quad (2.9)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}_Q = \mu_0 \mathbf{v} Q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_Q}{\partial t}. \quad (2.10)$$

Výsledné elektromagnetické pole můžeme vyjádřit jako superpozici elektromagnetického pole vodiče  $\mathbf{E}_v, \mathbf{B}_v$  a bodového náboje  $\mathbf{E}_Q, \mathbf{B}_Q$ . Tedy můžeme psát:

$$\mathbf{E}_{1,2} = \mathbf{E}_{v_{1,2}} + \mathbf{E}_Q, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{B}_{1,2} = \mathbf{B}_{v_{1,2}} + \mathbf{B}_Q. \quad (2.12)$$

## 2.2.2. Elektromagnetické pole pohybujícího se bodového náboje

### 1. Přesné řešení

Rovnice popisující elektromagnetické pole bodového náboje můžeme vyřešit samostatně na rozdíl od řešení elektromagnetického pole vodiče, které právě závisí na elektromagnetickém poli bodového náboje.

Daný problém můžeme s výhodnou řešit pomocí skalárního potenciálu  $\Phi_Q$  a vektorového potenciálu  $\mathbf{A}_Q$ , který splňuje  $\operatorname{rot} \mathbf{A}_Q = \mathbf{B}_Q$ . Pro takto zvolený vektorový potenciál z rovnice (2.9) dostáváme

$$\operatorname{rot} \left( \mathbf{E}_Q + \frac{\partial \mathbf{A}_Q}{\partial t} \right) = 0. \quad (2.13)$$

Z předchozí rovnice vyplývá, že můžeme zavést skalární potenciál  $\Phi_Q$  vztahem

$$\mathbf{E}_Q = -\operatorname{grad} \Phi_Q - \frac{\partial \mathbf{A}_Q}{\partial t}. \quad (2.14)$$

Vyjádřeme rovnici (2.7) a (2.10) pomocí zavedeného skalárního a vektorového potenciálu:

$$\operatorname{div} \left( \operatorname{grad} \Phi_Q + \frac{\partial \mathbf{A}_Q}{\partial t} \right) = -\frac{Q}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q), \quad (2.15)$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{A}_Q) = \mu_0 \mathbf{v} Q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \operatorname{grad} \Phi_Q + \frac{\partial \mathbf{A}_Q}{\partial t} \right). \quad (2.16)$$

Po úpravě dostáváme

$$\Delta \Phi_Q + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A}_Q = -\frac{Q}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q), \quad (2.17)$$

$$\Delta \mathbf{A}_Q - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_Q}{\partial t^2} = \mu_0 \mathbf{v} Q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) + \operatorname{grad} \left( \operatorname{div} \mathbf{A}_Q + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi_Q}{\partial t} \right). \quad (2.18)$$

Zavedeme následující podmínku, kterou nazýváme *Lorentzova kalibrační podmínka*,

$$\operatorname{div} \mathbf{A}_Q + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi_Q}{\partial t} = 0. \quad (2.19)$$

Po zavedení takto zvolené kalibrační podmínky se rovnice (2.17) a (2.18) výrazně zjednoduší na následující tvar

$$\Delta \Phi_Q - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_Q}{\partial t^2} = -\frac{Q}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q), \quad (2.20)$$

$$\Delta \mathbf{A}_Q - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_Q}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{v} Q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q). \quad (2.21)$$

Řešením předchozích rovnic (2.20) a (2.21) jsou takzvané *Liénardovy-Wiechertovy potenciály*, jejichž podrobné odvození je uvedeno například v [6]. Liénardovy-Wiechertovy potenciály mají následující tvar

$$\Phi_Q(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 [1 - \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\beta}(t_r)]} \frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q(t_r)|}, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{A}_Q(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mathbf{v}(t_r)}{4\pi [1 - \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\beta}(t_r)]} \frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q(t_r)|}. \quad (2.23)$$

Všechny časově proměnné veličiny vystupující na pravé straně jsou vyjádřeny v retardovaném čase  $t_r = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q(t_r)|/c$ . Dále jsme zavedli

$$\mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q(t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q(t_r)|}, \quad \boldsymbol{\beta}(t_r) = \frac{\mathbf{v}(t_r)}{c}.$$

Elektrickou intenzitu  $\mathbf{E}_Q$  můžeme vypočítat ze vztahu (2.14) a magnetickou indukci ze vztahu  $\mathbf{B}_Q = \operatorname{rot} \mathbf{A}_Q$ . Po dosazení dostáváme

$$\mathbf{E}_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \left\{ \frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|^2} + \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|} \right\} \right]_{t_r}, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{B}_Q = \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_Q, \quad (2.25)$$

kde  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$  označuje časovou derivaci  $\boldsymbol{\beta}$  a jedná se tedy o poměr zrychlení a rychlosti světla.

Vidíme, že magnetické pole je určeno elektrickou intenzitou. Stačí se tedy zabývat pouze o průběh elektrické intenzity. Můžeme si všimnout, že elektrická intenzita pohyblivého bodového náboje závisí kromě na vzdálenosti od bodového náboje i na jeho pohybovém stavu – na jeho rychlosti i zrychlení.

Vzhledem k tomu, že Maxwellovy rovnice jsou zcela konzistentní s teorií relativity, získané řešení elektrické intenzity a magnetické indukce pohyblivého bodového náboje platí i pro rychlosti blízké rychlosti světla. Zároveň se objevují i retardční efekty, které jsou důsledkem šíření rozruchů konečnou rychlostí, konkrétně rychlostí světla. Podle teorie relativity se každá změna může projevit až za určitou dobu. Přičemž „informace“ o tom, že nějaká změna nastala, se může šířit nanejvýš rychlostí světla. Například když se bodový náboj začne pohybovat, projeví se změna elektrického pole (vniklá důsledkem změny polohy bodového náboje) v nějakém místě až za dobu rovnou poměru vzdálenosti daného místa od výchozí polohy bodového náboje a rychlosti světla.

Vztah (2.24) je poměrně složitý, skládá se ze dvou členů. První člen, který ubývá s druhou mocninou vzdálenosti se označuje jako *Heavisidovo elektrické pole* a druhý člen, který ubývá s první mocninou, označujeme jako *akcelerační elektrické pole*. Součet obou zmíněných elektrických polí označme jako elektrodynamické pole.

Právě akcelerační člen je zodpovědný za vyzařování elektromagnetických vln. V případě pohybu bodového náboje s nulovým zrychlením (bodový náboj rovnoměrný přímočarý pohyb) nedochází k elektromagnetickému záření. Tedy nešíří se žádná informace o „změně“ elektrického pole, a tudíž dynamické elektrické pole odpovídá Heavisidovu elektrickému poli, které lze získat i pomocí Lorentzovy transformace.

## 2. Kvazistatické přiblížení

Elektromagnetické pole bodového náboje je v obecném případě složité. Avšak vztah (2.24) pro elektrickou intenzitu lze výrazně zjednodušit v limitě malých rychlostí a zrychlení, kdy můžeme zanedbat členy  $\boldsymbol{\beta}$  a  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ . Potom získáme elektrické pole, které není závislé na rychlosti i zrychlení bodového náboje. Elektrické pole pomalu pohyblivého bodového náboje má v aproximaci následující tvar

$$\mathbf{E}_Q(t, \mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q(t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q(t_r)|^3}. \quad (2.26)$$

Ve vztahu (2.26) vystupuje retardovaný čas  $t_r$ , který závisí na vzdálenosti od bodového náboje. Retardovaný čas  $t_r$  lze ztotožnit s časem  $t$  za předpokladu, kdy vzdálenost mezi zkoumaným místem popsaným polohovým vektorem  $\mathbf{r}$  a polohou bodového náboje  $\mathbf{r}_Q$  je dostatečně malá. Přesněji řečeno, poměr vzdálenosti  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|$  a rychlosti světla je v porovnání s časem  $t$  zanedbatelný.

Ukažme, že ztotožnění retardovaného času  $t_r$  s časem  $t$  vyplývá přímo z limitního případu malých rychlostí a zrychlení. Pro jednoduchost budeme pracovat se skalárním potenciálem, který v případě zanedbání členů  $\boldsymbol{\beta}$  a  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$  má následující tvar

$$\Phi_Q(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q(t_r)|}. \quad (2.27)$$

Určíme relativní chybu potenciálu  $\delta\Phi_Q$ , které se dopustíme, když místo retardovaného času  $t_r$  použijeme aktuální čas  $t$ . Konkrétně stanovíme rozdíl potenciálu  $\Phi_Q(\mathbf{r}_{Q_r})$ , kde  $\mathbf{r}_{Q_r} = \mathbf{r}_Q(t_r)$ , spočteného podle vztahu (2.27) a potenciálu  $\Phi_Q(\mathbf{r}_Q)$  opět spočteného podle vztahu (2.27), kde místo retardované polohy bodového náboje  $\mathbf{r}_Q(t_r)$  dosadíme jeho polohu  $\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_Q(t)$  v aktuálním čase  $t$ :

$$\delta\Phi_Q = \frac{|\Phi_Q(\mathbf{r}_Q) - \Phi_Q(\mathbf{r}_{Q_r})|}{\Phi_Q(\mathbf{r}_{Q_r})} = \frac{||\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Q_r}| - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q||}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|} \leq \frac{|\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_{Q_r}|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|}. \quad (2.28)$$

Polohový vektor  $\mathbf{r}_{Q_r}$  vyjádříme pomocí Taylorova rozvoje okolo času  $t$ . Připomeňme, že retardovaný čas je dán vztahem  $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Q_r}|/c$ . Potom pro polohový vektor  $\mathbf{r}_{Q_r}$  máme následující rozvoj

$$\mathbf{r}_{Q_r} = \mathbf{r}_Q(t_r) = \mathbf{r}_Q(t) - \mathbf{v} \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Q_r}|}{c} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{v}} \left( \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Q_r}|}{c} \right)^2 + o^3 \quad (2.29)$$

S pomocí vztahu (2.29) lze pro vzdálenost  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Q_r}|$  psát

$$|\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_{Q_r}| \leq v \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Q_r}|}{c} + \frac{1}{2} \dot{v} \left( \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Q_r}|}{c} \right)^2 + o^3 \quad (2.30)$$

Po dosazení vyjádřených vzdáleností  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Q_r}|$  a  $|\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_{Q_r}|$  do vztahu (2.28) máme pro relativní chybu potenciálu odhad

$$\delta\Phi_Q \leq \frac{v}{c} \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Q_r}|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|} + \frac{\dot{v}}{2c^2} \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Q_r}|^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|} \approx \frac{v}{c} + \frac{\dot{v}}{2c^2} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Q_r}| + o^3. \quad (2.31)$$



V limitním případě nízkých rychlostí a zrychlení bodového náboje spolu s nízkou hodnotou rozdílu  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Q_r}|$  lze relativní chybu potenciálu definovanou vztahem (2.28) zanedbat. To potom znamená, že pro malé rychlosti a zrychlení bodového náboje je možné ztotožnit retardovaný čas  $t_r$  s časem  $t$  a pro potenciál bodového náboje můžeme psát

$$\Phi_Q(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q(t)|}. \quad (2.32)$$

Potenciál bodového náboje určený vztahem (2.32) má formálně shodný tvar jako potenciál elektrostatického pole bodového náboje, též označovaný jako *Coulombův potenciál*. V tomto aproximativním případě je elektrická intenzita rovna záporně vzatému gradient skalárního potenciálu (2.32). Nelze však vztah (2.32) přímo ztotožnit s Coulombovým potenciálem bodového náboje, neboť obě pole mají jinou podstatu. Coulombovo elektrické pole odpovídá elektrickému poli bodového náboje, který se nachází v klidu. Avšak vztah (2.32) udává elektrické pole pomalu se pohybujícího se náboje, které se mění s časem. Na základě odlišnosti v podstatě obou polí označme elektrické pole pomalu pohybujícího se bodového náboje jako *kvazistatické elektrické pole*. Pro shrnutí, elektrostatické pole je generované klidovým bodovým nábojem, kdežto kvazistatické elektrické pole je nevírové pole generované pomalu pohybujícím se bodovým nábojem.

Podobně i pro vektorový potenciál dostáváme v kvazistatické aproximaci vztah

$$\mathbf{A}_Q(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q(t_r)|}. \quad (2.33)$$

Vzhledem k tomu, že v kvazistatickém přiblížení připouštíme existenci magnetického pole, je na místě mluvit o kvazistatickém elektromagnetickém poli.

### 2.2.3. Ohmův zákon a jeho meze platnosti

#### 1. Objemový vodič

V předchozí podkapitole jsme našli rovnice popisující elektromagnetického pole pohybujícího se bodového náboje. To znamená, že nyní můžeme přistoupit k řešení elektromagnetického pole vodiče. Pro jednoznačné řešení rovnic popisující elektromagnetické pole vodiče je nutné určitým způsobem vyjádřit proudovou hustotu vystupující v *Ampérově zákoně* – rovnici (2.4).

Už v kapitole věnované elektrostatice jsme se zmínili, že příčinou pohybu volných nositelů náboje uvnitř vodiče (i na jeho povrchu) je vnější elektrické pole. Proto lze předpokládat, že proudová hustota závisí na elektrickém poli. Podívejme se nejprve na objemový vodič. Nejjednodušší závislost proudové hustoty na elektrickém poli udává *Ohmův zákon*

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}, \quad (2.34)$$

kde  $\gamma$  značí měrnou objemovou vodivost. Jedná se o lineární závislost hustoty objemového proudu na elektrické intenzitě pole přítomného uvnitř vodiče. Ohmův zákon splňuje široká třída vodičů. Příkladem můžeme uvést kovový vodič, vodič zhotovený z polovodivého materiálu, a dokonce i elektrolyt (elektricky vodivý kapalný roztok).

Můžeme namítat, že v případě elektromagnetického pole má na pohyb volných nositelů náboje vliv i magnetické pole. V našem případě je vnější elektromagnetické pole generované pohybujícím se bodovým nábojem. Poměr velikosti magnetické a elektrické síly působící na nositele náboje pohybujícího se rychlostí  $\mathbf{v}_d$  (též označovaná jako driftová rychlost) je dán vztahem

$$\frac{F_m}{F_e} = \frac{|\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}_Q|}{E_Q}. \quad (2.35)$$

Použijeme-li vztah (2.25), dostaneme

$$\frac{F_m}{F_e} = \frac{|\mathbf{v}_d \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_Q)|}{cE_Q} \leq \frac{v_d}{c}. \quad (2.36)$$

V případě malých rychlostí pohybu nositelů náboje je poměr (2.36) zanedbatelný. Rychlost pohybu volných nositelů náboje rozhodně není relativistická. Jak vyplývá z Ohmova zákona, rychlost pohybu volných nositelů náboje je úměrná elektrické intenzitě. Ohmův zákon přestává platit až pro velmi silná elektrická pole. Při jak velkém elektrickém poli začíná Ohmův zákon selhávat, zde nebude nějak určovat. Stručný rozbor platnosti Ohmova zákona v silnějších elektrických polích je například uveden v [1]. To potom znamená, že Ohmův zákon můžeme použít v případě „slabšího“ elektrického pole, ve kterém volní nositelé náboje dosahují malé hodnoty driftové rychlosti, tudíž vliv magnetického pole  $\mathbf{B}_Q$  na proudové rozložení ve vodiči je zanedbatelný. Tedy Ohmův zákon ve tvaru (2.34) je platný plně ve svém obsahu. Poznamenejme, že jev vlivu magnetického pole na proudové rozložení ve vodiči se nazývá *Hallův jev*.

Magnetické pole je generováno i samotným vodičem, neboť v jeho objemu (případně i na jeho povrchu) teče elektrický proud. Avšak vliv tohoto „vlastního Hallova jevu“ je tak malý, že jej můžeme zanedbat.

I když předpokládáme, že měrná vodivost nezávisí na vnějším elektromagnetickém poli (vztah mezi proudem a elektrickou intenzitou je lineární), může být měrná vodivost funkcí jiných fyzikálních veličin. Například může být funkcí polohy, což znamená, že měrná vodivost není ve všech místech vodiče stejná. Podívejme se, jak se projeví prostorová proměnlivost měrné vodivosti. Měrná vodivost jako funkce polohy nám totiž nezaručí splnění předpokladu nulovosti hustoty náboje uvnitř vodiče. O tom se může přesvědčit z rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (2.37)$$

Předpoklad neustálé nulovosti hustoty náboje  $\rho$  by byl splněn pouze tehdy, pokud by byla splněna podmínka  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ , jak vyplývá z rovnice kontinuity (2.33). Po dosažení za  $\mathbf{j}$  z Ohmova zákona (2.34) dostáváme

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \operatorname{div} (\gamma \mathbf{E}) = \operatorname{grad} \gamma \cdot \mathbf{E} + \gamma \operatorname{div} \mathbf{E}. \quad (2.38)$$

Předpokládejme, že na počátku je hustota náboje nulová, tedy  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ . Potom je na počátku splněna rovnost  $\operatorname{div} \mathbf{j} = \operatorname{grad} \gamma \cdot \mathbf{E}$ . Pokud není  $\operatorname{grad} \gamma$  kolmý na vektor  $\mathbf{E}$ , pak z rovnice kontinuity vyplývá, že na počátku je časová derivace hustoty náboje nenulová. To má za následek, že v průběhu času se bude hustota náboje uvnitř vodiče určitým způsobem vyvíjet. Tedy v případě prostorově proměnné měrné vodivosti může v průběhu času docházet ke shromáždění náboje uvnitř vodiče a nelze předpokládat neustálou nulovost hustoty náboje.

V případě, že měrná vodivost je konstantní funkce polohy, lze rovnici kontinuity (2.37) zapsat v následujícím tvaru

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho = 0, \quad (2.39)$$

jejíž řešení je určeno vztahem

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \rho_0 e^{-\frac{\gamma}{\epsilon_0} t}. \quad (2.40)$$

Pokud je počáteční hodnota hustoty  $\rho_0 = \rho(t = 0, \mathbf{r})$  všude nulová, pak ze vztahu (2.40) vyplývá i nulovost hustoty náboje v každém pozdějším čase.

V důsledku průchodu proudu uvnitř vodiče dochází k jeho zahřívání. Teplo uvolněné vlivem průchodu elektrického proudu označujeme jako *Jouleovo teplo*. Uvolněné Jouleovo teplo je projevem zvýšení vnitřní energie vodiče, které je důsledkem neustálých srážek pohybujících se volných nositelů náboje s vnitřní strukturou vodiče. Například u kovového vodiče dochází k neustálým srážkám elektronů s krystalovou mříží. Pohybující se elektron při srážce s mříží vodiče předá část své kinetické energie mříži vodiče. Tato část odevzdané kinetické energie elektronu se projeví právě zvýšením vnitřní energie vodiče.

Ale proč se o tom zmiňujeme? Měrná vodivost závisí i na teplotě vodiče, a pokud při průchodu proudu dochází k zahřívání vodiče, musí se měnit měrná vodivost. Avšak kvůli proměnné měrné vodivosti není vztah mezi proudovou hustotou a elektrickou intenzitou již lineární.

Vlivem termoelektrických jevů se situace začíná velmi komplikovat. Pro jednoduchost předpokládáme, že vliv uvolněného tepla na měrnou vodivost je zanedbatelný – uvažujeme „slabé“ elektrické pole, které nevyvolá tak velké proudy, které by způsobily výrazné zahřívání.

Shrňme si naše požadavky či předpoklady.

1. Předpokládáme, že se vodič nachází v elektromagnetickém poli, které je natolik slabé, že lze předpokládat platnost Ohmova zákona ve tvaru (2.34). (Vliv magnetického pole zanedbáváme.)
2. Uvažujeme, že měrná vodivost je konstantní funkcí polohy. Potom při počáteční nulové hustotě náboje je hustota nulová i v pozdějším čase. Tedy za předpokladu konstantnosti měrné vodivosti je splněn náš již dřívější předpoklad neustálé nulové hustoty náboje, a tedy je splněna rovnice (2.1).
3. Zanedbáváme vliv zahřívání vodiče na hodnotu měrné vodivosti. Vliv zahřívání vodiče lze zanedbat v souladu s předpokladem 1 a zároveň neproměnlivost hodnoty vodivosti zaručí splnění předpokladu nulovosti hustoty náboje.

Zkrátka uvažujeme, že měrná vodivost je konstanta nezávislá na všech fyzikálních veličinách. Tedy uvažujeme lineární vztah mezi proudovou hustotou a elektrickou intenzitou. Tento předpoklad výrazně zjednodušuje náš problém, jak uvidíme později.

## 2. Plošný vodič

Teoreticky lze uvažovat případ, kdy tloušťka vodiče je velmi malá. Pak můžeme mluvit o plošném vodiči (vodič je tvořen nějakou plochou) a je na místě mluvit o plošném proudu tekoucím po povrchu plošného vodiče. Pokud by byl vodič teoreticky nekonečně tenký, nemá smysl mluvit o proudu, který by tek l ve směru kolmém k povrchu vodiče. Elektrický náboj je vázaný k povrchu vodiče a za žádných okolností není možné, aby volné elektrické náboje opouštěly povrch vodiče. (Ionizaci vodiče vlivem elektrického pole neuvažujeme – uvažujeme „slabá“ elektromagnetická pole.) Předpokládáme-li, že tloušťka plošného vodiče je nulová, nemůže docházet k přesunu náboje ve směru kolmém k povrchu vodiče. Náboj se tedy může přesouvat pouze po povrchu vodiče – teče plošný proud. V podstatě můžeme říct, že náboj u vodičů nulové tloušťky má pouze dva stupně volnosti.

To potom znamená, že vodivost ve směru kolmém k povrchu vodiče je nulová a ve směru tečném k povrchu vodiče je vodivost nenulová. Může nám přijít podivné, a to zcela oprávněně, že vodivosti přiřazujeme nějaký směr. S vodivostí, konkrétně s měrnou vodivostí, totiž pracujeme jako se skalární veličinou. Mluvit o tom, že vodivost je v určitém směru nulová či nenulová, se zdá být nekonzistentní.

Ve skutečnosti měrná vodivost je tenzorová veličina (představuje tenzor druhého řádu). V případě izotropních vodičů, které jsme doposud uvažovali, je možné s vodivostí pracovat jako se skalární veličinou. Ale v případě anizotropních vodičů je nutné měrnou vodivost chápat tenzorově.

Uvažujme velmi tenký vodič, jímž ve směru jeho normály netečou žádné proudy. Povrchem našeho uvažovaného tenkého vodiče prochází pouze plošný proud. Přičemž uvažujeme, že vodivost ve všech směrech tečných k povrchu vodiče je konstantní. Potom měrná vodivost našeho tenkého vodiče představuje tenzor druhého řádu, vyjádřený v maticovém tvaru

$$\vec{\gamma} = \gamma_S (\vec{I} - \mathbf{nn}^T), \quad (2.41)$$

kde  $\gamma_t$  je konstanta s rozměrem měrné vodivosti,  $\vec{I}$  značí jednotkovou matici a  $\mathbf{n}^T$  označuje transponovaný normálový vektor k povrchu vodiče ( $\mathbf{n}$  je sloupcový vektor).

Protože v plošných vodičích výhradně tečou plošné proudy, je na místě mluvit o plošné hustotě proudu a měrné plošné vodivosti. Pojem měrné plošné vodivosti  $\vec{\gamma}_S$  lze chápat jako limitu  $\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \vec{\gamma} \Delta l$ . Pochopitelně při konečné hodnotě měrné plošné vodivosti  $\vec{\gamma}_S$  musí být měrná vodivost  $\vec{\gamma}$  nekonečná. V aproximaci vodičů velmi malé tloušťky lze měrnou plošnou vodivost definovat vztahem  $\vec{\gamma} \Delta l$ , kde  $\Delta l$  značí tloušťku vodiče. Pochopitelně v aproximaci tenkých vodičů, kdy je jejich tloušťka nenulová, je měrná vodivost  $\vec{\gamma}$  konečná.

I plošné proudy splňují Ohmův zákon, který můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{j}_S = \gamma_S \mathbf{E}_t, \quad (2.42)$$

kde  $\gamma_S = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \gamma_t \Delta l$  a  $\mathbf{j}_S$  označuje hustotu plošného proudu a  $\mathbf{E}_t$  značí tečnou složku vektoru elektrické intenzity k povrchu vodiče. Vztah (2.42) lze formálně získat ze vztahu (2.34). Stačí pouze rovnost (2.34) vynásobit  $\Delta l$ , místo měrné vodivosti  $\gamma$  dosadit její „tenzorový ekvivalent“  $\vec{\gamma}$  a provést limitu  $\Delta l \rightarrow 0$ .

#### 2.2.4. Rovnice elektromagnetického pole v kvazistatickém přiblížení a se započtením Ohmova zákona

Nyní když jsme stanovili vyjádření proudové hustoty v podobě Ohmova zákona, jsme schopni řešit rovnice popisující elektromagnetické pole vodiče. Už několikrát jsme zdůrazňovali, že pro řešení rovnic popisujících elektromagnetické pole vodiče musíme znát elektromagnetické pole pohybujícího se bodového náboje. Avšak nalezené elektromagnetické pole bodového náboje je po matematické stránce poměrně komplikované. Především největší „potíží“ jsou veličiny vyjádřené v retardovaném čase. Na druhou stranu se nám podařilo nalézt aproximační kvazistatické řešení elektromagnetického pole pomalu pohybujícího se bodového náboje, které má výrazně jednodušší matematické vyjádření.

Jelikož elektromagnetické pole vodiče závisí na poli bodového náboje, lze usoudit, že v případě pomalého pohybu bodového náboje je elektromagnetické pole vodiče v aproximaci rovněž kvazistatické.

Předpokladem pro kvazistatickou aproximaci pole vodiče je zanedbání časové derivace indukce magnetického pole vodiče vystupující ve *Faradayově zákoně* – rovnice (2.2.3). Považujeme-li časovou derivaci magnetické indukce za nulovou, je potom i (v aproximaci) nulová rotace intenzity elektrického pole vodiče. To potom znamená, že elektrické pole vodiče můžeme přibližně považovat za potenciální. Přičemž potenciál kvazistatického elektrického pole splňuje Laplaceovu rovnici, a tudíž elektrickou intenzitu můžeme vyjádřit jako záporně vzatý gradient tohoto potenciálu.

Na rozdíl od elektrostatického pole existuje v případě kvazistatického elektrického pole i magnetické pole, ale s vlastností, že jeho časová derivace je prakticky nulová.

Za povšimnutí stojí si uvědomit, že pro případ kvazistatického elektromagnetického pole není nutné nějakým způsobem omezovat hodnotu časové derivace elektrické intenzity.

Na druhou stranu víme, že elektrický proud je úměrný elektrické intenzitě. Zároveň magnetické pole je úměrné elektrickému proudu. Z toho lze usoudit, že časová derivace magnetického pole je úměrná časové změně elektrického pole. Pokud požadujeme, aby časová změna magnetického pole byla zanedbatelná, musíme i omezit velikost časové změny elektrického pole. Do jaké míry musí být časová derivace elektrické intenzity velká, abychom mohli použít kvazistatické přiblížení, záleží na velikosti konstanty úměrnosti mezi časovou změnou obou polí.

Podat kvantitativní kritérium o tom, kdy můžeme elektrické pole vodiče považovat za kvazistatické, není v obecném případě jednoduché. Praktičtější postup je uvědomit si, že je vůbec možné zkonstruovat takovou aproximaci. Po nalezení aproximačního řešení je možné se zpětně podívat, za jakých podmínek s dostatečnou přesností platí dané aproximační řešení.

Na kvazistatické přiblížení se můžeme podívat i z jiného pohledu. Představme si, že v jistém okamžiku se začne měnit elektrického pole. Jak vyplývá z Ampérova zákona, změna elektrického pole vyvolá magnetické pole, které se ovšem rovněž mění v čase. Z Faradayova zákona vyplývá, že časová změna magnetického pole generuje vírové elektrické pole. Tato vlastnost elektromagnetického pole nás přivádí na následující konstrukci řešení elektromagnetického pole. Vyvolaná změna elektrického pole vyvolá magnetické pole (Ampérův zákon). Změna tohoto magnetického pole vyvolá další elektrického pole, jehož změna zas vyvolá další magnetického pole. Přičemž daný proces se neustále „opakuje“ a tím pádem získáváme řešení elektromagnetické pole ve formě řady, kde každý následující člen odpovídá „nově vzniklému“ elektrickému či magnetickému poli.

Právě první člen takto zkonstruovaného rozvoje elektrického pole odpovídá kvazistatickému řešení a má i největší význam. Přičemž význam prvního „kvazistatického členu“ je tím větší, čím jsou změny elektromagnetického pole menší. Jinými slovy, kvazistatické řešení elektrického pole generuje první člen výše popsaného rozvoje časově proměnlivého elektrického pole.

Na základě předchozích úvah můžeme kvazistatické elektromagnetického pole vodiče popsat rovnicemi

$$\Delta\Phi_{v_{1,2}} = 0, \quad (2.43)$$

$$\mathbf{E}_{v_{1,2}} = -\text{grad } \Phi_{v_{1,2}}, \quad (2.44)$$

$$\text{div } \mathbf{B}_{v_{1,2}} = 0, \quad (2.45)$$

$$\text{rot } \mathbf{B}_{v_{1,2}} = \mathbf{j}_{1,2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_{v_{1,2}}}{\partial t}. \quad (2.46)$$

Velikost hustoty  $\mathbf{j}_{1,2}$  objemové hustoty závisí na typu vodiče. Pro objemový vodič je proudová hustota určena Ohmovým zákonem (2.34) a v případě plošného vodiče je hustota objemových proudů nulová.

Z rovnic popisující kvazistatické elektromagnetické pole vodiče lze nahlédnout, že elektrické pole je nezávislé na magnetickém poli, a tudíž je možné elektrické pole vodiče řešit nezávisle na znalosti magnetického pole. Elektrické pole je určeno skalárním potenciálem splňující Laplaceovu rovnici.

Jak jsme si už řekli, pro jednoznačné řešení Laplaceovy rovnice je potřeba zadat nějakou okrajovou podmínku. Ale jak v tomto případě zadat okrajovou podmínku?

Při pohybu bodového náboje totiž dochází k časové proměnlivosti výsledného potenciálu. Navíc v případě daného elektrodynamického problému není potenciál uvnitř ani na povrchu vodiče konstantní v prostorové (ani v časové) proměnné. V tomto případě není možné zadat potenciál na povrchu vodiče jako okrajovou podmínku, neboť v tuto chvíli se jedná o neznámou.

Okrajová podmínka přirozeně vyplývá ze zákona zachování náboje. Pro jednozrůdnost uvažujme, že náš vodič je izolován a v obecném případě nese náboj  $q$ . Jinými slovy, uvažujeme trvale nabitý izolovaný vodič. Na rozdíl od elektrostatického případu, kdy jsme uvažovali uzemněný vodič s matematicky výhodnou okrajovou podmínkou – nulovostí výsledného potenciálu, tak v případě elektrodynamického problému se úloha o uzemněném vodiči komplikuje existencí proudu tekoucího mezi vodičem a zemí. Je-li vodič izolován, pak ze zákona zachování náboje vyplývá, že celkový náboj v objemu i na jeho povrchu zůstává v čase konstantní. Protože uvnitř vodiče je objemová hustota náboje nulová v každém čase, je náboj uvnitř vodiče neustále

nulový i v případě existence proudů ve vodiči. Náboje se shromažďují pouze na povrchu vodiče. Z tohoto zjištění vyplývá, že okrajová podmínka pro izolovaný vodič je dána časovou konstantností celkového naindukovaného náboje na povrchu vodiče. Tedy na povrchu vodiče je splněna rovnice kontinuity.

Zvolme určitou oblast  $\omega$  na povrchu vodiče ( $\omega < \Omega$ ). Potom rovnice kontinuity pro tuto oblast  $\omega$  má tvar

$$\int_{\omega} \frac{\partial \sigma}{\partial t} dS + I = 0, \quad (2.47)$$

kde  $I$  je elektrický proud, který označuje objemový proud tekoucí z nebo do oblasti  $\omega$ . Rovnici kontinuity (2.47) uvádíme v poněkud nepraktickém integrálním tvaru z důvodu, abychom odvodili její lépe použitelný diferenciální tvar. Avšak rovnice kontinuity vyjádřená v diferenciálním tvaru má pro objemový vodič jiný tvar než pro plošný vodič. Na rozdíl od elektrostatiky má okrajová podmínka pro elektrodynamické problémy jiné vyjádření pro každý z obou případů vodiče.

### 1. Objemový vodič

Nejprve vyjádříme elektrický proud  $I$  vystupující v rovnici kontinuity (2.47). Opět předpokládejme, že povrch vodiče je tvořen souřadnicovou plochou  $\xi^1 = a$ . Necht' jsou dány dvě plochy  $\xi^1 = a + \Delta h$  a  $\xi^1 = a - \Delta h$ , kde  $\Delta h > 0$  a  $\Delta h \ll a$ . Určitou oblast  $\omega$  na povrchu vodiče zvolme jako průnik povrchu vodiče a válce, jehož osa je kolmá k povrchu daného vodiče. Zároveň získáváme dvě následující plochy. První plochu  $\Omega_1$  získáme jako průnik onoho válce s plochou  $\xi^1 = a + \Delta h$  a druhou plochu  $\Omega_2$  získáme jako průnik onoho válce s plochou  $\xi^1 = a - \Delta h$ . Tím získáme geometrické těleso tvořené podstavami  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  a pláštěm, jehož šířka je  $2\Delta h$ .

Proud  $I$  odpovídá toku vektorového pole proudové hustoty povrchem našeho vytvořeného geometrického tělesa v limitě  $\Delta h \rightarrow 0$ . Tok proudové hustoty pláštěm získaného geometrického tělesa je v limitě  $\Delta h \rightarrow 0$  nulový. Tedy proud  $I$  je určen pouze tokem oběma podstavami  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$  :

$$I = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{\omega} [\mathbf{j}_2(\xi^1 = a + \Delta h) - \mathbf{j}_1(\xi^1 = a - \Delta h)] \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.48)$$

Znaménko mínus vyjadřuje skutečnost, že směr normály ke „spodní“ podstavě  $\Omega_1$  má opačný směr než má normála  $\mathbf{n}$  k povrchu vodiče. Tok „vrchní“ podstavou  $\Omega_2$  válce je nulový (i v limitě  $\Delta h \rightarrow 0$ ), neboť vně vodiče netečou žádné proudy. Potom proud  $I$  je určen vztahem



$$I = - \int_{\omega} \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{n} \, dS . \quad (2.49)$$

Vyjádřený elektrický proud  $I$  dosadíme do rovnice (2.47) a po úpravě dostáváme

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{n} = 0 . \quad (2.50)$$

Předchozí rovnici lze dohledat i v [2]. Plošná hustota je dána i v případě elektrodynamického problému vztahem (1.34). Hustota plošného proudu  $\mathbf{j}_1$  je dána Ohmovým zákonem (2.34). Po dosazení výše uvedených veličin do vztahu (2.50) a po následné úpravě dostáváme

$$\left[ \left( \frac{\partial \mathbf{E}_{v_2}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{E}_{v_1}}{\partial t} \right) - \frac{\gamma}{\varepsilon_0} (\mathbf{E}_{v_1} + \mathbf{E}_Q) \right] \cdot \mathbf{n} = 0 . \quad (2.51)$$

Zdůrazněme, že za elektrickou intenzitu, která vystupuje v Ohmově zákoně, je nutné dosadit celkové elektrické pole uvnitř vodiče, jak jsme také učinili.

Protože elektrickou intenzitu pole vodiče a bodového náboje můžeme vyjádřit pomocí skalárního potenciálu, můžeme pro řešení daného problému opět využít rozklad potenciálu ve vhodně zvolených ortogonálních souřadnicích. Předpokládejme, že potenciál bodového náboje je určen vztahem (1.26) a potenciál pole uvnitř, respektive vně vodiče je určen vztahem (1.28), respektive (1.29). Elektrická intenzita je určena jako záporně vzatý gradient potenciálu. Potom plošná hustota naindukovaného náboje je dána vztahem (1.37). Dosadíme do vztahu (2.51) plošnou hustotu vyjádřenou vztahem (1.37). Výslednou elektrickou intenzitu pole uvnitř vodiče určíme pomocí potenciálů (1.26) a (1.28). Po úpravě dostaneme

$$\sum_k \sum_n \left\{ \frac{dA_{k,n}}{dt} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0 W(a)} [f_{k,n2}(a) A_{k,n} + f_{k,n2}(\xi_Q^1) A_{k,nQ}] \left( \frac{df_{k,n1}}{d\xi^1} \right)_a \right\} \times \\ \times g_{k,n}^*(\xi_Q^2, \xi_Q^3) g_{n,k}(\xi^2, \xi^3) = 0 , \quad (2.52)$$

kde  $W(a) = W[f_{k,n2}(\xi^1), f_{k,n1}(\xi^1)] (\xi^1 = a)$ . Získáváme tedy soustavu lineárně nezávislých obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\frac{dA_{k,n}}{dt} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0 W(a)} [f_{k,n2}(a) A_{k,n} + f_{k,n2}(\xi_Q^1) A_{k,nQ}] \left( \frac{df_{k,n1}}{d\xi^1} \right)_a = 0 , \quad (2.53)$$

jejímž řešením dostaneme neznámé koeficienty  $A_{k,n}$ . Zdůrazněme, že pro řešení diferenciální rovnice prvního řádu je nutné zadat jednu počáteční podmínku. V našem případě se jedná o hodnotu koeficientu  $A_{k,n}$  v čase  $t = 0$ , což znamená, že musíme zadat počáteční hodnotu potenciálu pole vodiče.

Obecné řešení soustavy diferenciálních rovnic (2.53) lze nejnázne získat z Laplaceovy transformace. Podrobnou teorií a některými základními vlastnostmi Laplaceovy transformace se zde zabývat nebudeme. Pro hlubší pochopení potřebné matematické teorie a s přímou aplikací na elektrodynamické problémy můžeme čtenáře odkázat na [2]. Konkrétně zapůsobíme Laplaceovou transformací na levou a pravou stranu soustavy rovnic (2.53). Pro obraz Laplaceovy transformace koeficientu  $A_{k,n}$  potom dostáváme

$$\mathcal{L}[A_{k,n}(t)](s) = \frac{A_{k,n}(t=0) - \frac{\gamma A_{k,nQ}}{\varepsilon_0 W(a)} \left( \frac{df_{k,n1}}{d\xi^1} \right)_a \mathcal{L} \left[ f_{k,n2} \left( \xi_Q^1(t) \right) \right](s)}{s + \frac{\gamma f_{k,n2}(a)}{\varepsilon_0 W(a)} \left( \frac{df_{k,n1}}{d\xi^1} \right)_a}, \quad (2.54)$$

kde  $s$  označuje parametr dané transformace. Inverzní transformaci výrazu (2.54) získáme koeficient  $A_{k,n}(t)$  jako funkci času pro  $t > 0$ :

$$A_{k,n}(t) = A_{k,n}(0) e^{-bt} - b \frac{A_{k,nQ}}{f_{k,n2}(a)} e^{-bt} * f_{k,n2} \left( \xi_Q^1(t) \right), \quad (2.55)$$

kde jsme zavedli substituci

$$b = \frac{\gamma f_{k,n2}(a)}{\varepsilon_0 W(a)} \left( \frac{df_{k,n1}}{d\xi^1} \right)_a.$$

Konvoluci  $e^{-bt} * f_{k,n2} \left( \xi_Q^1(t) \right)$  můžeme přímo vyjádřit vztahem

$$e^{-bt} * f_{k,n2} \left( \xi_Q^1(t) \right) = f_{k,n2} \left( \xi_Q^1(t) \right) * e^{-bt} = \int_0^t f_{k,n2} \left( \xi_Q^1(\tau) \right) e^{-b(t-\tau)} d\tau. \quad (2.56)$$

Ve vztahu (2.56) poukazujeme na komutativnost konvoluce. Po dosazení vyjádřené konvoluce do vztahu (2.55) pak pro koeficienty  $A_{k,n}(t)$  získáváme obecné řešení

$$A_{k,n}(t) = A_{k,n}(0) e^{-bt} - b \frac{A_{k,nQ}}{f_{k,n2}(a)} \int_0^t f_{k,n2} \left( \xi_Q^1(\tau) \right) e^{-b(t-\tau)} d\tau. \quad (2.57)$$

## 2. Plošný vodič

Okrajovou podmínku pro plošný vodič rovněž odvodíme z rovnice kontinuity ve tvaru (2.47). Protože v případě plošného vodiče v jeho povrchu teče plošný proud, je hodnota proudu  $I$  v určité vymezené oblasti  $\omega$  na povrchu vodiče určena jako tok vektorového pole hustoty plošného proudu přes uzavřenou křivku  $\partial\omega$ , jakožto hranici oblasti  $\omega$ . Proud  $I$  je tedy dán vztahem

$$I = \int_{\partial\omega} \mathbf{j}_S \cdot \mathbf{n}_S dl = \int_{\omega} \operatorname{div}_S \mathbf{j}_S dS, \quad (2.58)$$

kde  $\mathbf{n}_S$  označuje normálu k hranici  $\partial\omega$  a zároveň dané značení zohledňuje skutečnost, že normála  $\mathbf{n}_S$  leží na povrchu vodiče. Ve vztahu (2.58) je představena „dvojměrná verze“ Gaussova zákona. Operátorem  $\operatorname{div}_S$  rozumíme dvojměrnou divergenci na povrchu vodiče. Zvolíme takovou soustavu ortogonálních souřadnic  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ , aby jedna souřadnicová plocha  $\xi^1 = a$  odpovídala povrchu vodiče. Vektor plošného proudu lze vyjádřit v dané ortogonální soustavě ve tvaru

$$\mathbf{j}_S = j_{S_{\xi^2}} \mathbf{e}_2 + j_{S_{\xi^3}} \mathbf{e}_3.$$

Potom dvojměrná divergence hustoty plošného proudu je definována vztahem [7]

$$\operatorname{div}_S \mathbf{j}_S = \frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(h_3 j_{S_{\xi^2}})}{\partial \xi^2} + \frac{\partial(h_2 j_{S_{\xi^3}})}{\partial \xi^3} \right]_{\xi^1=a}. \quad (2.59)$$

Lze však místo operátoru  $\operatorname{div}_S$  použít „klasický“ trojrozměrný operátor, ale pak je nutné zavést distribuce.

Proud  $I$  vyjádřený jako plošný integrál (2.58) dosadíme do rovnice (2.47) a po úpravě dostaneme rovnici kontinuity na povrchu plošného vodiče:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{div}_S \mathbf{j}_S = 0. \quad (2.60)$$

Rovnice kontinuity ve tvaru (2.60) je přibližně splněna i ve vnitřní oblasti velmi tenkého vodiče. Předpokládejme, že velmi tenký vodič je tvořen dvěma blízko u sebe umístěnými plochami  $\xi^1 = a + \Delta h$  a  $\xi^1 = a - \Delta h$ , kde  $\Delta h > 0$  a  $\Delta h \ll a$ . Následně využijeme podobného postupu jako u objemového vodiče. Tentokrát naše geometrické těleso tvořené podstavami  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  a pláštěm, jehož šířka je  $2\Delta h$ , představuje objemovou část velmi tenkého vodiče. Tok objemové hustoty proudu přes plochu  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$  je dohromady přibližně nulový, neboť elektrická intenzita na ploše  $\Omega_1$  je prakticky shodná s elektrickou intenzitou na ploše  $\Omega_2$ . Jediný nenulový tok může být přes plášť o malé tloušťce  $2\Delta h$ . Protože tloušťka vodiče je velmi malá, lze součin tloušťky  $2\Delta h$  a objemové proudové hustoty nahradit hustotou plošného proudu. Potom tok objemového proudu přes daný plášť je určen křivkovým integrálem v (2.58), čímž jsme stručně dokázali, že rovnice kontinuity ve tvaru (2.60) lze použít i v případě velmi tenkého vodiče.

Do rovnice kontinuity (2.60) za hustotu plošného proudu dosadíme (1.34) a za hustotu plošného proudu dosadíme z Ohmova zákona (2.42). Po dosazení a úpravě získáme rovnici

$$\left( \frac{\partial \mathbf{E}_{v_2}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{E}_{v_1}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} + \frac{\gamma_S}{\varepsilon_0} \operatorname{div}_S \mathbf{E}_t = 0. \quad (2.61)$$

I v tomto případě se můžeme pokusit nalézt obecné řešení pomocí potenciálu rozloženého do báze funkcí řešící Laplaceovu rovnici. Avšak oproti objemovému vodiči je okrajová podmínka vyjádřená rovnicí (2.61) podstatně složitější. V tomto případě „nevypadne“ Lamého koeficient  $h_1$ , který obecně může záviset na poloze. Obecná závislost Lamého koeficient  $h_1$  na  $\xi^2$  a  $\xi^3$  výrazně komplikuje řešení rovnice (2.61), a proto jenom tuto rovnici upravme tak, aby v ní vystupoval pouze potenciál pole vodiče.

Nejprve se pokusme vyjádřit  $\operatorname{div}_S \mathbf{E}_t$ . S použitím skutečnosti, že

$$\mathbf{E}_t = -\operatorname{grad}_S \Phi_v(\xi^1 = a)$$

můžeme psát

$$\operatorname{div}_S \mathbf{E}_t = -(\Delta_S \Phi)_{\xi^1=a}, \quad (2.62)$$

kde  $\Delta_S = \operatorname{div}_S \operatorname{grad}_S$  a operátor  $\operatorname{grad}_S$  je definován jako [7]

$$\operatorname{grad}_S = \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi^2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial \xi^3}. \quad (2.63)$$

Výraz  $\Delta_S \Phi_v$  je definován na povrchu vodiče, na rozdíl od výrazu  $\Delta \Phi_v$  a to díky spojitosti tečných složek elektrické intenzity při průchodu povrchem vodiče. Ještě poznamenejme, že

$$(\Phi_{v_1})_{\xi^1=a} = (\Phi_{v_2})_{\xi^1=a} = (\Phi_v)_{\xi^1=a}.$$

Potom je jedno zda pracujeme s potenciálem pole vodiče z jeho vnitřní nebo vnější oblasti.

Do rovnice (2.61) za plošnou hustotu dosadíme vztah (1.34) a za  $\operatorname{div}_S \mathbf{E}_t$  dosadíme ze vztahu (2.62). Po dosazení a úpravě dostáváme

$$\left[ \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial^2 \Phi_{v_1}}{\partial t \partial \xi^1} - \frac{\partial^2 \Phi_{v_2}}{\partial t \partial \xi^1} \right) - \frac{\gamma_S}{\varepsilon_0} \Delta_S \Phi \right]_{\xi^1=a} = 0. \quad (2.64)$$

### 2.2.5. Ideální vodič

Navzdory nalezení matematicky jednodušších rovnic, které popisují elektromagnetické pole vodiče v kvazistatickém přiblížení, se stále jedná o poměrně složitý problém.

Avšak existuje ještě jeden případ (i přiblížení), kdy se daná situace výrazně zjednoduší. Konkrétně se jedná o případ, kdy vodivost roste nad všechny meze. Vodič, jehož vodivost je nekonečná, je označován jako *ideální vodič*. V případě ideálního objemového vodiče je měrná objemová vodivost nekonečná a v případě ideálního plošného vodiče je měrná plošná vodivost nekonečná.

Ve skutečnosti neexistují vodiče s nekonečnou vodivostí, jinými slovy s nulovým elektrickým odporem. Možná lze podotknout, že existují tzv. supravodiče, jejichž elektrický odpor je téměř nulový. Ale i kdyby daný vodič měl nulový elektrický odpor, tak díky nenulové hmotnosti volných nositelů náboje bude vodičem protékat proud konečné hodnoty. V případě vodiče s nulovým elektrickým odporem bychom měli mluvit spíše o konvenčním proudu, kdy zrychlení volných nositelů nábojem je úměrné elektrické intenzitě.

Případ ideálního vodiče chápeme jako matematický model, který přináší výrazné zjednodušení a lze jej použít pro vodiče s velmi vysokou hodnotou měrné vodivosti.

Protože vodivost ideálního vodiče je nekonečná, musí být elektrické pole nulové uvnitř vodiče a zároveň musí být nulové i tečné složky elektrické intenzity na povrchu vodiče (proudová hustota je konečná). Z Maxwellových rovnic potom dostáváme:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = 0, \quad (2.65)$$

$$\text{rot } \mathbf{B}_1 = \mathbf{j}. \quad (2.66)$$

Z rovnice (2.65) vyplývá, že celková magnetická indukce je konstantní funkce času. Pokud se daný systém na počátku nachází v rovnováze, kdy netečou žádné proudy, je výsledná magnetická indukce nulová. Počáteční nulová hodnota výsledné magnetické indukce zaručuje nulovost výsledné magnetické indukce i v pozdějším čase. Z rovnice (2.66) potom vyplývá, že proudová hustota  $\mathbf{j}$  je v každém okamžiku nulová. Při pohybu bodového náboje se elektrické náboje mohou pohybovat pouze po povrchu vodiče. Na povrchu vodiče se tedy objevuje plošný proud. Existence plošného proudu, v tomto případě i u objemového vodiče, vyplývá přímo z nekonečnosti měrné vodivosti.

Pro jednoznačné řešení rovnic elektromagnetického pole ideálního vodiče stačí zadat počáteční hodnotu elektrické intenzity v každém bodě a zároveň na povrchu vodiče musí být splněna nulovost tečných složek celkové elektrické intenzity v každém čase. Hustota plošného proudu je přímo dána nespojitostí magnetické indukce, konkrétně podle vztahu [1]

$$\mathbf{j}_s = \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_{v_2} - \mathbf{B}_{v_1})]_{\xi^1=a}. \quad (2.67)$$

U plošného vodiče požadujeme pouze nulovost tečných složek výsledné elektrické intenzity na povrchu plošného vodiče.

## 2.2.6. Pohybová rovnice

Podarilo se nám nalézt rovnice popisující elektromagnetické pole vodiče. Podrobněji jsme se danými rovnicemi zabývali v kvazistatickém přiblížení. Ale pro jejich jednoznačné řešení je potřeba znát i průběh elektromagnetického pole bodového náboje. Jinými slovy, musíme znát průběh pohybu bodového náboje. Budeme-li mít úlohu o bodovém náboji, který vykonává známý pohyb v blízkosti vodiče, jsme schopni na základě našich poznatků najít elektromagnetické pole této soustavy.

Pokud je bodový náboj volný, pak se na jeho způsob pohybu ptáme. Proto pro jednoznačné řešení úlohy volný bodový náboj nacházející se v přítomnosti vodiče musíme k rovnicím elektromagnetického pole přidat ještě jednu rovnici popisující pohyb bodového náboje v elektromagnetickém poli. Danou přidanou rovnicí není jiná než následující pohybová rovnice

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = Q[\mathbf{E}_{v_2}(t, \mathbf{r}_Q, \mathbf{v}_Q) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{v_2}(t, \mathbf{r}_Q, \mathbf{v}_Q)]. \quad (2.68)$$

Elektrická intenzita a magnetická indukce vodiče je funkcí času, polohy a rychlosti bodového náboje. Na pravé straně pohybové rovnice se nachází časová změna hybnosti bodového náboje a na levé straně pohybové rovnice vystupuje *Lorentzova síla* působící na pohybující se bodový náboj.

Pro jednoznačné řešení pohybové rovnice je nutné zadat počáteční polohu a rychlost bodového náboje.

Maxwellovy rovnice jsou konzistentní s teorií relativity, a jejich řešení obecně dává relativistické elektromagnetické pole. Potom hybnost bodového náboje  $\mathbf{p}$  vystupující v rovnici (2.68) může být určena relativistickým vztahem

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.69)$$

kde  $m$  značí klidovou hmotnost bodového náboje.

Musíme si uvědomit, že bodový náboj pohybující se s nenulovým zrychlením emituje elektromagnetické záření, které se projevuje jako brzdná síla působící na bodový náboj. Tato brzdná síla není však zahrnuta v rovnici (2.68). Pro malé hodnoty zrychlení, a především v kvazistatické aproximaci je vliv záření na pohyb bodového náboje zcela zanedbatelný. Proto v našem případě vliv této brzdné síly nemusíme vůbec uvažovat, a tedy pohybovou rovnici zapsanou ve tvaru (2.68) můžeme považovat za správnou.

Vzhledem k tomu, že náš problém řešíme především v kvazistatickém přiblížení, uveďme pohybovou rovnici bodového náboje i v této aproximaci. V kvazistatic-

kém přiblížení jsou silové účinky magnetického pole oproti silovým účinkům elektrického pole zanedbatelné. Můžeme tedy v pohybové rovnici (2.68) zanedbat magnetickou sílu a v případě kvazistatického přiblížení můžeme psát

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_Q}{dt^2} = -Q [\text{grad } \Phi_{v_2}(t, \mathbf{r})]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_Q}, \quad (2.70)$$

kde elektrickou intenzitu jsme vyjádřili pomocí potenciálu pole vodiče a pro hybnost jsme použili známý vztah z klasické mechaniky.

Budeme-li pracovat v souřadnicích  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ , u kterých jedna ze souřadnicových ploch odpovídá povrchu vodiče, je v některých situacích výhodné popsat pohyb bodového náboje pomocí Lagrangeova formalismu, kde Lagrangeián bodového náboje pohybujícího se v kvazistatickém elektromagnetickém poli je dán vztahem

$$L(t, \dot{\xi}, \xi) = \frac{1}{2} m v^2 - Q \Phi_{v_2}, \quad (2.71)$$

kde  $\dot{\xi} = (\dot{\xi}^1, \dot{\xi}^2, \dot{\xi}^3)$  a  $\dot{\xi}$  značí časovou derivaci  $\xi$ . Zdůrazněme, že vektor rychlosti  $\mathbf{v}$  neodpovídá vektoru  $\dot{\xi}$ . Avšak existuje mezi nimi jistý vztah. Předpokládejme, že rychlost  $\mathbf{v}$  je vyjádřena v kartézských souřadnicích jako  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3)$ . Uvažujme, že jednotlivé složky kartézských souřadnic  $x_k$  jsou určeny jako funkce  $\xi$ , tedy  $x^k = x^k(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ . Potom rychlost  $\mathbf{v}$  je dána vztahem

$$\mathbf{v} = \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\xi^1, \xi^2, \xi^3)} \dot{\xi}. \quad (2.72)$$

Známe-li Lagrangeovu funkci bodového náboje, je jeho pohyb určen rovnicemi

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi^k} = 0, \quad \text{pro } k = 1, 2, 3. \quad (2.73)$$

Na závěr poznamenejme, že v případě kvazistatického přiblížení není nutné pro řešení úlohy o pohybu bodového náboje v přítomnosti vodiče znát magnetické pole! To, jestli chceme magnetické pole znát, záleží čistě na tom, co chceme spočítat. V našem případě se primárně o magnetické pole nezajímáme, a proto jej také nebudeme počítat.

### 2.3. Řešené příklady

Jako v elektrostatice i zde v případě elektrodynamických problémů jsme do jisté míry zkonstruovali obecný postup. Proto bude vhodné si daný postup ukázat na konkrétních příkladech. Tentokrát se zaměříme na pohyb volného bodového náboje v přítomnosti vodiče. Vyšetřovat pohyb bodového náboje v kvazistatickém elektrickém poli (o magnetické pole se nezajímáme) je poměrně náročné. Už v elektrostatice pole některých

vodičů byla poměrně složitá. A co teprve, když se elektrické pole vodiče mění v důsledku časové proměnlivosti vnějšího elektrického pole. To vše nasvědčuje tomu, že i při řešení pohybu bodového náboje se dopustíme jistých aproximací.

Prvně spočítáme volný pád bodového náboje nad vodivou rovinou. Zde si jako jediný příklad představíme i relativistické řešení, neboť, jak si ukážeme později, i v případě relativistického řešení budeme moci použít metodu elektrického zobrazení.

Jako druhý příklad se pokusíme nalézt pohyb bodového náboje umístěného nad izolovanou vodivou koulí. Pro srovnání budeme daný problém řešit pro plnou kouli a kulovou skořepinu.

### 2.3.1. Pohyb bodového náboje umístěného v blízkosti ideálně vodivé roviny

Nejjednodušším možným případem je bodový náboj umístěný nad nekonečnou vodivou rovinou. Podobně jako v elektrostatickém případě mějme v rovině  $z = 0$  uzemněnou ideálně vodivou rovinu. Umístěme bodový náboj velikosti  $Q$  a hmotnosti  $m$  na osu  $z$  do výšky  $h_0$  od vodivé roviny. Po dosažení rovnovážného stavu rovinu oduzemníme (je však stále nabitá).

Následně pustíme bodový náboj, případně mu dodáme malý impulz rovnoběžně se směrem osy  $z$ . Tento okamžik označme jako  $t = 0$ . Protože daná rovina je ideálně vodivá, tečné složky výsledné elektrické intenzity na povrchu vodivé roviny jsou v průběhu pohybu bodového náboje neustále nulové. Tím se situace výrazně zjednoduší, neboť máme časově neměnnou okrajovou podmínku. Danou okrajovou podmínku splňuje takové elektrické pole, které je dáno superpozicí elektrického pole bodového náboje  $Q$  nacházejícího se výšce  $h(t)$  a bodového náboje velikosti  $-Q$  umístěného zrcadlově souměrně k vodivé rovině. Takto získané výsledné elektrické pole se nachází v oblasti  $z > 0$ . V oblasti  $z < 0$  je výsledné elektrické pole nulové.

V podstatě se jedná o stejnou situaci jako v elektrostatickém případě, jenom s tím rozdílem, že v tomto případě se oba bodové náboje pohybují. Poloha fiktivního bodového náboje  $-Q$  je určena polohou bodového náboje  $Q$ . Vzdálenosti bodového náboje  $Q$  a fiktivního bodového náboje  $-Q$  od vodivé roviny jsou si v každém časovém okamžiku rovny. Jedná se o pohyb podrobený vazbě, pohyb fiktivního náboje  $-Q$  je určen pohybem bodového náboje  $Q$ . Daný systém stačí popsat pouze jedinou souřadnicí a to výškou  $h$  bodového náboje  $Q$ .

Následně budeme řešit pohybovou rovnici popisující časový vývoj vzdálenosti bodového náboje od vodivé roviny. Na pohybující se bodový náboj působí v obecném



případě Lorentzova síla. Avšak v kvazistatickém přiblížení je síla působící na bodový náboj dána vztahem (1.42). Můžeme si všimnout, že síla působící na bodový náboj je v blízkosti vodivé roviny obrovská. Dokonce pro  $h \rightarrow 0$  daná síla roste nad všechny meze. Tato skutečnost nás může překvapit. Ale uvědomme si, že když se bodový náboj nachází na povrchu vodivé roviny, odpovídá to situaci vzájemného silového působení dvou bodových nábojů opačných znamének, jejichž vzájemná vzdálenost je nulová. Proto síla působící na bodový náboj ležící na vodivé rovině je nekonečná.

Bodový náboj je jistou fyzikální idealizací a nikde v přírodě se s ním nesečkáme. S bodovým nábojem pracujeme z důvodu, že se jedná o nejjednodušší možné rozložení náboje – všechny náboje je soustředěn v jednom bodě. Ale i elektrické pole bodového náboje má své uplatnění. Například elektrické pole vně homogenně nabité koule odpovídá elektrickému poli bodového náboje umístěného do středu koule. Pokud by se nám nelíbilo, že elektrická síla působící na bodový náboj, který leží na vodivé rovině, diverguje, můžeme si místo bodového náboje představit malou nabitou kuličku. Pokud malá nabitá kulička dopadne na povrch vodivé roviny, bude přitahována již konečnou silou, neboť to odpovídá situaci vzájemného silového působení vodivé roviny a bodového náboje umístěného ve vzdálenosti od vodivé roviny rovné poloměru kuličky.

Hlavní důvod, proč se zmiňujeme o rostoucí elektrické síle, spočívá v tom, že při pádu bodového náboje směrem k vodivé rovině roste jeho rychlost. A v určité velmi blízké vzdálenosti od vodivé roviny dosáhne bodový náboj téměř rychlosti světla.

Proto je potřeba si rozmyslet, za jakých podmínek lze použít k popisu pohybu bodového náboje klasickou fyziku a kdy je nutné použít teorii relativity. Ukážeme si jak klasické, tak i relativistické řešení. V obou případech zanedbáme retardační jevy vniklé v důsledku konečné šíření změn elektromagnetického pole a také zanedbáme vliv vyzařování elektromagnetického pole při urychleném pohybu bodového náboje.

### 1) klasické řešení

Ze symetrie daného problému vyplývá, že se bude bodový náboj pohybovat pouze po ose  $z$ . Potom bodový náboj koná přímočarý pohyb a jeho rychlost ( $z$ -ovou složku) označme jako  $v$ .

Pohybová rovnice popisující časový vývoj polohy bodového náboje má následující tvar

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 h^2} . \quad (2.74)$$

Předchozí rovnici integrujeme podle proměnné  $z$  a dostaneme

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 h} = E, \quad (2.75)$$

kde  $E$  je integrační konstanta, která má význam celkové energie (platí zákon zachování energie). Celková energie je dána vztahem

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 h_0}. \quad (2.76)$$

Z rovnice (2.75) vyjádříme rychlost.

$$v = \frac{dh}{dt} = \pm \sqrt{\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 mh} + \frac{2E}{m}} \quad (2.77)$$

Znaménko plus před odmocninou udává pohyb bodového náboje ve směru osy  $z$  a znaménko mínus před odmocninou udává pohyb bodového náboje proti směru osy  $z$ .

Z předešlé rovnice lze pomocí separace proměnných vyjádřit čas  $t$  jako funkci  $h$ :

$$t = \pm \frac{\sqrt{8\pi\epsilon_0 m}}{Q} \int_{h_0}^h \sqrt{\frac{z}{1 + Az}} dz, \quad A = \frac{16\pi\epsilon_0 E}{Q^2}. \quad (2.78)$$

Konstanta  $A$  je úměrná celkové energii  $E$ , která může mít zápornou, nulovou i kladnou hodnotu. Proto i konstanta  $A$  může mít zápornou, nulovou i kladnou hodnotu. Budeme tedy řešit tři případy podle toho, zda konstanta  $A$  je záporná, nulová, či kladná. Rozborem dané situace lze ukázat, že  $A \geq -1$ .

1.  $A < 0$

Pro zápornou hodnotu konstanty  $A$  můžeme vztah (2.78) vyjádřit ve tvaru

$$t = \pm \frac{\sqrt{8\pi\epsilon_0 m}}{Q} \int_{h_0}^h \sqrt{\frac{z}{1 - |A|z}} dz. \quad (2.79)$$

Zavedeme následující substituci

$$z = \frac{1}{2|A|}(1 - \cos \eta) = \frac{1}{|A|} \sin^2 \frac{\eta}{2}. \quad (2.80)$$

Po dosazení do (2.70) dostáváme

$$t = \pm |A|^{-\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{8\pi\epsilon_0 m}}{Q} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \sin^2 \frac{\eta}{2} d\eta, \quad (2.81)$$

kde integrační meze  $\eta_1$  a  $\eta_2$  jsou určeny vztahy

$$h_0 = \frac{1}{|A|} \sin^2 \frac{\eta_1}{2} \quad , \quad h = \frac{1}{|A|} \sin^2 \frac{\eta_2}{2} . \quad (2.82)$$

Po integraci dostáváme

$$t = \pm |A|^{-\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{8\pi\epsilon_0 m}}{2Q} (\eta_2 - \eta_1 - \sin \eta_2 + \sin \eta_1) . \quad (2.83)$$

Čas  $t$  vyjádříme pomocí výšky  $h$  a  $h_0$  :

$$t = \pm |A|^{-\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{8\pi\epsilon_0 m}}{Q} \left[ \arcsin(\sqrt{|A|h}) - \arcsin(\sqrt{|A|h_0}) - \sqrt{|A|h(1-|A|h)} + \sqrt{|A|h_0(1-|A|h_0)} \right] \quad (2.84)$$

Podarilo se nám vyjádřit čas, ve kterém se bodový náboj nachází ve výšce  $h$ . Pokud bychom chtěli znát naopak časovou závislost polohy bodového náboje, museli bychom polohu  $h$  vyjádřit z rovnice (2.84), která je však transcendentní. Výšku  $h$  tedy nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí a rovnici (2.84) je nutné řešit numericky. Nicméně závislost výšky  $h$  na čase  $t$  bude ukázána v grafu 2.1.

## 2. $A = 0$

Pro případ nulové hodnoty se vztah (2.78) výrazně zjednoduší na

$$t = \pm \frac{\sqrt{8\pi\epsilon_0 m}}{Q} \int_{h_0}^h \sqrt{z} \, dz . \quad (2.85)$$

Po integraci dostáváme

$$t = \pm \frac{2\sqrt{8\pi\epsilon_0 m}}{3Q} \left( h^{\frac{3}{2}} - h_0^{\frac{3}{2}} \right) . \quad (2.86)$$

V tomto případě lze vyjádřit výšku  $h$  jako funkci času:

$$h = \left( h_0^{\frac{3}{2}} \pm \frac{3Q}{2\sqrt{8\pi\epsilon_0 m}} t \right)^{\frac{2}{3}} . \quad (2.87)$$

## 3. $A > 0$

Ze vztahu (2.78) dostáváme

$$t = \pm \frac{\sqrt{8\pi\epsilon_0 m}}{Q} \int_{h_0}^h \sqrt{\frac{z}{1+Az}} \, dz . \quad (2.88)$$

Tentokrát zvolíme substituci

$$z = -\frac{1}{2A}(1 - \cosh \eta) = \frac{1}{A} \sinh^2 \frac{\eta}{2} . \quad (2.89)$$

Po dosazení do (2.88) obdržíme

$$t = \pm A^{-\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{8\pi\epsilon_0 m}}{Q} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \sinh^2 \frac{\eta}{2} d\eta . \quad (2.90)$$

Kde integrační meze  $\eta_1$  a  $\eta_2$  jsou určeny vztahy

$$h_0 = \frac{1}{A} \sinh^2 \frac{\eta_1}{2} , \quad h = \frac{1}{A} \sinh^2 \frac{\eta_2}{2} . \quad (2.91)$$

Po integraci dostáváme

$$t = \mp A^{-\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{8\pi\epsilon_0 m}}{2Q} (\eta_2 - \eta_1 - \sinh \eta_2 + \sinh \eta_1) . \quad (2.92)$$

Čas  $t$  vyjádříme pomocí výšky  $h$  a  $h_0$  .

$$t = \mp A^{-\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{8\pi\epsilon_0 m}}{Q} \left[ \operatorname{argsinh}(\sqrt{Ah}) - \operatorname{argsinh}(\sqrt{Ah_0}) - \sqrt{Ah(1+Ah)} + \sqrt{Ah_0(1+Ah_0)} \right] \quad (2.93)$$

Podarilo se nám vyjádřit čas jako funkci polohy bodového náboje. Jsme tedy schopni vypočítat čas, ve kterém se bodový náboj nachází ve výšce  $h$ .

Máme celkem tři případy podle toho, zda celková energie bodového náboje je záporná, nulová či kladná.

Zároveň jsme do výpočtu zahrnuli i směr pohybu bodového náboje. Pokud bodovému náboji udělíme počáteční rychlost směrem k vodivé rovině, bude se k ní vždy přibližovat. Avšak udělíme-li bodovému náboji rychlost směrem od roviny, bude se jeho pohyb pro různé případy celkové energie lišit.

Pokud má bodový náboj zápornou celkovou energii, jedná se o vázaný stav. V tomto případě se bude bodový náboj od vodivé roviny vzdalovat, v jisté výšce se zastaví (bod obratu, všechna jeho kinetická energie se přemění na potenciální energii) a následně se bude pohybovat směrem k vodivé rovině.

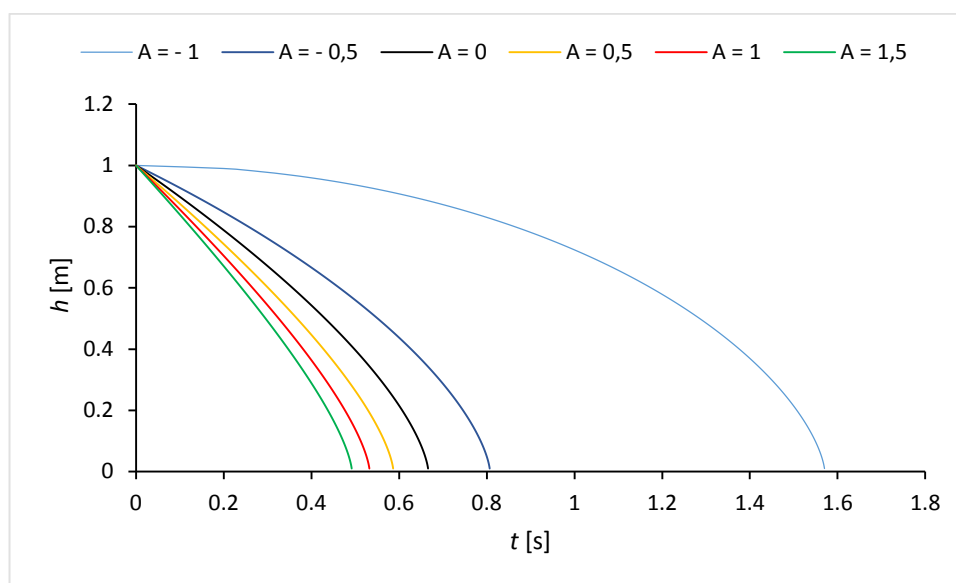
Pokud má bodový náboj nulovou nebo kladnou celkovou energii a je urychlen ve směru osy  $z$ , bude se trvale vzdalovat od vodivé roviny. V tomto případě se nestačí přeměnit veškerá kinetická energie bodového náboje na potenciální energii v určité konečné vzdálenosti od vodivé roviny.

V následujícím grafu 2.1 je uvedena závislost výšky bodového náboje na čase v případě, že se bodový náboj pohybuje směrem k vodivé rovině. Pro srovnání je daný

průběh vykreslen pro různé hodnoty konstanty  $A$  uvedených reciprokových metrech. Pro jednoduchost jsme zvolili  $h_0 = 1$  m a  $\sqrt{8\pi\epsilon_0 m}/Q = 1$  m<sup>3/2</sup> · s. Pro lepší představu v tabulce 2.1 uvádíme hodnoty počáteční rychlosti bodového náboje (v absolutní hodnotě) příslušící určité hodnotě konstanty  $A$ .

$A$ [m <sup>-1</sup> ]	$ v_0 $ [m · s <sup>-1</sup> ]
-1,0	0,00
-0,5	0,71
0,0	1,00
0,5	1,22
1,0	1,41
1,5	1,58

Tabulka 2.1. počáteční rychlost bodového náboje v závislosti na konstantě  $A$ .



Graf 2.1. Závislost výšky bodového náboje na čase pro různé hodnoty  $A$ .

## 2) relativistické řešení

Nyní budeme řešit stejnou úlohu, ale relativisticky. Náš postup výpočtů bude v podstatě stejný jako je uvedený v [8]. Pohyb bodového náboje bude nyní popsán relativistickou pohybovou rovnicí (2.68). Elektrická síla působící na bodový náboj bude i v případě relativistického řešení odpovídat vzájemnému silovému působení dvou nábojů opačných znamének. V relativistickém případě je elektrické pole bodového ná-

boje popsáno vztahem (2.24). Velikost rychlosti fiktivního náboje (v absolutní hodnotě) je shodná s velikostí rychlosti bodového náboje. Dané rychlosti se liší pouze znaménkem.

Bodový náboj se pohybuje po ose  $z$ . Potom indukce magnetického pole, které generuje pohybující se bodový náboj, je na ose  $z$  nulová. Z toho vyplývá, že magnetická síla působící na pohybující se bodový náboj je rovněž nulová. To potom znamená, že na způsob pohybu bodového náboje má vliv pouze elektrická síla, a to i v případě relativistického řešení!

Normálový vektor vystupující ve vztahu (2.24) má směr shodný se směrem osy  $z$ , proto  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ . Rychlost fiktivního náboje  $\mathbf{v}_f$  má opačný směr oproti rychlosti bodového náboje  $\mathbf{v}$ , tedy  $\mathbf{v}_f = -\mathbf{v} = -v\mathbf{e}_z$ . Po dosazení výše zmíněných veličin bude mít pohybová rovnice v případě relativistického řešení následující tvar

$$m \frac{dv}{dt} (1 - \beta^2)^{-\frac{3}{2}} = - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_Q(t) - \mathbf{r}_{Q'}(t_r)|^2} \left( \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)_{t_r}, \quad (2.94)$$

kde  $|\mathbf{r}_Q(t) - \mathbf{r}_{Q'}(t_r)| = h(t) + h(t_r)$ . (Všimněme si, že v tomto případě je akcelerační člen nulový.) Levá strana předešlé pohybové rovnice (2.94) je vyjádřena v aktuální čase  $t$ , avšak její pravá strana je vyjádřena v retardovaném čase  $t_r$ . Označením  $h$  rozumíme retardovanou výšku, tedy výšku bodového náboje v retardovaném čase,  $h_r = h(t_r)$ . My chceme nalézt řešení vyjádřené pomocí aktuálního času  $t$ . Tak ale potom musíme pravou stranu vyjádřit pomocí aktuálního času  $t$ .

Pokusme se nalézt vztah mezi veličinami vyjádřenými v retardovaném čase  $t_r$  a vyjádřenými v aktuálním čase  $t$ . Vztah mezi aktuálním časem  $t$  a retardovaným časem  $t_r$  je dán následující rovnicí

$$c(t - t_r) = |\mathbf{r}_Q(t) - \mathbf{r}_{Q'}(t_r)|, \quad (2.95)$$

kteřá v podstatě říká, že změnu elektrické intenzity pole fiktivního bodového náboje vyvolanou v čase  $t_r$  „pocítí“ bodový náboj až v čase  $t$ . Neboli dráha uražená elektromagnetickým vlněním („nesoucím informaci o změně“) je rovna součtu uražené dráhy fiktivním nábojem a vzájemné vzdálenosti obou bodových nábojů v čase  $t$ . Zároveň vzdálenost  $|\mathbf{r}_Q(t) - \mathbf{r}_{Q'}(t_r)|$  je určena vztahem

$$|\mathbf{r}_Q(t) - \mathbf{r}_{Q'}(t_r)| = 2h(t) - \int_{t_r}^t v(t') dt'. \quad (2.96)$$

Rovnice (2.96) představuje integrální rovnici, jejíž řešení a její řešení je po matematické stránce náročné. Pro jednoduchost předpokládejme, že rozdíl  $t - t_r$  je dostatečně

malý na to, abychom mohli provést aproximaci:  $v(t) \approx v(t_r)$ . Potom integrál vystupující v rovnici (2.96) lze aproximovat jakou součin rychlosti  $v = v(t)$  a rozdílu  $t - t_r$ :

$$|\mathbf{r}_Q(t) - \mathbf{r}_{Q'}(t_r)| \approx 2h - v(t - t_r). \quad (2.97)$$

Spojením rovností (2.95) a (2.97) pro vzdálenost  $|\mathbf{r}_Q(t) - \mathbf{r}_{Q'}(t_r)|$  dostaneme

$$|\mathbf{r}_Q(t) - \mathbf{r}_{Q'}(t_r)| \approx \frac{2h}{1 + \beta}. \quad (2.98)$$

Podářilo se nám přibližně vyjádřit vzdálenost  $|\mathbf{r}_Q(t) - \mathbf{r}_{Q'}(t_r)|$  pomocí výšky  $h(t)$  bodového náboje.

Ze vztahu (2.98) vyjádříme retardovanou polohu bodového náboje a následně dosadíme do pohybové rovnice (2.94). Po dosazení dostáváme přibližnou rovnost

$$m(1 - \beta^2)^{-\frac{3}{2}} \frac{dv}{dt} = -\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 h^2} (1 - \beta^2). \quad (2.99)$$

Po úpravě dostáváme

$$m(1 - \beta^2)^{-\frac{5}{2}} \frac{dv}{dt} = -\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 h^2}. \quad (2.100)$$

Předchozí rovnici integrujeme podle proměnné  $h$  a dostaneme

$$\frac{mc^2}{3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 h} = E. \quad (2.101)$$

Integrační konstanta má opět význam celkové energie a je dána vztahem

$$E = \frac{mc^2}{3} \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 h_0}. \quad (2.102)$$

Z rovnice (2.100) vyjádříme rychlost bodového náboje

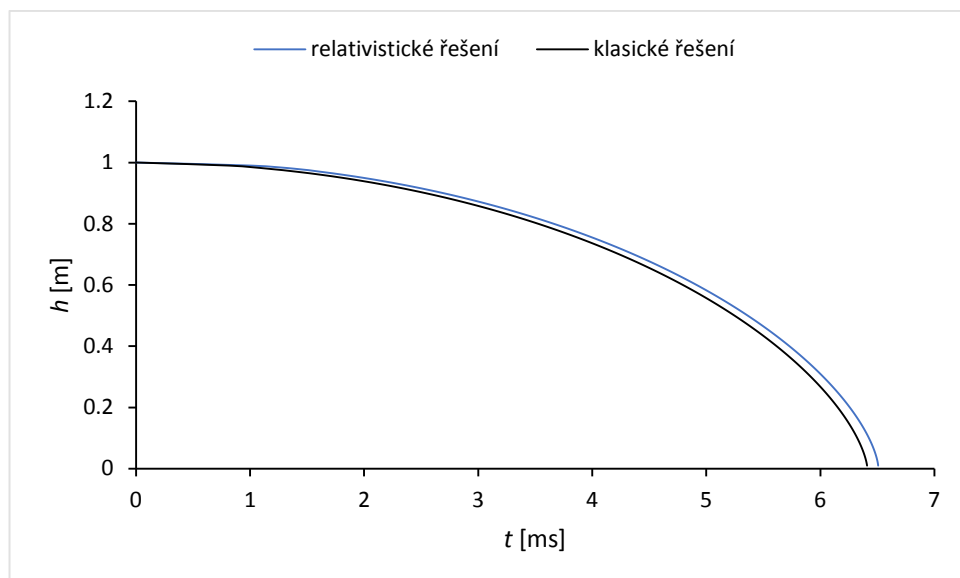
$$v = \frac{dh}{dt} = -c \sqrt{1 - \left(\frac{16\pi\epsilon_0 mc^2 h}{48\pi\epsilon_0 E h + 3Q^2}\right)^{\frac{2}{3}}}. \quad (2.103)$$

Záporné znaménko vystupující ve vztahu (2.103) jsme zvolili z důvodu záměrně vybraného pohybu bodového náboje směrem k vodivé rovině, neboť relativistické efekty jsou poblíž vodivé roviny již nezanedbatelné. Po separaci proměnných a integraci podle času dostáváme

$$t = \frac{1}{c} \int_h^{h_0} \frac{dz}{\sqrt{1 - \left( \frac{16\pi\epsilon_0 mc^2 z}{48\pi\epsilon_0 Ez + 3Q^2} \right)^{\frac{2}{3}}}}. \quad (2.104)$$

Předešlý integrál nelze řešit analytickými metodami. Proto čas  $t$  vyjádřený vztahem (2.104) necháme v integrálním tvaru.

Námi nalezené relativistické řešení můžeme graficky porovnat s klasickým řešením. Pro jednoduchost uvažujeme případ, kdy bodový náboj necháme volně padat z klidu. Dále volíme  $3Q^2/(16\pi\epsilon_0 mc^2) = 10^{-12}$  m. Grafické srovnání obou řešení je uvedeno v grafu 2.2. Můžeme si všimnout, že na začátku pohybu bodového náboje se relativistické řešení téměř shoduje s klasickým řešením. Pro větší časy, kdy se bodový náboj čím dál tím více přibližuje k vodivé rovině, se relativistické a klasické řešení více rozcházejí. Toto chování je ve shodě s naším očekáváním, kdy jsme předpokládali, že pro malé rychlosti bodového náboje je jeho pohyb dobře popsán pomocí klasické mechaniky. Avšak při přibližování bodového náboje k vodivé rovině jeho rychlost výrazně roste. Dokonce podle vztahu (2.77) platí, že při přibližování bodového náboje k vodivé rovině se jeho rychlost blíží k nekonečnu. To je podle teorie relativity samozřejmě nepřijatelné! Pokud se bodový náboj nachází příliš blízko vodivé roviny, musíme již do výpočtu zahrnout relativistické korekce. Ze vztahu (2.103) vyplývá, že bodový náboj při pádu na vodivou rovinu dosáhne rychlosti světla, což se nám může jevit rovněž jako nesprávné. Důvod, proč bodový náboj při pádu na vodivou rovinu dosáhne rychlosti světla, spočívá v nekonečně velké hodnotě elektrické síly působící na bodový náboj při pádu na vodivou rovinu.



Graf 2.2. Srovnání závislosti výšky bodového náboje na čase pro klasické a relativistické řešení.



### 2.3.2. Pohyb bodového náboje umístěného v blízkosti neideálně vodivé roviny

Nyní budeme řešit úplně stejnou úlohu o bodovém náboji pohybujícím se v blízkosti vodivé roviny jenom s tím rozdílem, že daná rovina má jistou konečnou vodivost. V tomto případě si zde představíme pouze řešení v kvazistatické aproximaci. Tedy pohyb bodového náboje popíšeme v rámci klasické mechaniky. Nalezení relativistického řešení v případě neideálně vodivé roviny je velmi obtížné, a proto se jím nebudeme dále zabývat.

Pro úspěšné řešení této úlohy je nejprve potřeba nalézt potenciál pole vodivé roviny. Na počátku v čase  $t = 0$  na bodový náboj působí síla proti směru osy  $z$ . Předpokládejme, že se bodový náboj pohybuje po ose  $z$ . Potom lze odhadnout, že elektrické pole vodiče je axiálně symetrické. Při nepatrném posunutí bodového náboje se v rovině indukuje axiálně symetrický elektrický proud, který teče v radiálním směru. Z toho vyplývá, že i naindukovaný náboj zůstane axiálně symetrický, a tedy síla působící na bodový náboj má stále směr rovnoběžný se směrem osy  $z$ . Proto lze předpokládat neustálý pohyb bodového náboje po ose  $z$ . Tedy potenciál bodového náboje pro  $t \geq 0$  je popsán vtahem [5]

$$\Phi_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-h)^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty J_0(k\rho) e^{-k|z-h|} dk, \quad (2.105)$$

kde  $J_0(x)$  je Besselova funkce prvního druhu a nultého stupně.

Ze symetrie daného problému vyplývá, že potenciál pole vodivé roviny je neustále axiálně symetrický a lze jej vyjádřit ve tvaru

$$\Phi_v = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty A J_0(k\rho) e^{-k|z|} dk. \quad (2.106)$$

Potenciál (2.106) je souhrnně zapsán pro obě oblasti vodiče. Pro oblast 1 ( $z < 0$ ) má exponenciála tvar  $e^{kz}$ , kdežto pro oblast 2 ( $z > 0$ ) má exponenciála tvar  $e^{-kz}$ .

Neznámý koeficient  $A = A(k, t)$  určíme z rovnice (2.64), která vyjadřuje okrajovou podmínku. Časová derivace plošné hustoty náboje naindukovaného na povrchu vodivé roviny je dána vztahem

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \left[ \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial^2\Phi_{v_1}}{\partial t \partial \xi^1} - \frac{\partial^2\Phi_{v_2}}{\partial t \partial \xi^1} \right) \right]_{z=0} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \int_0^\infty k \frac{\partial A}{\partial t} J_0(k\rho) dk. \quad (2.107)$$

Následně určíme výraz  $(\Delta_S \Phi)_{z=0} = [\Delta_S (\Phi_v + \Phi_Q)]_{z=0}$  :

$$(\Delta_S \Phi)_{z=0} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty k^2 (A + e^{-kh}) J_0(k\rho) dk . \quad (2.108)$$

Po dosazení vyjádřené časové derivace plošné hustoty a výrazu  $(\Delta_S \Phi)_{z=0}$  do rovnice (2.64) a následně úpravě dostáváme

$$\frac{dA}{dt} + \frac{\gamma_S}{2\epsilon_0} k (A + e^{-kh}) = 0 . \quad (2.109)$$

K řešení předchozí diferenciální rovnice můžeme použít Laplaceovu transformaci. Potom obraz Laplaceovy transformace koeficientu  $A$  je dán vztahem

$$\mathcal{L}[A](s) = \frac{A(t=0) - \frac{\gamma_S}{2\epsilon_0} k \mathcal{L}[e^{-kh(t)}](s)}{s + \frac{\gamma_S}{2\epsilon_0} k} . \quad (2.110)$$

Počáteční hodnota  $A(t=0)$  se odvíjí od počátečního rozložení potenciálu pole vodiče. Předpokládejme, že před i při udělení malého impulzu ve směru osy  $z$  se bodový náboj nachází ve výšce  $h_0$  a výsledný potenciál na vodivé rovině je nulový. Potom  $A(t=0)$  je rovno  $-e^{-kh_0}$ . Inverzní transformací pro časový vývoj koeficientu  $A$  dostáváme:

$$A(k, t) = -e^{-k(h_0 + \frac{\gamma_S}{2\epsilon_0}t)} - \frac{\gamma_S}{2\epsilon_0} \int_0^t k e^{-k\frac{\gamma_S}{2\epsilon_0}(t-\tau)} e^{-kh(\tau)} d\tau . \quad (2.111)$$

Nyní když známe koeficient  $A$ , jsme schopni řešit pohyb bodového náboje. Pohybová rovnice pro případ pohybu bodového náboje nad vodivou rovinou má následující tvar

$$m \frac{d^2 h}{dt^2} = -Q \left( \frac{\partial \Phi_{v_2}}{\partial z} \right)_{\rho=0, z=h} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty k A(k, t) e^{-kh(t)} dk . \quad (2.112)$$

Řešení uvedené pohybové rovnice je velice obtížné. V podstatě, když za  $A(k, t)$  dosadíme ze vztahu (2.112), obdržíme integro-diferenciální rovnici. Především obtížnost řešení pohybové rovnice (2.112) spočívá v její nelinearitě. I přesto, že nelze danou pohybovou rovnici analyticky řešit, můžeme se pokusit nalézt zlinearizované řešení, čímž získáme jistou představu o pohybu bodového náboje v obecném případě. Zapišme výšku  $h(t)$  ve tvaru

$$h(t) = h_0 + \xi(t) . \quad (2.113)$$

Za předpokladu, že  $\xi(t) \ll h_0$ , kde  $\xi(t)$  chápeme jako malou „výchylku“ bodového náboje z počáteční polohy, můžeme provést následující aproximaci integrálu:

$$\int_0^{\infty} kA(k, t) e^{-kh(t)} dk \approx \int_0^{\infty} kA(k, t)(1 - k\xi) e^{-kh_0} dk. \quad (2.114)$$

Pohybová rovnice (2.112) má po zavedení nové proměnné  $\xi$  a aproximace (2.114) následující tvar

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} kA(k, t) (1 - k\xi) e^{-kh_0} dk, \quad \xi \ll h_0. \quad (2.115)$$

Zároveň můžeme linearizovat i koeficient  $A$ . Ale než bychom tak učinili, zamysleme se nad tím, jak budeme řešit zlinearizovanou pohybovou rovnici (2.112). Řešení v lineární aproximaci je stále poměrně obtížný problém. Mějme na paměti, že musíme řešit diferenciální-integrální rovnici. K řešení rovnic tohoto typu je nejvýhodnější využít Laplaceovu transformaci, která složitý „integro-diferenciální problém“ převede na jednodušší algebraický problém. Provedme tedy Laplaceovu transformaci levé i pravé strany rovnice (2.115) a potom dostaneme

$$m[s^2 \mathcal{L}(\xi) - v_0] = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} k \mathcal{L}(A) * \left( \frac{1}{s} - k \mathcal{L}(\xi) \right) e^{-kh_0} dk, \quad \xi \ll h_0, \quad (2.116)$$

kde  $v_0$  značí počáteční rychlost bodového náboje. Počáteční hodnota „výchylky“  $\xi$  je nulová.

Následně budeme linearizovat obraz Laplaceovy transformace koeficientu  $A$ . Ze vztahu (2.110) pro  $\xi \ll h_0$  dostáváme

$$\mathcal{L}(A) = -\frac{e^{-kh_0} + \frac{\gamma_S}{2\epsilon_0} k \mathcal{L}[e^{-kh(t)}]}{s + \frac{\gamma_S}{2\epsilon_0} k} \approx -\left( \frac{1}{s} - \frac{\frac{\gamma_S}{2\epsilon_0} k^2 \mathcal{L}(\xi)}{s + \frac{\gamma_S}{2\epsilon_0} k} \right) e^{-kh_0}. \quad (2.117)$$

Po dosazení (2.117) do (2.116) a následné úpravě dostáváme

$$m[s^2 \mathcal{L}(\xi) - v_0] = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} \left[ \frac{k}{s} - \left( \frac{k^3}{\frac{2\epsilon_0}{\gamma_S} s + k} + k^2 \right) \mathcal{L}(\xi) \right] e^{-2h_0 k} dk \quad (2.118)$$

(člen  $s \mathcal{L}(\xi) * \mathcal{L}(\xi)$  zanedbáváme). Za předpokladu, že poměr  $2\epsilon_0 s / \gamma_S$  je velmi malý, můžeme v aproximaci psát

$$m[s^2 \mathcal{L}(\xi) - v_0] \approx -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} \left[ \frac{k}{s} - \left( 2k^2 - \frac{2\epsilon_0}{\gamma_S} sk \right) \mathcal{L}(\xi) \right] e^{-2h_0 k} dk. \quad (2.119)$$

Jedná se o rozumný předpoklad. Hodnota permitivity vakua je  $8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

a většina běžných vodičů jsou dobré vodiče – vodiče s vysokou hodnotou vodivosti. Potom daný poměr  $2\varepsilon_0 s / \gamma_S$  lze opravdu považovat za malý, pokud parametr  $s$  nabývá malé hodnoty.

Po integraci v rovnosti (2.119) dostáváme

$$m[s^2 \mathcal{L}(\xi) - v_0] = -\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 h_0^2} \left[ \frac{1}{s} - 2 \left( \frac{1}{h_0} - \frac{\varepsilon_0}{\gamma_S} s \right) \mathcal{L}(\xi) \right]. \quad (2.120)$$

Z předchozí rovnosti již můžeme vyjádřit obraz Laplaceovy transformace veličiny  $\xi$ :

$$\mathcal{L}(\xi) = \left( v_0 - \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 m h_0^2} \frac{1}{s} \right) \left[ s^2 - \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 m h_0^3} \left( 1 - h_0 \frac{\varepsilon_0}{\gamma_S} s \right) \right]^{-1}. \quad (2.121)$$

Vzor k obrazu  $\mathcal{L}(\xi)$  nalezneme nejnázve pomocí *reziduové věty*. Máme celkem tři póly. Dva z nich se nachází v bodech odpovídajícím kořenům kvadratické rovnice nacházející se v hranaté závorce ve výrazu (2.121) a poslední třetí pól se nachází v bodě  $s = 0$ . Pro stručnost uvedme pouze výsledek, tedy veličinu  $\xi$  jako funkci času:

$$\xi(t) = \frac{v_0}{\lambda_2} e^{-\lambda_1 t} \sinh \lambda_2 t + \frac{h_0}{2} \left[ 1 - \left( \cosh \lambda_2 t + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sinh \lambda_2 t \right) e^{-\lambda_1 t} \right], \quad (2.122)$$

kde konstanty  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  jsou definovány následujícími vztahy

$$\lambda_1 = \frac{Q^2}{16\pi\gamma_S m h_0^2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{Q^2}{8\pi\gamma_S m h_0^2} \right)^2 + \frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0 m h_0^3}}.$$

Body, kde se nacházejí póly, jsou určeny vztahy  $s_{1,2} = -\lambda_1 \pm \lambda_2$ . Potom přibližná rovnost (2.119) platí za předpokladu, že

$$\frac{2\varepsilon_0}{\gamma_S} |-\lambda_1 \pm \lambda_2| \ll 1.$$

Následně naše získané aproximační řešení porovnejme s aproximačním řešením, které bychom získali v případě, kdy by rovina byla ideálně vodivá. Pro malé hodnoty posuvu  $\xi$  pro případ ideálně vodivé roviny dostáváme:

$$\xi_{id}(t) = \frac{v_0}{\lambda} \sinh \lambda t + \frac{h_0}{2} (1 - \cosh \lambda t), \quad (2.123)$$

kde  $\lambda$  je dáno vztahem

$$\lambda = \frac{Q}{\sqrt{8\pi\varepsilon_0 m h_0^3}}.$$

Pro jednoduchost provedme srovnání obou případů pro nulovou počáteční rychlost. Potom pro rozdíl  $\xi(t) - \xi_{id}(t)$  máme vztah:

$$\xi(t) - \xi_{id}(t) = \frac{h_0}{2} \left[ (\cosh \lambda t) - \left( \cosh \lambda_2 t + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sinh \lambda_2 t \right) e^{-\lambda_1 t} \right]. \quad (2.124)$$

Konkrétně by nás zajímalo, zda daný rozdíl  $\xi(t) - \xi_{id}(t)$  je kladný či záporný. Tím získáme představu o tom, v jakém případě se bodový náboj pohybuje rychleji. Rozviňme všechny funkce v (2.124) do nejnižších řádů. Potom získáme rozvoj rozdílu (2.124), kde znaménko prvního členu rozvoje rozhodne o signatuře daného rozdílu, který je v aproximaci roven

$$\xi(t) - \xi_{id}(t) \approx \frac{h_0}{2} \left[ 1 + \frac{\lambda^2 t^2}{2} - \left( 1 + \frac{\lambda_2^2 t^2}{2} + \lambda_1 t \right) (1 - \lambda_1 t) \right]. \quad (2.125)$$

Po úpravě dostáváme

$$\xi(t) - \xi_{id}(t) \approx \frac{h_0 \lambda_1 t^2}{4} (\lambda_1 + \lambda_2^2 t). \quad (2.126)$$

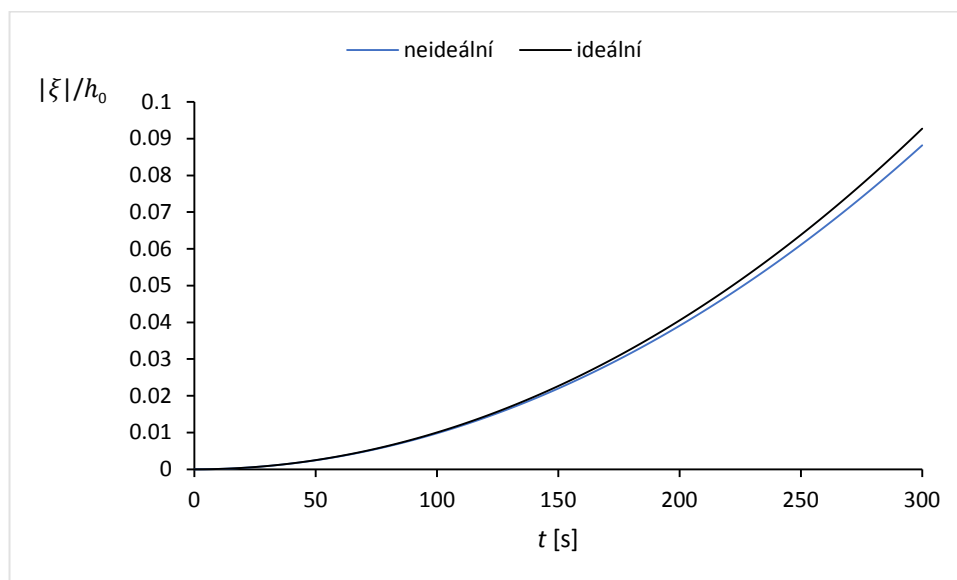
Zdůrazněme, že při úpravách posledního výrazu jsme využili vztah, který existuje mezi konstantami  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  a  $\lambda$ . Konkrétně jsme využili vztahu  $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 - \lambda^2$ .

Vraťme se nyní k získanému výsledku (2.126). Vidíme, že hodnota daného rozdílu  $\xi(t) - \xi_{id}(t)$  je kladná. Z toho vyplývá, že  $\xi(t)$  je větší než  $\xi_{id}(t)$ . Jelikož se jedná o volný pád bodového náboje při nulové počáteční rychlosti, je hodnota  $\xi(t)$  i  $\xi_{id}(t)$  záporná. To potom znamená, že v čase  $t$  se bodový náboj nachází blíže k vodivé rovině v případě dokonale vodivé roviny než v případě neideálně vodivé roviny. Z toho je patrné, že v případě neideálně vodivé roviny působí na bodový náboj menší síla. To je způsobeno tím, že v důsledku konečné vodivosti se volné náboje přesouvají pomaleji než v případě ideálního vodiče. Daný jev je tím výraznější, čím je odpor vodiče větší.

Na závěr provedme grafické srovnání pohybu bodového náboje pro případ ideálně a neideálně vodivé roviny. Opět pro jednoduchost uvažujme volný pád bodového náboje z klidu. Hodnoty konstant  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  volíme následovně:  $\lambda_1 = 0,0002 \text{ s}^{-1}$  a  $\lambda_2 = 0,002 \text{ s}^{-1}$ . V grafu 2.3 je vynesena závislost poměru absolutní hodnoty výchylky  $\xi$  a počáteční výšky  $h_0$  na čase. Z tohoto grafu můžeme vypořadovat, že výchylka  $\xi$  je na začátku pohybu bodového náboje prakticky stejná pro oba případy ideálně a neideálně vodivé roviny. Až v pozdějším čase můžeme pozorovat výraznější rozdíly.

Poznamenejme, že pro velmi vysoké vodivosti, kdy konstanta  $\lambda_1$  je velmi malá, je rozdíl mezi případem ideálně a neideálně vodivé roviny tak nepatrný, že můžeme průběh pohybu bodového náboje pro oba vodivostní případy ztotožnit.

Zároveň mějme na paměti, že představený postup řešení pohybu bodového náboje nad neideálně vodivou rovinou je aproximativní, a tudíž je nutné hlídat hodnotu  $\xi/h_0$ . To, do jaké hodnoty  $\xi/h_0$  lze použít naši aproximativní teorii, záleží na předem zvolené přesnosti numerického řešení.



Graf 2.3. Závislost poměru absolutní hodnoty výchylky  $\xi$  a počáteční výšky  $h_0$  na čase v porovnání pro ideálně a neideálně vodivou rovinu.

### 2.3.3. Pohyb bodového náboje umístěného v blízkosti izolované vodivé koule

Uvažujme izolovanou vodivou kouli o poloměru  $R$ , jejíž střed leží v počátku souřadnic. Na osu  $z$  do vzdálenosti  $z = h_0$  ( $h_0 > R$ ) umístíme bodový náboj velikosti  $Q$ . Předpokládejme, že bodový náboj visí nad vodivou koulí tak dlouho, dokud nenastane rovnovážný stav. V jistém okamžiku (po ustanovení rovnovážného stavu) bodový náboj pustíme, či mu udělíme malý impulz ve směru rovnoběžném s osou  $z$ . Naším úkolem bude zjistit, jak se bude bodový náboj pohybovat.

Pokud bychom se zajímali o případ ideálně vodivé koule, k řešení bychom mohli použít kulovou inverzi. V případě izolované koule bychom museli ještě umístit bodový náboj o velikosti  $-Q'$  do středu koule ( $Q'$  je fiktivní náboj vystupující v kulové inverzi). Avšak jenom pro případ nízkých rychlostí bodového náboje lze použít metody elektrostatického zobrazení. V případě relativistických rychlostí je elektrodynamické pole bodového náboje axiálně symetrické vzhledem k ose, na níž leží vektor rychlosti bodového náboje. Potom není možné, aby výsledné elektrické pole dvou relativisticky se pohybujících se bodových nábojů mělo nulové tečné složky na povrchu nějaké koule.

Proto se pro jednoduchost zabýváme pouze kvazistatickým řešením. Předpokládáme, že koule má konečnou vodivost. Samozřejmě, že i v tomto případě budeme nuceni řešit daný problém v lineární aproximaci. Početně jednodušší problém v případě, že koule je dokonale vodivá, získáme jako limitní případ, kdy měrná vodivost roste nad všechny meze.

## 1. Plná koule

Z elektrostatické úlohy o kouli víme, že rozklad potenciálu bodového náboje sídlícího na ose  $z$  je dán vztahem

$$\Phi_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{h^{n+1}} P_n(\cos \vartheta), \quad r < h. \quad (2.127)$$

I v tomto případě silové působení vyvolá pohyb bodového náboje po ose  $z$ . Potom lze předpokládat, že potenciál pole vodivé koule je axiálně symetrický. Uvažujme, že potenciál vodivé koule v její vnitřní a vnější oblasti lze zapsat ve tvaru

$$\Phi_{v_1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{r^n}{R^{n+1}} P_n(\cos \vartheta), \quad (2.128)$$

$$\Phi_{v_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{R^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \vartheta). \quad (2.129)$$

Nyní určíme neznámé koeficienty  $A_n = A_n(t)$ . Pro dynamické problémy bude výhodnější určit Laplaceovu transformaci koeficientů  $A_n$ . Protože uvažujeme plnou kouli a zároveň jsou splněny předpoklady námi vybudovaného postupu řešení v případě objemového vodiče, můžeme k výpočtu Laplaceovy transformace koeficientů  $A_n$  využít vztah (2.54). Po dosazení a následné úpravě dostáváme

$$\mathcal{L}(A_n) = \frac{A_n(t=0) - \frac{n}{2n+1} \frac{\gamma}{\epsilon_0} \mathcal{L}\left[\left(\frac{R}{h}\right)^{n+1}\right]}{s + \frac{n}{2n+1} \frac{\gamma}{\epsilon_0}}, \quad (2.130)$$

Hodnota  $A_n(t=0)$  je určena počáteční podmínkou. Předpokládáme, že v čase  $t=0$  má výsledný potenciál na povrchu koule neznámou konstantní hodnotu. Zároveň uvažujeme, že celkový náboj naindukovaný na povrchu koule je nulový – jedná se o izolovanou elektricky neutrální kouli.

Vzhledem k ortogonalitě funkcí [6]

$$\int_0^{\pi} P_n(\vartheta, \varphi) P_{n'}(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \, d\vartheta = \frac{2}{2n+1} \delta_{nn'} \quad (3.131)$$

a z výše vysloveným předpokladům vyplývá, že počáteční hodnota koeficientů  $A_n$  je rovna:

$$\begin{aligned} A_0(t=0) &= 0 \\ A_n(t=0) &= -\left(\frac{R}{h_0}\right)^{n+1}. \end{aligned} \quad (2.132)$$

Již jsme zdůraznili, že pro zjednodušení dané situace se pokusíme nalézt řešení v lineární aproximaci. Vzdálenost bodového náboje od středu koule  $h(t)$  můžeme vyjádřit jako

$$h(t) = h_0 + \xi(t). \quad (2.133)$$

Přepokládejme, že  $\xi(t) \ll h_0$ . Potom můžeme provést následující lineární aproximaci:

$$\left(\frac{R}{h}\right)^{n+1} \approx \left(\frac{R}{h_0}\right)^{n+1} \left[1 - (n+1) \frac{\xi}{h_0}\right]. \quad (2.134)$$

Zároveň předpokládejme, že  $h_0 \gg R$ . Pak můžeme zanedbat členy  $(R/h_0)^{n+1}$  pro vyšší  $n$ . Jelikož  $A_0 = 0$  i pro  $t > 0$ , je prvním nenulovým členem v rozvoji (2.128) a (2.129) člen s  $A_1$ . Proto zanedbejme členy  $(R/h_0)^{n+1}$  pro  $n \geq 2$ .

Laplaceova transformace jediného nezanedbaného koeficientu  $A_1$  je v lineární aproximaci rovna

$$\mathcal{L}(A_1) = -\left(\frac{R}{h_0}\right)^2 \left[ \frac{1}{s} - \frac{\frac{2\gamma}{3\epsilon_0} \frac{\mathcal{L}(\xi)}{h_0}}{s + \frac{\gamma}{3\epsilon_0}} \right]. \quad (2.135)$$

Pohybová rovnice popisující pohyb bodového náboje po ose  $z$  má tvar

$$m \frac{d^2 h}{dt^2} = -Q \left( \frac{\partial \Phi_{v_2}}{\partial r} \right)_{r=h, \vartheta=0} \approx \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{A_1 R}{h^3}. \quad (2.136)$$

V lineární aproximaci dostáváme

$$m \frac{d^2 h}{dt^2} \approx \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{A_1 R}{h_0^3} \left(1 - 3 \frac{\xi}{h_0}\right). \quad (2.137)$$

Po Laplaceově transformaci levé i pravé strany rovnice (2.137) získáváme

$$m[s^2 \mathcal{L}(\xi) - v_0] \approx \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{R}{h_0^3} \mathcal{L}(A_1) * \left( \frac{1}{s} - 3 \frac{\mathcal{L}(\xi)}{h_0} \right). \quad (2.138)$$



Po dosazení za  $\mathcal{L}(A_1)$  ze vztahu (2.135) dostáváme

$$m[s^2\mathcal{L}(\xi) - v_0] \approx -\frac{Q^2 R^3}{2\pi\varepsilon_0 h_0^5} \left[ \frac{1}{s} - \frac{\frac{2\gamma}{3\varepsilon_0} \frac{\mathcal{L}(\xi)}{h_0}}{s + \frac{\gamma}{3\varepsilon_0}} \right] * \left( \frac{1}{s} - 3 \frac{\mathcal{L}(\xi)}{h_0} \right), \quad (2.139)$$

kde  $v_0$  značí počáteční rychlost bodového náboje. Po vyjádření  $\mathcal{L}(\xi)$  z předchozího vztahu dostáváme

$$\mathcal{L}(\xi) \approx \frac{\left( v_0 s - \frac{Q^2 R^3}{2\pi\varepsilon_0 m h_0^5} \right) \left( s + \frac{\gamma}{3\varepsilon_0} \right)}{s \left[ s^2 \left( s + \frac{\gamma}{3\varepsilon_0} \right) - \frac{Q^2 R^3}{2\pi\varepsilon_0 m h_0^6} \left( 3s + \frac{5\gamma}{3\varepsilon_0} \right) \right]} \quad (2.140)$$

(člen s  $\mathcal{L}(\xi) * \mathcal{L}(\xi)$  zanedbáváme).

Časovou závislost polohy  $\xi$  bychom získali opět pomocí reziduové věty. Avšak v tomto případě póly sídlí v bodech odpovídajícím kořenům kubické rovnice a k tomu ještě jeden pól sídlí v bodě  $s = 0$ . Pravdou je, že kořeny kubické rovnice můžeme nalézt analyticky, ale hledat kořeny kubické rovnice v obecném případě je poměrně pracné. Proto jako výsledek ponechme obraz Laplaceovy transformace veličiny  $\xi$  a řešení  $\xi(t)$  je potom vhodné nalézt až pro konkrétně zadaný numerický problém.

## 2. Kulová skořepina

Pro srovnání uveďme řešení pro případ, kdy budeme mít vodivou kulovou skořepinu velmi tenké tloušťky (vodivou sféru). V tomto případě má kulová skořepina jistou konečnou měrnou plošnou vodivost  $\gamma_S$ . Řešíme úplně stejnou úlohu o pohybu bodového náboje jako v předchozím případě. Tedy na ose  $z$  sídlí bodový náboj, který v jistém okamžiku ( $t = 0$ ) pustíme, případně mu dodáme malý impulz rovnoběžně s osou  $z$ . Naším úkolem bude nalézt pohyb bodového náboje a pro jednoduchost rovněž v lineární aproximaci.

Potenciál pole vodivé kulové skořepiny lze rovněž napsat ve tvaru (2.128) a (2.129). V případě plošného vodiče k řešení využijeme rovnici (2.138). Dále platí:

$$\left( \frac{\partial^2 \Phi_{V_1}}{\partial t \partial r} - \frac{\partial^2 \Phi_{V_2}}{\partial t \partial r} \right)_{r=R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial A_n}{\partial t} (2n+1) P_n(\cos \vartheta), \quad (2.141)$$

$$(\Delta_S \Phi)_{r=R} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) \left[ A_n + \left( \frac{R}{h} \right)^{n+1} \right] P_n(\cos \vartheta). \quad (2.142)$$

Po dosazení (2.141) a (2.142) do rovnice (2.64) a následné úpravě dostáváme

$$\frac{dA_n}{dt} + \frac{n(n+1)}{2n+1} \frac{\gamma_S}{\varepsilon_0 R} \left[ A_n + \left( \frac{R}{h} \right)^{n+1} \right] = 0. \quad (2.143)$$

Na předchozí rovnici zapůsobíme Laplaceovou transformací a následně vyjádříme  $\mathcal{L}(A_n)$ :

$$\mathcal{L}(A_n) = \frac{A_n(t=0) - \frac{n(n+1)}{2n+1} \frac{\gamma_S}{\varepsilon_0 R} \left[ \left( \frac{R}{h} \right)^{n+1} \right]}{s + \frac{n(n+1)}{2n+1} \frac{\gamma_S}{\varepsilon_0 R}}. \quad (2.144)$$

Porovnáním vztahů (2.130) a (2.144) zjistíme, že vztah (2.144) získáme tak, že ve vztahu (2.130) měrnou vodivost  $\gamma$  nahradíme výrazem  $(n+1)\gamma_S/R$ . To potom znamená, že můžeme Laplaceovu transformaci veličiny  $\xi$  (v lineární aproximaci) určit přímo ze vztahu (2.140), kde za  $\gamma$  dosadíme  $2\gamma_S/R$  ( $n=1$ ). Potom pro Laplaceovu transformaci polohy  $\xi$  dostáváme

$$\mathcal{L}(\xi) \approx \frac{\left( v_0 s - \frac{Q^2 R^3}{2\pi \varepsilon_0 m h_0^5} \right) \left( s + \frac{2\gamma_S}{3\varepsilon_0 R} \right)}{s \left[ s^2 \left( s + \frac{2\gamma_S}{3\varepsilon_0 R} \right) - \frac{Q^2 R^3}{2\pi \varepsilon_0 m h_0^6} \left( 3s + \frac{10\gamma_S}{3\varepsilon_0 R} \right) \right]}. \quad (2.145)$$

## Kapitola 3. Interakce bodového náboje a pohybujících se vodičů

### 3.1. Obecná teorie

Jak v první kapitole věnované elektrostatické úloze, tak i ve druhé kapitole věnované elektrodynamickým problémům, především věnované popisu pohybu bodového náboje, jsme se zabývali interakcí bodového náboje s vodičem, který se nacházel v klidu. Může však nastat situace, kdy se bude pohybovat i samotný vodič. Může se jednat o pohyb vázaný (je zadán nezávisle na vnějších podmínkách) nebo volný, který je důsledkem vzájemného silového působení mezi bodovým náboj a vodičem. Pro jednoduchost se budeme zabývat výhradně situací, kdy vodič vykonává vázaný pohyb.

Teorii, která zahrnuje pohybující se vodič, můžeme vybudovat na základě předchozích poznatků. Naši teorii konstruujeme postupným zobecněním. Nejprve jsme se věnovali teorii elektrostatické interakce bodového náboje a vodiče. Tu jsme poté rozšířili na elektrodynamické problémy. A nyní se pokusme danou teorii zobecnit pro případ pohybujícího se vodiče.

Soustavu, vůči které se pohybuje vodič, označme jako *laboratorní soustavu*. Přejdeme do soustavy spojené s vodičem, ve které se vodič nachází v klidu. Řešení daného problému v případě klidového vodiče již známe. Tomuto případu jsme věnovali dvě předchozí kapitoly. Známe-li řešení daného problému v soustavě spojené s vodičem, můžeme potom tyto výsledky přetransformovat do laboratorní soustavy, čímž získáme řešení daného problému pro pohybující se vodič.

Tento postup se nám může jevit celkem jednoduše. Ale jednoduché to tak není. První, co si musíme uvědomit, je skutečnost, že daná situace je odlišná podle toho, zda se nacházíme v inerciální nebo neinerciální soustavě. Je tedy přirozené dělit daný problém podle toho, jakým způsobem se vodič pohybuje. Koná-li vodič přímočarý rovnoměrný pohyb, je soustava spojená s pohybujícím se vodičem inerciální. Tudíž k popisu interakce bodového náboje s vodiči můžeme použít teorii vybudovanou v první i druhé kapitole. V případě nerovnoměrného pohybu nebo křivočarého pohybu je soustava spojená s pohybujícím se vodičem neinerciální. V takovém případě musíme do pohybové rovnice bodového náboje zahrnout zdánlivé (nepravé) síly.

Tyto zdánlivé síly však ovlivňují i proudové rozložení ve vodiči. Jejich míru vlivu na proud ve vodiči můžeme zkonstruovat na základě *Drudeho modelu* (o modelu se čtenář může dozvědět více např. v [1]). Abychom mohli zanedbat vliv nepravých sil na průběh proudu, musí být splněna zesílená nerovnost  $qE/m_n \gg a_{zd}$ , kde  $q$  je náboj volného nositele náboje,  $m_n$  je jeho hmotnost,  $E$  značí velikost celkové elektrické intenzity ve vodiči a  $a_{zd}$  označuje zrychlení nositele náboje vyvolané vlivem zdánlivé síly. V naší teorii budeme předpokládat, že daná zesílená nerovnost je splněna, tedy vliv zdánlivých sil na průběh proudu ve vodiči budeme zanedbávat. Jedná se o celkem rozumný předpoklad, neboť například pro kovový vodič, jehož volnými nositeli náboje jsou elektrony, máme:  $q/m_n = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

Vzhledem k tomu, že je jednodušší nalézt řešení rovnic elektromagnetického pole a pohybové rovnice bodového náboje v inerciální soustavě než v neinerciální, bude nakonec lepší řešit daný problém v laboratorní soustavě.

Na druhou stranu v laboratorní soustavě nastává jistá matematická obtíž. V obecném případě pohybu vodiče není možné v laboratorní soustavě vyjádřit povrch vodiče jako jednu ze souřadnicových ploch. Pohybující se vodič neustále mění svoji polohu, což sebou přináší skutečnost, že se mění i poloha povrchu vodiče, na němž stanovujeme okrajovou podmínku.

Existuje však speciální případ pohybu vodiče, kdy je jeho povrch určen jako souřadnicová plocha  $\xi^1 = a$  pro každý čas  $t$ . Jedná se o pohyb, který respektuje jednu ze symetrií vodiče. Tedy za předpokladu, že vodič má jisté symetrie. Co tím myslíme? Symetrický vodič je takový vodič, jehož vlnění je invariantní vůči jistému posunutí, které nazýváme *symetrická operace*. Jednoduše řečeno, po provedení symetrické operace vodič zaujímá stále stejnou pozici.

V podstatě existují dva způsoby pohybu respektující symetrii vodiče. Prvním způsobem je translační pohyb vodiče ve směru jeho translační symetrie a druhým způsobem je rotační pohyb axiálně symetrického tělesa okolo jeho osy axiální symetrie. Příkladem prvního způsobu pohybu je vodivá rovina pohybující se ve směru tečném k rovině nebo válec pohybující se ve směru jeho osy. Příkladem druhého způsobu pohybu je například rotující vodivá koule.

Pro jednoduchost se zabývejme pouze takovými způsoby pohybu vodiče, které respektují symetrii vodiče. Takovéto způsoby pohybu vodiče přinášejí jeden zajímavý jev, kterým je sama skutečnost, že nejsme schopni přímým pohledem poznat, zda se vodič nachází v klidu nebo se pohybuje. V obou případech je jeho vzhled stejný. Můžeme si pak položit otázku, zda se vůbec nějakým způsobem projeví pohyb vodiče respektující jeho symetrii na silové působení bodového náboje, když vodič zaujímá stále stejnou oblast prostoru.

Předpokládejme, že se vodič nachází nejprve v klidu. V jistém okamžiku začne vykonávat pohyb respektující symetrii vodiče. Bude-li vodič neideální, tak potom díky nenulovému elektrickému odporu bude náboj naindukovaný na povrchu vodiče strháván spolu s pohybujícím se vodičem. V důsledku pohybu naindukovaného náboje se na povrchu vodiče objeví nenulové tečné složky elektrické intenzity, které budou „zabraňovat“ pohybu naindukovaného náboje. Změna rozložení naindukovaného náboje se také projeví na síle působící na bodový náboj. Tato síla bude mít nenulovou složku ve směru pohybu vodiče. Z toho vyplývá, že volný bodový náboj je tažen ve směru pohybu vodiče!

Jiná situace nastává v případě ideálního vodiče. V důsledku nulového elektrického odporu nedochází k interakci volných nositelů náboje s vnitřní strukturou vodiče. Proto při pohybu vodiče nedochází ke strhávání naindukovaného náboje ve směru pohybu. Tedy v případě pohybu ideálního vodiče, zůstává rozložení naindukovaného náboje v klidu. To má za následek, že výsledné elektrické pole i silové působení na bodový náboj je stejné jako v případě, kdyby byl vodič v klidu! Z toho vyplývá, že pohyb vodiče respektující symetrii vodiče se projevuje pouze v případě neideálního vodiče.

Nyní přistoupíme k odvození rovnic popisující situaci, kdy dochází k pohybu vodiče respektující jeho symetrii. Jak jsme již řekli, danou situaci budeme řešit v laboratorní soustavě. Elektromagnetické pole je i v případě pohybu vodiče popsáno rovnicemi (2.1) až (2.4). Ale v případě pohybujícího se vodiče není proudová hustota  $\mathbf{j}$  dána Ohmovým zákonem ve tvaru (2.34). Ohmův zákon ve zmíněném tvaru platí pro klidový vodič. Tedy v soustavě spojené s vodičem platí Ohmův zákon ve tvaru

$$\mathbf{j}' = \gamma' \mathbf{E}' . \quad (3.1)$$

Nás však zajímá vztah mezi proudovou hustotou  $\mathbf{j}$  a elektrickou intenzitou  $\mathbf{E}$  v laboratorní soustavě. Proudovou hustotu  $\mathbf{j}$  získáme pomocí transformace při přechodu ze soustavy spojené s vodičem do laboratorní soustavy. Předpokládejme, že se

vodič může i pohybovat relativistickou rychlostí  $\mathbf{u}$ . Potom se proudová hustota do laboratorní soustavy transformuje podle vztahu [2]

$$\mathbf{j}_{\perp} = \mathbf{j}'_{\perp}, \quad \mathbf{j}_{\parallel} = \frac{\mathbf{j}'_{\parallel} + \rho' \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (3.2)$$

Index  $\parallel$  označuje průmět dané veličiny do směru vektoru rychlosti vodiče a index  $\perp$  označuje průmět dané veličiny do směru kolmého k vektoru rychlosti vodiče. Objemová hustota  $\rho'$  náboje uvnitř vodiče, kterou měříme v soustavě spojené s vodičem, je nulová, jak jsme si ukázali ve druhé kapitole. Dosadíme-li za proudovou hustotu z (3.1) a spolu se skutečností nulovosti  $\rho'$ , dostáváme

$$\mathbf{j}_{\perp} = \gamma_0 \mathbf{E}'_{\perp}, \quad \mathbf{j}_{\parallel} = \frac{\gamma_0 \mathbf{E}'_{\parallel}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (3.3)$$

kde  $\gamma_0 = \gamma'$  značí tzv. klidovou měrnou vodivost. Jedná se o materiálovou konstantu naměřenou v případě klidového vodiče. Je to přesně ta hodnota měrné vodivosti, kterou bychom pro určitý materiál, z něhož je vodič vyroben, našli v tabulkách.

Jednotlivé složky  $\mathbf{E}'_{\perp}$  a  $\mathbf{E}'_{\parallel}$  se transformují podle vztahů [2]

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \frac{(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})_{\perp}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (3.4)$$

Magnetická indukce  $\mathbf{B}$  značí indukci magnetického pole pozorovaného v laboratorní soustavě. Dosadíme-li vyjádřené složky  $\mathbf{E}'_{\perp}$  a  $\mathbf{E}'_{\parallel}$  do (3.3), získáme

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{\gamma_0 (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})_{\perp}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad \mathbf{j}_{\parallel} = \frac{\gamma_0 \mathbf{E}_{\parallel}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (3.5)$$

Pro proudovou hustotu  $\mathbf{j}$  můžeme souhrnně psát

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\perp} + \mathbf{j}_{\parallel} = \frac{\gamma_0 (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (3.6)$$

Podobně můžeme odvodit vztah pro hustotu plošného proudu v laboratorní soustavě. V soustavě spojené s vodičem je hustota plošného proudu dána vztahem

$$\mathbf{j}'_s = \gamma'_s \mathbf{E}'_t. \quad (3.7)$$

Zcela analogicky k transformaci hustoty objemového proudu se hustota plošného proudu transformuje podle vztahu

$$\mathbf{j}'_{S\perp} = \mathbf{j}_{S\perp}, \quad \mathbf{j}'_{S\parallel} = \frac{\mathbf{j}_{S\parallel} - \sigma \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (3.8)$$

Tentokrát jsme však použili zpětnou transformaci do soustavy spojené s vodičem, a to kvůli plošná hustotě  $\sigma$  vyjádřené v laboratorní soustavě. V tomto případě je plošná hustota  $\sigma$  určena vztahem (1.34), ve kterém vystupuje elektrická intenzita v požadované laboratorní soustavě. Vyjádříme-li  $\mathbf{j}_{S\parallel}$  z (3.8) a dosadíme-li za hustotu plošného proudu z  $\mathbf{j}'_S$  (3.7), dostáváme

$$\mathbf{j}_{S\perp} = \gamma_{S_0} \mathbf{E}'_{t\perp}, \quad \mathbf{j}_{S\parallel} = \gamma_{S_0} \mathbf{E}'_{t\parallel} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} + \sigma \mathbf{u}, \quad (3.9)$$

kde  $\gamma_{S_0} = \gamma'_S$  značí klidovou měrnou plošnou vodivost, která má podobný význam jako  $\gamma_0$ . Tečná složka  $\mathbf{E}'_t$  se transformuje opět pomocí (3.4). Potom po dosazení vyjádřené složky  $\mathbf{E}'_{t\perp}$  a  $\mathbf{E}'_{t\parallel}$  do (3.9) získáme

$$\mathbf{j}_{S\perp} = \frac{\gamma_{S_0} (\mathbf{E}_t + \mathbf{u} \times \mathbf{B})_{\perp}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad \mathbf{j}_{S\parallel} = \gamma_{S_0} \mathbf{E}_{t\parallel} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} + \sigma \mathbf{u}, \quad (3.10)$$

Pro plošnou proudovou hustotu  $\mathbf{j}_S$  můžeme souhrnně psát

$$\mathbf{j}_S = \mathbf{j}_{S\perp} + \mathbf{j}_{S\parallel} = \frac{\gamma_{S_0} \left[ (\mathbf{E}_t + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - (\mathbf{E}_t \cdot \mathbf{u}) \frac{\mathbf{u}}{c^2} \right]}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + \sigma \mathbf{u}. \quad (3.11)$$

Vztahy pro proudovou hustotu v případě relativisticky pohybujícího se vodiče jsou poměrně složité. Navíc v tomto případě proudová hustota závisí na magnetickém poli. Danou situaci můžeme výrazně zjednodušit (po vzoru kvazistatického přiblížení), když se vodič bude pohybovat malou rychlostí v porovnání s rychlostí světla. Samozřejmě uvažujeme, že elektrické pole je v soustavě spojené s vodičem kvazistatické. Potom elektrické pole v laboratorní soustavě je rovněž kvazistatické, tudíž hustota objemového proudu bude dána vztahem (2.34) a hustota plošného proudu je dána vztahem

$$\mathbf{j}_S = \gamma_S \mathbf{E}_t + \sigma \mathbf{u}. \quad (3.12)$$

(Vliv magnetického pole je v kvazistatickém přiblížení malých rychlostí vodičů zanedbatelný.) V případě nízkých rychlostí pohybu vodiče se vracíme ke značení  $\gamma$  a  $\gamma_S$ , neboť v tomto případě je měrná vodivost v obou soustavách, se kterými pracujeme, stejná.

Ze vztahu (3.12) a i z obecnějšího vztahu (3.11) vyplývá, že pohybuje-li se objemový ( $\gamma_S = 0$ ) nebo i plošný vodič, teče po jeho povrchu plošný konvenční proud

roven  $\sigma \mathbf{u}$ . Potom okrajová podmínka – rovnice kontinuity na povrchu vodiče není daná vztahy odvozenými ve druhé kapitole. Tentokrát do celkového toku proudové hustoty přispívá i již zmíněný konvenční proud. Zcela analogicky ke vztahu (2.58) pro konvenční proud (tok hustoty konvenčního proudu) dostáváme

$$I_{kon} = \int_{\partial\omega} \sigma \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_S dl = \int_{\omega} \operatorname{div}_S(\sigma \mathbf{u}) dS . \quad (3.13)$$

Jelikož  $\operatorname{div}_S(\sigma \mathbf{u}) = \sigma \operatorname{div}_S \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}_S \sigma$  a  $\operatorname{div}_S \mathbf{u} = 0$ , můžeme psát

$$I_{kon} = \int_{\omega} \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}_S \sigma dS . \quad (3.14)$$

(Pro připomenutí  $\omega$  značí kompaktní plochu na povrchu vodiče.) Potom rovnice kontinuity na povrchu pohybujícího se vodiče má v laboratorní soustavě a v kvazistatickém přiblížení následující tvar:

objemový vodič:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \gamma \operatorname{grad}(\Phi_{v_1} + \Phi_Q) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}_S \sigma = 0 , \quad (3.15)$$

plošný vodič:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \gamma_S \Delta_S(\Phi_{v_1} + \Phi_Q) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}_S \sigma = 0 . \quad (3.16)$$

Vzhledem ke složitosti, necháme rovnici kontinuity ve tvaru (3.15) a (3.16). Rovněž si uvědomme, že rychlost  $\mathbf{u}$  může být i funkcí polohy. Příkladem může být rotující koule.

### 3.2. Řešené příklady

Jako v předchozích kapitolách jsme k lepšímu pochopení vybudované teorie spočítali několik málo příkladů, tak i nyní spočítáme nějaké příklady zahrnující pohybující se vodič. Přičemž pohyb vodiče bude respektovat určitou jeho symetrii. Nejjednodušší situace nastává, když do blízkosti pohybujícího se vodiče umístíme bodový náboj, který se nadále nachází v klidu. Jednoduše řečeno, bodový náboj „visí“ nad pohybujícím se vodičem.

Naším úkolem bude na vybraných příkladech podrobněji zkoumat chování soustavy bodový náboj nacházející se v přítomnosti pohybujícího se vodiče. Především se pokusíme dokázat naše tvrzení, že síla působící na bodový náboj má nenulovou složku ve směru pohybu vodiče.

Budeme řešit dvě úlohy. Bodový náboj umístěný nad pohybující se rovinou a bodový náboj umístěný v blízkosti rotující koule.

### 3.2.1. Bodový náboj umístěný nad pohybující se vodivou rovinou

Uvažujme izolovanou vodivou rovinu, která je totožná s rovinou  $z = 0$ . Vodivá rovina má konečnou měrnou plošnou vodivost  $\gamma_S$  a pohybuje se konstantní rychlostí  $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x$  ( $u \ll c$ ), tedy ve směru osy  $x$ . Na osu  $z$  do výšky  $h$  nad vodivou rovinu umístíme bodový náboj, jehož poloha se nadále nemění. Naším úkolem bude podrobnější studium tohoto systému.

Nejprve nalezneme rozklad potenciálu bodového náboje ve vhodně zvoleném souřadnicovém systému. Vzhledem k danému problému bude nejvhodnější pracovat přímo v kartézských souřadnicích  $(x, y, z)$ . Avšak rozklad potenciálu bodového náboje v kartézských souřadnicích, vhodný pro náš problém, se nepodařilo nalézt. Proto se pokusíme zkonstruovat daný rozklad potenciálu přímo řešením Poissonovy rovnice (1.6), která má v kartézských souřadnicích tvar

$$\frac{\partial^2 \Phi_Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_Q}{\partial z^2} = -\frac{Q}{\varepsilon_0} \delta(x) \delta(y) \delta(z - h) . \quad (3.17)$$

Distribuci  $\delta(x)$  a  $\delta(y)$  můžeme vyjádřit pomocí vztahů

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos k_1 x dk_1 , \quad \delta(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos k_2 y dk_2 . \quad (3.18)$$

Vztahy (3.18) vyplývají ze skutečnosti, že Fourierova transformace z jedničky je rovna Diracově delta distribuci.

Potenciál bodového náboje předpokládejme ve tvaru

$$\Phi_Q = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \cos k_1 x \cos k_2 y G(k_1, k_2, z) dk_1 dk_2 , \quad (3.19)$$

kde  $G(k_1, k_2, z)$  je neznámá funkce. Po dosazení (3.19) a (3.18) do (3.17) a následné úpravě dostáváme

$$\frac{d^2 G}{dz^2} - (k_1^2 + k_2^2)G = -\frac{Q}{\varepsilon_0} \delta(z - h) . \quad (3.20)$$

Následně vyřešíme předchozí rovnici. Jedná se o diferenciální rovnici druhého řádu, na jejíž pravé straně vystupuje Diracova delta distribuce. Nejprve nalezneme řešení na dvou oblastech,  $z < h$  a  $z > h$ . Vzhledem k tomu, že řešení na dané oblasti musí být omezené, pak máme



$$G_1 = A_1 e^{\sqrt{k_1^2 + k_2^2} (z-h)} , \quad z < h , \quad (3.21)$$

$$G_2 = A_2 e^{-\sqrt{k_1^2 + k_2^2} (z-h)} , \quad z > h , \quad (3.22)$$

kde  $A_1$  a  $A_2$  jsou neznámé konstanty. Funkce  $G$  je v bodě  $z = h$  spojitá, tedy  $G_1(z = h) = G_2(z = h)$ . Z toho vyplývá, že  $A_1 = A_2 = A$ . Derivace funkce  $G$  je však v bodě  $z = h$  nespojitá a její skok v tomto bodě je určen vztahem

$$\left( \frac{dG_2}{dz} - \frac{dG_1}{dz} \right)_{z=h} = -\frac{Q}{\varepsilon_0} . \quad (3.23)$$

Ze vztahu (3.23) pro neznámou konstantu  $A$  vyplývá

$$A = \frac{Q}{2\varepsilon_0 \sqrt{k_1^2 + k_2^2}} . \quad (3.24)$$

Po dosazení vyjádřené konstanty  $A$  můžeme funkci  $G$  souhrnně zapsat ve tvaru

$$G = \frac{Q e^{-\sqrt{k_1^2 + k_2^2} |z-h|}}{2\varepsilon_0 \sqrt{k_1^2 + k_2^2}} . \quad (3.25)$$

Dosadíme-li vyjádřenou funkci  $G$  do (3.19), získáme pro rozklad potenciálu bodového náboje vztah

$$\Phi_Q = \frac{Q}{2\pi^2 \varepsilon_0} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos k_1 x \cos k_2 y}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} e^{-\sqrt{k_1^2 + k_2^2} |z-h|} dk_1 dk_2 . \quad (3.26)$$

Zavedme následující parametrické vyjádření:

$$\begin{aligned} k_1 &= k \cos \alpha , \\ k_2 &= k \sin \alpha . \end{aligned} \quad (3.27)$$

Potom integrál (3.26) v nových proměnných  $(k, \alpha)$  má poněkud jednodušší tvar

$$\Phi_Q = \frac{Q}{8\pi^2 \varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \cos(kx \cos \alpha) \cos(ky \sin \alpha) e^{-k|z-h|} dk d\alpha . \quad (3.28)$$

Následně určíme potenciál pole vodivé roviny, který řeší Laplaceovu rovnici a její obecné „separované“ řešení v kartézských souřadnicích zapišme ve tvaru

$$\Phi_v = \frac{Q}{8\pi^2 \varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} [C_1 \cos(kx \cos \alpha) + C_2 \sin(kx \cos \alpha)] [D_1 \cos(ky \sin \alpha) + D_2 \sin(ky \sin \alpha)] e^{-k|z|} dk d\alpha . \quad (3.29)$$

Koeficienty  $C_i$  a  $D_i$ ,  $i = 1, 2$  jsou neznámé a mohou být funkcí  $k$ ,  $\alpha$  a  $t$ . Jelikož se vodivá rovina pohybuje ve směru osy  $x$ , lze předpokládat, že potenciál pole vodivé roviny bude symetrický vzhledem k rovině  $y = 0$ . Tedy je splněna rovnost:  $\Phi_v(x, y, z) = \Phi_v(x, -y, z)$ , z čehož vyplývá, že  $D_2 = 0$ . Dále zavedme  $A = C_1 D_1$  a  $B = C_2 D_1$ . Potom pro potenciál pole vodivé roviny dostáváme

$$\Phi_v = \frac{Q}{8\pi^2 \varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} [A \cos(kx \cos \alpha) + B \sin(kx \cos \alpha)] \cos(ky \sin \alpha) e^{-k|z|} dk d\alpha . \quad (3.30)$$

Ze vztahu (1.35) pro plošnou hustotu náboje naindukovaného na povrchu vodivé roviny dostáváme

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} k [A \cos(kx \cos \alpha) + B \sin(kx \cos \alpha)] \cos(ky \sin \alpha) dk d\alpha . \quad (3.31)$$

Následně určíme  $\Delta_S \Phi(z=0) = \Delta_S [(\Phi_{v_1} + \Phi_Q)]_{z=0}$ :

$$\Delta_S \Phi(z=0) = -\frac{Q}{8\pi^2 \varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} k^2 [A \cos(kx \cos \alpha) + B \sin(kx \cos \alpha) + \cos(kx \cos \alpha) e^{-kh}] \cos(ky \sin \alpha) dk d\alpha . \quad (3.32)$$

Dále určíme výraz  $\mathbf{u} \cdot \text{grad}_S \sigma$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \text{grad}_S \sigma &= u \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)_{z=0} = \\ &= \frac{Qu}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} k^2 \cos \alpha [-A \sin(kx \cos \alpha) + B \cos(kx \cos \alpha)] \cos(ky \sin \alpha) dk d\alpha . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Po dosazení výrazů (3.31), (3.32) a (3.33) do rovnice (3.16) a následné úpravě pro neznámé koeficienty  $A$  a  $B$  dostáváme následující soustavu dvou rovnic

$$\begin{pmatrix} \dot{A} \\ \dot{B} \end{pmatrix} + \frac{\gamma_S}{2\varepsilon_0} k^2 \begin{pmatrix} 1 & w \cos \alpha \\ -w \cos \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{\gamma_S}{2\varepsilon_0} k^2 \begin{pmatrix} -e^{-kh} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

kde zavádíme  $w = 2\varepsilon_0 u / \gamma_S$ . Daná soustava dvou rovnic udává časový vývoj koeficientů  $A$  a  $B$ . Lze odhadnout, že po jisté době nastává ustálený stav. Tedy stav, kdy nedochází k časové změně jakékoliv veličiny. Ustálený stav není však ekvivalentní s elektrostatickým případem. V případě ustáleného stavu teče na povrchu vodivé roviny časově neměnný (ustálený) plošný proud.

Zaměříme se na řešení, kdy se daná soustava nachází v ustáleném stavu. Po matematické stránce se jedná o výrazně jednodušší řešení. Zároveň řešení pro ustálený stav má ještě jednu výhodu – nemusíme řešit počáteční podmínky. Ať jsou počáteční podmínky jakékoliv, ustálený stav bude nakonec vždy stejný.

Možná nám přijde zvláštní, že ustálený stav nezávisí na počáteční podmínce. Především by se mohlo zdát, že neplatí zákon zachování naindukovaného náboje, neboť pokud je ustálená plošná hustota stejná pro všechny případy počátečních podmínek, tak by naindukovaný náboj měl být stejný ve všech případech. To ale potom znamená, že různě zadaná hodnota naindukovaného náboje v počátečním čase se obecně nerovná naindukovanému náboji v ustáleném stavu. V čem tedy spočívá problém?

Nejedná se však o žádný paradox. Problém je v chybné interpretaci, především ve špatném zacházení s časovou limitou  $t \rightarrow \infty$ . Celkový naindukovaný náboj se musí spočítat z časově proměnné plošné hustoty, který potom vyjde časově neměnný a roven počáteční hodnotě. Potom i v ustáleném stavu se naindukovaný náboj rovná počáteční hodnotě naindukovaného náboje. To znamená, že při prohození pořadí integrace a limity získáme jiné výsledky. Přičemž správný výsledek celkového naindukovaného náboje v ustáleném stavu získáme nejprve integrací přes povrch vodivé roviny a pak provedením časové limity.

V případě ustáleného stavu, kdy jsou časové derivace  $\dot{A}$  a  $\dot{B}$  nulové, přejde předchozí soustava dvou rovnic na tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & w \cos \alpha \\ -w \cos \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-kh} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Řešení předchozí soustavy rovnic lze nejspíše určit pomocí *Cramerova pravidla*. Konkrétní řešení můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = -\frac{e^{-kh}}{1 + w^2 \cos^2 \alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ w \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

Potom potenciál pole vodivé roviny má tvar

$$\Phi_v = -\frac{Q}{8\pi^2 \varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{1 + w^2 \cos^2 \alpha} [\cos(kx \cos \alpha) + w \cos \alpha \sin(kx \cos \alpha)]$$

$$\cos(ky \sin \alpha) e^{-k(h+|z|)} dk d\alpha . \quad (3.37)$$

Předpokládejme, že  $w \ll 1$ . Jedná se o rozumný předpoklad, neboť většina vodičů má poměrně vysokou vodivost a zároveň uvažujeme malé rychlosti  $u$ . Potom můžeme v aproximaci psát

$$\begin{aligned} \Phi_v = & -\frac{Q}{8\pi^2 \varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty [\cos(kx \cos \alpha) + w \cos \alpha \sin(kx \cos \alpha)] \times \\ & \times \cos(ky \sin \alpha) e^{-k(h+|z|)} dk d\alpha , \quad w \ll 1 . \end{aligned} \quad (3.38)$$

Integrál (3.38) je možný vyřešit analyticky. Součiny  $\cos(kx \cos \alpha) \cos(ky \sin \alpha)$  a  $\sin(kx \cos \alpha) \cos(ky \sin \alpha)$  vhodně rozložíme pomocí známých goniometrických vzorců:

$$\begin{aligned} \cos(kx \cos \alpha) \cos(ky \sin \alpha) = \\ = \frac{1}{2} [\cos(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha) + \cos(kx \cos \alpha - ky \sin \alpha)] , \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \sin(kx \cos \alpha) \cos(ky \sin \alpha) = \\ = \frac{1}{2} [\sin(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha) + \sin(kx \cos \alpha - ky \sin \alpha)] . \end{aligned} \quad (3.40)$$

Přechodem do polárních souřadnic ( $x = \rho \cos \varphi$  ,  $y = \rho \sin \varphi$ ) budou mít vztahy (3.39) a (3.40) poněkud jednodušší tvar:

$$\begin{aligned} \cos(kx \cos \alpha) \cos(ky \sin \alpha) = \\ = \frac{1}{2} \{ \cos[k\rho \cos(\varphi - \alpha)] + \cos[k\rho \cos(\varphi + \alpha)] \} , \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \sin(kx \cos \alpha) \cos(ky \sin \alpha) = \\ = \frac{1}{2} \{ \sin[k\rho \cos(\varphi - \alpha)] + \sin[k\rho \cos(\varphi + \alpha)] \} . \end{aligned} \quad (3.42)$$

Dále využijeme vztahy [9]:

$$\cos[k\rho \cos(\varphi \pm \alpha)] = J_0(k\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(k\rho) \cos 2n(\varphi \pm \alpha) , \quad (3.43)$$

$$\sin[k\rho \cos(\varphi \pm \alpha)] = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(k\rho) \cos [(2n+1)(\varphi \pm \alpha)] . \quad (3.44)$$

Podle *Fubiniho věty* můžeme v integrálu (3.38) zaměnit pořadí integrace. Tedy spočteme nejprve následující integrály

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx \cos \alpha) \cos(ky \sin \alpha) d\alpha, \quad (3.45)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \alpha \sin(kx \cos \alpha) \cos(ky \sin \alpha) d\alpha. \quad (3.46)$$

S použitím vztahu (3.41) a řady (3.43) pak pro integrál (3.45) dostáváme

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx \cos \alpha) \cos(ky \sin \alpha) d\alpha = 2\pi J_0(k\rho). \quad (3.47)$$

Podobně pro výpočet integrálu (3.46) využijeme vztah (3.42) a řadu (3.44). Pak pro integrál (3.46) dostáváme

$$\int_0^{2\pi} \cos \alpha \sin(kx \cos \alpha) \cos(ky \sin \alpha) d\alpha = 2\pi J_1(k\rho) \cos \varphi. \quad (3.48)$$

Po dosazení výsledků (3.47) a (3.48) do (3.38) pro potenciál pole bodového náboje obdržíme

$$\Phi_v = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} [J_0(k\rho) + w J_1(k\rho) \cos \varphi] e^{-k(h+|z|)} dk. \quad (3.49)$$

Po integraci přes  $k$  získáváme

$$\Phi_v = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (h+|z|)^2}} + w \frac{\sqrt{\rho^2 + (h+|z|)^2} - (h+|z|)}{\rho \sqrt{\rho^2 + (h+|z|)^2}} \cos \varphi \right]. \quad (3.50)$$

Potenciál pole vodivé roviny je vyjádřen ve válcových souřadnicích. Daný potenciál můžeme vyjádřit v původně vybraných kartézských souřadnicích:

$$\Phi_v = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (h+|z|)^2}} + w \frac{[\sqrt{x^2 + y^2 + (h+|z|)^2} - (h+|z|)] x}{x^2 + y^2 \sqrt{x^2 + y^2 + (h+|z|)^2}} \right] \quad (3.51)$$

Nyní když známe potenciál pole vodivé roviny, můžeme určit plošný proud. Nejprve určíme výsledný potenciál na povrchu vodivé roviny:

$$\Phi(z=0) = (\Phi_v + \Phi_Q)_{z=0} = -\frac{Qu}{2\pi\gamma_S} \frac{x}{x^2 + y^2} \left( 1 - \frac{h}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} \right).$$

(3.52)

Tečná složka elektrické intenzity výsledného pole na vodivé rovině je určena vztahem

$$\mathbf{E}_t = -\text{grad}_S \Phi(z = 0). \quad (3.53)$$

Po dosazení pak pro jednotlivé složky gradientu (3.53) dostáváme

$$E_{tx} = \frac{Qu}{2\pi\gamma_S} \frac{h}{x^2 + y^2} \left[ \frac{x^2}{(\sqrt{x^2 + y^2 + h^2})^3} - \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} \right) \right],$$

$$E_{ty} = \frac{Qu}{2\pi\gamma_S} \frac{h}{x^2 + y^2} \left[ \frac{xy}{(\sqrt{x^2 + y^2 + h^2})^3} - \frac{2xy}{x^2 + y^2} \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} \right) \right]. \quad (3.54)$$

Následně spočítáme konvenční proud, který je roven součinu  $\sigma\mathbf{u}$ . Jelikož známe potenciál vodiče – vztah (3.51), můžeme plošnou hustotu  $\sigma$  vypočítat přímo pomocí vztahu (1.35), místo složitějšího počítání integrálu (3.31). Potom pro daný konvenční proud máme vztah

$$\sigma\mathbf{u} = -\frac{Qu}{2\pi} \frac{\gamma_S h + 2\varepsilon_0 u x}{\gamma_S (\sqrt{x^2 + y^2 + h^2})^3} \mathbf{e}_x. \quad (3.55)$$

Nakonec podle vztahu (3.12) určíme jednotlivé složky hustoty plošného proudu pozorovaného v laboratorní soustavě:

$$j_{sx} = -\frac{Qu}{2\pi} \frac{h}{x^2 + y^2} \left[ \frac{\frac{2\varepsilon_0 u x}{\gamma_S h} (x^2 + y^2) + y^2}{(\sqrt{x^2 + y^2 + h^2})^3} + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} \right) \right],$$

$$j_{sy} = \frac{Qu}{2\pi} \frac{h}{x^2 + y^2} \left[ \frac{xy}{(\sqrt{x^2 + y^2 + h^2})^3} - \frac{2xy}{x^2 + y^2} \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} \right) \right]. \quad (3.56)$$

Můžeme si všimnout, jak vyplývá z (3.54), že kondukční proud  $\gamma_S \mathbf{E}_t$  nezávisí na měrné plošné vodivosti. Ale musíme si uvědomit, že pracujeme v lineární aproximaci, kdy zanedbávám členy  $w^n$  pro  $n \geq 2$ . Jedná se tedy o první člen rozvoje hustoty plošného proudu. Pokud bychom potenciál pole vodivé roviny rozvinuly do vyšších řádů, získali bychom plošný proud, který by na měrné plošné vodivosti již závisel.

Ještě se zamysleme nad případem, kdy  $\gamma_S \rightarrow \infty$ . Obdržíme na vodivé rovině nulový plošný proud? Odpověď zní, že neobdržíme. Důvod by mohl spočívat v rozdílné povaze chování ideálního a neideálního vodiče. V případě, že vodič má nenulový elektrický odpor, je naindukovaný náboj tažen ve směru pohybu vodiče. Kdežto v případě ideálního vodiče naindukovaný náboj zůstává v laboratorní soustavě v klidu. Okrajové podmínky pro oba případy jsou rozdílné a limita  $\gamma_S \rightarrow \infty$  nedá správný výsledek.

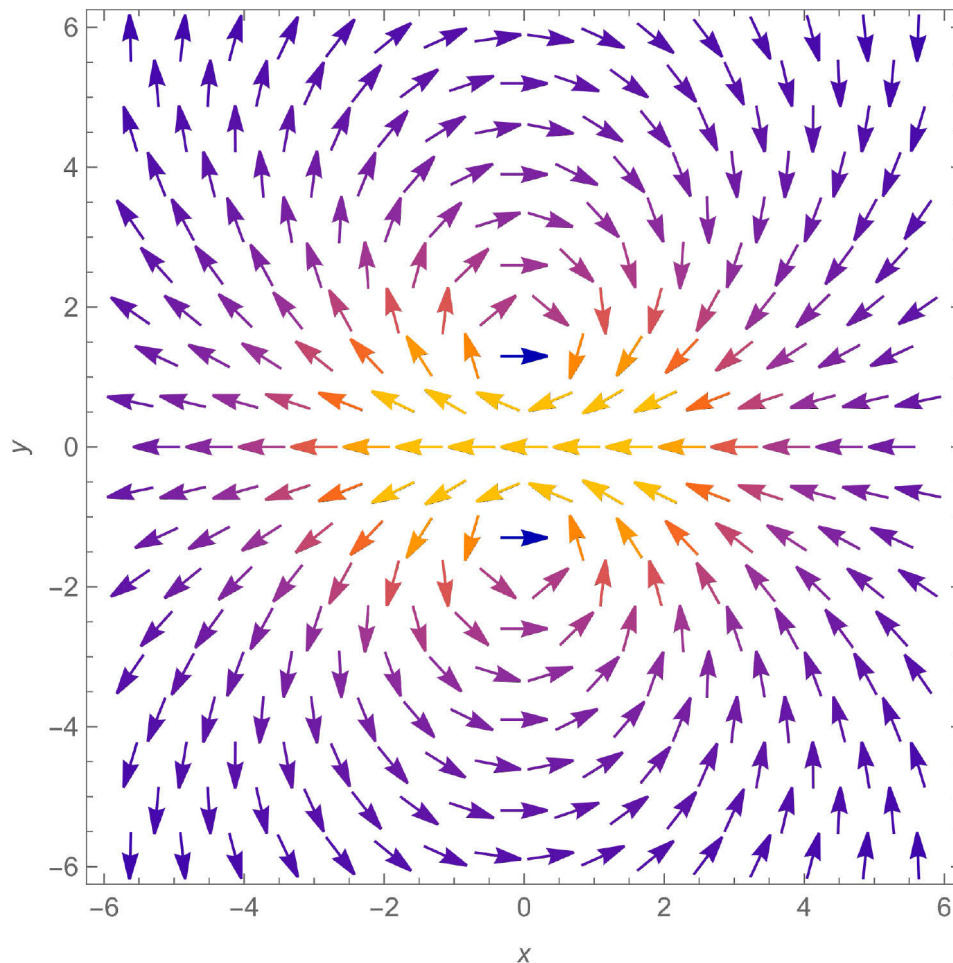
Na závěr spočtíme sílu, která působí na bodový náboj:

$$\mathbf{F} = -Q (\text{grad } \Phi_v)_{x=0, y=0, z=h}. \quad (3.57)$$

Po dosazení dostáváme

$$\mathbf{F} = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 h^2} \left( \frac{\epsilon_0 u}{\gamma_S} \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z \right). \quad (3.58)$$

Z předchozího výsledku vyplývá, že na bodový náboj působí síla, jež má i nenulovou složku ve směru osy  $x$ , na rozdíl od případu, kdyby byla vodivá rovina v klidu. Pokud by byl bodový náboj volný, byl by tažen ve směru pohybu vodivé roviny, přesně jak jsme předpokládali!



Obr. 3.1. Kvalitativní znázornění hustoty plošného proudu tekoucího na povrchu vodivé roviny pohybující se ve směru osy  $x$ , při pohledu z laboratorní soustavy. ( $Qu/(2\pi) = 10^{-6} \text{ A} \cdot \text{m}$ ,  $w = 0,001$ ,  $h = 1 \text{ m}$ ).

### 3.2.2. Bodový náboj umístěný v blízkosti rotující vodivé kulové skořepiny

Následně spočítáme poslední příklad věnovaný tomuto tématu. Mějme bodový náboj, který se nachází v libovolném bodě  $\mathbf{r}_Q = (r_Q, \vartheta_Q, \varphi_Q)$  vně rotující vodivé kulové skořepiny (vodivé kulové plochy). Vodivá kulová skořepina o poloměru  $R$  je izolovaná, otáčí se rovnoměrně s malou úhlovou rychlostí  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$  (tedy rotuje okolo osy  $z$ ) a její střed splývá s počátkem souřadnic. Kulová skořepina má měrnou plošnou vodivost  $\gamma_S$ . Naším úkolem, podobně jako v přechozím příkladě, bude podrobnější studium tohoto systému a určení síly působící na klidový bodový náboj.

Danou úlohu lze řešit i pro rotující plnou kouli. Porovnáním rovnic (3.15) a (3.16) lze odhadnout, že pomocí jednoho řešení můžeme určit řešení druhé. Podobně jako jsme to provedli v příkladu 2.3.3.



Nejprve nalezneme rozklad potenciálu bodového náboje, jak asi tušíme, ve sférických souřadnicích [6]:

$$\Phi_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|} = \frac{Q}{\epsilon_0} \sum_0^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r^l}{r_Q^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta_Q, \varphi_Q) Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad r < r_Q. \quad (3.59)$$

Funkce  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  označují *sférické harmonické funkce*, které jsou definovány vztahem [6]

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}, \quad (3.60)$$

kde  $P_{lm}(\cos \vartheta)$  je *přidružená Legendreova funkce*. Sférické harmonické funkce jsou komplexní funkce (reálné proměnné). Označením  $Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi)$  rozumíme komplexně sdruženou funkci k  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ .

Předpokládejme, že potenciál pole rotující kulové skořepiny lze napsat ve tvaru

$$\Phi_{v_1} = \frac{Q}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{A_{lm}}{2l+1} \frac{r^l}{R^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad r < R, \quad (3.61)$$

$$\Phi_{v_2} = \frac{Q}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{A_{lm}}{2l+1} \frac{R^l}{r^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad r > R, \quad (3.62)$$

kde  $A_{lm}$  označuje neznámé (obecně komplexní) koeficienty, které mohou být i funkcí času.

Ze vztahu (1.35) pro plošnou hustotu naindukovaného náboje vyplývá:

$$\sigma = \frac{Q}{R^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (3.63)$$

Předpokládejme, že izolovaná kulová skořepina je elektricky neutrální. Z ortogonalit sférických harmonických funkcí:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_{ml}^*(\vartheta, \varphi) Y_{l'm'}(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \, d\vartheta d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (3.64)$$

vyplývá, že pro případ nulového celkového naindukovaného náboje na povrchu kulové skořepiny musí být  $A_{00} = 0$ . Potom suma ve vztahu (3.63) probíhá od  $l = 1$ .

Následně určíme  $\Delta_S \Phi(r = R) = \Delta_S [(\Phi_{v_1} + \Phi_Q)]_{r=R}$  :

$$\Delta_S \Phi(r = R) = -\frac{Q}{\varepsilon_0 R^3} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{l(l+1)}{2l+1} \left[ A_{lm} + \left(\frac{R}{r_Q}\right)^{l+1} Y_{lm}^*(\vartheta_Q, \varphi_Q) \right] Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (3.65)$$

Dále určíme výraz  $\mathbf{u} \cdot \text{grad}_S \sigma$ , kde rychlost  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\vartheta)$  označuje rychlost každého bodu na povrchu rotující kulové skořepiny. Daná rychlost je  $\mathbf{u} = \omega R \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi$ . Výraz  $\mathbf{u} \cdot \text{grad}_S \sigma$  je tedy dán vztahem

$$\mathbf{u} \cdot \text{grad}_S \sigma = \frac{u}{R \sin \vartheta} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \right)_{r=R} = \frac{Q\omega}{R^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l i m A_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (3.66)$$

Po dosazení výrazů (3.63), (3.65) a (3.66) do rovnice (3.16) a následné úpravě pak pro neznámé koeficienty  $A_{lm}$  dostáváme soustavu diferenciálních rovnic

$$\dot{A}_{lm} + \left[ \frac{\gamma_S}{\varepsilon_0 R} \frac{l(l+1)}{2l+1} + i\omega m \right] A_{lm} = -\frac{\gamma_S}{\varepsilon_0 R} \frac{l(l+1)}{2l+1} \left(\frac{R}{r_Q}\right)^{l+1} Y_{lm}^*(\vartheta_Q, \varphi_Q). \quad (3.67)$$

Rovněž v tomto případě po jisté době nastane ustálený stav, kdy  $\dot{A}_{lm} = 0$ . Potom koeficienty  $A_{lm}$  v případě ustáleného stavu jsou dány vztahem

$$A_{lm} = -\frac{\left(\frac{R}{r_Q}\right)^{l+1} Y_{lm}^*(\vartheta_Q, \varphi_Q)}{1 + i \frac{\varepsilon_0 R \omega}{\gamma_S} \frac{2l+1}{l(l+1)} m}. \quad (3.68)$$

Potom potenciál pole rotující vodivé kulové skořepiny je

$$\Phi_{v_1} = -\frac{Q}{\varepsilon_0 r_Q} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left(\frac{r}{r_Q}\right)^l \frac{Y_{lm}^*(\vartheta_Q, \varphi_Q) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{1 + i \frac{\varepsilon_0 R \omega}{\gamma_S} \frac{2l+1}{l(l+1)} m}, \quad r < R, \quad (3.69)$$

$$\Phi_{v_2} = -\frac{Q}{\varepsilon_0 R} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left(\frac{R^2}{rr_Q}\right)^{l+1} \frac{Y_{lm}^*(\vartheta_Q, \varphi_Q) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{1 + i \frac{\varepsilon_0 R \omega}{\gamma_S} \frac{2l+1}{l(l+1)} m}, \quad r > R. \quad (3.70)$$

Nyní se zaměříme na určení proudu tekoucího po povrchu kulové skořepiny. Daný výpočet můžeme usnadnit následujícím předpokladem:

$$\frac{\varepsilon_0 R \omega}{\gamma_S} \frac{2l+1}{l(l+1)} |m| \ll 1. \quad (3.71)$$

Jelikož  $|m| \leq l$ , pak máme odhad

$$\frac{2l+1}{l(l+1)} |m| < \frac{2l+1}{l+1} < 2. \quad (3.72)$$

Aby byl splněn předpoklad (3.71), musí být na základě odhadu (3.72) splněna zesílená nerovnost:  $2\varepsilon_0 R\omega/\gamma_S \ll 1$ . Potom můžeme v lineární aproximaci psát

$$\frac{1}{1 + i \frac{\varepsilon_0 R\omega}{\gamma_S} \frac{2l+1}{l(l+1)} m} \approx 1 - i \frac{\varepsilon_0 R\omega}{\gamma_S} \frac{2l+1}{l(l+1)} m. \quad (3.73)$$

Použitím aproximace (3.73) můžeme pro potenciál pole kulové skořepiny psát

$$\Phi_{v_1} = \frac{-Q}{\varepsilon_0 r_Q} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left(\frac{r}{r_Q}\right)^l \left[1 - i \frac{\varepsilon_0 R\omega}{\gamma_S} \frac{2l+1}{l(l+1)} m\right] Y_{lm}^*(\vartheta_Q, \varphi_Q) Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (3.74)$$

$$\Phi_{v_2} = \frac{-Q}{\varepsilon_0 R} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left(\frac{R^2}{rr_Q}\right)^{l+1} \left[1 - i \frac{\varepsilon_0 R\omega}{\gamma_S} \frac{2l+1}{l(l+1)} m\right] Y_{lm}^*(\vartheta_Q, \varphi_Q) Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (3.75)$$

Pro celkový potenciál na povrchu kulové skořepiny v kvadrupólovém přiblížení dostáváme

$$\Phi(r = R) = \frac{Q\omega}{\gamma_S} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{im}{l(l+1)} \left(\frac{R}{r_Q}\right)^{l+1} Y_{lm}^*(\vartheta_Q, \varphi_Q) Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (3.76)$$

Tečná složka elektrické intenzity výsledného pole na vodivé rovině je určena vztahem

$$\mathbf{E}_t = -\text{grad}_S \Phi(r = R). \quad (3.77)$$

Po dosazení pak pro jednotlivé složky gradientu (3.77) dostáváme

$$E_{t_\vartheta} = -\frac{Q\omega}{R\gamma_S} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{im}{l(l+1)} \left(\frac{R}{r_Q}\right)^{l+1} Y_{lm}^*(\vartheta_Q, \varphi_Q) \frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi),$$

$$E_{t_\varphi} = \frac{Q\omega}{R\gamma_S \sin \vartheta} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{m^2}{l(l+1)} \left(\frac{R}{r_Q}\right)^{l+1} Y_{lm}^*(\vartheta_Q, \varphi_Q) Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (3.78)$$

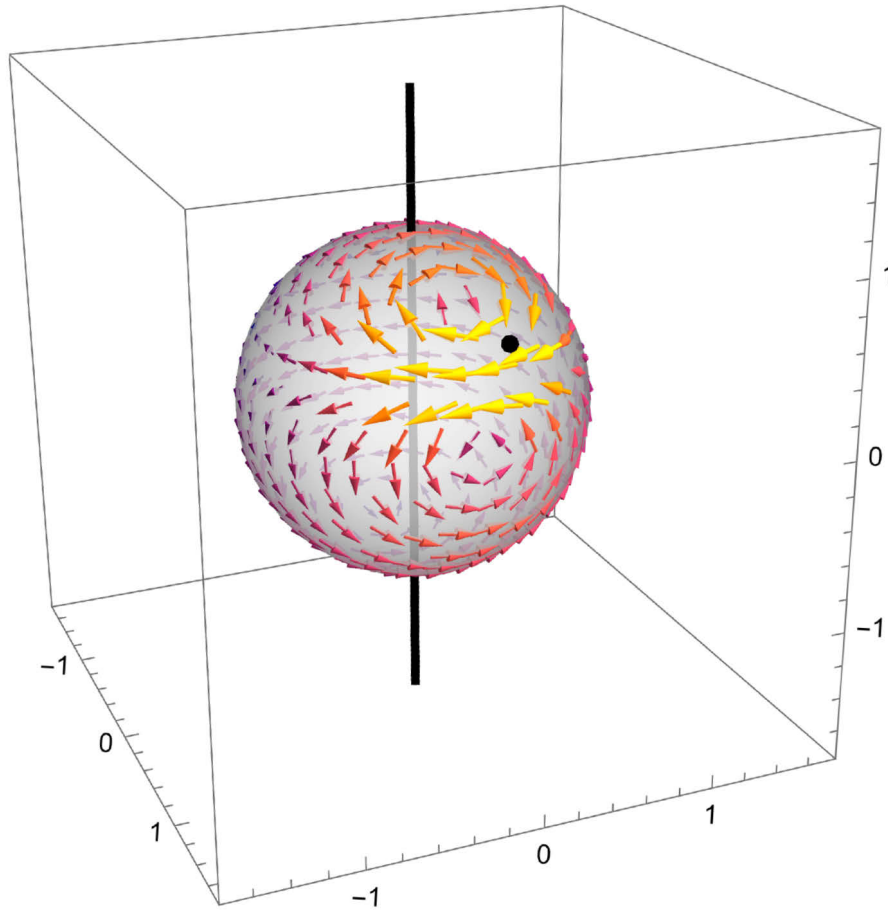
Konvenční proud  $\sigma \mathbf{u}$  je s použitím vztahu (3.63) roven

$$\sigma \mathbf{u} = -\frac{Q\omega \sin \vartheta}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{R}{r_Q}\right)^{l+1} \frac{Y_{lm}^*(\vartheta_Q, \varphi_Q) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{1 + i \frac{\varepsilon_0 R\omega}{\gamma_S} \frac{2l+1}{l(l+1)} m} \approx$$

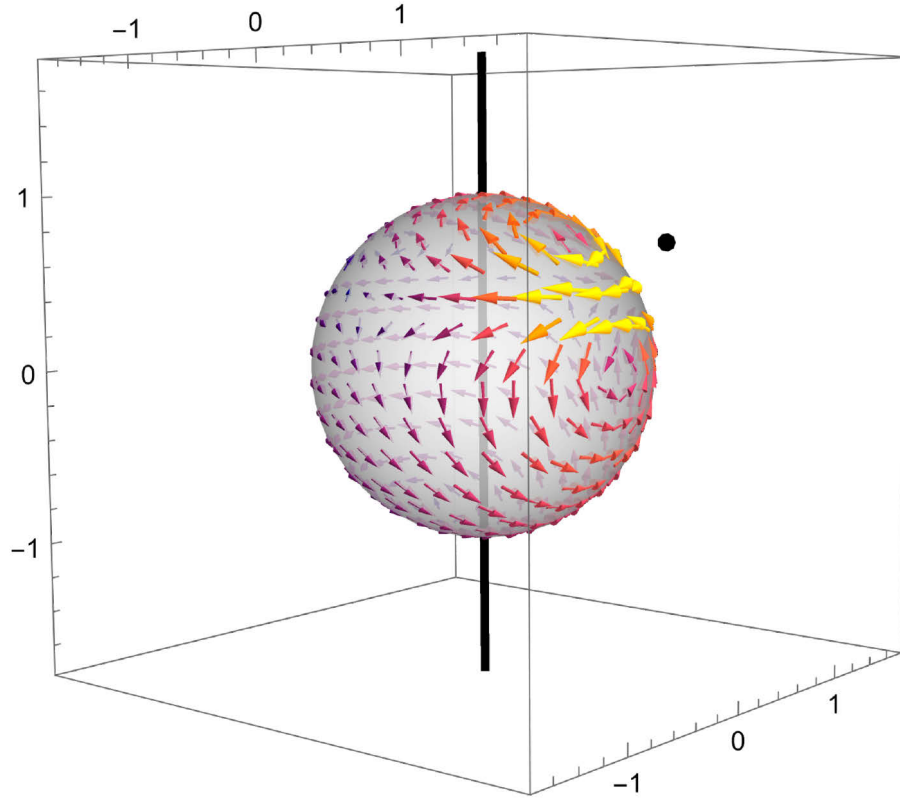
$$\approx -\frac{Q\omega \sin \vartheta}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{R}{r_Q}\right)^{l+1} \left[1 - i \frac{\varepsilon_0 R\omega}{\gamma_S} \frac{2l+1}{l(l+1)} m\right] Y_{lm}^*(\vartheta_Q, \varphi_Q) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (3.79)$$

Potom podle vztahu (3.12) pro jednotlivé složky hustoty plošného proudu pozorovaného v laboratorní dostáváme

$$\begin{aligned}
 j_{S\vartheta} &= -\frac{Q\omega}{R} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{im}{l(l+1)} \left(\frac{R}{r_Q}\right)^{l+1} Y_{lm}^*(\vartheta_Q, \varphi_Q) \frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \\
 j_{S\varphi} &= -\frac{Q\omega \sin \vartheta}{R} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ 1 - \frac{m}{l(l+1)} \left[ i \frac{\varepsilon_0 R \omega}{\gamma_S} (2l+1) + \frac{m}{\sin^2 \vartheta} \right] \right\} \left(\frac{R}{r_Q}\right)^{l+1} \times \\
 &\quad \times Y_{lm}^*(\vartheta_Q, \varphi_Q) Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \tag{3.80}
 \end{aligned}$$



Obr. 3.2. Kvalitativní znázornění hustoty plošného proudu tekoucího po povrchu kulové skořepiny rotující okolo osy  $z$  (znázorněna černě), při pohledu z laboratorní soustavy. ( $R = 1 \text{ m}$ ,  $r_Q = 1,5 \text{ m}$ ,  $\vartheta_Q = \pi/3$ ,  $\varphi_Q = 0$ ,  $Q = 1 \text{ } \mu\text{C}$ ,  $\omega = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\varepsilon_0/\gamma_S = 0,01 \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}$ ).



Obr. 3.3. Kvalitativní znázornění hustoty plošného proudu tekoucího po povrchu stejné rotující kulové skořepiny, tentokrát při pohledu „ze strany“.

Nakonec vypočítejme sílu, která působí na bodový náboj. Pro jednoduchost předpokládejme, že se bodový náboj nachází v ekvatoriální rovině ( $\vartheta_Q = \pi/2$ ), kdy složka  $F_\vartheta$  je nulová. Síla působící na bodový náboj je určena vztahem

$$\mathbf{F} = -Q (\text{grad } \Phi_{v_2})_{r=r_Q, \vartheta=\pi/2, \varphi=\varphi_Q} \quad (3.81)$$

Po dosazení pro jednotlivé složky síly  $\mathbf{F}$  obdržíme

$$F_r = -\frac{Q^2}{\varepsilon_0 R^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{l+1}{2l+1} \left(\frac{R}{r_Q}\right)^{2l+3} \left| Y_{lm} \left( \frac{\pi}{2}, \varphi_Q \right) \right|^2,$$

$$F_\vartheta = 0,$$

$$F_\varphi = \frac{Q^2 \omega}{R \gamma_S} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{m^2}{l(l+1)} \left(\frac{R}{r_Q}\right)^{2(l+1)} \left| Y_{lm} \left( \frac{\pi}{2}, \varphi_Q \right) \right|^2. \quad (3.82)$$

Ze vztahu (3.60) vyplývá:

$$\left| Y_{lm} \left( \frac{\pi}{2}, \varphi_Q \right) \right|^2 = \frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!} [P_l^m(0)]^2. \quad (3.83)$$

Po dosazení (3.83) do (3.82) pro nenulové složky síly dostáváme

$$F_r = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (l+1) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \left(\frac{R}{r_Q}\right)^{2l+3} [P_l^m(0)]^2,$$

$$F_\varphi = \frac{Q^2 \omega}{4\pi R \gamma_S} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{(2l+1)(l-m)!}{l(l+1)(l+m)!} m^2 \left(\frac{R}{r_Q}\right)^{2(l+1)} [P_l^m(0)]^2. \quad (3.84)$$

Můžeme si všimnout, že síla působící na bodový náboj nezávisí na souřadnici  $\varphi_Q$  (i v případě, že by se bodový náboj nacházel mimo ekvatoriální rovinu). Zafixujeme-li souřadnici  $r_Q$  a  $\vartheta_Q$  a budeme-li měnit souřadnici  $\varphi_Q$ , tedy bodový náboj se pohybuje po kružnici, síla působící na bodový náboj bude vždy stejná. Tato skutečnost přímo vyplývá ze symetrie daného problému.

Zároveň vidíme, že v případě rotující vodivé skořepiny působí na bodový náboj síla, která má nenulovou složku i ve směru rotace kulové skořepiny.

### 3.3. Disipativní účinky v důsledku konečné vodivosti vodiče

Dosud jsme se zabývali silovým působením na bodový náboj. Zjistili jsme, že v důsledku elektrického odporu působí na pohybující se bodový náboj menší síla než v případě ideálního vodiče.

Samozřejmě, že i na vodič působí síla. Ale je silové působí na pohybující se vodič ovlivněno hodnotou jeho elektrického odporu?

Opět máme na mysli vodič, jehož pohyb respektuje symetrii vodiče. Jak jsme již zjistili, pohybuje-li se vodič, je bodový náboj tažen ve směru jeho pohybu. Avšak bodový náboj je tažen ve směru pohybu vodiče v případě, že vodič má konečnou vodivost. Je-li vodič ideální, tak v případě jeho pohybu není bodový náboj tažen ve směru pohybu vodiče.

Už ze samotného zákona akce a reakce vyplývá, že pokud na bodový náboj působí síla, jež má nenulovou složku ve směru pohybu, tak na vodič musí působit síla, jež má nenulovou složku proti směru vodiče. Síla působící proti směru pohybu vodiče vyvolá v případě volného vodiče brzděný pohyb. To znamená, že v přítomnosti klidového bodového náboje je volně se pohybující vodič, jenž má nenulový elektrický odpor, postupně zpomalován.

Přesvědčivější důkaz o této skutečnosti můžeme podat na základě zákona zachování celkové energie daného systému. Pohyb vodiče v přítomnosti elektrického pole bodového náboje vyvolává ve vodiči elektrický proud (v případě plošného vodiče teče proud na jeho povrchu). Při průchodu elektrického proudu neideálním vodičem se generuje Joulovo teplo.

Potom ze zákona zachování celkové energie vyplývá

$$\frac{d}{dt}(T + V) + P_e = 0, \quad (3.85)$$

kde  $T$  značí kinetickou energii vodiče,  $V$  je potenciální energie a  $P_e$  označuje elektrický výkon, který je v případě nulového odporu či klidového vodiče nulový.

Výkon  $P_e$  je vždy kladný. Potom z rovnice (3.85) vyplývá, že časová derivace součtu kinetické a potenciální energie je záporná. Jelikož potenciální energie vodiče závisí na jeho pohybovém stavu, lze usoudit, že

$$\frac{d}{dt}(T + V) = \frac{d}{du}(T + V)\dot{u}, \quad \frac{d}{du}(T + V) > 0. \quad (3.86)$$

Potom je časová derivace rychlosti záporná, což znamená, že se jedná o zpomalený pohyb.

Pokud nastane jeden z případů, kdy je elektrický výkon nulový, tak ze vztahu (3.85) přímo vyplývá, že součet kinetické a potenciální energie vodiče je časově konstantní, tedy rychlost volného vodiče se nemění s časem.

Ještě poznamenejme, že u rotujících vodičů je patrné hovořit o momentu síly působící na vodič konající otáčivý pohyb. Předpokládejme, že daný vodič rotuje kolem volné osy. V případě, že by moment síly působící na rotující vodič měl jiný směr, než je směr osy otáčení, rotující vodič by vykonával i precesi!

Pro shrnutí, existence nenulového elektrického odporu vodiče má disipativní účinky na pohyb vodiče.

## Závěr

V první kapitole jsme shrnuli již známé poznatky o chování vodiče v elektrostatickém poli. Konkrétně jsme jako zdroj elektrostatického pole zvolili bodový náboj. Zároveň jsme představili některé metody nalezení elektrostatického pole vodiče nacházejícího se v přítomnosti bodového náboje. Především jsme vystihli řešení Laplaceovy rovnice pomocí metody separace proměnných. Jedná se vůbec o neúčinnější metodu řešení daného problému pro nejrůznější tvary vodičů. Mějme však na paměti, že ne ve všech vhodně zvolených souřadnicových systémech lze separovat Laplaceovu rovnici. Avšak danou metodu separace proměnných je v podstatě možné použít ve všech nejběžněji používaných souřadnicových systémech.

Na základě řešení Laplaceovy rovnice pomocí metody separace proměnných jsme odvodili obecný postup nalezení elektrostatického pole vodiče, plošné hustoty náboje naindukovaného na povrchu vodiče a sílu, kterou je bodový náboj k vodiči přitahován. Zkonstruovaný obecný postup řešení je poněkud abstraktní. Proto pro lepší představu jsme danou úlohu řešili pro čtyři různé tvary vodičů: nekonečná rovina, koule, rotační elipsoid a nekonečně dlouhý válec.

Ve druhé kapitole jsme se snažili poznatky z elektrostatiky rozšířit na elektrodynamické problémy. Konkrétně jsme se zabývali otázkou, jak se bude daný systém vyvíjet, pokud se bodový náboj pohybuje. Především jsme studovali pohyb volného bodového náboje vyvolaný vlivem silového působení náboje naindukovaném na povrchu vodiče.

Pokoušeli jsme se nalézt obecné relativistické řešení, neboť Maxwellovy rovnice jsou konzistentní s teorií relativity. Avšak kvůli složitosti přesného relativistického řešení jsme se zaměřili na jednodušší kvazistatické řešení, které připouští malé rychlosti a zrychlení bodového náboje. V případě elektrodynamických problémů musíme hovořit o elektromagnetické interakci bodového náboje s vodičem. Kvazistatické přiblížení však umožňuje vliv magnetického pole zcela zanedbat. Tedy k vyřešení daného problému stačí určit pouze elektrické pole vodiče. Zároveň kvazistatické řešení přináší i jedno další zjednodušení, a tím je zanedbání vlivu elektromagnetického záření na pohyb bodového náboje.

Naši teorii vybudovanou pro elektrodynamické problémy jsme rovněž podpořili řešením námi zvolených příkladů. Nejprve jsme studovali pohyb bodového náboje umístěného nad ideálně vodivou nekonečnou rovinu. Kromě kvazistatického řešení se nám podařilo za jistých aproximací (zjednodušili jsme vztah pro výpočet retardované polohy) nalézt i relativistické řešení, které se u ostatních tvarů vodičů hledá velmi obtížně.

Následně jsme uvažovali případ, kdy vodivá rovina má určitý nenulový elektrický odpor. Daný problém jsme řešili pouze v kvazistatickém přiblížení, a to ještě ve



vybraných aproximacích. Pro jednoduchost jsme danou úlohu o pohybu bodového náboje řešili v linearizované aproximaci potenciálu vodiče. Potom bylo možné pro řešení pohybové rovnice použít Laplaceovu transformaci jako mocný nástroj pro řešení integro-diferenciálních rovnic. Nakonec jsme uvažovali případ, kdy má vodivá rovina vysokou vodivost, což výrazně zjednodušilo nalezení vzoru k obrazu Laplaceovy transformace polohy bodového náboje.

Dále jsme řešili úlohu o pohybu bodového náboje umístěného vně vodivé koule. V tomto případě jsme rovnou uvažovali konečnou vodivost. Pro srovnání jsme daný problém řešili pro plnou kouli a kulovou skořepinu. V obou případech jsme jako výsledek uvedli Laplaceovu transformaci polohy bodového náboje.

Ve třetí kapitole jsme se zabývali interakcí bodového náboje a pohybujícího se vodiče. Především jsme se zaměřili na jeden speciální případ pohybu, a tím byl pohyb vodiče respektující jeho symetrii. V podstatě jsme poznatky získané z druhé kapitoly rozšířili na případ pohybujícího se vodiče. Konkrétně se nám podařilo zobecnit Ohmův zákon, který je platný i pro pohybující se vodič. Na základě transformačních vlastností elektromagnetického pole jsme odvodili i „relativistický“ Ohmův zákon. Ale pro jednoduchost jsme se podrobněji zabývali případy, kdy rychlost vodiče je ve v porovnání s rychlostí světla malá. Potom bylo možné, za předpokladu potenciálního pole v soustavě spojené s vodičem, považovat elektrické pole vodiče v laboratorní soustavě rovněž za potenciální.

Také jsme se domnívali, že pokud má vodič konečnou vodivost, jeho pohyb vyvolá takovou sílu, která vynucuje pohyb bodového náboje i ve směru pohybu vodiče. Správnost naší domněnky jsme ukázali na dvou systémech: klidový náboj umístěný nad pohybující se vodivou rovinou a klidový náboj umístěný v blízkosti rotující kulové skořepiny. V obou případech jsme spočítali proud tekoucí po povrchu daného vodiče a sílu, která působí na bodový náboj.

Na závěr jsme se zabývali chováním volně pohybujícího se vodiče v elektrostatickém poli bodového náboje. Zjistili jsme, že v případě nenulové odporu je pohyb vodiče zpomalován a za jistých situací může rotující vodič vykonávat i precesi.

Námi zvolené modely (aproximace) dobře vystihují situaci, kdy se bodový náboj nepohybuje příliš blízko vodiče. Ve větších vzdálenostech od vodiče je síla působící na bodový náboj menší, a tudíž bodový náboj dosahuje i menších rychlostí a zrychlení. Právě za těchto podmínek je možné použít kvazistatické přiblížení. Zároveň jsme se dopouštěli jistých aproximací v případě vodičů s vysokou vodivostí. Protože většinu běžných vodičů lze považovat za dobré vodiče (vodiče s vysokou vodivostí), můžeme naše aproximační řešení použít v mnoha běžných nerelativistických situacích.

Na druhou stranu námi zkoumané jevy spojené s konečnou vodivostí jsou tím výraznější, čím je větší odpor vodiče. To znamená, že u vodiče s vysokou vodivostí

jsou výše popsané jevy (jako „zmenšená“ urychlující síla působící na bodový náboj či tažná síla působící na bodový náboj ve směru pohybu vodiče) nepatrné.

Pokud se bodový náboj pohybuje ve větší blízkosti vodiče, objeví se silné elektromagnetické záření, se kterým se pojí složitější fyzikální procesy, o kterých jsme vůbec nehovořili.

Zmínili jsme se, že dosavadní poznatky o chování vodičů vystavených elektrickému poli se běžně využívají v praxi. Příkladem můžeme uvést Faradayovu klec nebo bleskosvod.

Položme si otázku, zda se můžeme setkat s takovým systémem jako je bodový náboj umístěný v blízkosti vodiče. Svým způsobem tu existuje jeden „problém“ – samotná podstata bodového náboje. Jedná se o fyzikální idealizaci. V přírodě se žádné bodové náboje nevyskytují! Na druhou stranu je známo, že elektrické pole vně homogenně nabitě koule přesně odpovídá elektrickému poli bodového náboje. Tedy elektrické pole homogenně nabitě koule můžeme modelovat polem bodového náboje.

Ukažme si následující příklad, který můžeme modelovat jako bodový náboj nacházející se v blízkosti vodivé roviny. Představme si, že se nacházíme v určitém místě rozsáhlém planiny (nížiny). Předpokládejme, že nad planinou se objeví bouřkový mrak, který ponese jistý elektrický náboj. Samotná Země je vodivá, proto v důsledku existence bouřkového oblaku se na povrchu planiny indukuje jisté rozložení elektrického náboje.

Uvažujme, že bouřkový mrak je cumulonimbus a s jistou mírou představivosti daný mrak považujeme (aproximujeme) za homogenně nabitou kouli. (Uvažujeme, že z multipólového rozvoje má největší vliv první člen odpovídající elektrickému poli bodového náboje – nabitě koule.)

Soustavu bouřkový mrak nacházející se nad rozsáhlou planinou můžeme pro jednoduchost nahradit soustavou bodový náboj nacházející se nad uzemněnou vodivou rovinou.

Budeme-li chtít určit velikost elektrického náboje v mraku (alespoň v jeho spodní části), můžeme u povrchu země změřit elektrickou intenzitu a z její známé hodnoty následně dopočítat velikost náboje nacházejícího se v bouřkovém mraku. Přičemž pro výpočet využijeme zjednodušujícího modelu bodový náboj nacházející se nad uzemněnou vodivou rovinou. Takovým způsobem je opravdu možné nalézt (odhadnout) velikosti elektrického náboje v mracích. Avšak nesmíme zapomenout, že Země má své elektrické pole, které je potřeba brát v úvahu.

To jsme si ukázali elektrostatický případ. Uveďme i elektrodynamický případ, kdy studujeme pohyb bodového náboje (nabitě kuličky) vyvolaný vodičem, který se může třeba i pohybovat.

Dobrým příkladem může být pohyb elektricky nabitě koule v blízkosti klidné nebo dokonce rotující černé díry, kterou někdy modelujeme jako membrána o odporu  $377 \Omega$ . Tedy poznatky o interakci bodového náboje a pohybujících se vodičů (s určitým elektrickým odporem) by mohly být využity například v astrofyzice.

Takových příkladů, ať už více či méně běžných, můžeme vymyslet celou řadu. Tudíž studium interakce bodového náboje a vodičů, třeba i pohybujících se, má rozhodně smysl, a to ať už v teoretické nebo aplikované fyzice.

## Seznam použité literatury

- [1] SEDLÁK, Bedřich a Ivan ŠTOLL. *Elektřina a magnetismus*. Vyd. 3., V nakl. Karolinum 2. Praha: Karolinum, 2012. ISBN 978-80-246-2198-2.
- [2] STRATTON, J. A. *Teorie elektromagnetického pole*. Vyd. 1. Přeložil Vít BLÁHA. Praha: SNTL. 1961.
- [3] MAJIĆ, Matt R. A., Baptiste AUGUIÉ, and Eric C. LE RU (2017). *Spheroidal harmonic expansions for the solution of Laplace's equation for a point source near a sphere* [online]. Physical Review E, **95**, 033307 [cit. 31.1. 2022]. Dostupné z: [https://www.wgtn.ac.nz/\\_\\_data/assets/pdf\\_file/0018/1070091/2017-PRE-Spheroidal-harmonics-expansions-for-the-solution-of-Laplace-equation.pdf](https://www.wgtn.ac.nz/__data/assets/pdf_file/0018/1070091/2017-PRE-Spheroidal-harmonics-expansions-for-the-solution-of-Laplace-equation.pdf)
- [4] OLVER, Frank W. J., Daniel W. LOZIER, Ronald F. BOISVERT, Charles W. CLARK. *NIST Handbook of Mathematical Functions*. New York: Cambridge University Press, 32 Avenue of the Americas, 2010. NY 10013-2473.
- [5] JACKSON, J.D. *Classical Electrodynamics*. Second edition. Wiley, New York, 1975.
- [6] LEDVINKA, Tomáš. *Poznámky k přednášce Klasická elektrodynamika* [online]. [cit. 7. 7. 2021]. Dostupné z: <http://utf.mff.cuni.cz/~ledvinka/PrElektrodynamika/ElektrodymanikaShouhrnPoznamek2020.pdf>
- [7] KRTOUŠ, Pavel. *Ortogonální souřadnice v  $E^2$*  [online], [cit. 10. 5. 2022]. Dostupné z: <http://utf.mff.cuni.cz/vyuka/NOFY070/materialy/OrtCoor/OrtCoor2D.pdf>
- [8] HAGLIN, K.L. (2010). *Point charge dynamics near a grounded conducting plane*, American Journal of Physics, **78**, 1190.
- [9] SCHWARTZ, Laurent. *Matematické metody ve fyzice*. Přeložil Jiří BRABEC. Praha: SNTL, 1972. Teoretická knihovna inženýra.
- [10] FEYNMAN, Richard Phillips, Robert B. LEIGHTON a Matthew L. SANDS. *Feynmanovy přednášky z fyziky: revidované vydání s řešenými příklady*. 2. vydání. Přeložil Ivan ŠTOLL. Praha: Fragment, 2013. ISBN 978-80-253-1643-6.
- [11] HORÁK, Zdeněk a František KUPKA. *Fyzika*. 3. vydání. Praha: SNTL/ALFA, 1981.
- [12] BRDIČKA, Miroslav a Arnošt HLADÍK. *Teoretická mechanika*. 1. vydání. Praha: Academia, 1987.
- [13] ŠTOLL, Ivan. *Svět očima fyziky*. Praha: Prometheus, 1996. Pomocné knihy pro žáky (Prometheus). ISBN 80-85849-89-5.

