

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Zuzana Skálová

Množiny bodů daných vlastností v neeukleidovských metrikách

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Vlasta Moravcová, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Učitelství matematiky
– Učitelství deskriptivní geometrie

Praha 2022

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Ráda bych na tomto místě poděkovala všem, kteří mě při studiu a psaní této práce podporovali. Především děkuji RNDr. Vlastě Moravcové, Ph.D. za vedení práce, mnoho cenných rad a komentářů a neúnavnou trpělivost.

Název práce: Množiny bodů daných vlastností v neeukleidovských metrikách

Autor: Zuzana Skálová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Vlasta Moravcová, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Diplomová práce se zabývá množinami bodů daných vlastností a jejich tvarem při využití neeukleidovských metrik. První kapitola obsahuje přehled různých množin bodů probíraných ve školské geometrii a zároveň teoretický úvod do metrik a metrických prostorů. Druhá a třetí kapitola jsou věnovány popisu stejných množin bodů, ale s využitím manhattanské a maximové metriky. Všechny množiny jsou doplněny názornými obrázky včetně jejich postupné konstrukce. V poslední kapitole práce jsou popsány aplikační úlohy na množiny bodů daných vlastností v neeukleidovských metrikách vytvořené autorkou v rámci práce pro studenty základních a středních škol. Učitelé zde mohou nalézt nejen řešení úloh, ale také prohlubující komentáře a možné doplňující otázky.

Klíčová slova: geometrie, metrika, metrický prostor, množina bodů

Title: Loci of points in non-Euclidean metrics

Author: Zuzana Skálová

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Vlasta Moravcová, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: The topic of this diploma thesis are loci of points and their shape in case of using non-Euclidean metrics. The first chapter contains an overview of various loci of points discussed in school geometry as well as theoretical introduction to metrics and metric spaces. The second and third chapter describe the same loci of points, but using manhattan and maximum metrics respectively. All of the loci are accompanied by illustrative images. The last chapter of this thesis is dedicated to the application worksheets, that have been created by the author of this thesis on the topic of loci of points in non-Euclidean metrics. The worksheets can be used by both middle and upper school children. Teachers can find not only the answers but also deepening commentaries and possible additional tasks.

Keywords: geometry, metric, metric space, locus of points

Obsah

Úvod	3
1 Teoretický úvod	4
1.1 Metrický prostor a metrika	4
1.2 Neeukleidovské metriky	4
1.2.1 Manhattanská metrika	4
1.2.2 Maximová metrika	6
1.3 Množiny bodů daných vlastností	7
2 Manhattanská metrika	15
2.1 Kružnice (M_1^m)	15
2.2 Osa úsečky (M_2^m)	15
2.3 Vzdálenost bodu od přímky	19
2.4 Osa rovnoběžek (M_3^m)	21
2.5 Ekvidistanta přímky (M_4^m)	22
2.6 Osy různoběžek (M_5^m)	23
2.7 Elipsa (M_6^m)	27
2.8 Hyperbola (M_7^m)	30
2.9 Parabola (M_8^m)	34
3 Maximová metrika	38
3.1 Kružnice (M_1^∞)	38
3.2 Osa úsečky (M_2^∞)	39
3.3 Vzdálenost bodu od přímky	42
3.4 Osa rovnoběžek (M_3^∞)	44
3.5 Ekvidistanta přímky (M_4^∞)	45
3.6 Osy různoběžek (M_5^∞)	46
3.7 Elipsa (M_6^∞)	49
3.8 Hyperbola (M_7^∞)	53
3.9 Parabola (M_8^∞)	55
4 Sběrka aplikačních úloh	59
4.1 Kolmov	59
4.1.1 Petrova cesta do školy	60
4.1.2 Lenčiny vycházky	61
4.1.3 Marie a Karel na rande	62
4.1.4 Nákupy pana Davida	63
4.2 Vodní čtvrt	64
4.2.1 Bedřichova cesta do práce	64
4.2.2 Tereza a Lucie hrají na schovávanou	64
Závěr	67
Seznam použité literatury	68
Seznam obrázků	69

Seznam použitých zkratk	72
A Příloha	73

Úvod

Pojem vzdálenost je v rámci základoškolské a středoškolské matematiky chápán poměrně jednoznačně, ať už se jedná o vzdálenost dvou bodů, bodu a přímky, dvou přímek atd. Je velmi intuitivní, máme-li dány například dva body v rovině, hledat jejich vzdálenost jako délku úsečky spojující dané body. V běžném životě by nám ale často tato vzdálenost nepodala příliš praktické informace, protože v cestě mezi dvěma místy může stát mnoho překážek. Budeme-li například měřit vzdálenost mezi dvěma městy pro účely cesty automobilem, musíme pracovat s délkou silnic, které se různě zatáčí, roli může také hrát převýšení apod. Geometrickým výpočtům odpovídající vzdálenost „vzdušnou čarou“ slouží spíše k práci s mapami, případně pro cestování letadly apod.

V řeči matematiky je proto potřeba vzdálenost přesněji definovat. Přichází na řadu obecnější pojem, tzv. metrika. Existují různé metriky, záleží jak na vstupní množině bodů, jejichž vzdálenost budeme hledat, tak i na způsobu měření, který zavedeme. O běžně využívané vzdálenosti v školské geometrii zde budeme hovořit jako o eukleidovské metrice. V této práci se potom budeme blíže zabývat dvěma dalšími metrikami, manhattanskou a maximovou, které obě využívají měření vzdálenosti ve dvou navzájem kolmých směrech.

S pomocí pojmu vzdálenost zavádíme již na základní škole různé množiny bodů, které mají danou vlastnost. Jedná se například o kružnici jako množinu všech bodů v rovině stejně vzdálených od jednoho středu apod. Jelikož tato a další definice množin bodů od začátku pracuje s pojmem vzdálenost ve smyslu eukleidovské metriky, vyvstává zde otázka, jak by dané množiny vypadaly s využitím jiné metriky.

V první kapitole této práce uvádíme stručný přehled nutných pojmů pro práci v různých metrických prostorech. Dále jsou zde popsány různé množiny bodů daných vlastností, s kterými se ve školské geometrii běžně pracuje.

Kapitoly 2 a 3 jsou věnovány přehledu množin z první kapitoly, a sice jak budou tyto množiny vypadat s využitím zmíněné manhattanské a maximové metriky.

Poslední kapitola této práce je věnována aplikačním úlohám, které byly autorkou v rámci diplomové práce vytvořeny. Úlohy tvoří ucelený výukový materiál, který může sloužit žákům od základních po střední školy k nastínění práce s jinou než eukleidovskou metrikou.

1. Teoretický úvod

Jádrem práce je zkoumání množin bodů daných vlastností v rovině s využitím různých metrik. Nejprve uvedeme pojmy, které budeme v práci využívat, tj. například co je to metrický prostor, metrika, co znamená, že je metrika neeukleidovská apod. Definice a jejich popis vycházejí z [1].

1.1 Metrický prostor a metrika

Definice 1. Necht P je daná množina. Necht ϱ je konečná funkce v oboru $P \times P$ taková, že

1. $\varrho(x, x) = 0$; $x \neq y \Rightarrow \varrho(x, y) > 0$;
2. $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$;
3. $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$.

Pak říkáme, že ϱ je *metrika* v P . Uspořádaná dvojice $\mathcal{P}(P, \varrho)$ se nazývá *metrický prostor*.

Základní metrikou, která je našemu každodennímu vnímání nejbližší a známe ji už ze základoškolské matematiky, je metrika *eukleidovská*. Metriku někdy také zjednodušeně označujeme pojmem vzdálenost a chápeme ji jako nejkratší spojnici dvou bodů. U eukleidovské metriky to znamená vzdálenost nalezenou tzv. „vzdušnou čarou“. Její výpočet definujeme takto:

$$\varrho_e(x, y) = (\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}} \text{ na } \mathbb{R}^n; x, y \in \mathbb{R}$$

Ověříme, zda výpočet splňuje vlastnosti metriky. První vlastnost vidíme okamžitě z definice, pokud $x = y$, všechny sčítance budou rovny 0. Pro $x \neq y$ dostáváme vzhledem k umocnění vždy kladné číslo. Díky umocnění platí i druhá vlastnost, protože druhá mocnina je symetrická funkce, neboli $(x_i - y_i)^2 = (y_i - x_i)^2$. Ověření třetí vlastnosti, tzv. trojúhelníkové nerovnosti, je pracnější, viz např. [1, str. 41]. V celé práci se budeme pohybovat pouze v rovině. Eukleidovský metrický prostor $\mathcal{P}_e(\mathbb{R}^2, \varrho_e)$ budeme dále v práci značit zkráceně \mathcal{P}_e .

1.2 Neeukleidovské metriky

V této sekci uvedeme další metriky, které budeme v práci dále používat, souhrnně nazývané neeukleidovské.

1.2.1 Manhattanská metrika

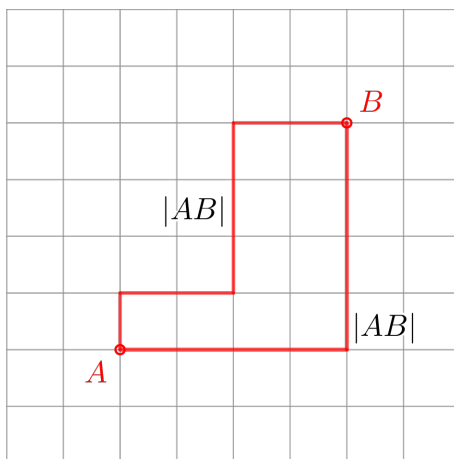
První metrikou je tzv. *manhattanská* metrika (někdy také taxikářská, NYC a jiné). Už její název nám může napovědět princip této metriky a s ní související chápání vzdálenosti. Jestliže se např. taxikář pohybuje po městě, délku trasy od jednoho místa k druhému nelze měřit pomocí eukleidovské metriky, jelikož

bychom získali vzdálenost vzdušnou čarou. Místo toho využijeme manhattanskou metriku. Pojem vzdálenost budeme chápat tak, jako by taxikář překonával danou trasu po kolmých ulicích na Manhattanu. Trasa mezi dvěma body se bude skládat z navzájem kolmých úsečků. S využitím ulic bychom získali pouze body náležící čtvercové síti, v odvozeních budeme nicméně jako vstupní množinu bodů uvažovat celou eukleidovskou rovinu se zvolenou kartézskou soustavou souřadnic (dále KSS). Čtvercovou síť budeme využívat při znázornění množin pro zajištění lepší orientace v rovině. Délku strany jednoho čtverečku v síti položíme rovnou 1. Manhattanskou metriku budeme dále v práci značit ϱ_m , metrický prostor s manhattanskou metrikou $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^2, \varrho_m)$, zkráceně \mathcal{P}_m . Výpočet ϱ_m definujeme následovně:

$$\varrho_m(x, y) = \sum_{i=1}^n |(x_i - y_i)| \text{ na } \mathbb{R}^2; x, y \in \mathbb{R}$$

Opět je třeba ověřit, zda se jedná o metriku dle definice uvedené v podkapitole 1.1. Podobně jako u metriky eukleidovské první dvě vlastnosti vidíme přímo z předpisu vzdálenosti. Pro $x = y$ budou všechny sčítance rovny 0, pro $x \neq y$ díky absolutní hodnotě kladné. Absolutní hodnota zajišťuje i platnost druhé vlastnosti, jelikož se jedná také o symetrickou funkci. Důkaz platnosti třetí vlastnosti, trojúhelníkové nerovnosti, lze nalézt např. v [2, str. 18–19].

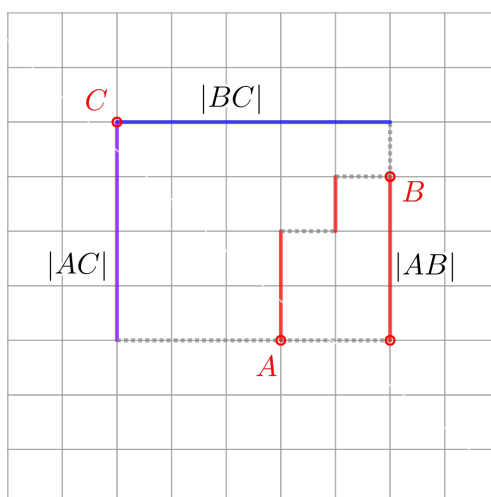
Příklad hledání vzdálenosti s využitím manhattanské metriky je znázorněn v obr. 1.1. Oproti eukleidovské metrice můžeme pozorovat významný rozdíl v tom, že nejkratší cesta od jednoho bodu k druhému už není jednoznačná. V obrázku jsou naznačeny dvě možné cesty, je jich ale nekonečně mnoho.



Obrázek 1.1: Vzdálenost bodů v \mathcal{P}_m

1.2.2 Maximová metrika

Druhou neeukleidovskou metrikou, pomocí níž budeme množiny bodů zkoumat, je tzv. *maximová* metrika. Vstupní množinou pro nás bude, stejně jako v případě manhattanské metriky, eukleidovská rovina, v níž máme zvolenou KSS. Jak napovídá název, bude nás zajímat vzdálenost v určitém smyslu maximální. Tuto metriku bohužel nelze popsat na příkladu tak intuitivním jako metriku manhattanskou ve vztahu ke kolmým ulicím. Princip maximové metriky je lépe pochopitelný za pomoci obr. 1.2, v němž vidíme tři body $A[a_1, a_2]$, $B[b_1, b_2]$, $C[c_1, c_2]$. Při určení vzdáleností bodů se zaměříme na jejich souřadnice. Obdobně jako u manhattanské metriky se budeme pohybovat pouze ve směru os x a y . Výslednou vzdáleností zde nicméně nebude součet délek vzniklých úseček, nýbrž maximum ze vzdáleností „uražených“ v obou směrech. Popíšeme konkrétně tento princip na bodech A a B . Abychom se z bodu A dostali do bodu B , musíme urazit vzdálenost 2 ve směru osy x a vzdálenost 3 ve směru osy y . Výslednou vzdáleností $|AB|$ je maximum z těchto hodnot, tj. $|AB| = 3$. Obdobně bychom postupovali pro vzdálenosti $|AC| = 4$ a $|CB| = 5$.



Obrázek 1.2: Vzdálenost bodů v \mathcal{P}_∞

Maximovou metriku označíme ϱ_∞ , maximový metrický prostor $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^2, \varrho_\infty)$, zkráceně \mathcal{P}_∞ . Výpočet ϱ_∞ definujeme takto:

$$\varrho_\infty(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i| \text{ na } \mathbb{R}^2; \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Jelikož pracujeme stále pouze v rovině, vzdálenost dvou bodů v tomto metrickém prostoru získáme tak, že porovnáme rozdíly obou souřadnic bodů a vybereme jejich maximum. Ověříme, zda takto definovaná vzdálenost splňuje vlastnosti metriky. První dvě vlastnosti opět vidíme snadno. Po dosazení $x = y$ dostáváme $\varrho_\infty(x, x) = \max_{i=1, 2} |0| = 0$. V jiných případech díky absolutní hodnotě bude vždy $\varrho_\infty(x, y) > 0$. Absolutní hodnota je symetrická funkce, tedy i ϱ_∞ musí být symetrická. Odvození platnosti trojúhelníkové nerovnosti můžeme nalézt například v [3, str. 42].

1.3 Množiny bodů daných vlastností

V dalších kapitolách této práce budeme postupně zkoumat různé množiny bodů daných vlastností v různých metrických prostorech, zde uvedeme jejich přehled. Definice množin M_1 až M_5 lze nalézt v učebnicích matematiky pro základní i střední školy, např. v [4, str. 89–96]. Definice kuželoseček můžeme nalézt v učebnicích analytické geometrie anebo deskriptivní geometrie, např. [5]. U všech množin uvedeme jejich definici, množinový zápis a grafické znázornění.

Definice 2. *Množina M bodů dané vlastnosti* je množina bodů v rovině, které splňují:

1. každý bod z množiny M má danou vlastnost,
2. každý bod roviny, který má danou vlastnost, patří do množiny M .

Kružnice (množina M_1)

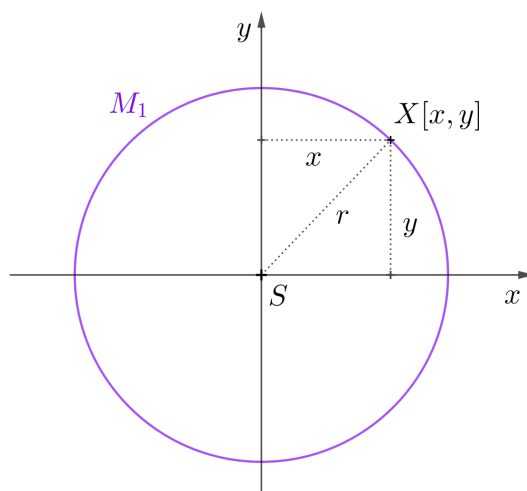
Kružnicí nazveme množinu všech bodů, které mají od daného bodu S danou vzdálenost r . Bod S nazýváme středem kružnice, vzdálenost r nazýváme poloměrem kružnice.

Nechť je dáno reálné číslo $r > 0$ a střed S , bůno $S = [0, 0]$. Pro libovolný bod $X[x, y]$ kružnice M_1 podle výše uvedeného platí:

$$\begin{aligned} |SX| &= r \\ \sqrt{(0-x)^2 + (0-y)^2} &= r & /^2 \\ x^2 + y^2 &= r^2 \end{aligned}$$

Množinu M_1 znázorněnou v obr. 1.3 tak zapíšeme:

$$M_1 = \{X = [x, y]; x^2 + y^2 = r^2\}$$



Obrázek 1.3: Kružnice

Osa úsečky (množina M_2)

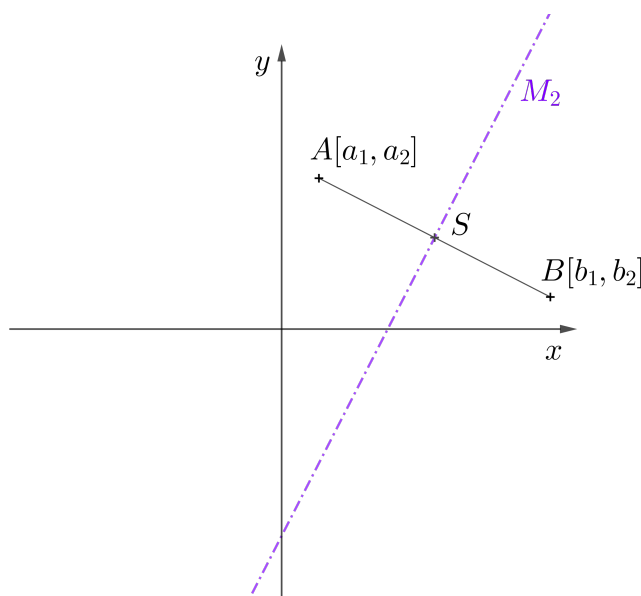
Množinou všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných navzájem různých bodů A , B , je *osa úsečky* AB .

Nechť jsou dány body $A = [a_1, a_1]$ a $B = [b_1, b_2]$, viz obr. 1.4. Pro bod $X = [x, y]$ množiny M_2 platí:

$$\begin{aligned} |XA| &= |XB| \\ \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} &= \sqrt{(x - b_1)^2 + (y - b_2)^2} \\ (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 &= (x - b_1)^2 + (y - b_2)^2 \\ (x - a_1)^2 - (x - b_1)^2 &= (y - b_2)^2 - (y - a_2)^2 \\ -2xa_1 + a_1^2 + 2xb_1 - b_1^2 &= -2yb_2 + b_2^2 + 2ya_2 - a_2^2 \\ -2x_1a_1 + 2xb_1 + 2yb_2 - 2ya_2 + a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2 &= 0 \\ xa_1 - xb_1 - yb_2 + ya_2 + \frac{a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2}{2} &= 0 \\ x(a_1 - b_1) + y(a_2 - b_2) + c &= 0 \end{aligned}$$

Výsledná rovnice je obecnou rovnicí přímky, pro zjednodušení tvaru rovnice jsou konstantní hodnoty, které mají vliv pouze na posunutí přímky, na posledním řádku nahrazeny písmenem c . Množinu M_2 lze tedy vyjádřit ve tvaru:

$$M_2 = \left\{ X = [x, y]; x(a_1 - b_1) + y(a_2 - b_2) + c = 0; c = \frac{a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2}{2} \right\}$$



Obrázek 1.4: Osa úsečky

Osa rovnoběžek (množina M_3)

Množinou všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných navzájem různých rovnoběžek p, q , je *osa rovnoběžek*.

Mějme dvě různé rovnoběžné přímky p, q . V odvození budeme využívat obecné rovnice přímek ve tvaru $ax+by+c=0$. Koeficienty a, b v tomto tvaru představují jednotlivé souřadnice normálového vektoru přímky. Vzhledem k tomu, že se jedná o rovnoběžky, musí být normálový vektor jedné přímky nenulovým násobkem normálového vektoru druhé přímky. Bůno budeme dále pracovat s rovnicemi ve tvaru $p: ax+by+c=0$ a $q: y=ax+by+d=0$ se shodným normálovým vektorem, jelikož tvar rovnice lze vždy upravit vynásobením vhodným nenulovým číslem. Rovnice se liší pouze v koeficientu posunutí. Pro bod $X[x, y]$ množiny M_3 platí:

$$\begin{aligned} |Xp| &= |Xq| \\ \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} &= \frac{|ax+by+d|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ |ax+by+c| &= |ax+by+d| \end{aligned}$$

Abychom mohli odstranit absolutní hodnotu, rozdělíme nyní rovnici na dva případy:

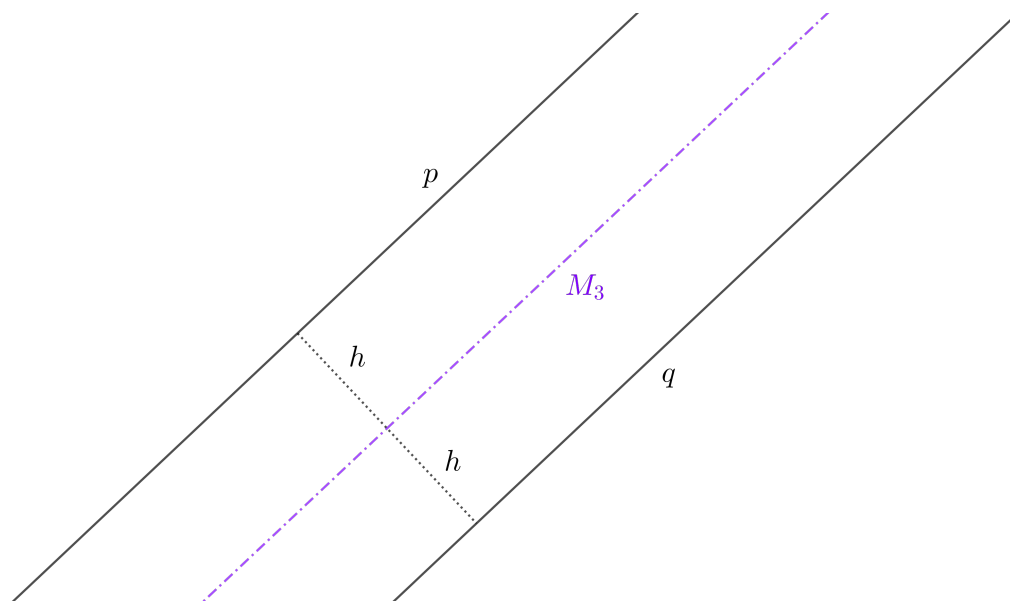
$$\begin{aligned} ax+by+c &= ax+by+d \\ ax+by+c &= -(ax+by+d) \end{aligned}$$

První rovnice bude platná pouze v případě, kdy $c=d$, neboli se jedná o totožné přímky. My jsme však v definici požadovali dvě různé rovnoběžky, tuto variantu proto neuvažujeme. Druhou rovnici můžeme dále upravovat:

$$\begin{aligned} 2ax+2by+c+d &= 0 \\ ax+by+\frac{c+d}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Získali jsme znovu obecnou rovnici přímky, která má stejný normálový vektor (a, b) jako přímky p, q a koeficient posunutí je aritmetickým průměrem koeficientů c a d . Množinou M_3 je proto přímka rovnoběžná s přímkami p, q , která má od obou stejnou vzdálenost. Množina je znázorněna v obr. 1.5, číslo h znázorňuje stejné vzdálenosti mezi přímkami.

$$M_3 = \{X = [x, y]; ax+by+\frac{c+d}{2}=0\}$$



Obrázek 1.5: Osa rovnoběžek

Ekvidistanta přímky (množina M_4)

Množinu všech bodů, které mají od dané přímky p danou vzdálenost v , nazýváme *ekvidistanta přímky p* .

Je dána přímka $p: ax + by + c = 0$ a vzdálenost $v > 0$. Pro každý bod $X = [x, y]$ množiny M_3 platí:

$$\begin{aligned} |Xp| &= v \\ \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} &= v \end{aligned}$$

Bůno předpokládejme že $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$, tj. že velikost normálového vektoru přímky p je rovna 1. Potom získáme:

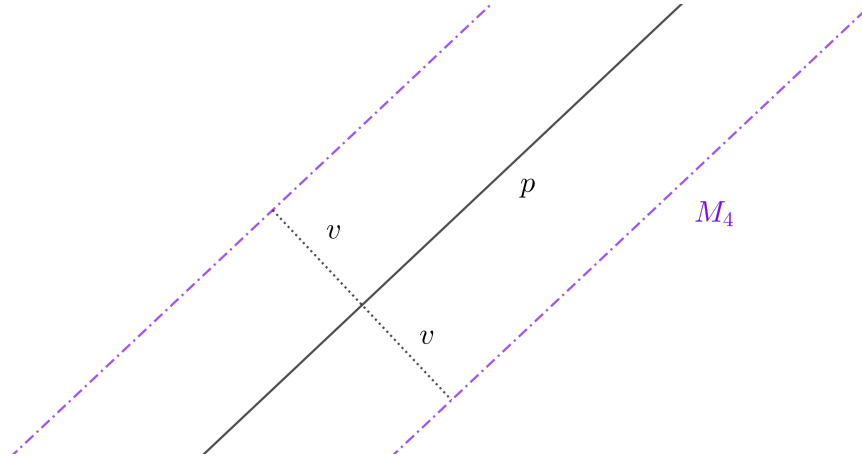
$$|ax + by + c| = v$$

Nyní opět potřebujeme odstranit absolutní hodnotu, a tudíž rozdělíme rovnici na dvě varianty:

$$\begin{aligned} ax + by + c &= \pm v \\ ax + by + c \mp v &= 0 \end{aligned}$$

Výsledné rovnice odpovídají obecným rovnicím dvou přímek lišících se od původní rovnice přímky p pouze v koeficientech posunutí. Jedná se o dvě rovnoběžné přímky ležící v navzájem opačných polorovinách s hraniční přímkou p ve vzdálenosti v od dané přímky p (obr. 1.6). Množinu M_4 můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$M_4 = \{X = [x, y]; ax + by + c + v = 0; ax + by + c - v = 0\}$$



Obrázek 1.6: Ekvidistanta přímky

Osy různoběžek (množina M_5)

Množinou všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných navzájem různých různoběžek p, q , jsou *osy různoběžek*.

Mějme dvě různé přímky $p: a_1x + b_1y + c = 0$ a $q: a_2x + b_2y + d = 0$ viz obr. 1.7. Búno předpokládejme, že $c = d = 0$.¹ Pro bod $X[x, y]$ z množiny M_5 platí:

$$\frac{|a_1x + b_1y|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Jmenovatele můžeme odstranit za předpokladu, že se velikosti normálových vektorů rovnají. To nemusí obecně platit, ale díky volbě přímek procházejících počátkem můžeme jejich rovnice libovolně vynásobit tak, aby se právě velikosti normálových vektorů rovnaly. Dále se proto můžeme zabývat pouze rovností absolutních hodnot v čitatelích:

$$|a_1x + b_1y| = |a_2x + b_2y|$$

Při odstranění absolutní hodnoty získáváme opět dvě varianty rovnice:

$$a_1x + b_1y = \pm(a_2x + b_2y)$$

$$a_1x + b_1y = \pm a_2x \pm b_2y$$

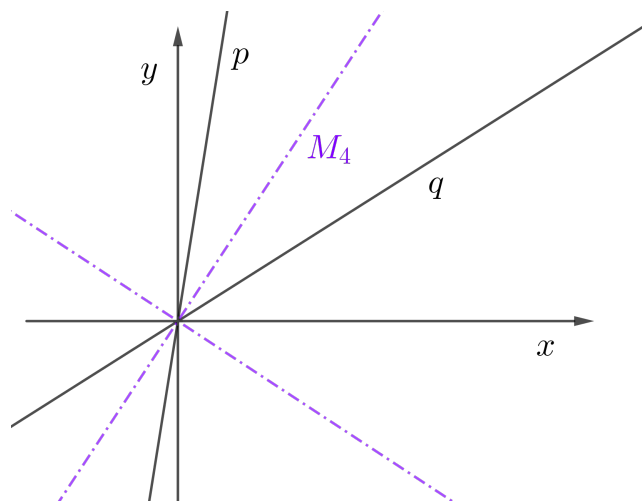
$$a_1x \mp a_2x + b_1y \mp b_2y = 0$$

$$x(a_1 \mp a_2) + y(b_1 \mp b_2) = 0$$

Výsledný tvar množiny odpovídá obecným rovnicím dvou přímek. Množinu M_5 lze proto zapsat ve tvaru:

$$M_5 = \{X = [x, y]; x(a_1 + a_2) + y(b_1 + b_2) = 0; x(a_1 - a_2) + y(b_1 - b_2) = 0\}$$

¹Za účelem zjednodušení práce s rovnicemi přímek pracujeme pouze s přímkami procházejícími počátkem. Toto opatření nemá vliv na platnost našich zjištění ve vztahu k obecným polohám přímek, jelikož výpočet vzdáleností pomocí manhattanské metriky je závislý pouze na směru souřadnicových os, nikoli na konkrétní volbě jejich polohy. Podobným způsobem budeme postupovat i u dalších množin a metrik.



Obrázek 1.7: Osa různoběžek

Elipsa (množina M_6)

Množinou všech bodů, které mají od dvou daných různých bodů E , F konstantní součet vzdáleností větší než vzdálenost daných bodů, je *elipsa*.

V obr. 1.8 jsou označeny základní charakteristiky elipsy. Podrobný popis těchto pojmů můžeme nalézt např. v [6] nebo v jiných středoškolských učebnicích analytické či deskriptivní geometrie. Body E , F nazýváme ohniska elipsy, bod S je střed elipsy, body A , B hlavní vrcholy, body C , D vedlejší vrcholy. Hlavní poloosa elipsy je vzdálenost $a = |AS| = |BS|$, vedlejší poloosa $b = |CS| = |DS|$. Číslo $e = |ES| = |FS|$ je excentricita elipsy.

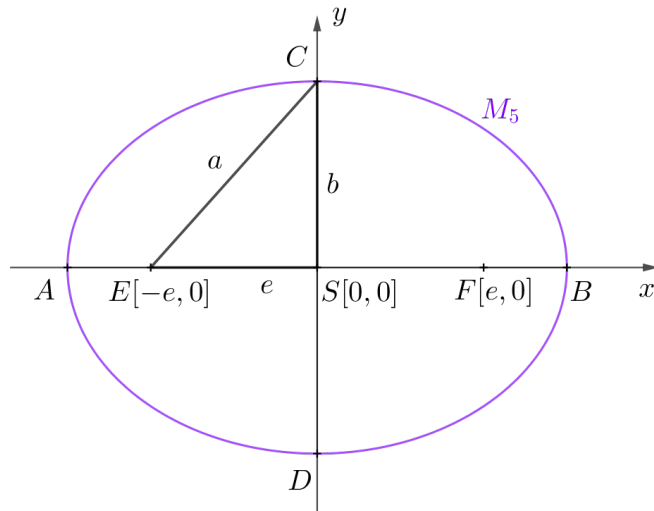
V učebnici [6] nalezneme i podrobné odvození analytické rovnice elipsy. Zde pouze uvedeme, jakým způsobem elipsu umístíme do soustavy souřadnic, abychom získali požadovaný tvar rovnice.

Střed S úsečky EF volíme v počátku soustavy souřadnic. Hlavní osu elipsy ztotožníme s osou x a dostáváme souřadnice bodů E , F takto: $E[-e, 0]$, $F[e, 0]$. Vedlejší osa elipsy bude splývat se souřadnicovou osou y . Při těchto předpokladech získáváme rovnici elipsy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Při tomto značení můžeme výše zmíněný konstantní součet vzdáleností vyjádřit $||EX| + |FX|| = 2a > |EF|$ pro libovolný bod X elipsy. Všechny body budou tvořit množinu:

$$M_6 = \{X[x, y]; ||EX| + |FX|| = 2a\}.$$

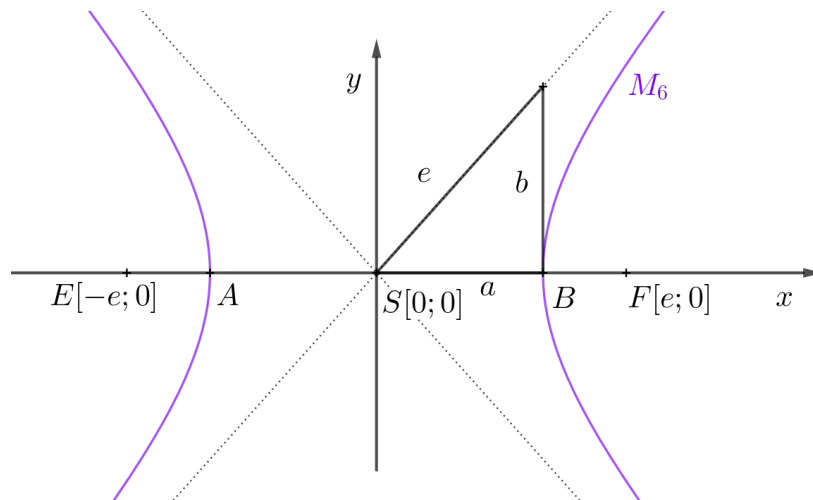


Obrázek 1.8: Elipsa

Hyperbola (množina M_7)

Množinou všech bodů, které mají od dvou různých bodů E, F konstantní absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností menší než vzdálenost daných bodů, je *hyperbola*.

Pro jednotlivé charakteristiky hyperboly používáme stejná označení jako u elipsy. Body E, F nazýváme ohniska, body A, B vrcholy hyperboly. Bod S je střed hyperboly. Hlavní poloosa hyperboly je vzdálenost $a = |AS| = |BS|$, číslo $e = |ES| = |FS|$ je excentricita hyperboly.



Obrázek 1.9: Hyperbola

Obdobně jako u elipsy nebudeme uvádět podrobné odvození rovnice hyperboly, lze je nalézt opět v [6]. Pro upřesnění používaných pojmů ale uvádíme obr. 1.9 znázorňující popis základních charakteristik hyperboly a její umístění v soustavě souřadnic, z něž lze odvodit rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Podstatné pro nás bude vyjádření dané vzdálenosti bodů množiny od ohnisek E, F , tj. $||EX| - |FX|| = 2a < |EF|$ pro libovolný bod X hyperboly. Hyperbolu můžeme tedy vyjádřit jako množinu:

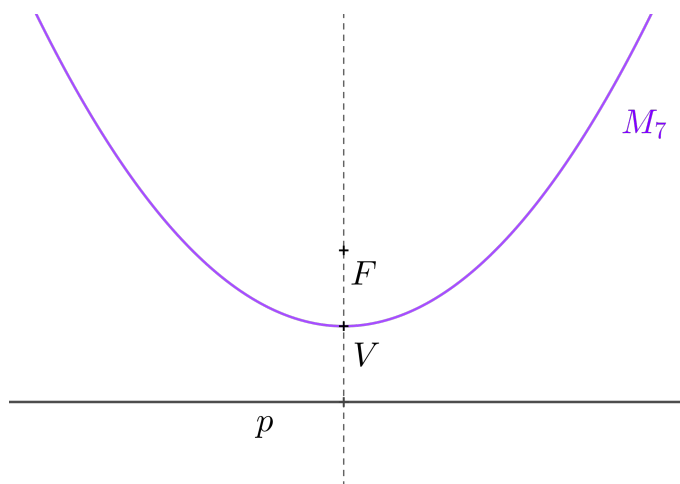
$$M_7 = \{X[x, y]; ||EX| - |FX|| = 2a\}.$$

Parabola (množina M_8)

Množinou všech bodů, které mají shodnou vzdálenost od daného bodu F a dané přímky p , kde $F \notin p$, je *parabola*.

Bod F nazveme ohniskem paraboly a přímku p řídicí přímkou paraboly. V této práci se budeme i v dalších metrických prostorech zabývat převážně tvarem paraboly ve speciálních polohách, k jejich odvození budeme využívat vzdálenosti bodů, stačí nám proto vyjádření množiny na základě definice, viz obr. 1.10:

$$M_8 = \{X[x, y]; |pX| = |FX|\}.$$



Obrázek 1.10: Parabola

2. Manhattanská metrika

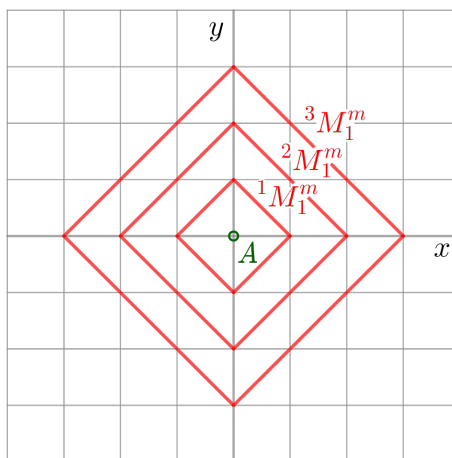
V této kapitole představíme, jak budou jednotlivé množiny bodů daných vlastností vypadat v manhattanském metrickém prostoru \mathcal{P}_m . Jelikož naší vstupní množinou bodů je eukleidovská rovina, jednotlivé body množin budeme charakterizovat klasicky pomocí kartézské soustavy souřadnic (KSS). Některé z množin lze nalézt v knize Taxicab geometry ([7]), kde se také nachází různé další úlohy využívající manhattanskou metriku. Několik úloh lze též nalézt v [8].

2.1 Kružnice (M_1^m)

První množinou, kterou se budeme zabývat v prostoru \mathcal{P}_m , je kružnice. Za střed kružnice budeme bůno považovat počátek KSS. Díky tomu můžeme kružnici M_1^m o poloměru r pomocí metriky ϱ_m vyjádřit následovně:

$$M_1^m = \{X = [x,y]; |x| + |y| = r\}$$

Z tohoto vyjádření plyne, že výsledná množina se bude skládat z částí grafů lineárních funkcí se směrnici ± 1 , a to tak, tvoří hranici eukleidovského čtverce. Příklady kružnic $^1M_1^m$, $^2M_1^m$, $^3M_1^m$ se zvolenými poloměry 1, 2 a 3 jsou znázorněny v obr. 2.1.



Obrázek 2.1: Kružnice v ϱ_m

2.2 Osa úsečky (M_2^m)

Druhou zkoumanou množinou je osa úsečky. Dle definice hledáme body, které budou stejně vzdáleny od krajních bodů $A[a_1, a_2]$ a $B[b_1, b_2]$ úsečky AB , tj.:

$$M_2^m = \{X = [x,y]; |XA| = |XB|\}$$

Problém rozdělíme na několik případů, nejprve projdeme speciální polohy bodů A , B , a následně i obecnou polohu.

Nejjednodušší situace nastane, pokud se oba body A, B shodují v jedné souřadnici. Mějme například $a_1 = b_1$, neboli oba body mají shodnou x -ovou souřadnici. Použijeme-li vzorec pro výpočet vzdálenosti ϱ_m , hledáme body $X[x, y]$ splňující:

$$|x - a_1| + |y - a_2| = |x - b_1| + |y - b_2|$$

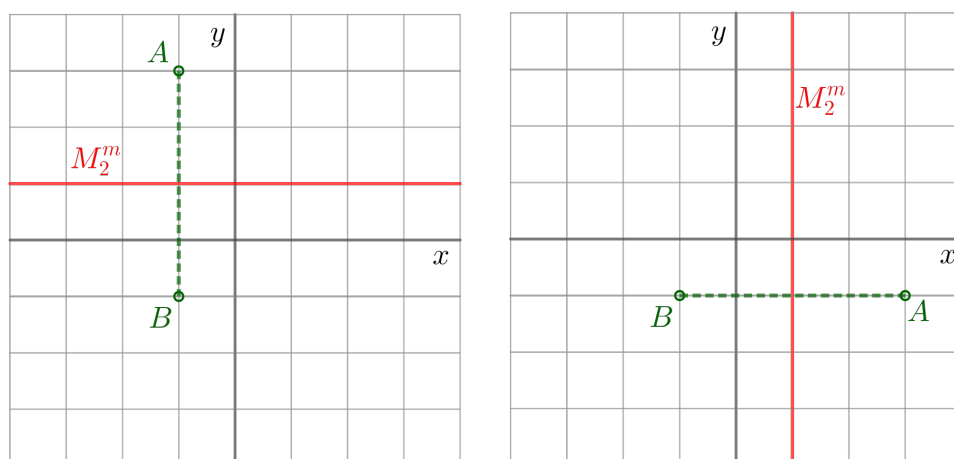
Po dosazení shodných souřadnic získáváme:

$$\begin{aligned} |x - a_1| + |y - a_2| &= |x - a_1| + |y - b_2| \\ |y - a_2| &= |y - b_2| \end{aligned}$$

Abychom získali platnou rovnost, musí se obě absolutní hodnoty rovnat. Vzhledem k tomu, že body A, B jsou různé, dosáhneme toho pouze v případě, že výrazy $y - a_2$ a $y - b_2$ budou navzájem opačné.

$$\begin{aligned} (y - a_2) &= -(y - b_2) \\ y - a_2 &= -y + b_2 \\ 2y &= a_2 + b_2 \\ y &= \frac{a_2 + b_2}{2} \end{aligned}$$

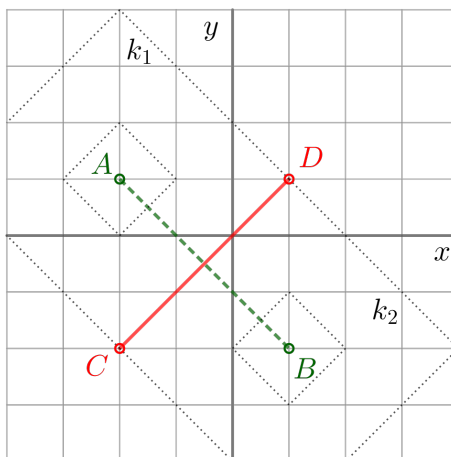
Souřadnice y tak musí pro všechny body množiny M_2^m být rovna aritmetickému průměru souřadnic a_2, b_2 . Výsledná množina bodů je tak v tomto případě stejná jako osa úsečky v eukleidovském metrickém prostoru \mathcal{P}_e , kde se jedná o přímku kolmou k úsečce a procházející jejím středem. Stejným způsobem bychom získali množinu M_2^m i při volbě shodných y -ových souřadnic bodů A, B , oba případy jsou znázorněny v obr. 2.2.



Obrázek 2.2: Osa úsečky v ϱ_m I

Druhým speciálním případem jsou všechny úsečky kolmé na osu 1. či 2. kvadrantu. Búno odvodíme tvar množiny M_2^m pro úsečku kolmou na osu 1. kvadrantu, druhý případ bychom našli analogicky. V tomto případě použijeme k nalezení množiny první množinu bodů, kterou jsme v této kapitole v \mathcal{P}_m popsali, tj. kružnici. Všechny body, které mají od bodu A určitou vzdálenost v , leží

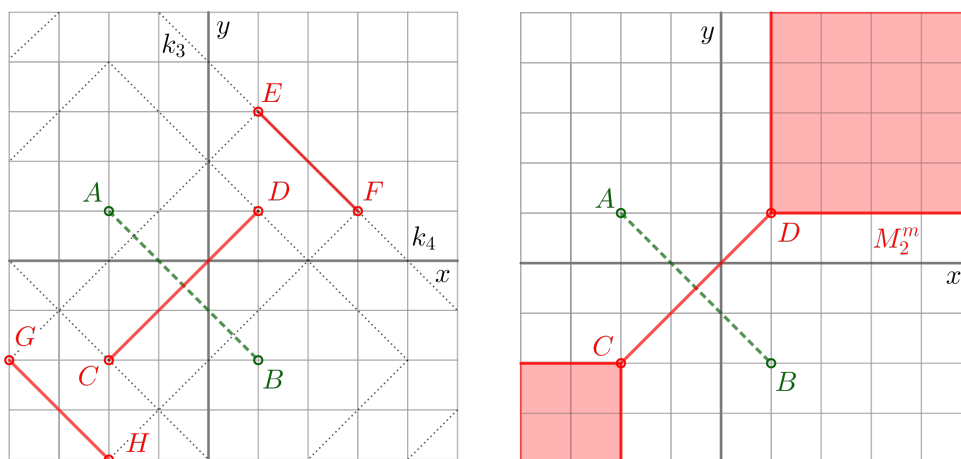
podle definice uvedené v kapitole 1 na kružnici. Pokud budeme uvažovat pro oba body A, B množiny všech bodů ležících v dané vzdálenosti v , získáme dvě shodné kružnice k_1, k_2 . Body naší hledané *osy úsečky* budou všechny průsečíky těchto kružnic. V obr. 2.3 vidíme první dvojici kružnic. Nejmenším možným poloměrem v_1 kružnic k_1, k_2 , abychom získali nějaké průsečíky, bude polovina vzdálenosti bodů A, B , tj. v \mathcal{P}_m $v_1 = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$. Už víme, že kružnice v \mathcal{P}_m získává tvar hranice eukleidovského čtverce, jehož stranami jsou úsečky rovnoběžné s osami 1. a 2. kvadrantu. Vzhledem k poloze bodů proto získáváme jako první část hledané množiny úsečku CD , jež je průnikem kružnic k_1, k_2 .



Obrázek 2.3: Osa úsečky v \mathcal{P}_m II-1

Zbývá zjistit, jaké průsečíky získáme při volbě dalších vzdálenosti v větších než v_1 . Zvolme například $v_2 = 5$. Vzniklé kružnice k_3, k_4 jsou znázorněny v obr. 2.4. Průnikem těchto kružnic jsou úsečky dvě, označíme je EF a GH . Úsečky EF a GH jsou kolmé na úsečku CD . Rozebereme podrobně polohu úsečky EF . Body E, F leží po řadě na polopřímkách BD a AD . Fakt, že na těchto polopřímkách nalezneme další body shodně vzdálené od A a B , není, vzhledem k tomu, jak v \mathcal{P}_m funguje vzdálenost, překvapivý. Pohybujeme se pouze po rovnoběžkách se souřadnicovými osami, tudíž libovolný bod polopřímky DE je jistě shodně vzdálen od A a B , obdobně pro všechny body polopřímky DF . Průnikem kružnic k_3, k_4 byla celá úsečka EF a jak jsme nyní rozebrali, obdobně by toto platilo pro libovolnou další dvojici kružnic s poloměrem $v > v_1$. Do hledané množiny bodů M_2^m budou proto patřit také všechny body polopřímek DE, DF, CG, CH a s nimi všechny vnitřní body eukleidovských konvexních úhlů EDF a GCH .

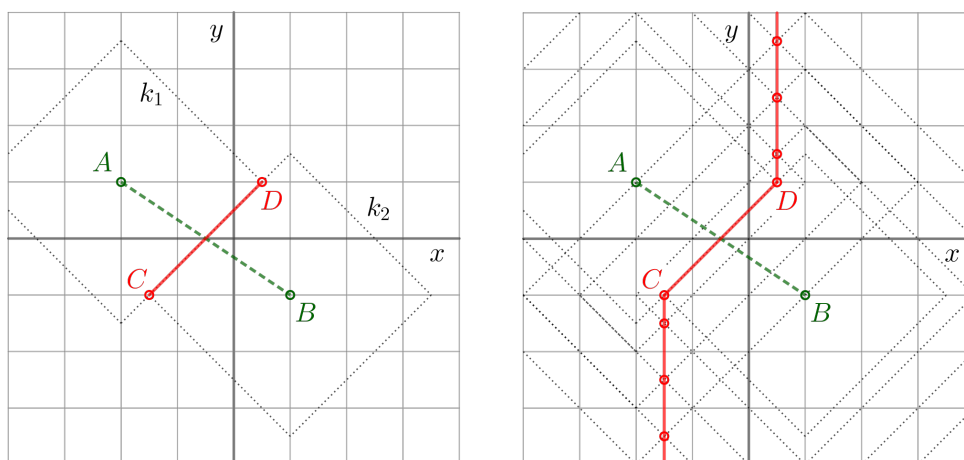
Nakonec odvodíme tvar množiny pro všechny ostatní polohy úsečky AB . Podoba množiny bude záležet na směrnici přímky AB , jednotlivé možnosti rozebereme po odvození jedné konkrétní množiny. Budeme používat velmi podobný postup jako v předchozím případě, jednotlivé kroky už proto popíšeme stručněji. Postup ukážeme na zvolené úsečce s krajními body $A[-2; 1]$ a $B[1; -1]$, viz obr. 2.5. Jednotlivé body množiny opět hledáme pomocí dvou shodných kružnic se středy v bodech A, B . Nejmenší možný poloměr kružnic bude opět roven polovině vzdálenosti bodů A, B . Průnikem těchto kružnic je úsečka, kterou označíme CD . Můžeme si všimnout, že vzhledem k jinému sklonu úsečky AB se strany obou kružnic nyní nepřekrývají přesně. Obdobně budou vypadat všechny další dvojice



Obrázek 2.4: Osa úsečky v ϱ_m II-2

shodných kružnic, které použijeme k nalezení dalších bodů množiny.

V obr. 2.5 vpravo máme několik takových dvojic kružnic znázorněných včetně jejich průsečíků. Každé další dvojice kružnic se nyní protínají už pouze ve dvou bodech, které společně tvoří dvě polopřímky kolmé k souřadnicové ose x s krajními body C a D .



Obrázek 2.5: Osa úsečky v ϱ_m III 1. a 2. část

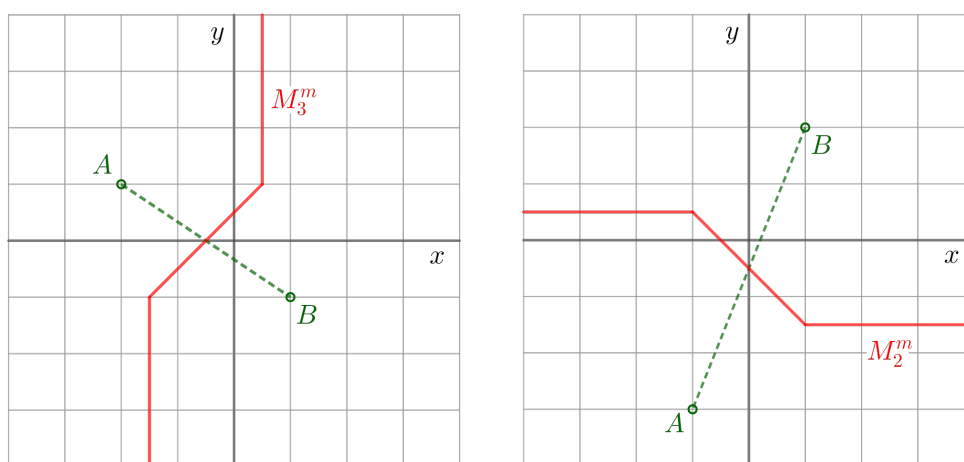
Vrátíme se nyní zpět k volbě úsečky AB , jelikož tento případ množiny M_2^m je ještě nutné rozlišit na dva podpřípady v závislosti na směrnici přímky AB . Označíme-li k směrnici přímky AB , rozdělíme situaci na dva případy podle hodnot k na:

- $0 < |k| < 1$,
- $|k| > 1$.

Směrnice $k = 0$ a $|k| = 1$ odpovídají případům probraným výše. Všechny případy z první skupiny, tj. $0 < |k| < 1$ dopadnou analogicky se situací znázorněnou v obr. 2.5, jde o lomené čáry sestávající ze tří částí; úsečky CD rovnoběžné s osou 1. nebo 2. kvadrantu a dvou polopřímek rovnoběžných se souřadnicovou osou y .

U všech případů z druhé skupiny získáme také lomenou čáru sestávající ze tří částí, a to opět úsečky rovnoběžné s osou 1. nebo 2. kvadrantu a dvou polopřímek rovnoběžných se souřadnicovou osou x . Obě varianty jsou znázorněny v obr. 2.6.

Množinu je možné více zkoumat pomocí online dostupného nástroje pod odkazem v rámci článku na webu Math Careers. [9]



Obrázek 2.6: Osa úsečky v ϱ_m III různé varianty

2.3 Vzdálenost bodu od přímky

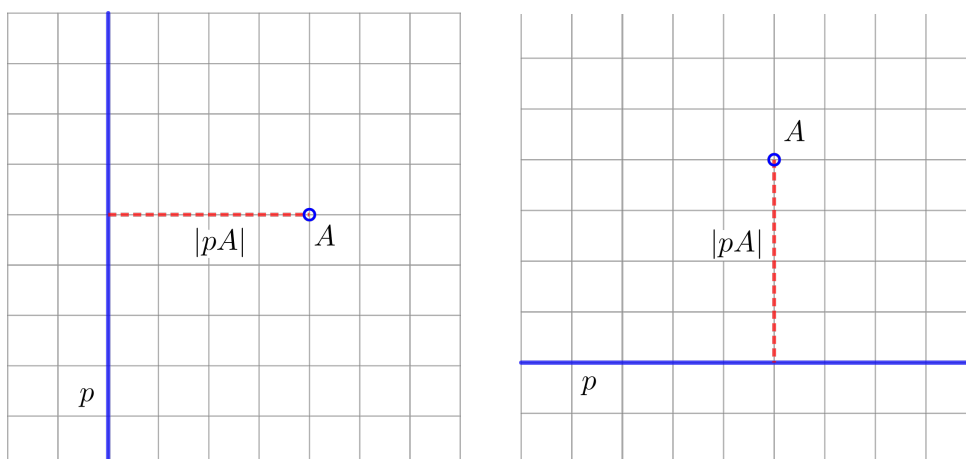
Do této chvíle jsme vystačili s definicí vzdálenosti dvou bodů. Při zkoumání osy rovnoběžek a dalších množin ale budeme potřebovat znát také princip, jakým se v manhattanském metrickém prostoru vyjadřuje a počítá vzdálenost bodu a přímky. V definici vzdálenosti bodu od přímky vyjdeme z obvyklé definice v eukleidovském metrickém prostoru.

Definice 3. Mějme přímku p a bod A v rovině. *Vzdáleností bodu A od přímky p* je číslo:

$$\varrho_m(A, p) = \min\{\varrho_m(A, P); P \in p\}.$$

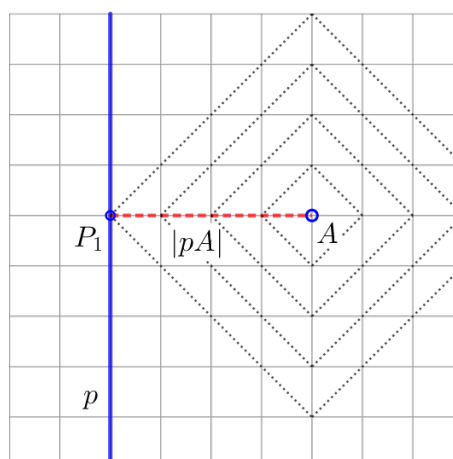
Jednoduchým způsobem vzdálenost odvodíme, pokud je přímka p rovnoběžná s jednou ze souřadnicových os. V \mathcal{P}_m se při znázornění vzdáleností bodů pohybujeme také pouze rovnoběžně se souřadnicovými osami. Z toho důvodu nejkratší vzdálenost k přímce získáme pomocí kolmice v eukleidovském smyslu. V obr. 2.7 jsou znázorněny jednotlivé případy, které mohou nastat.

Pro obecnou polohu přímky p bude nalezení vzdálenosti od bodu A složitější. Pomůže nám množina bodů, kterou jsme již prozkoumali výše, a to kružnice. Nalezení bodu P_1 na přímce p , který bude nejbližší bodu A si můžeme představit tak, že sestrojíme kružnice se středem v bodě A o rostoucím poloměru až



Obrázek 2.7: Vzdálenost bodu a přímky

do chvíle, než se kružnice dotkne přímky p . Na výše znázorněných případech lze snadno pozorovat, že postup skutečně funguje, daným bodem P_1 bude v těchto případech vrchol kružnice, viz obr. 2.8.



Obrázek 2.8: Vzdálenost bodu a přímky

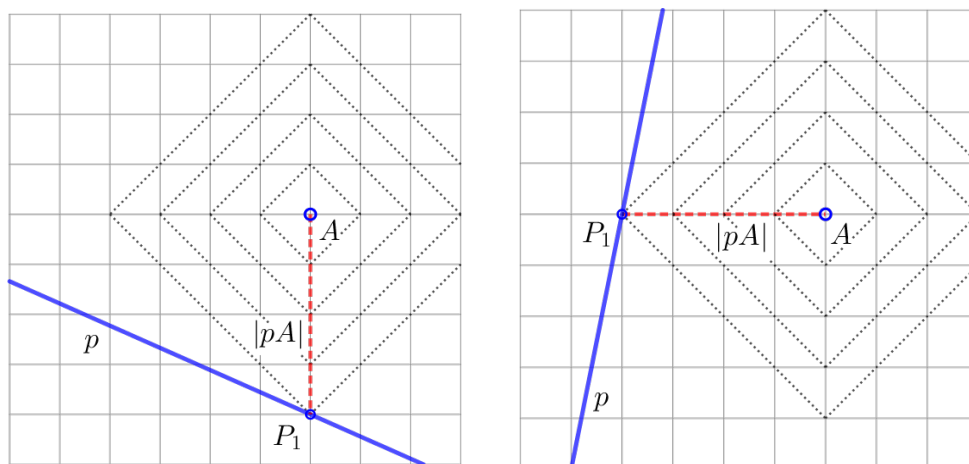
Obecné polohy přímky rozlišíme na případy podle směrnice dané přímky.¹ Jelikož kružnice je sjednocením částí grafů funkcí o směrnících ± 1 , tyto hodnoty budou hraničními hodnotami pro jednotlivé případy.

Vzdálenost bodu $A = [a_1; a_2]$ a přímky $p : y = kx + q$ se směrnicí k v \mathcal{P}_m určíme následovně:

¹Směrnice tvar přímky má jistou nevýhodu v tom, že jím nelze vyjádřit přímky rovnoběžné s osou y . Pro účely této práce má ale naopak značnou výhodu, jelikož budeme při zkoumání různých množin postupovat po případech na základě odchylky přímek od souřadnicových os. Odchylkou přímek v neeukleidovských metrických prostorech se v této práci nezabýváme, zde máme na mysli odchylku v eukleidovském smyslu. Dále se právě díky směrnice tvaru přímky tomuto pojmu vyhneme. Případy zahrnující přímky rovnoběžné s osou y tak vždy rozebereme zvlášť.

- pro $|k| \leq 1$: $\rho_m = |a_2 - (ka_1 + q)|$
- pro $|k| > 1$: $\rho_m = |a_1 - (\frac{a_2 - q}{k})|$

Jednotlivé možnosti jsou znázorněny v obr. 2.9. Sluší se poznamenat, že pro $|k| = 1$ existuje více různých nejkratších cest od bodu A k přímce p , jelikož po dosazení do obou uvedených výrazů získáme stejný výsledek. Zde je tento případ buďno přiřazen k variantě $|k| < 1$.



Obrázek 2.9: $|k| \leq 1$ (vlevo), $|k| > 1$ (vpravo)

2.4 Osa rovnoběžek (M_3^m)

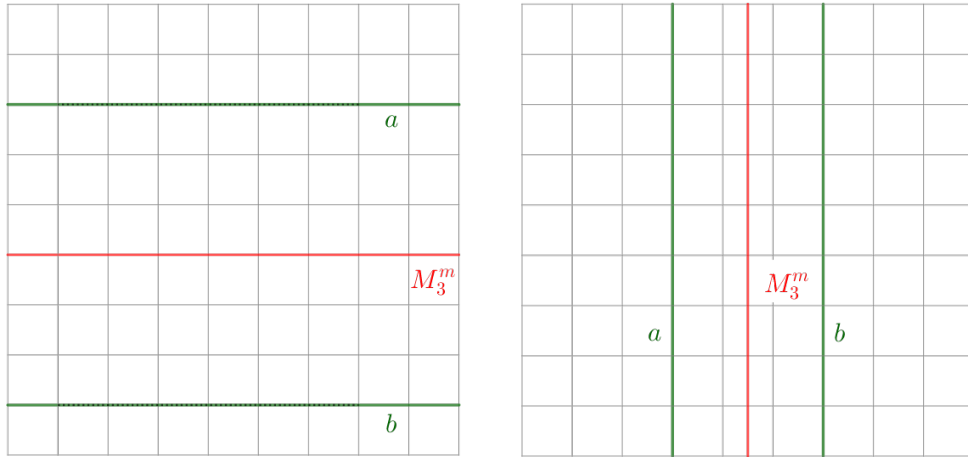
Při určení osy rovnoběžek v \mathcal{P}_m budeme vycházet z poznatků o vzdálenosti bodu a přímky z podkapitoly 2.3. V eukleidovské geometrii popisujeme osu různých rovnoběžek a, b jako množinu všech bodů, které mají od daných rovnoběžek a, b stejnou vzdálenost.

Nejprve se zaměříme na polohu přímek rovnoběžnou s jednou ze souřadnicových os. Jak plyne z poznatků viz obr. 2.8, v těchto případech měříme vzdálenost stejně jako v ϱ_e , tudíž i osa rovnoběžek bude vypadat stejně, viz obr. 2.10.

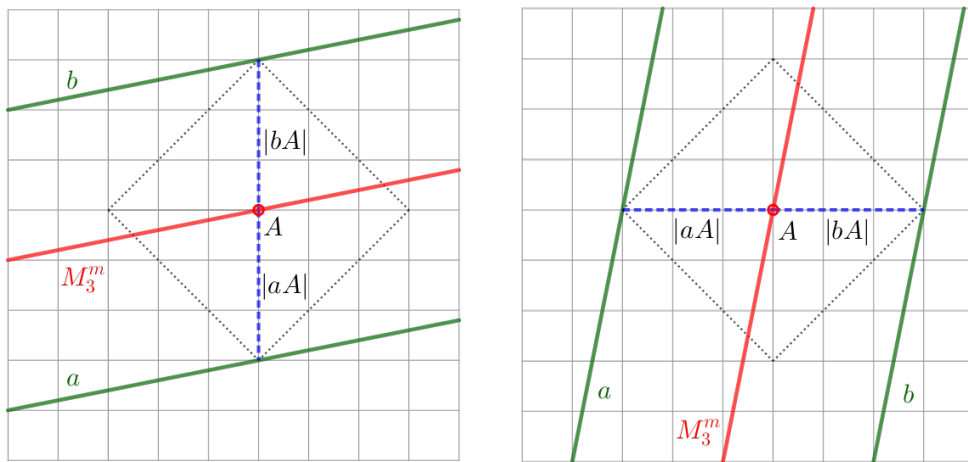
Obecné polohy přímek rozdělíme do dvou případů podle společné směrnice daných rovnoběžek $a: y = kx + p, b: y = kx + q$:

- $|k| \leq 1$
- $|k| > 1$

Právě poznatek, že obě rovnoběžky mají stejnou směrnici k , je zde podstatný pro nalezení řešení. V podkapitole 2.3 jsme totiž podle směrnice rozdělili hledání vzdálenosti bodu a přímky na dva případy. Jestliže obě rovnoběžky mají směrnici stejnou, musí být stejný také způsob měření jejich vzdálenosti k danému bodu. Pro $|k| \leq 1$ tak od bodu míříme k přímkám rovnoběžně s osou x , pro $|k| > 1$ rovnoběžně s osou y . Oba případy jsou znázorněny v obr. 2.11, vidíme také, že bez ohledu na volbu směrnice je osa rovnoběžek a, b v manhattanském metrickém prostoru stejná množina, jako v prostoru eukleidovském.



Obrázek 2.10: Osa rovnoběžek v \mathcal{P}_m I



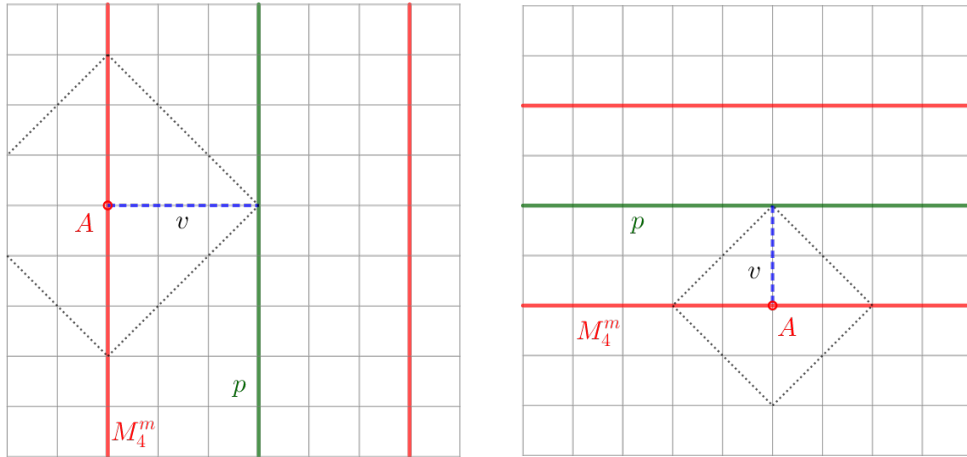
Obrázek 2.11: Osa rovnoběžek v \mathcal{P}_m pro $|k| \leq 1$ (vlevo) a $|k| > 1$ (vpravo)

2.5 Ekvidistanta přímky (M_4^m)

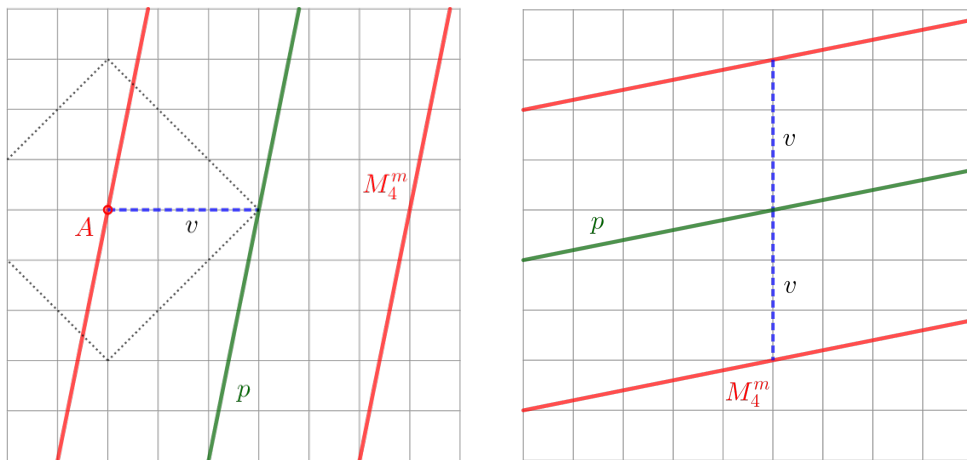
Čtvrtou zkoumanou množinou tvoří všechny body ležící v dané vzdálenosti v od přímky p . V kapitole 1 jsme si mohli povšimnout souvislosti mezi množinami M_3 a M_4 , kdy v obou obrázcích 1.6 a 1.7 vidíme tři rovnoběžky, pouze v každém případě jiné z nich tvoří výslednou množinu. Při zkoumání tvaru množiny M_4^m tak budeme postupovat obdobně jako u množiny M_3^m .

Pokud je přímka p rovnoběžná s jednou ze souřadnicových os, měříme její vzdálenost od daného bodu ve směru kolmém k přímce p . Množina M_4^m tak bude shodná dvojice rovnoběžek jako v eukleidovském metrickém prostoru. Tyto dva případy jsou znázorněny v obr. 2.12.

Pro ostatní polohy přímky $p: y = kx + q$ se způsob měření vzdálenosti odvíjí od směrnice k . Pro $|k| \leq 1$ měříme vzdálenost bodu od přímky pomocí rovnoběžky s osou y . V obr. 2.13 vlevo vidíme příklad jednoho konkrétního bodu A , který je od přímky p vzdálen o délku v včetně ověření pomocí kružnice $l(A, v)$, a také výslednou množinu M_4^m všech takových bodů. V obr. 2.13 vpravo vidíme případ pro $|k| > 1$, kde by odvození probíhalo analogicky.



Obrázek 2.12: Ekvidistanta přímky v \mathcal{P}_m I



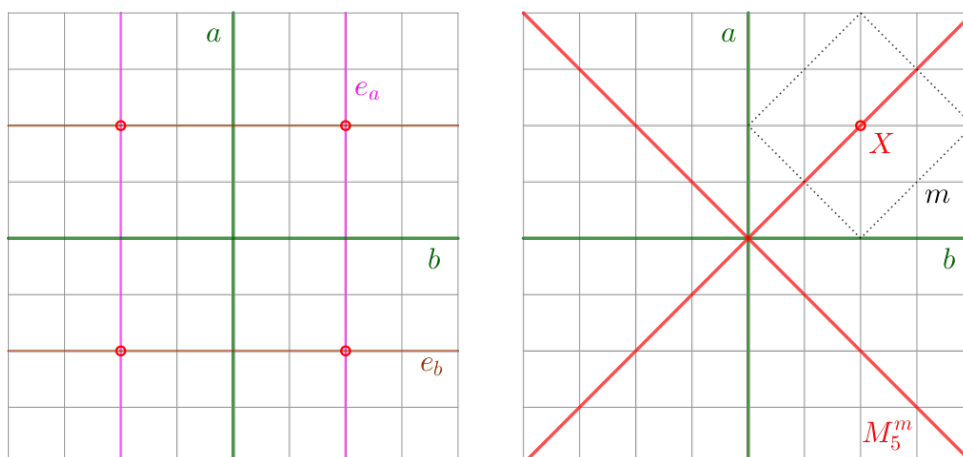
Obrázek 2.13: Ekvidistanta přímky v \mathcal{P}_m II

2.6 Osy různoběžek (M_5^m)

Také u další zkoumané množiny bodů budeme využívat poznatky o manhat-tanské vzdálenosti bodu a přímky. „Osami různoběžek“ jsme nazvali množinu všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných navzájem různých různoběžek a , b .

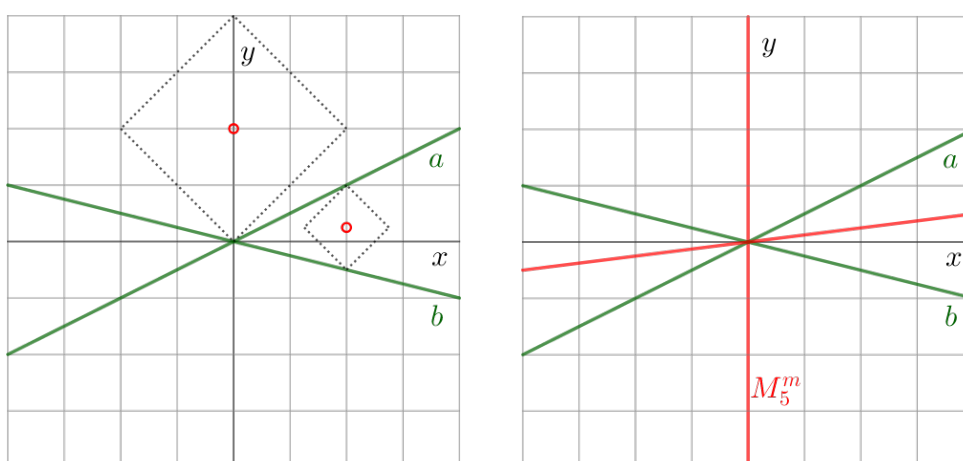
Nejprve se zaměříme na některé speciální polohy přímek a , b , posléze postupně přejdeme k obecnějším polohám, u kterých obdobně jako u předchozích dvou množin budeme pracovat se směrnici přímek. Na úvod zvolme $a = y$ a $b = x$, viz obr. 2.14 vlevo. Při hledání jednotlivých bodů množiny M_5^m můžeme využít předchozí zkoumanou množinu, ekvidistantu přímky M_4^m . Zvolme libovolnou vzdálenost v . Množina všech bodů ve vzdálenosti v od přímky a je její ekvi-distanta e_a (v obrázku růžově), množina všech bodů ve vzdálenosti v od přímky b je pak ekvidistanta e_b (v obrázku hnědě). Průnikem obou ekvidistant jsou čtyři body, které leží na osách kvadrantů soustavy souřadnic. Pokud zvolíme jinou hod-notu v , tato vlastnosti se zachová, a tedy množinu M_5^m pro tuto volbu a , b tvoří právě všechny osy kvadrantů, viz obr. 2.14 vpravo. V témž obrázku je znázorněn jeden konkrétní bod X množiny M_5^m . Sestrojíme-li kružnici m se středem v X a poloměrem v , musí se dotýkat obou přímek a a b . Tyto kružnice nám budou

sloužit pro znázornění i u dalších variant množiny.



Obrázek 2.14: Osy různoběžek I

Ostatní varianty množiny M_5^m rozebereme v závislosti na hodnotách směrnic k, l přímk a, b . Přímk a, b umístíme do počátku, tj. $a: y = kx, b: y = lx$. Zvolme nyní takovou polohu přímk a, b , kde pro směrnice k, l platí: $|k| < 1$ a $|l| < 1$, viz obr. 2.15 vlevo. V podkapitole 2.3 jsme popsali, jakým způsobem můžeme pro různé hodnoty směrnice přímk měřit vzdálenost bodu od dané přímk. Pokud abs. hodnoty obou zvolených směrnic k, l jsou menší než jedna, měříme vzdálenost od libovolného bodu X k oběma přímkám stejným způsobem, ve směru osy y . Bude tedy existovat kružnice $m(X, v)$, kde v je vzdálenost bodu X od přímk a a b , která se obou přímk dotýká buď v protějších vrcholech (náležících úhlopříčce rovnoběžné s osou y), nebo v jednom vrcholu, který leží v počátku soustavy souřadnic. Obě možnosti jsou v obr. 2.15 vlevo znázorněny. Záleží na tom, v kterém úhlu vymezeném přímkami a, b se nacházíme.



Obrázek 2.15: Osy různoběžek II

Obecně bychom mohli množinu odvodit pomocí výpočtu vzdálenosti bodu X od přímk a, b . Využijeme vzorec odvozený v podkapitole 2.3:

$$|Xa| = |Xb|$$

$$|x_2 - kx_1| = |x_2 - lx_1|$$

Při odstranění absolutních hodnot můžeme získat dvě různé rovnice:

$$x_2 - kx_1 = x_2 - lx_1$$

$$x_2 - kx_1 = lx_1 - x_2$$

Po úpravě obou rovnic získáme:

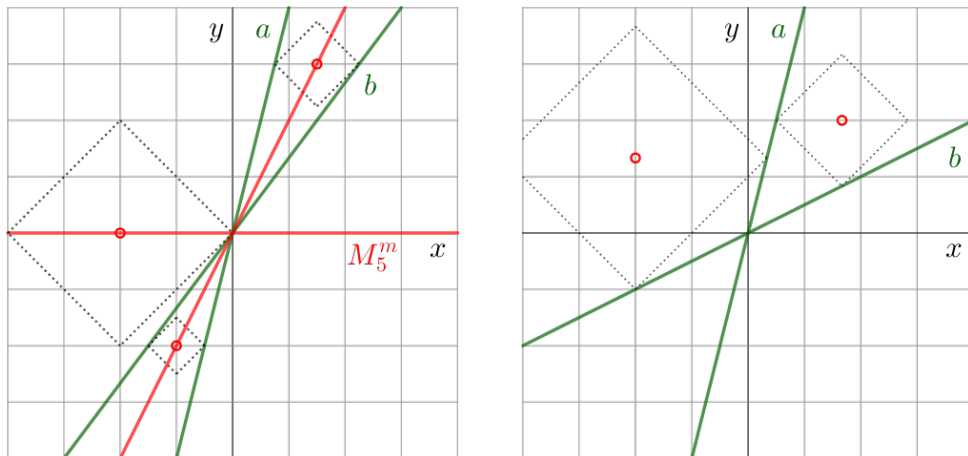
$$0 = (k - l)x_1$$

$$x_2 = \frac{k + l}{2}x_1$$

První rovnice bude platná pouze v případě, že $x_1 = 0$, jelikož totožnost přímek a a b neuvažujeme. Tato podmínka odpovídá množině bodů osy y . Druhá rovnice odpovídá rovnici přímky. Množina bodů M_5^m , kterou nazýváme osami různoběžek, se tak i v \mathcal{P}_m skládá ze dvou přímek. Výsledná množina je znázorněna v obr. 2.15 vpravo.

Velmi podobně by odvození, jak geometrické, tak početní, vypadalo pro volbu směrnic k, l takovou, že $|k| > 1$ a $|l| > 1$. V tomto případě bychom pouze využili druhý vzorec pro vzdálenost bodu od přímky z podkapitoly 2.3. Taková množina s několika konkrétními body a pomocnými kružnicemi je znázorněna v obr. 2.16 vlevo. Skládá se opět ze dvou přímek, a to osy x a přímky dané rovnicí:

$$y = \frac{2klx}{k + l}$$



Obrázek 2.16: Osy různoběžek III

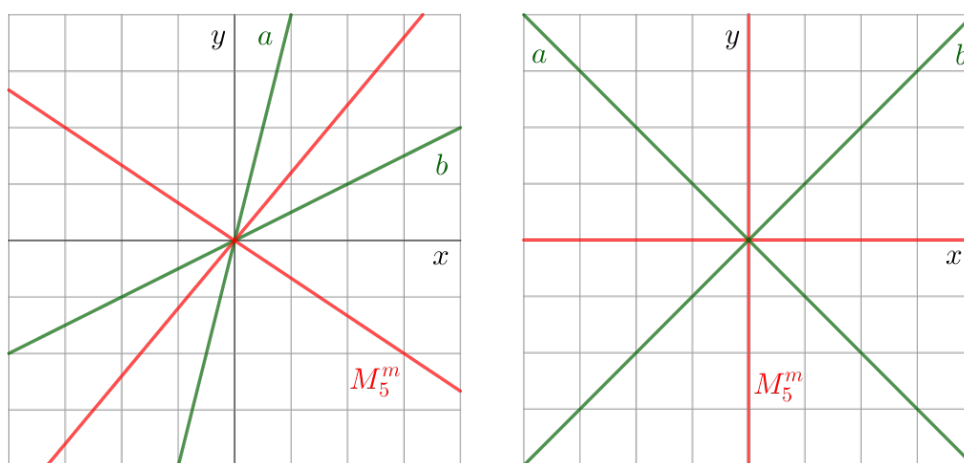
Na závěr uvažujme polohu přímek, kdy každá odpovídá jiné variantě měření vzdálenosti, buďto volně $|k| < 1$ a $|l| > 1$, viz obr. 2.16 vpravo. Geometricky dopadne nyní situace tak, že se bude pomocná kružnice se středem v bodě X množiny M_5^m dotýkat přímek a, b v sousedních vrcholech. Obecné vyjádření odvodíme z následující rovnice:

$$|x_2 - kx_1| = \left|x_1 - \frac{x_2}{l}\right|$$

Odstraněním absolutní hodnoty získáme dvě rovnice, které lze upravit na směrnice tvar rovnice přímky:

$$\begin{aligned} x_2 - kx_1 &= x_1 - \frac{x_2}{l} & x_2 - kx_1 &= \frac{x_2}{l} - x_1 \\ x_2 \left(1 + \frac{1}{l}\right) &= x_1(k + 1) & x_2 \left(1 - \frac{1}{l}\right) &= x_1(k - 1) \\ x_2 &= x_1 l \frac{(k + 1)}{(l + 1)} & x_2 &= x_1 l \frac{(k - 1)}{(l - 1)} \end{aligned}$$

Tyto přímky tvoří výslednou množinu M_5^m , která je znázorněna v obr. 2.17 vlevo.



Obrázek 2.17: Osy různoběžek IV

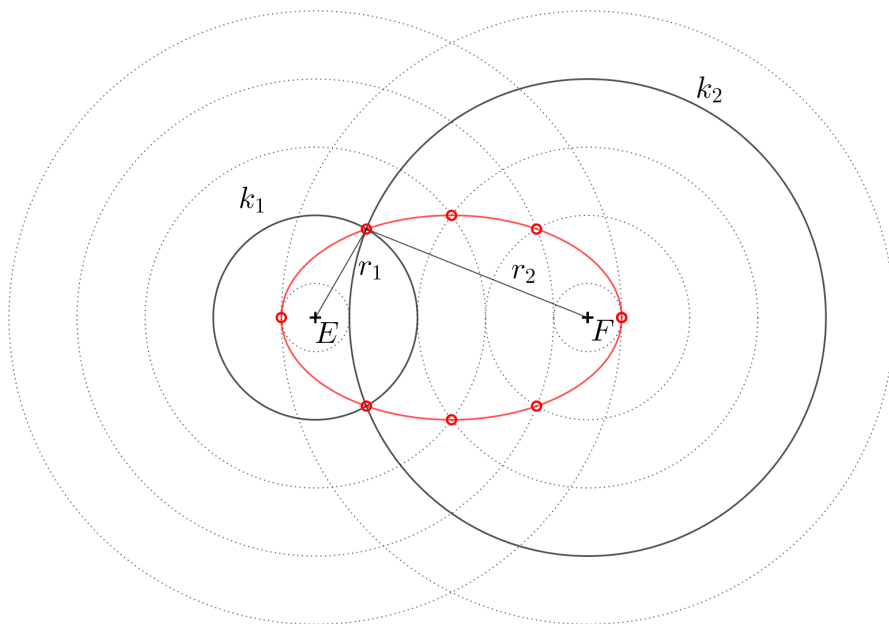
Z celého zkoumání jsme dosud vynechali dvě přímky, $y = x$ a $y = -x$. Jak s nimi lze zacházet jsme již ale zmínili při odvozování vzdálenosti bodu od přímky. Protože pomocná kružnice, kterou ke znázornění této vzdálenosti využíváme, bude s přímkou sdílet celou jednu stranu (strana kružnice je část přímky o shodné směrnici), lze pro výpočet v této situaci využít oba vzorce. Mohli bychom tak obě přímky zařadit do všech probraných situací. Pokud přímo položíme $a = x$ a $b = -x$, získáme podobný obrázek jako u první zvolené varianty, pouze si obě dvojice přímek prohodí role. Osami různoběžek a, b jsou v tomto případě osy x a y . Tato varianta je znázorněna v obr. 2.17 vpravo.

2.7 Elipsa (M_6^m)

Poslední tři množiny, kterými se zabýváme, jsou kuželosečky (elipsa, hyperbola, parabola). Vzhledem k tomu, že na rozdíl od předešlých množin lze nalézt podrobný popis kuželoseček v \mathcal{P}_m v dostupné literatuře, nebudeme se jimi v této práci zabývat natolik podrobně. Uvedeme pouze stručný popis množin a ukážeme různé možnosti, jak mohou vypadat. Hlavním využívaných zdrojem, v kterém lze nalézt kuželosečky uceleně zpracované v češtině, je bakalářská práce Vybrané objekty v neukleidovských metrikách Jiřího Bruny [2]. Stručný popis kuželoseček v manhattanské a také v maximové metrice lze také nalézt v článku [10].

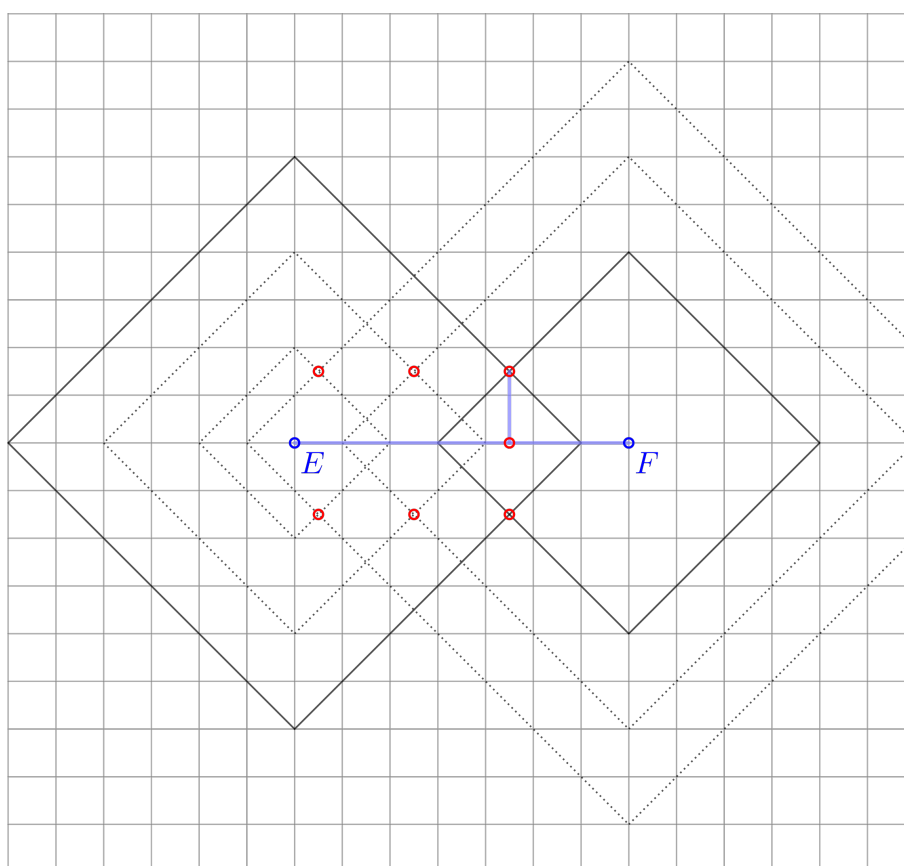
První kuželosečkou, kterou se budeme zabývat v \mathcal{P}_m , je elipsa. Podle definice se jedná o množinu všech bodů, které mají od dvou daných různých bodů E , F konstantní součet vzdáleností větší než vzdálenost daných bodů.

Při odvozování budeme opět postupovat od speciálních případů k těm obecnějším, pro začátek volme polohu ohnisek na přímce rovnoběžné s jednou ze souřadnicových os (búno osa x). Pro odvození tvaru elipsy budeme využívat bodovou konstrukci elipsy, která vychází přímo z definice. Při ní využíváme množinu bodů, které mají od daného bodu danou vzdálenost, tj. kružnici. V definici je zmíněn konstantní součet vzdáleností, označme toto číslo $2a$. Následně zvolíme libovolnou vzdálenost $r_1 < 2a$, což bude poloměr kružnice k_1 se středem v ohnisku E . Jelikož chceme docílit toho, aby výsledný bod množiny měl od obou ohnisek součet vzdáleností $2a$, zbývá nám nyní využít číslo $r_2 = 2a - r_1$. Číslo r_2 bude poloměrem druhé kružnice k_2 se středem v bodě F . Bod množiny následně získáme jako průsečík kružnic k_1 , k_2 . Změníme-li číslo r_1 a tudíž i r_2 , získáme další dvojici bodů elipsy, takto bychom mohli postupovat tak dlouho, než dostaneme dostatečně přesně vykreslenou elipsu. V obr. 2.18 je znázorněna bodová konstrukce elipsy v \mathcal{P}_e .



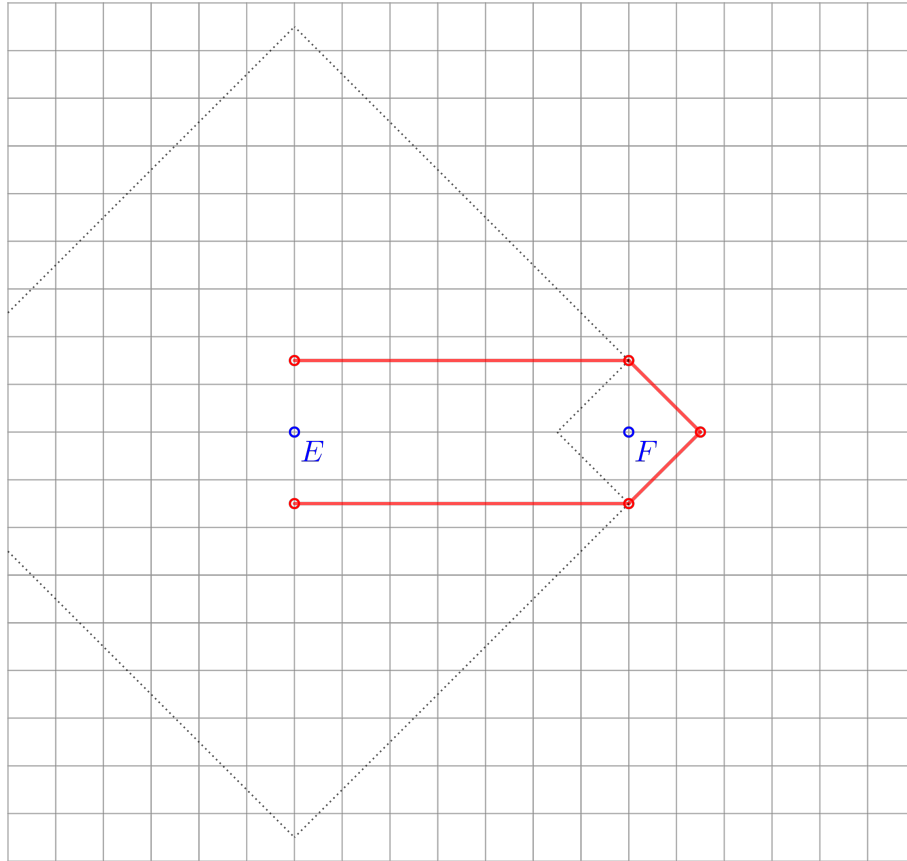
Obrázek 2.18: Bodová konstrukce elipsy v \mathcal{P}_e

Nyní ukážeme, že analogický postup lze použít i v \mathcal{P}_m , podobně jsme kružnice využívali i pro odvození osy úsečky. Máme dána dvě ohniska E, F na přímce rovnoběžné se souřadnicovou osou x , viz obr. 2.19. Vzdálenost ohnisek je zvolena 7, vzdálenost $2a = 10$. V obrázku je zvoleno několik dvojic kružnic podle bodové konstrukce tak, aby součet poloměrů byl vždy roven 10. Pro názornost je jedna dvojice s poloměry 6 a 4 vytažena silnou plnou čarou. Vzhledem ke způsobu měření vzdálenosti v \mathcal{P}_m vidíme, že cesta od ohniska k bodu elipsy vede vždy část horizontálně po hlavní ose a následně kolmo k bodu. Dohromady tak získáme cestu sestávající z částí 4,5 a 1,5 od jednoho ohniska, 2,5 a 1,5 od druhého ohniska. Části cesty, které dohromady tvoří úsečku EF , budou pro další dvojice kružnic stejné, a zároveň i kolmé části cesty budou mít délku 1,5. Z toho plyne, že část množiny M_6^m bude náležet přímce rovnoběžné s úsečkou EF ve vzdálenosti $\frac{2a-|EF|}{2}$.



Obrázek 2.19: Bodová konstrukce elipsy v \mathcal{P}_m I

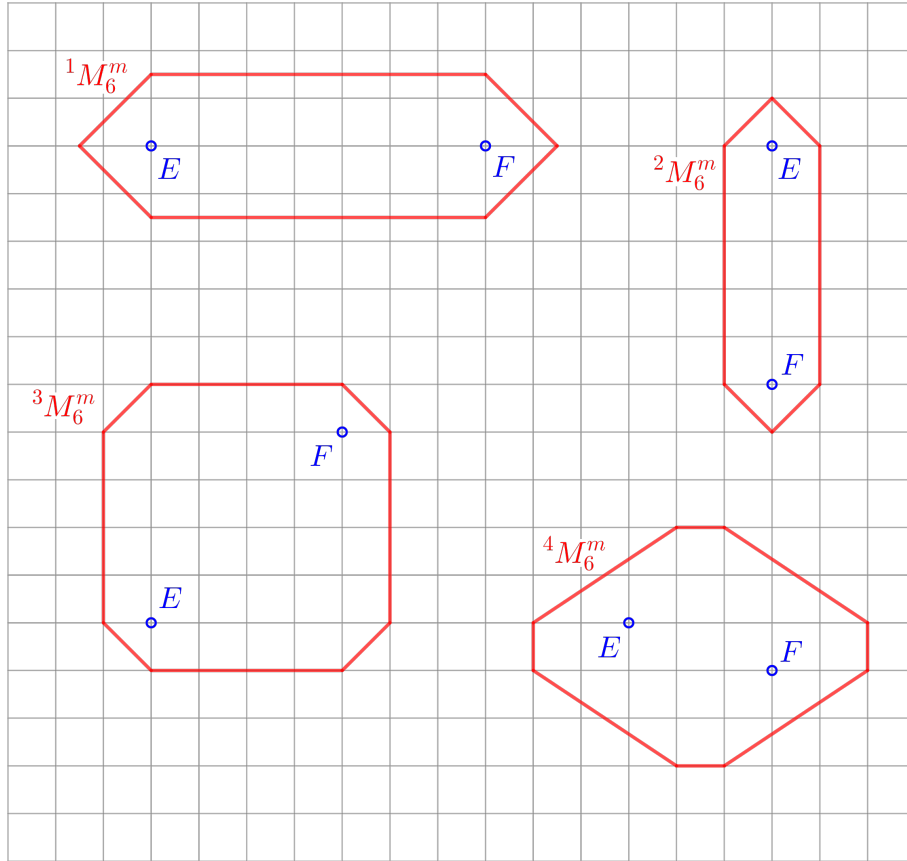
Nejzazší bod, který tímto způsobem můžeme získat, je bod náležící kolmici vedoucí přímo ohniskem. Tato část množiny bude tedy sestávat ze dvou úseček o délce $|EF|$, viz obr. 2.20. Nyní ukážeme, že pro zbývající část množiny na každé straně budeme již potřebovat jen jednu dvojici kružnic. V případě, že rozdíl poloměrů kružnic je roven číslu $2a$, nastává situace viz obr. 2.20. Vrcholy kružnic náležící přímce EF splynou a s nimi také část kružnic, jelikož jsou tvořeny rovnoběžnými úsečkami. Celá výsledná množina ${}^1M_6^m$ má tvar šestiúhelníku, je znázorněna v obr. 2.21.



Obrázek 2.20: Bodová konstrukce elipsy v \mathcal{P}_m II

Nyní se přesuneme k dalším možným variantám množiny M_6^m v závislosti na poloze ohnisek. Jestliže bude úsečka EF rovnoběžná se souřadnicovou osou y , dostáváme analogický tvar množiny, pouze otočený o 90° , viz obr. 2.21, množina ${}^2M_6^m$. Vzdálenost ohnisek E, F je volena 5, $2a = 7$.

V případě, že je úsečka EF dána v obecné poloze, odvození tvaru množiny bude složitější a v této práci se mu nebudeme podrobně věnovat. Podrobné odvození množiny je možné dohledat v bakalářské práci J. Bruny [2]. Postup konstrukce by však probíhal analogicky, jednotlivé body množiny získáme jako průsečíky dvou kružnic na základě bodové konstrukce. V obrázku jsou znázorněny ještě další dva příklady. Množina ${}^3M_6^m$ je volena speciálně tak, že ohniska E, F leží na rovnoběžce s osou 1. kvadrantu. Ohniska mají vzdálenost 8, $2a = 10$. V tomto případě má množina tvar osmiúhelníku, který je osově souměrný podle hlavní a vedlejší osy elipsy. Poslední množina ${}^4M_6^m$ je příkladem elipsy pro volbu ohnisek v obecné poloze.



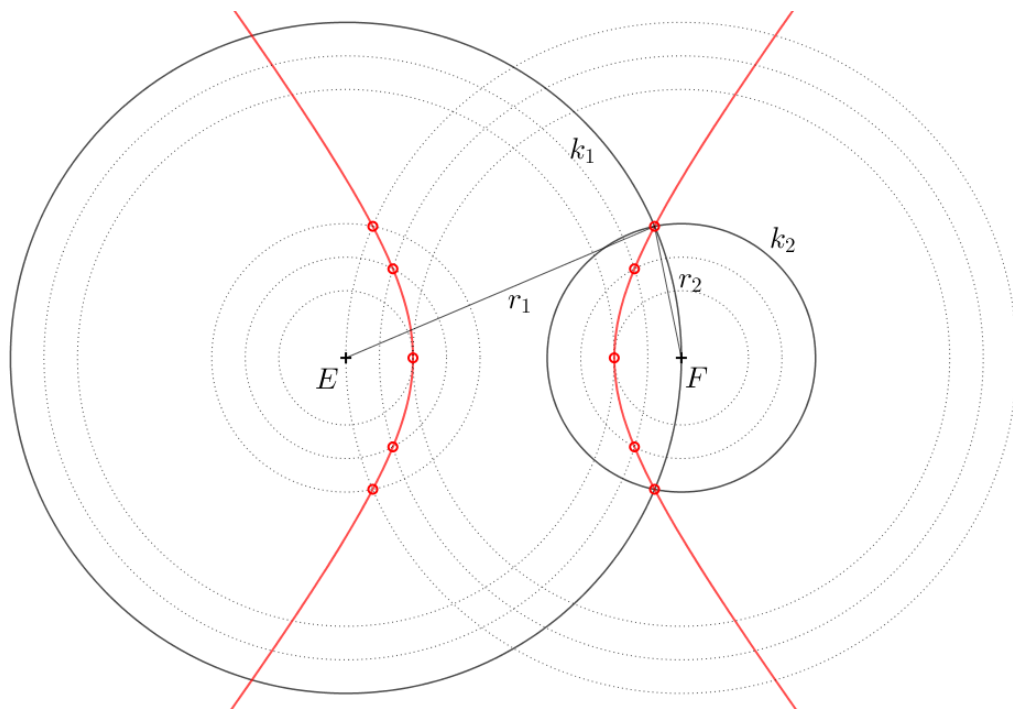
Obrázek 2.21: Elipsa v \mathcal{P}_m – různé varianty

2.8 Hyperbola (M_7^m)

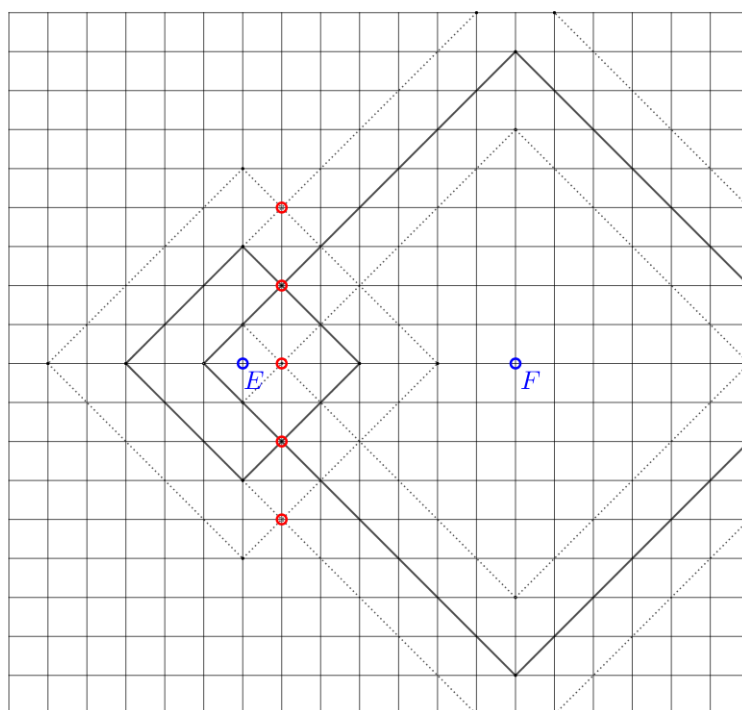
Druhou zkoumanou kuželosečkou je hyperbola. Hyperbola je křivka s podobnou definicí jako elipsa, lišící se pouze hledáním rozdílu místo součtu vzdáleností, viz kapitola 1. Používáme také podobné značení jako u elipsy. Bodům E, F říkáme ohniska hyperboly, bod S je střed hyperboly, body A, B hlavní vrcholy, body C, D vedlejší vrcholy. Hlavní poloosa hyperboly je vzdálenost $a = |AS| = |BS|$, vedlejší poloosa $b = |CS| = |DS|$. Číslo $e = |ES| = |FS|$ je excentricita hyperboly.

Obdobně jako u elipsy odvodíme podrobněji jen tvar množiny M_7^m ve speciálních polohách pomocí bodové konstrukce. Bodová konstrukce hyperboly funguje analogicky jako u elipsy. Jsou dány body E, F a číslo $2a < |EF|$. Zvolíme libovolnou vzdálenost $r_1 > 2a$, která bude poloměrem kružnice k_1 se středem v ohnisku E . Poloměr r_2 kružnice k_2 , která bude mít střed v bodě F , získáme jako rozdíl $r_2 = r_1 - 2a$. Bod hyperboly získáme jako průsečíky kružnic k_1, k_2 . Volbou jiných hodnot poloměrů r_1, r_2 , ale při zachování konstantního rozdílu $2a = |r_1 - r_2|$, získáme další body hyperboly. Hyperbola sestavená pomocí bodové konstrukce v \mathcal{P}_e je znázorněna v obr. 2.22.

Nyní podobným postupem sestojíme hyperbolu v \mathcal{P}_m . Volme úsečku EF rovnoběžnou se souřadnicovou osou x . Vzdálenost ohnisek je zvolena 7, vzdálenost $2a$ 5. V obr. 2.23 je znázorněno několik dvojic kružnic s poloměry volenými tak, že jejich rozdíl je právě $2a$. Jejich průsečíky, vyznačené červeně, tak odpovídají



Obrázek 2.22: Bodová konstrukce hyperboly v \mathcal{P}_e

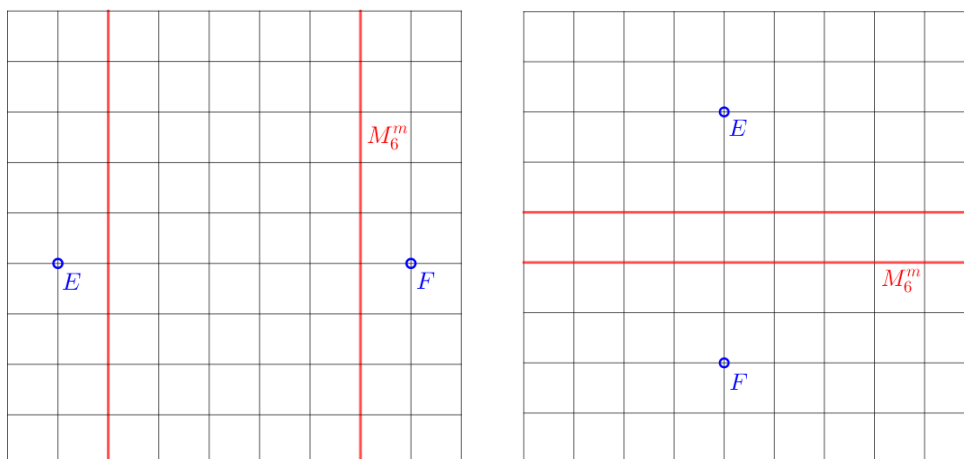


Obrázek 2.23: Bodová konstrukce hyperboly v \mathcal{P}_m

definici hyperboly. Podívejme se nyní podrobněji na jejich polohu. Obdobně jako u předchozí množiny nás budou zajímat krajní případy. Jestliže zvolíme poloměry kružnic o velikosti 6 a 1, získáme požadovaný rozdíl 5, ale zároveň součet poloměrů je roven 7, tudíž kružnice mají právě jeden průsečík, který náleží úsečce EF . Jinou dvojici poloměrů poté získáme tak, že oba poloměry (6 a 1) shodně zvětšíme, např. 7 a 2, 8 a 3 atd. Dvojice kružnic s poloměry 7 a 2 je v obrázku

zvýrazněna tučnou černou čarou. Vzhledem k tomu, že oba poloměry shodně zvětšujeme, vrcholy kružnic se posunou o stejnou vzdálenost. Stejně tak se posune i průsečík kružnic. (v kladném nebo záporném směru osy y , takže získáme průsečíky dva). Takto se budou průsečíky posouvat i pro jakékoli další dvojice kružnic, tudíž všechny body množiny (M_7^m) budou v tomto případě tvořit dvě rovnoběžné přímky, viz obr. 2.24. Naše odvození tvaru množiny se zakládá pouze na bodové konstrukci, podrobnější důkaz lze nalézt v [2].

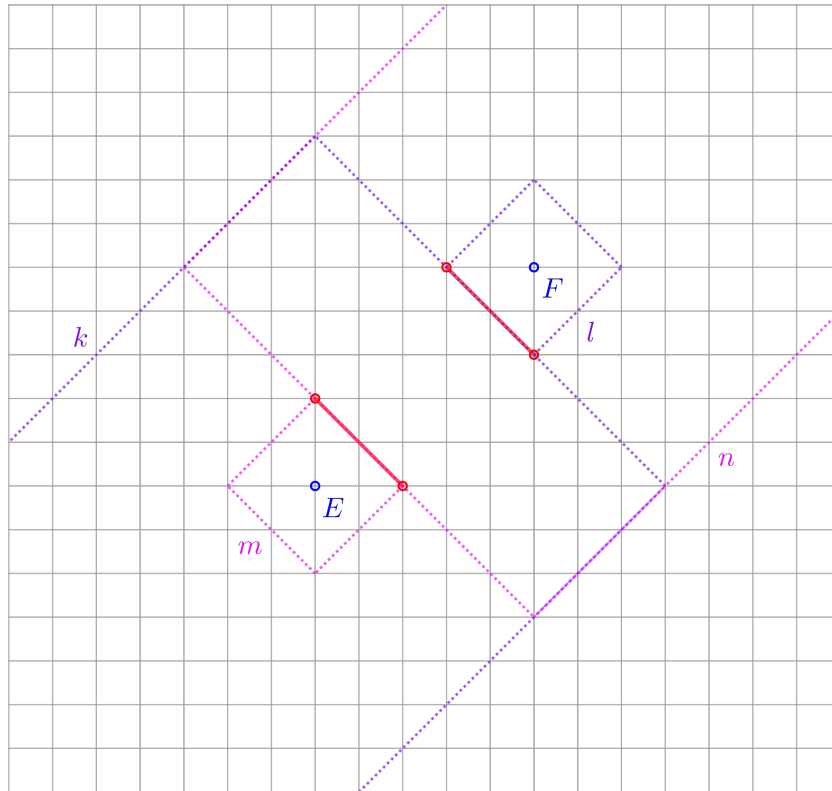
Tvar množiny bude analogický při volbě úsečky EF rovnoběžné se souřadnicovou osou y viz obr. 2.24 vpravo, vzdálenost $|EF|$ je zde volena 5 a vzdálenost $2a$ 1.



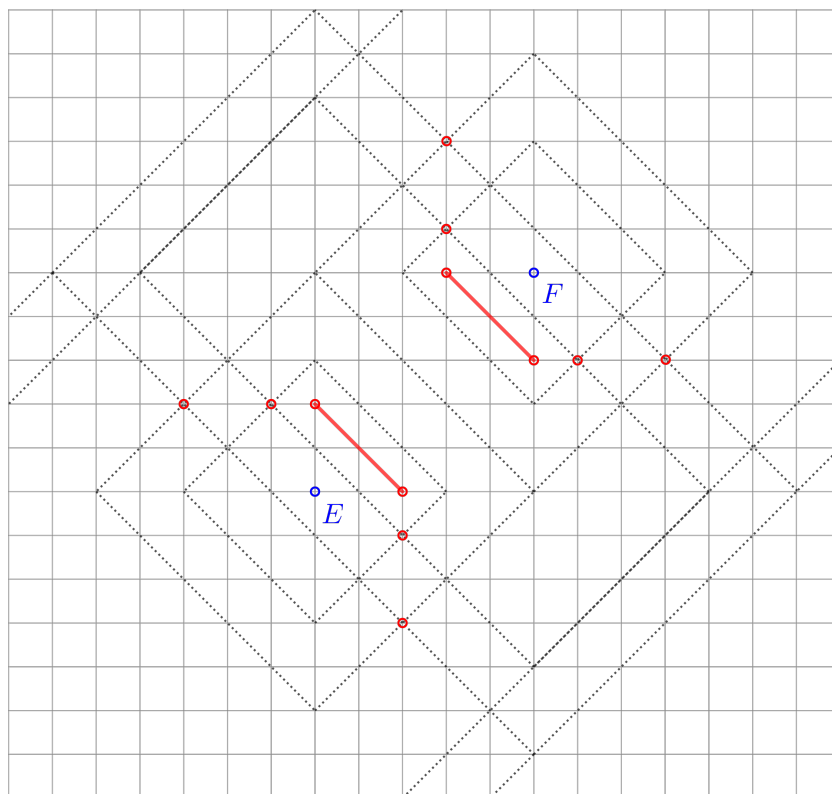
Obrázek 2.24: Hyperbola v \mathcal{P}_m I

Druhým speciálním případem, na který se podíváme podrobněji, je hyperbola s hlavní osou rovnoběžnou s jednou z os kvadrantů. Bůno zvolme opět osu 1. kvadrantu. Vzdálenost ohnisek E, F volíme 10, vzdálenost $2a = 6$. V obr. 2.25 jsou znázorněny dvě dvojice kružnic, růžové m, n a fialové k, l , o poloměrech 8 a 2. Tyto poloměry splňují požadavek na konstantní rozdíl 6 a zároveň jejich součet je roven 10. Jedná se tak o nejmenší možnou dvojici hodnot poloměrů. Obě dvojice kružnic mají nekonečně mnoho společných bodů, které tvoří dvě úsečky kolmé na úsečku EF . Několik dalších dvojic kružnic, jejichž průsečíky tvoří zbytek množiny, je znázorněno v obr. 2.26. Zbývající část množiny je tvořena čtyřmi polopřímkami kolnými k souřadnicovým osám, viz obr. 2.27 vlevo. V obr. 2.27 vpravo je zobrazena množina M_6^m při volbě úsečky EF rovnoběžné s osou 2. kvadrantu.

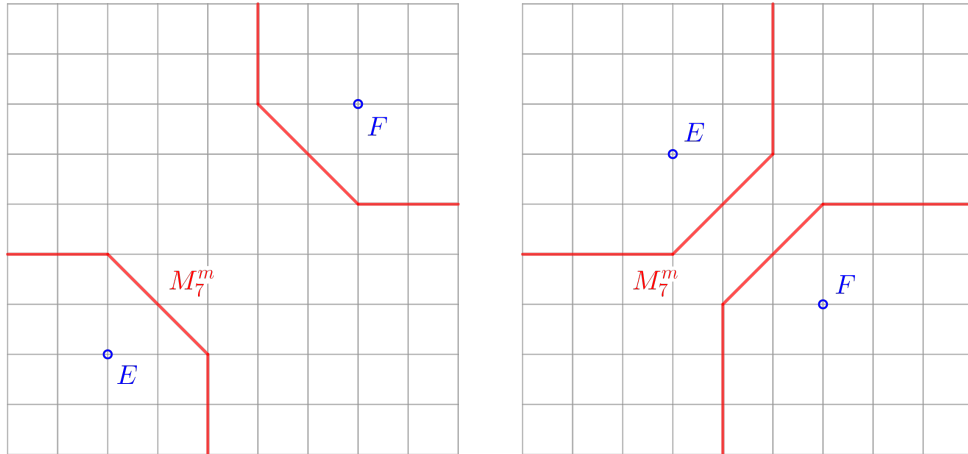
Na závěr je v obr. 2.28 znázorněn tvar množiny M_6^m při volbě ohnisek v obecné poloze, kde $|EF| = 8$ a $2a = 3$.



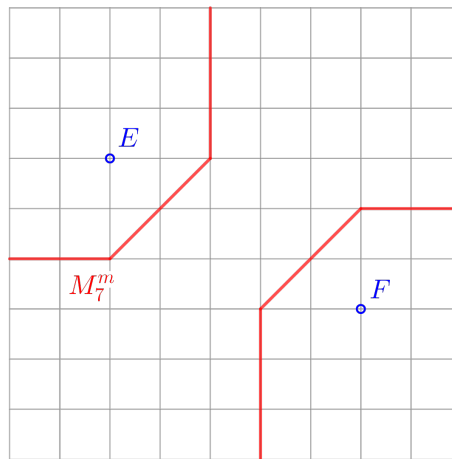
Obrázek 2.25: Konstrukce hyperboly v \mathcal{P}_m II-1



Obrázek 2.26: Konstrukce hyperboly v \mathcal{P}_m II-2



Obrázek 2.27: Hyperbola v \mathcal{P}_m II



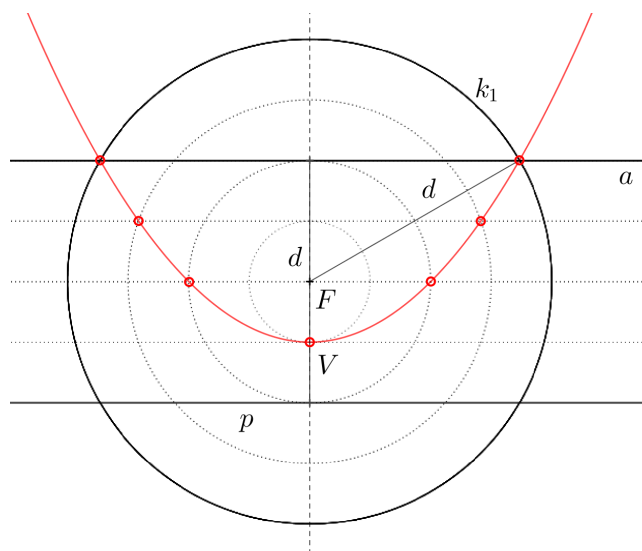
Obrázek 2.28: Hyperbola v \mathcal{P}_m III

2.9 Parabola (M_8^m)

Poslední kuželosečkou a zároveň poslední množinou zkoumanou v \mathcal{P}_m je parabola. Parabolu jsme definovali jako množinu všech bodů, které mají stejnou vzdálenost d k zadané řídicí přímce p a bodu F (ohnisku). Obdobně jako u elipsy a hyperboly nejprve popíšeme bodovou konstrukci v \mathcal{P}_e , a poté analogicky v \mathcal{P}_m .

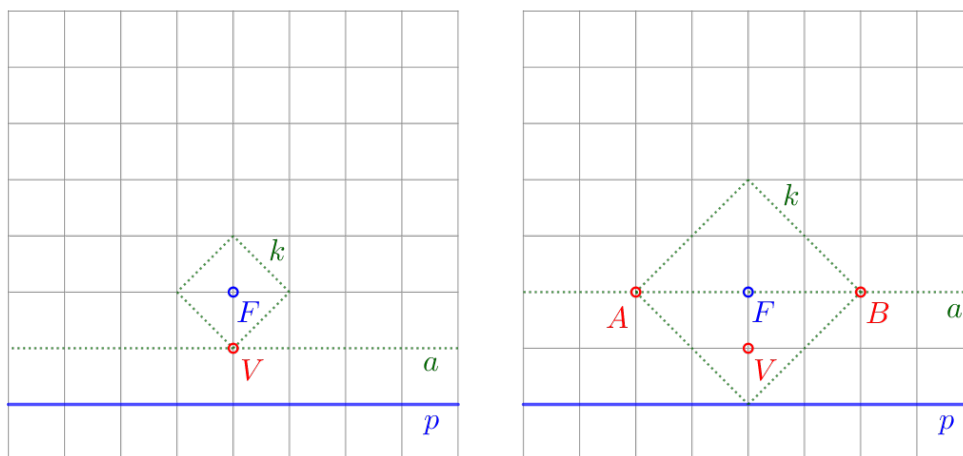
Parabola má mírně odlišnou definici než zbývající kuželosečky, lišit se tak bude i bodová konstrukce, jelikož kombinujeme dvě různé množiny bodů. Hledáme všechny body, které mají shodnou vzdálenost d od bodu F a zároveň od přímky p . Pokud zvolíme konkrétní hodnotu d , všechny body ve vzdálenosti d od bodu F leží na kružnici k se středem v F a poloměrem d . Množinou všech bodů v dané vzdálenosti d od přímky p je ekvidistanta přímky neboli množina M_4 . Body paraboly poté jsou všechny průsečíky kružnice k a množiny M_4 . Ačkoli množina M_4 měla tvar dvou rovnoběžných přímek, v bodové konstrukci paraboly nebudeme využívat rovnoběžky obě, ale pouze tu, která se nachází ve stejné polorovině s hraniční přímkou p jako ohnisko F . V následujících konstrukcích tuto přímku označíme a .

Bodová konstrukce paraboly v \mathcal{P}_e je znázorněna v obr. 2.29, vzdálenost $|Fp|$ je volena 2. Nejmenší možná hodnota d , abychom získali bod paraboly, je pro $d = \frac{|Fp|}{2}$, tj. v tomto případě 1. Kružnice k se dotýká přímky a v bodě V , který nazýváme vrcholem paraboly. Pro každou vzdálenost $d > 1$ získáme dva průsečíky kružnice k a přímky a . V obr. 2.29 je jedna dvojice kružnice k a přímky a při volbě $d = 4$ znázorněna silněji.



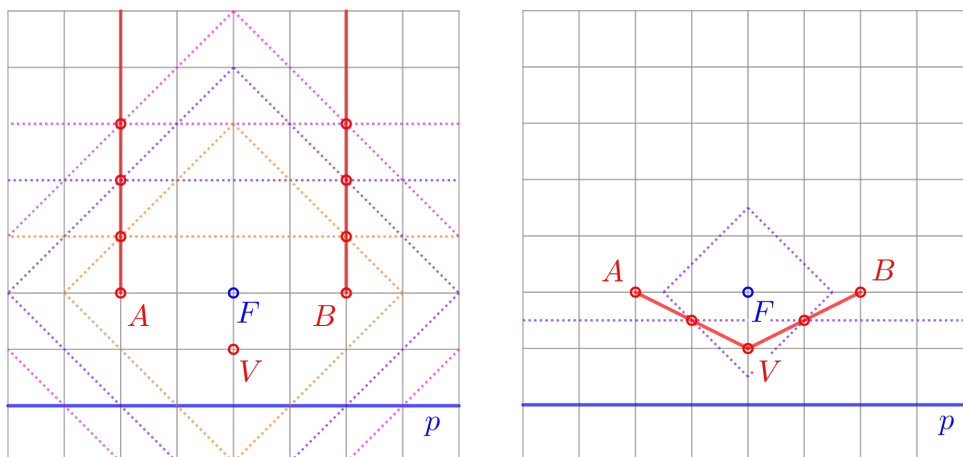
Obrázek 2.29: Bodová konstrukce paraboly v \mathcal{P}_e

Nyní se přesuneme se ke konstrukci v \mathcal{P}_m . Zvolme speciální polohu řídicí přímky p tak, že je rovnoběžná se souřadnicovou osou x , viz obr. 2.30 vlevo. Vzdálenost $|Fp| = 2$. Ekvidistantu přímky jsme v této práci popsali jako množinu M_4^m , při této volbě přímky p získala stejný tvar jako v eukleidovském metrickém prostoru. Nejmenší možná volba vzdálenosti d je tak i zde 1, příslušná kružnice k a přímka a jsou v obrázku vyznačeny zeleně. Kružnice k se dotýká přímky a v bodě V , který nazveme opět vrcholem paraboly. V obr. 2.30 vpravo je znázorněna ještě jedna zajímavá dvojice kružnice k a přímky a , a sice pro $d = |Fp| = 2$. V tomto případě protíná přímka a kružnici k v bodech A, B (jedná se o vrcholy kružnice k), které mají shodnou y -ovou souřadnici jako bod F .

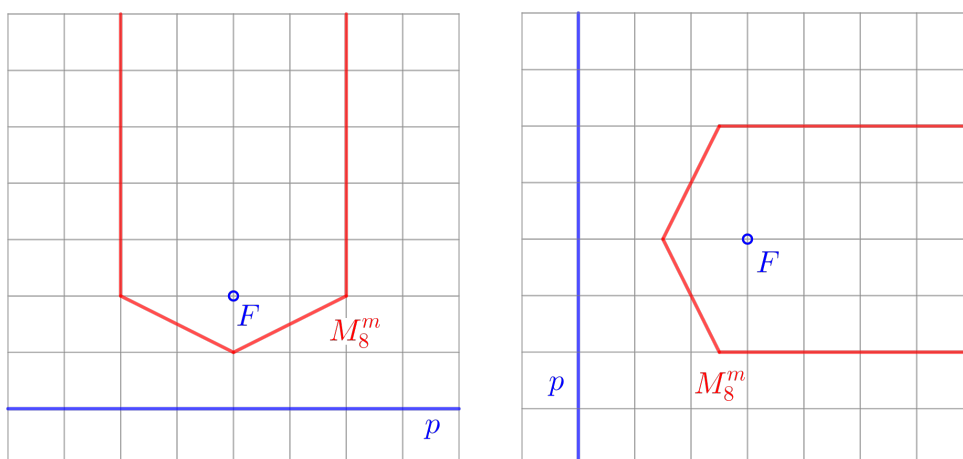


Obrázek 2.30: Konstrukce paraboly v \mathcal{P}_m I-1

V obr. 2.31 jsou znázorněny další dvojice kružnice a přímky, jejichž průsečíky tvoří zbývající části množiny, tyto pomocné objekty už nepopisujeme. Vlevo je znázorněna konstrukce několika bodů pro volbu vzdálenosti $d > 2$, vpravo pro $1 < d < 2$. Výsledná množina je znázorněna v obr. 2.32 vlevo. V obr. 2.32 je znázorněn tvar množiny M_8^m při volbě přímky p rovnoběžné s osou y .

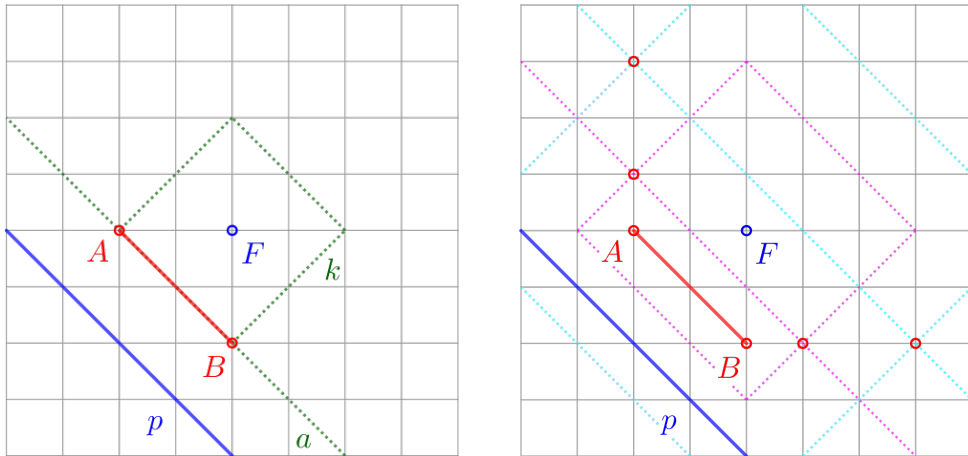


Obrázek 2.31: Konstrukce paraboly v \mathcal{P}_m I-2

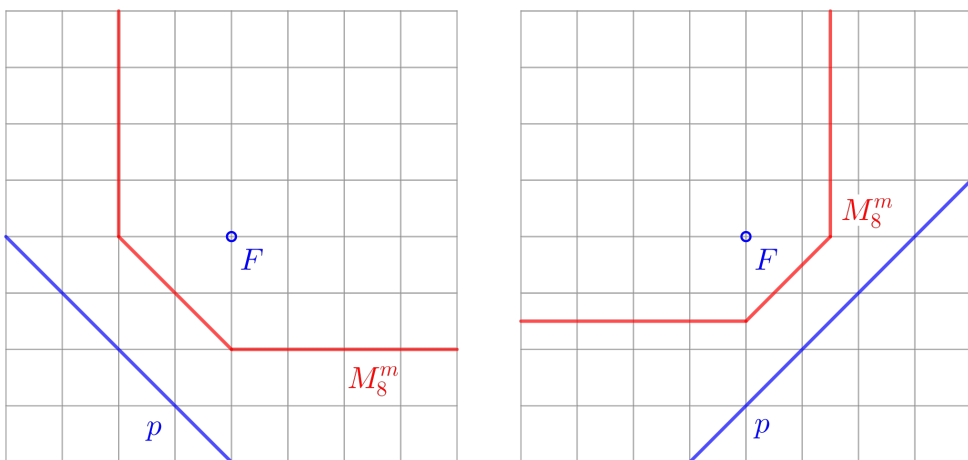


Obrázek 2.32: Parabola v \mathcal{P}_m I

Nyní zvolme řídicí přímku p rovnoběžnou s jednou z os kvadrantů, buďto osou 2. kvadrantu. Vzdálenost přímky p a bodu F je zvolena 4, viz obr. 2.33. V obrázku vlevo vidíme také konstrukci první části množiny M_8^m , pro nejmenší možnou vzdálenost d , jež je zde 2. Pomocná kružnice k a přímka a mají v této poloze nekonečně mnoho společných bodů, které tvoří úsečku AB . Pro libovolnou další volbu vzdálenosti $d > 2$ se kružnice k protne s přímkou a ve dvou bodech, které náležejí polopřímkám rovnoběžným se souřadnicovými osami s počátečními body A a B . Dva příklady konstrukce těchto bodů jsou znázorněny v obr. 2.33 vpravo. Výsledná množina složená z těchto polopřímek a úsečky AB je znázorněna v 2.34 vlevo. Vpravo je zobrazena množina M_8^m při volbě přímky p rovnoběžné s osou 1. kvadrantu.

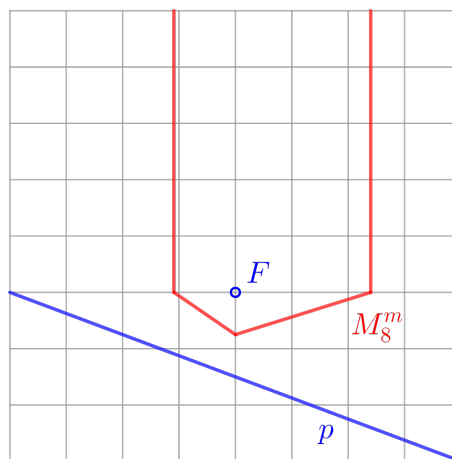


Obrázek 2.33: Konstrukce paraboly v \mathcal{P}_m II



Obrázek 2.34: Parabola v \mathcal{P}_m II

Na závěr celé kapitoly je v obr. 2.35 znázorněn tvar množiny M_8^m pro obecnou polohu přímky p . Podrobnější popis množiny lze opět nalézt v [2].



Obrázek 2.35: Parabola v \mathcal{P}_m III

3. Maximová metrika

V této kapitole budeme zkoumat, jak budou vypadat jednotlivé množiny bodů představené v 1. kapitole s využitím maximové metriky ϱ_∞ . Jednotlivé množiny budeme pojmenovávat stejně jako v běžné školské geometrii, k jejich názvům budeme přepisovat index ∞ . Pro připomenutí zde znovu uvádíme výpočet vzdálenosti ϱ_∞ dvou bodů v rovině:

$$\varrho_\infty(x, y) = \max_{i=1,2} |x_i - y_i| \text{ na } \mathbb{R}^2; x, y \in \mathbb{R}$$

Mimo již zmíněný článek zabývající se kuželosečkami v různých metrických prostorech ([10]) se alespoň k vědomí autorky práce množiny bodů v maximovém metrickém prostoru v české literatuře nevyskytují. V různých internetových zdrojích v českém ([11]) i anglickém ([12]) jazyce je možné dohledat srovnání tvaru kružnice v eukleidovském, manhattanském a právě maximovém metrickém prostoru, ale nad rámec této zmínky se literatura těmito množinami nezabývá.

3.1 Kružnice (M_1^∞)

První množinou bodů, kterou budeme zkoumat v \mathcal{P}_∞ , je ekvivalent eukleidovské kružnice. Hledáme tedy všechny body, které mají od daného středu danou vzdálenost r . Získáváme rovnici:

$$|SX| = r$$

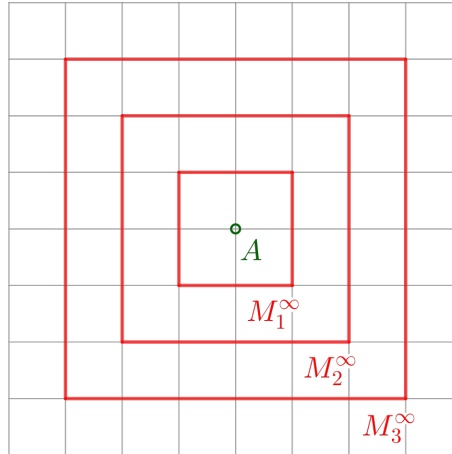
Vyjádříme-li vzdálenost bodu $S[s_1, s_2]$ od bodu $X[x, y]$ pomocí maximové metriky, získáváme:

$$\max\{|x - s_1|; |y - s_2|\} = r$$

Búno uvažujeme střed S kružnice v počátku KSS . Můžeme tak za s_1, s_2 dosadit nulu a získáváme vyjádření množiny bodů X kružnice:

$$M_1^\infty = \{X = [x, y]; \max\{|x|; |y|\} = r\}$$

Pro zvolenou hodnotu poloměru r musí všechny body X , které budou ležet v hledané množině, mít alespoň jednu ze souřadnic rovnou $|r|$ a zároveň druhou menší nebo rovnou $|r|$. Situace, kdy obě souřadnice jsou rovny $|r|$, může nastat celkem ve čtyřech různých variantách: $[r; r]$, $[-r; -r]$, $[r; -r]$, $[-r; r]$. Tyto body budeme nazývat *vrcholy kružnice*. Všechny ostatní body mají pouze jednu souřadnici rovnou $|r|$ a druhou libovolné reálné číslo a takové, že $|a| < r$. Výsledná množina proto bude mít tvar hranice eukleidovského čtverce. O spojnicích vrcholů můžeme hovořit jako o *stranách kružnice*. V obrázku 3.1 jsou znázorněny tři příklady kružnic ${}^1M_1^\infty$, ${}^2M_1^\infty$, ${}^3M_1^\infty$ v \mathcal{P}_∞ se středem A o poloměrech 1, 2 a 3.

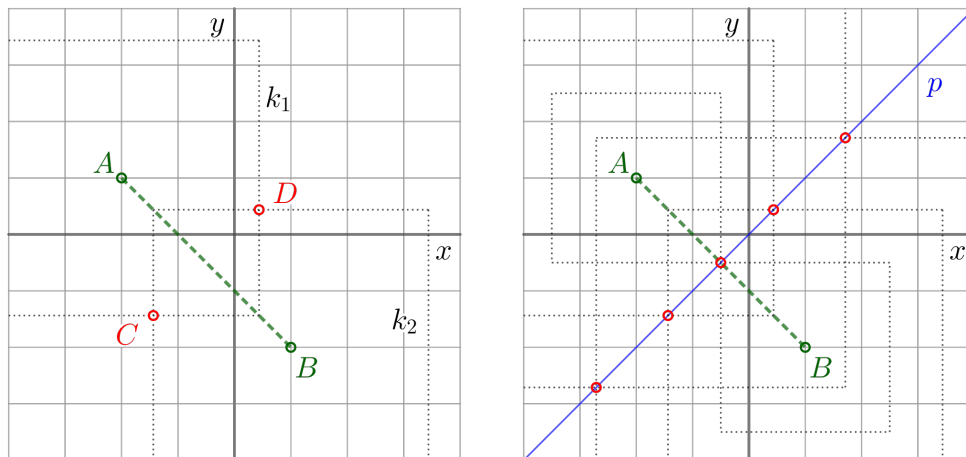


Obrázek 3.1: Kružnice v \mathcal{P}_∞

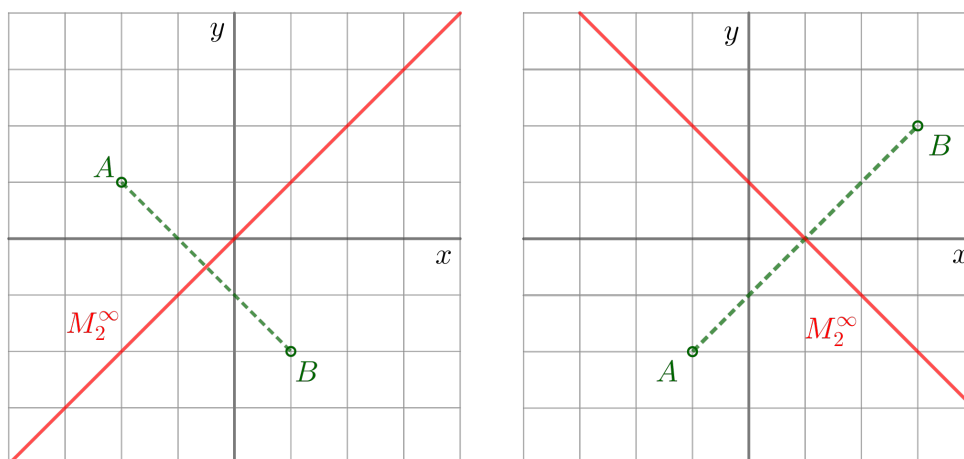
3.2 Osa úsečky (M_2^∞)

Nyní se budeme zabývat osou úsečky. Jsou dány body $A[a_1, a_2]$ a $B[b_1, b_2]$, hledáme všechny body $X[x, y]$, které jsou od obou bodů stejně vzdáleny. Při hledání množiny budeme postupovat obdobně jako v \mathcal{P}_m od jednodušších příkladů ke složitějším, přičemž budeme využívat průsečíků kružnic.

Nejprve zvolme úsečku AB v poloze rovnoběžné s osou 2. kvadrantu KSS. Jak již bylo zmíněno u množiny M_2^m , osu úsečky můžeme také hledat pomocí průsečíků kružnic, které mají středy v bodech A a B a zároveň shodné poloměry. Zvolíme dvojici kružnic $k_1(A, 2,5)$, $k_2(B, 2,5)$. V obr. 3.2 vlevo vidíme, že kružnice mají dva průsečíky C, D , jejichž spojnice p by v eukleidovském metrickém prostoru byla osou úsečky. Pokud ale budeme poloměr kružnic libovolně zvětšovat, získáme vždy další průsečíky náležící přímce p , viz obr. 3.2 vpravo. Stejně tomu tak bude i pro menší hodnoty poloměru, přičemž nejmenší možná hodnota je taková, kdy mají kružnice pouze jeden společný bod. Toho docílíme volbou poloměru $\frac{|a_1-b_1|}{2}$. Výsledná množina M_1^∞ , která je tudíž shodná s osou úsečky AB v \mathcal{P}_e , je znázorněna v obr. 3.3 vlevo. Vpravo je poté analogický tvar množiny pro úsečku AB rovnoběžnou s osou 1. kvadrantu.

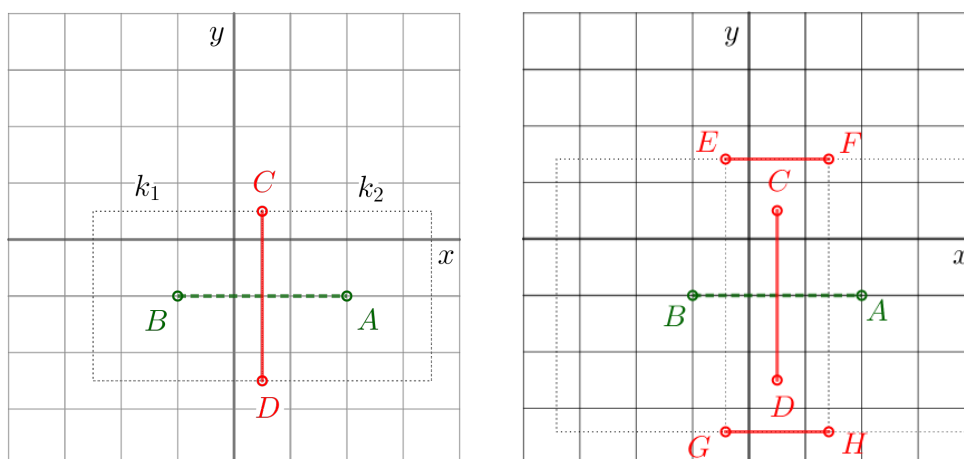


Obrázek 3.2: Konstrukce osy úsečky v \mathcal{P}_∞ I

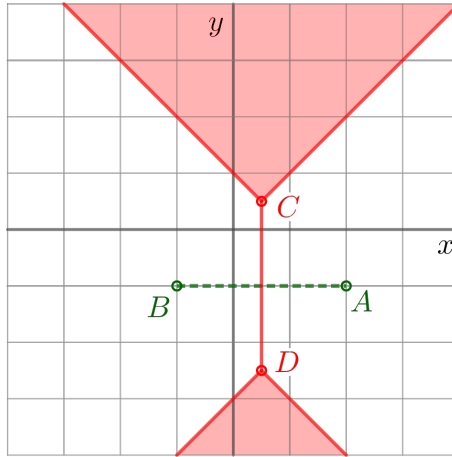


Obrázek 3.3: Osa úsečky v \mathcal{P}_∞ I

Nyní se zaměříme na úsečku AB rovnoběžnou s jednou ze souřadnicových os, podrobněji rozebereme buďto případ pro $AB \parallel x$. Pro hledání jednotlivých bodů množiny opět využijeme kružnice. V obr. 3.4 vlevo vidíme dvojici kružnic $k_1(A, r_1)$, $k_2(B, r_1)$ s nejmenším možným poloměrem r_1 takovým, aby se kružnice dotýkaly. Jedná se o $r_1 = \frac{|AB|}{2}$, průnikem je v tomto případě celá společná strana CD kružnic. Vpravo poté vidíme další zvolenou dvojici kružnic $k_3(A; 2,5)$, $k_4(B; 2,5)$. Průnikem těchto kružnic je dvojice úseček EF a GH . Jelikož by tento případ nastal pro všechny analogické dvojice kružnic s poloměry r většími než r_1 , výsledný tvar množiny se bude podobat variantě II osy úsečky v \mathcal{P}_m , a sice sestává z úsečky CD a všech bodů eukleidovských konvexních úhlů ECF , GDH , viz obr. 3.5.

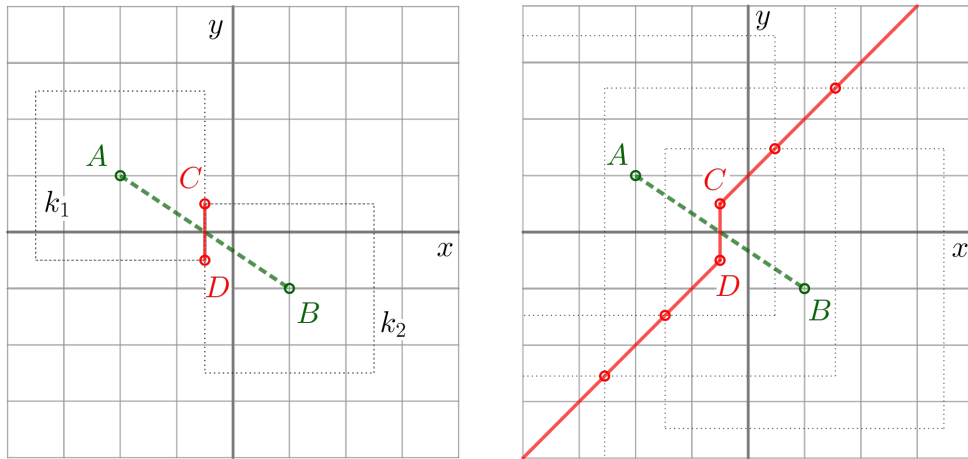


Obrázek 3.4: Konstrukce osy úsečky v \mathcal{P}_∞ II



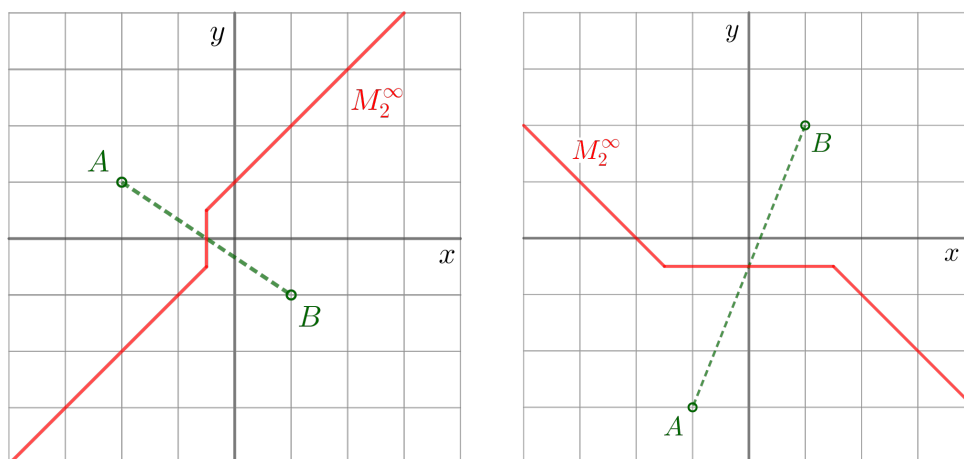
Obrázek 3.5: Osa úsečky v \mathcal{P}_∞ II

Zbývá probrat obecnou polohu úsečky AB . Konstrukci množiny ukážeme na konkrétní zvolené úsečce s krajními body $A[-2; 1]$, $B[1; -1]$, viz obr. 3.6 vlevo. Body množiny hledáme opět jako průsečíky kružnic se středy v bodech A, B . Nejmenší možný poloměr, kdy mají kružnice společný bod, je roven polovině vzdálenosti bodů A, B , tj. v našem případě 1,5. Kružnice $k_1(A, 1,5)$, $k_2(B, 1,5)$ mají společnou úsečku CD . Všechny další dvojice kružnic se protnou ve dvou bodech, které společně tvoří polopřímky rovnoběžné s osou 1. kvadrantu s počátečními body C, D , viz obr. 3.6 vpravo. Výsledná množina je znázorněna v obr. 3.7 vlevo.



Obrázek 3.6: Konstrukce osy úsečky v \mathcal{P}_∞ III

Množina M_2^∞ pro obecnou polohu úsečky AB bude mít vždy analogický tvar jako v tomto konkrétním případě, obecně lze ale situaci ještě rozdělit do dvou skupin podle hodnoty směrnice k přímky AB , obdobně jako u množiny M_2^m . Pokud $0 < |k| < 1$, množina M_2^∞ sestává z úsečky rovnoběžné s osou y a dvou polopřímek rovnoběžných s osou 1. kvadrantu. Pro $|k| > 1$ bude částí množiny M_2^∞ úsečka rovnoběžná s osou x a dále polopřímky rovnoběžné s osou 2. kvadrantu, příklad takové situace je znázorněn v obr. 3.7 vpravo.



Obrázek 3.7: Osa úsečky v \mathcal{P}_∞ III

3.3 Vzdálenost bodu od přímky

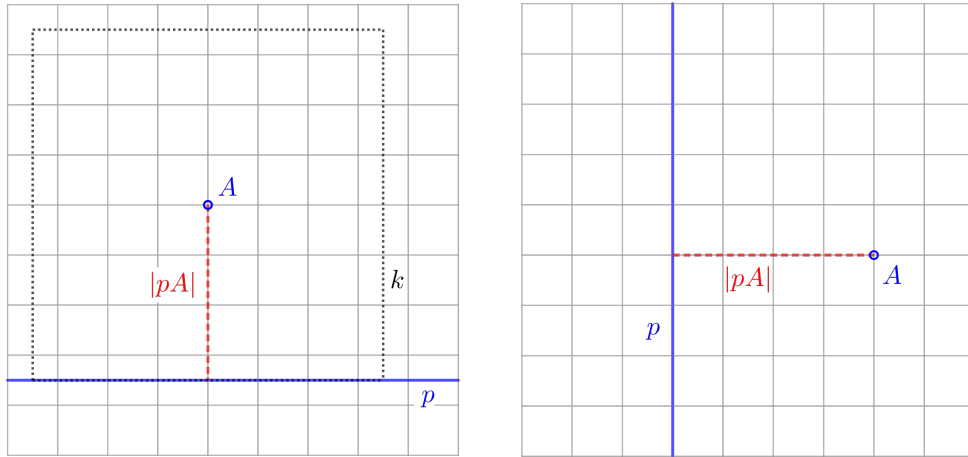
Než budeme zkoumat další množiny v maximovém metrickém prostoru, ukážeme, jakým způsobem měříme vzdálenost bodu a přímky. Viz Definice 3 v kapitole 2.3, je-li dána přímka p a bod A v rovině, poté vzdálenost bodu A od přímky p je minimum ze vzdáleností $|AX|$, kde $X \in p$. Tuto definici budeme používat i v maximovém metrickém prostoru, vzdálenost bodu A a přímky p zde značíme $\varrho_\infty(A, p)$.

Nejprve se zaměříme na některé speciální polohy přímek v rovině. Nejjednodušší situace nastane, je-li přímka p rovnoběžná s jednou ze souřadnicových os. Podrobněji se podíváme na přímku p rovnoběžnou s osou x , viz obr. 3.8 vlevo. Budeme-li hledat vzdálenost bodů X přímky p a bodu A , můžeme pro názornost využít pomocné kružnice k se středem v A . Nejmenší poloměr r kružnice k bude takový, kdy se kružnice k přímky p dotkne. V tomto konkrétním případě to znamená, že má kružnice k s přímkou p nekonečně mnoho společných bodů, které tvoří úsečku. Neboli na přímce p existuje více bodů, které mají shodnou vzdálenost r od bodu A . Zvolíme-li však na přímce p bod Y mimo kružnici k , znamená to, že jeho vzdálenost od bodu A je větší než r . Vzdálenost bodu A a přímky p tak musí být rovna r . Pro lepší představu lze také říct, že se v tomto případě vzdálenost maximová rovná vzdálenosti eukleidovské. V obr. 3.8 vpravo je znázorněna analogická situace pro přímku p rovnoběžnou s osou y .

Obecně lze vzdálenost bodu $A[a_1, a_2]$ od přímky p v těchto situacích spočítat jako:

- $|Ap| = |a_2 - k|$, pro $p: y = k$;
- $|Ap| = |a_1 - k|$, pro $p: x = k$.

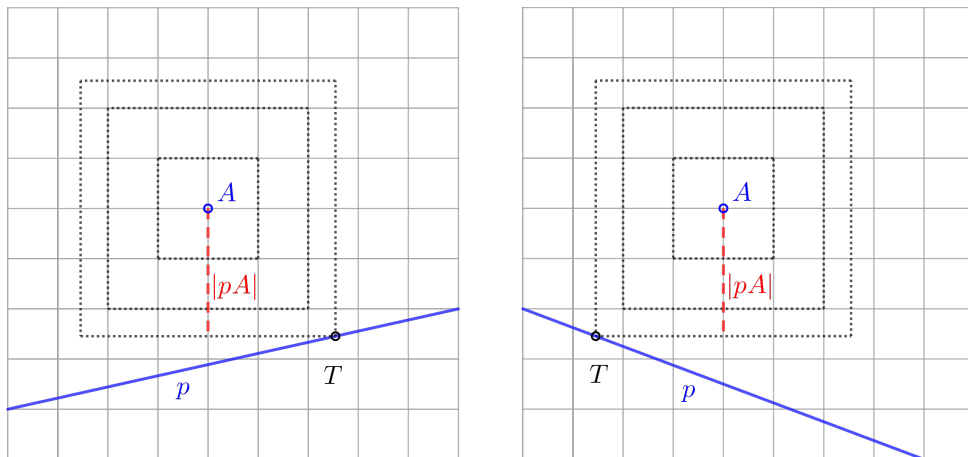
Obecné polohy přímky rozdělíme na dva případy podle hodnoty směrnice. Na rozdíl od situace u manhattanské metriky, kde kružnice nabývá podoby hranice eukleidovského čtverce se stranami rovnoběžnými s osami 1. a 2. kvadrantu, u maximové metriky jde o hranici čtverce se stranami rovnoběžnými s osami x a y . Z toho důvodu zde rozlišíme hodnoty směrnic přímky p následovně:



Obrázek 3.8: Vzdálenost bodu od přímky v $\mathcal{P}_\infty \text{ I}$

- $k > 0$
- $k < 0$

Hledání vzdálenosti bodu A od přímky p si představíme tak, že sestrojíme kružnice se středem v bodě A o rostoucím poloměru až do momentu, než se kružnice dotýká přímky p . Případ pro $k > 0$ je znázorněn v obr. 3.9 vlevo. Bodem dotyku T je v tomto případě vrchol kružnice, který náleží úhlopříčce (v eukleidovském smyslu) rovnoběžné s osou 2. kvadrantu. Vzdálenost bodu A a přímky p je rovna poloměru r pomocné kružnice. Druhá varianta, pro $k < 0$, je znázorněna v obr. 3.9 vpravo. Způsob hledání vzdálenosti je totožný jako v předchozím případě, výsledek je odlišný pouze tím, že bodem dotyku kružnice a přímky je vrchol, který náleží úhlopříčce rovnoběžné s osou 1. kvadrantu.



Obrázek 3.9: Vzdálenost bodu od přímky v $\mathcal{P}_\infty \text{ II}$

Popíšeme podrobněji výpočet vzdálenosti $|Ap|$ pro druhý případ, tj. dána přímka $p: y = kx + q$, kde $k < 0$, a bod $A[a_1, a_2]$. Výše jsme popsali, že vzdálenost můžeme získat experimentálně s využitím kružnice, bude se jednat o její poloměr. Abychom získali souřadnice bodu T a mohli spočítat jeho vzdálenost od bodu A , využijeme zmíněnou úhlopříčku (v eukleidovském smyslu) rovnoběžnou s osou

1. kvadrantu. Tuto úhlopříčku (přesněji přímkou AT) označme u . Díky tomu, že známe její směrnici a víme, že prochází bodem A , můžeme přímkou u vyjádřit jako $u: y = x + a_2 - a_1$. Z rovnic obou přímek vypočteme souřadnice průsečíku $T[x_T, y_T]$:

$$\begin{aligned} kx + q &= x + a_2 - a_1 \\ x_T &= \frac{a_2 - a_1 - q}{k - 1} \\ y_T &= \frac{a_2 - a_1 - q}{k - 1} + a_2 - a_1 \end{aligned}$$

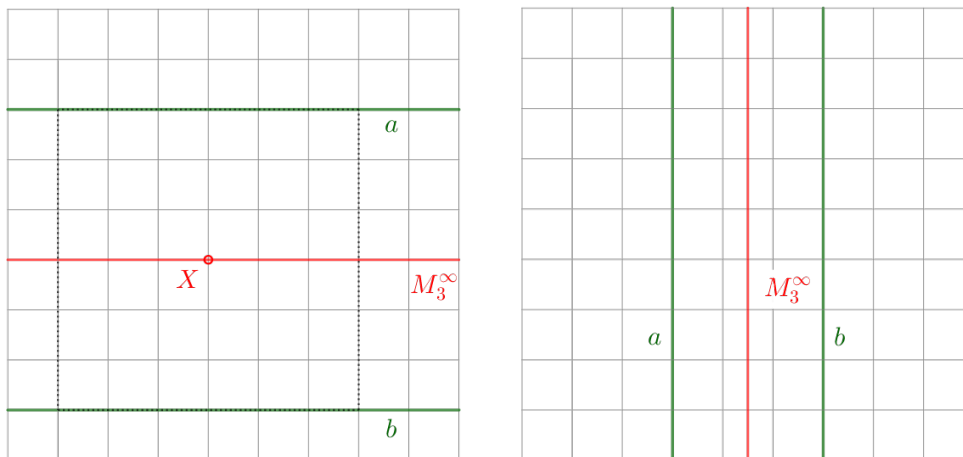
Vzdálenost $|Ap|$ je potom rovna $|AT| = \left| \left(\frac{a_2 - a_1 - q}{k - 1} + a_2 - a_1 \right) - a_2 \right|$. Pro případ, kdy směrnice k přímky p je kladná, by odvození probíhalo analogicky. Výsledné vzdálenosti jsou:

- $|Ap| = \left| \frac{a_2 - a_1 - q}{k - 1} - a_1 \right|$ pro $k < 0$;
- $|Ap| = \left| -\frac{a_2 + a_1 - q}{k + 1} + a_1 \right|$ pro $k > 0$.

3.4 Osa rovnoběžek (M_3^∞)

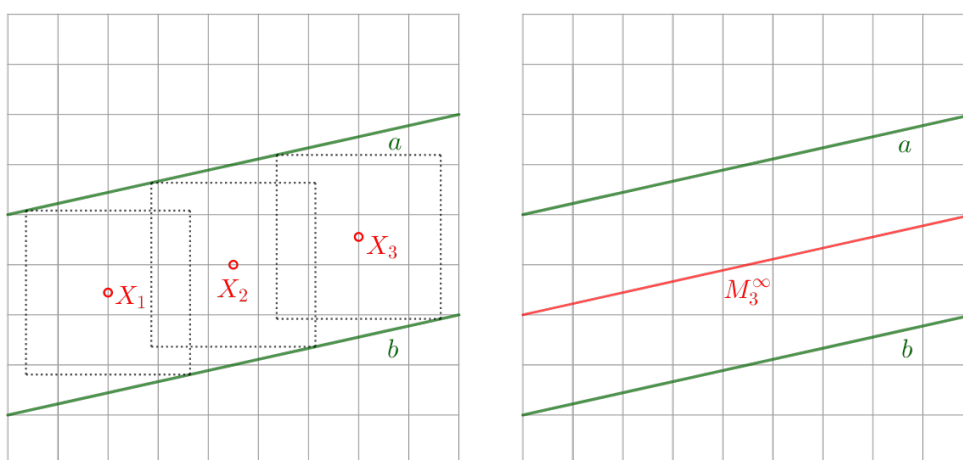
Nyní se budeme zabývat osou rovnoběžek v \mathcal{P}_∞ , přičemž budeme vycházet z poznatků o vzdálenosti bodu a přímky v \mathcal{P}_∞ z podkapitoly 3.3. Osa rovnoběžek a, b je množina všech bodů v rovině, které jsou shodně vzdáleny od a a b .

Nejprve vyšetříme tvar množiny za předpokladu, že jsou přímky a, b rovnoběžné s jednou ze souřadnicových os, viz obr. 3.10. Jelikož pro tyto přímky měříme vzdálenost k bodu stejně jako v \mathcal{P}_e , bude i osa rovnoběžek v těchto případech shodná s osou rovnoběžek definovanou pomocí ϱ_e . Můžeme si zde představit i pomocnou kružnici využitou v předchozí podkapitole, která by se dotýkala obou přímek ve shodných úsečkách.



Obrázek 3.10: Osa rovnoběžek v \mathcal{P}_∞ I

Při zkoumání vzdálenosti bodu od přímky v předchozí podkapitole jsme rozdělili situace do dvou skupin podle hodnot směrnic přímk a , b . Pokud se ale podíváme na příslušné obrázky, vidíme, že způsob měření je totožný, situace se liší pouze tím, který vrchol kružnice je bodem dotyku s přímkou. Na konstrukci zde to nicméně nemá vliv. Búno tak zvolme přímky a , b s kladnou směrnicí viz obr. 3.11 vlevo. Každý bod X , který bude náležet množině M_3^∞ , musí být shodně vzdálen od obou přímk a , b . To zároveň znamená, že na přímkách a , b musí ležet body shodně vzdáleny od bodu X , a to v nejmenší možné vzdálenosti. Takové body budou ležet na kružnici se středem v X . Přestože v maximovém metrickém prostoru vypadá kružnice jinak než v eukleidovském či manhattanském, osa rovnoběžek i zde bude vypadat stejně. V obr. 3.11 vlevo je znázorněno několik bodů X i s kružnicí, která znázorňuje jejich stejnou vzdálenost od obou přímk. Výsledná množina je znázorněna v obr. 3.11 vpravo.

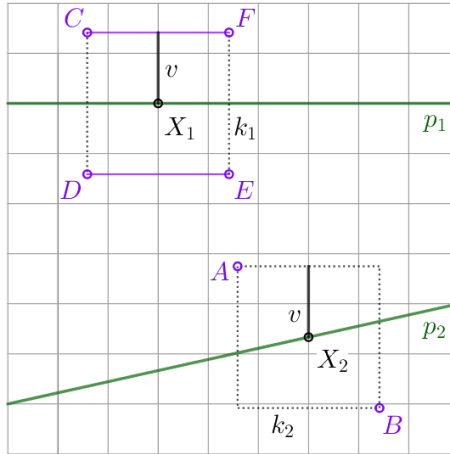


Obrázek 3.11: Osa rovnoběžek v \mathcal{P}_∞ II

3.5 Ekvidistanta přímky (M_4^∞)

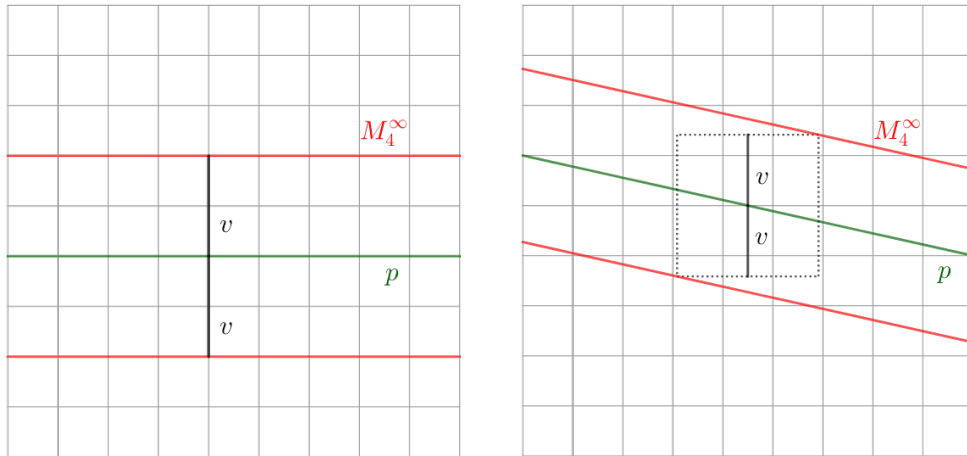
Ekvidistantu přímky p jsme v kapitole 1 definovali jako množinu všech bodů, které mají danou vzdálenost v od přímky p . V \mathcal{P}_∞ odvodíme i tvar této množiny s využitím kružnice. Zvolíme-li libovolný bod X přímky p , pak všechny body ve vzdálenosti v od bodu X leží na kružnici k s poloměrem v a středem v X . Zároveň ale pouze některé body kružnice k leží ve vzdálenosti v od celé přímky p , některé leží blíže. V obr. 3.12 jsou dvě takové situace znázorněny. Na přímce p_1 rovnoběžné s osou x je zvolen bod X_1 a sestrojena kružnice k_1 o poloměru v se středem v X_1 . Všechny body kružnice k_1 , které zároveň leží ve vzdálenosti v od přímky p_1 , jsou body úseček CF a DE . Pro přímku p_2 v obecné poloze s bodem X_2 , a kružnici k_2 o poloměru v se středem v X_2 , jsou jediné body kružnice k_2 vzdáleny o v vrcholy A , B .

Vzhledem k tomu, že body X_1 , X_2 jsme volili na přímkách p_1 , p_2 libovolně, mohli bychom je nyní po přímce „posouvat“ a dostaneme tak další body množiny M_4^∞ . Jako ekvidistantu přímky p tak obecně získáme opět dvě rovnoběžné přímky. Pokud je přímka p rovnoběžná se souřadnicovou osou (pro osu y by byla situace analogická jako pro x), množina M_4^∞ je shodná s ekvidistantou v \mathcal{P}_e , pro



Obrázek 3.12: Konstrukce ekvidistanty v \mathcal{P}_∞

obecnou přímku p se jedná o dvě rovnoběžky přímku p ve vzdálenosti d (měřené maximovou metrikou). Obě možnosti jsou zobrazeny v obr. 3.13.

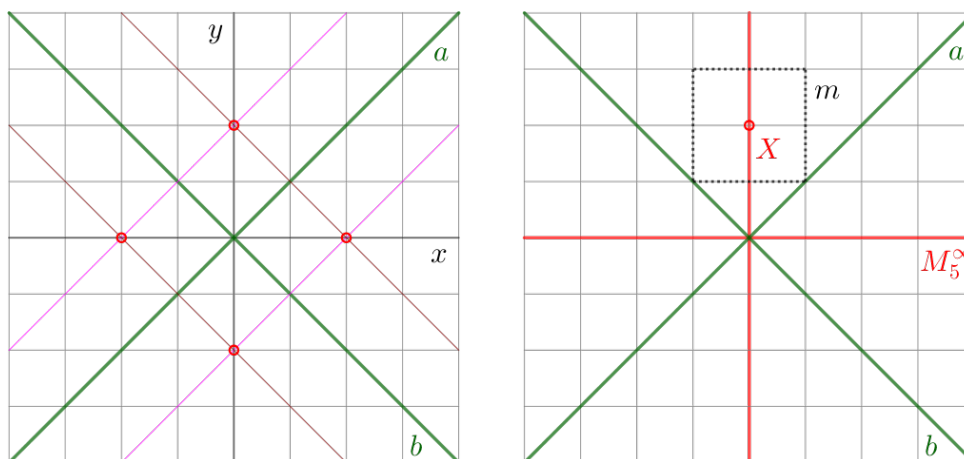


Obrázek 3.13: Ekvidistanta v \mathcal{P}_∞

3.6 Osy různoběžek (M_5^∞)

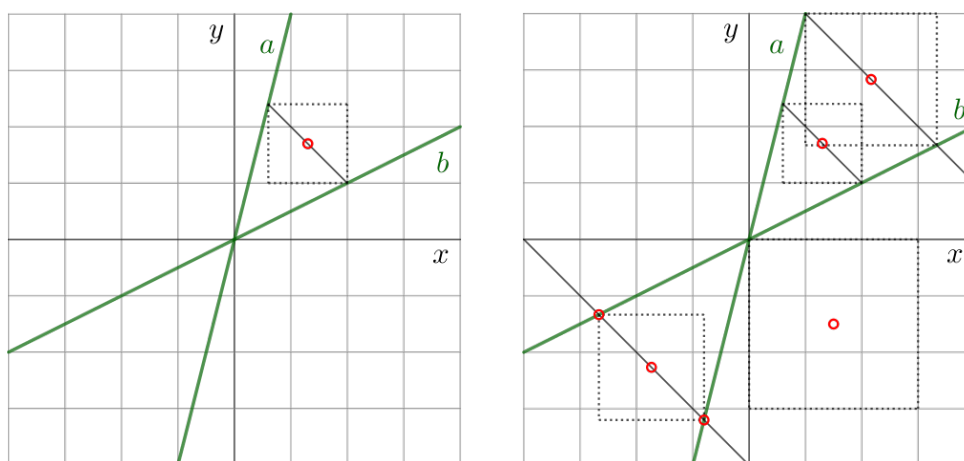
Pátou zkoumanou množinou v maximovém metrickém prostoru jsou osy různoběžek, které jsme definovali jako množinu všech bodů v rovině shodně vzdálených od dvou různoběžek a , b .

Při zkoumání této množiny budeme využívat směrnicový tvar přímek, díky němuž lze způsob konstrukce množiny rozdělit na několik případů. Přímkou a , b bůno umístíme do soustavy souřadnic tak, aby procházely počátkem, jejich rovnice tak budou $a: y = kx$ a $b: y = lx$; $k, l \in \mathbb{R}$. Dále budeme využívat kružnic, jejichž tvar jsme v \mathcal{P}_∞ odvodili jako hranici eukleidovského čtverce. Zavedli jsme pojem *vrchol kružnice*, který je shodný s příslušným vrcholem čtverce, a také *strana kružnice*, opět shodná se stranou čtverce.



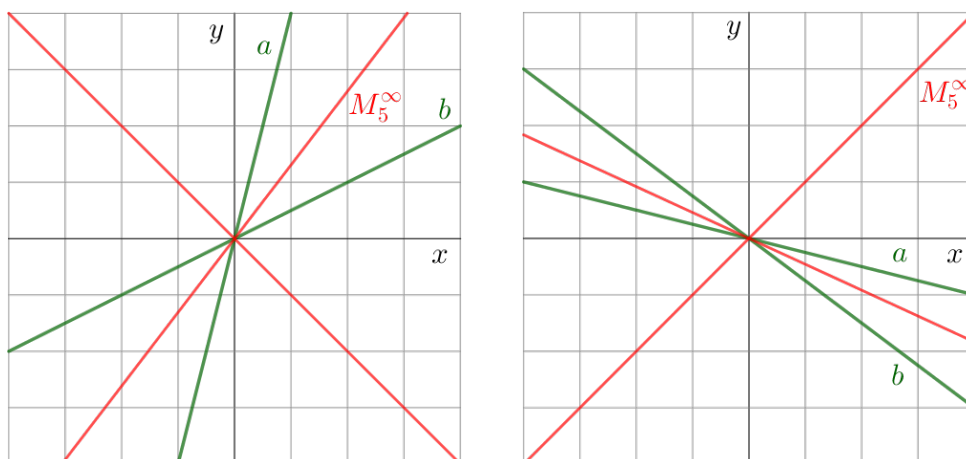
Obrázek 3.14: Osy různoběžek v \mathcal{P}_∞ I

Nejprve ukážeme možnou konstrukci množiny na konkrétním příkladu množiny, který získáme volbou přímek a, b se směrnici $k = 1$ a $l = -1$ (obr. 3.14 vlevo). Budeme-li hledat jeden konkrétní bod množiny M_5^∞ , mohli bychom využít ekvidistant obou přímek pro libovolnou vzdálenost v . Ekvidistanta přímky a je v obrázku zobrazena růžově, ekvidistanta přímky b hnědě. Tyto množiny se skládají vždy z dvou rovnoběžek příslušných přímek. Průnikem obou ekvidistant jsou 4 body, které leží na osách x a y . Stejný případ by nastal pro libovolnou volbu vzdálenosti v , množina M_5^∞ tak bude v tomto případě složena z os x, y . Do množiny patří i přímo počátek soustavy souřadnic, který tím, že náleží přímek a, b , automaticky splňuje podmínku z definice. Kromě využití ekvidistanty také můžeme vlastnost bodu X množiny ukázat pomocí kružnice m se středem v bodě X , která se obou přímek dotýká, kružnice je znázorněna spolu s výslednou množinou v obr. 3.14 vpravo. Tyto kružnice budeme využívat pro znázornění i u dalších případů množiny.



Obrázek 3.15: Osy různoběžek v \mathcal{P}_∞ II

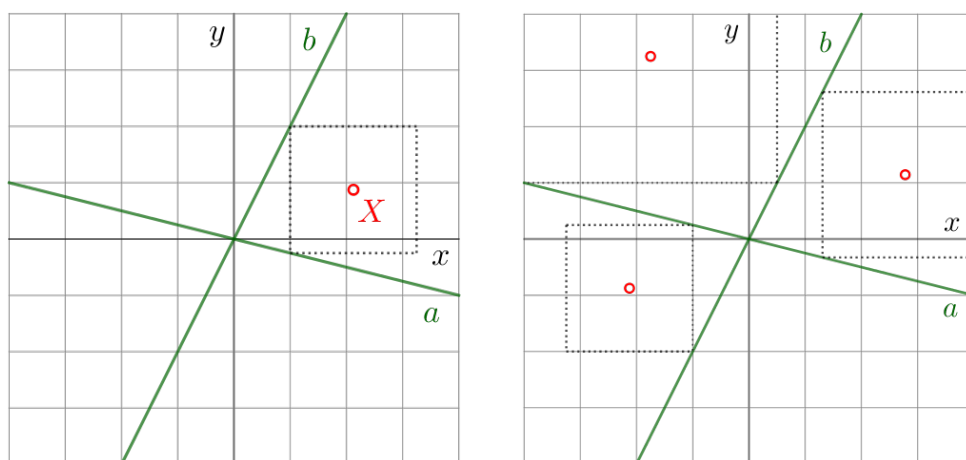
Další varianty množiny M_5^∞ rozebereme pro různé hodnoty směrnice přímek a, b . Nyní zvolme dvě přímky a, b tak, že buno prochází počátkem a jejich směrnice k, l jsou kladné, viz obr. 3.15 vlevo. V obrázku je již sestrojena jedna kružnice, která se obou přímek dotýká, a její střed tak bude patřit do množiny M_5^∞ . Vidíme, že



Obrázek 3.16: Osy různoběžek v \mathcal{P}_∞ III

kružnice se přímek dotýká ve dvou protějšších vrcholech, které jsou spojeny jednou „úhlopříčkou“ kružnice. Další podobné kružnice bychom mohli sestavit tak, že protneme přímky a, b přímkou rovnoběžnou s osou 2. kvadrantu. Úsečky, které vzniknou jako spojnice vzniklých průsečíků, jsou jejich úhlopříčky a do množiny M_5^∞ tak vždy patří jejich střed. Všechny tyto středy náležejí jedné přímce, která bude částí výsledné množiny M_5^∞ . Protože očekáváme ze zkušeností s předchozími metrikami jako množinu os rovnoběžek dvě přímky, podíváme se ještě do v podstatě nevyužitého 2. a 4. kvadrantu. Pokud budeme zde hledat kružnice, které se dotýkají obou přímek, jediné, které nalezneme, jsou kružnice dotýkající se přímek a, b přímo v počátku. Jejich středy leží na osách 2. a 4. kvadrantu. Několik zmíněných přímek a kružnic je znázorněno v obr. 3.15 vpravo. Výsledná množina se tak skládá ze dvou přímek, vidíme ji v obr. 3.16 vlevo.

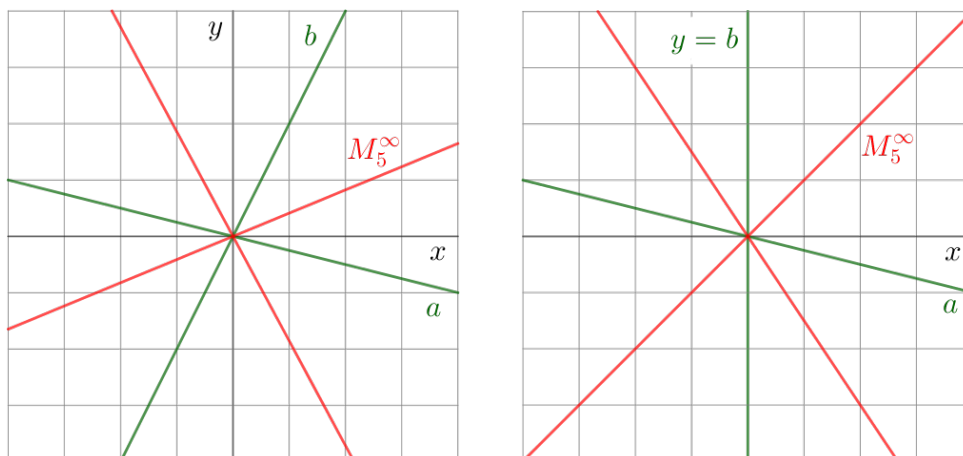
Pokud zvolíme obě přímky a, b tak, aby jejich směrnice k a l byly záporné, získáme téměř totožnou situaci, kterou tak nebudeme podrobně popisovat, je znázorněna v obr. 3.16 vpravo. Rozdílem je, že do množiny nyní patří osy 1. a 3. kvadrantu.



Obrázek 3.17: Osy různoběžek v \mathcal{P}_∞ IV

Zbývá rozebrat situaci takovou, že jedna přímka má směrnici kladnou a druhá zápornou. Bůno zvolme přímky a, b tak, že $k > 0$ a $l < 0$, viz obr. 3.17 vlevo. Je-

den konkrétní bod X množiny M_5^∞ bychom mohli opět získat pomocí ekvidistant přímk a, b . Bod X je znázorněn v obrázku vlevo spolu s kružnicí se středem v bodě X tak, aby se přímk a, b dotýkala. Vidíme, že nyní jsou body dotyku sousedními vrcholy kružnice. Další podobné kružnice bychom tak mohli získat postupným konstruováním přímk rovnoběžných s osami x, y , jelikož pokud máme jednu stranu, celou kružnici (v podobě hranice čtverce) snadno sestrojíme. Několik těchto kružnic je znázorněno v obr. 3.17 vpravo, množinu M_5^∞ tvoří všechny středy takových kružnic. Výsledná množina je poté zobrazena v obr. 3.18 vlevo.



Obrázek 3.18: Osy různoběžek v $\mathcal{P}_\infty V$

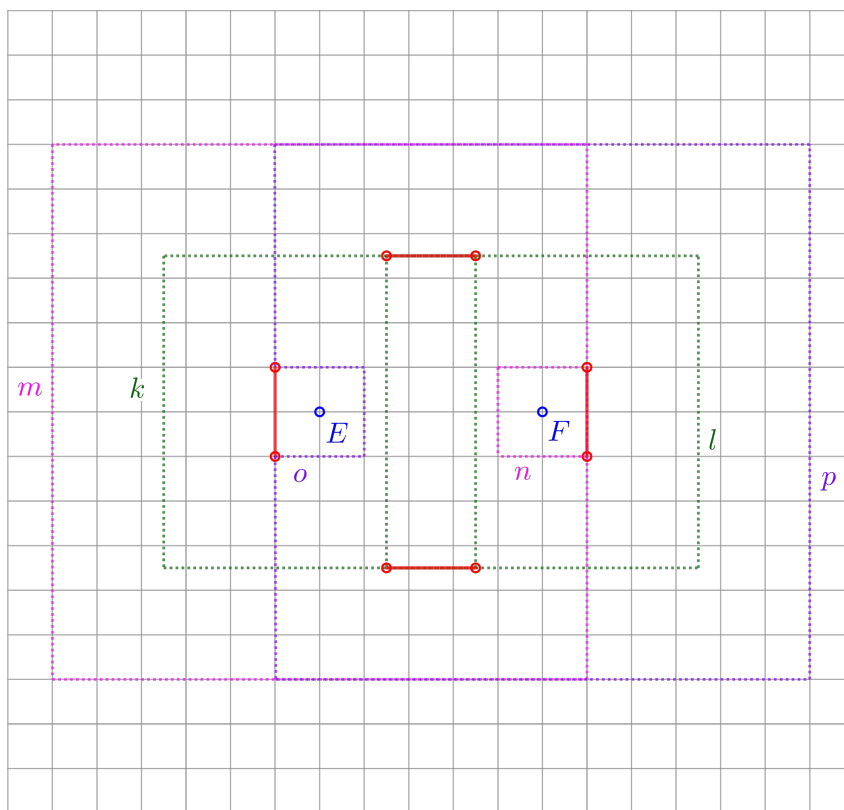
Na závěr této podkapitoly je ještě v obr. 3.18 vpravo znázorněna jedna varianta množiny, kde přímk $a = y$, jelikož souřadnicové osy jsme ze zkoumání doposud vyřadili. Protože by ale postup hledání množiny byl analogický k předchozím, nebudeme se jím již detailně zabývat.

3.7 Elipsa (M_6^∞)

Další zkoumanou množinou a zároveň první kuželosečkou v maximovém metrickém prostoru je elipsa. Definice i bodová konstrukce elipsy již byly v této práci popsány, vzhledem k tomu, že i v maximovém metrickém prostoru budeme využívat stejný princip, přejdeme přímo ke konstrukcím množiny vzhledem k různým polohám ohnisek.

Nejprve zvolme úsečku EF rovnoběžně se souřadnicovou osou x , viz obr. 3.19. Vzdálenost ohnisek je zde volena 5, vzdálenost $2a = 7$. V obrázku jsou znázorněny tři speciální dvojice kružnic se středy v bodech E, F takových, že součet jejich poloměrů se rovná vždy $2a$. První dvojice kružnic k, l je volena tak, aby se jejich poloměry rovnaly, tj. jsou rovny číslu $a = 3,5$, v obrázku jsou znázorněny zeleně. Průnikem těchto kružnic jsou dvě úsečky rovnoběžné s osou x , které tvoří první část hledané množiny. Další dvojice kružnic m, n , v obr. znázorněna růžově, je zvolena tak, aby byl zároveň rozdíl jejich poloměrů roven $|EF|$, tj. poloměry jsou 6 a 1. Pokud poloměry prohodíme, získáme ještě jednu dvojici kružnic o a p , která je znázorněna fialově. Průnikem růžových a fialových dvojic kružnic jsou úsečky, které tvoří další dvě části výsledné množiny. Jelikož se při volbě jednoho z poloměrů většího než 6 kružnice neprotnou, jedná se o nejzazší varianty v těchto

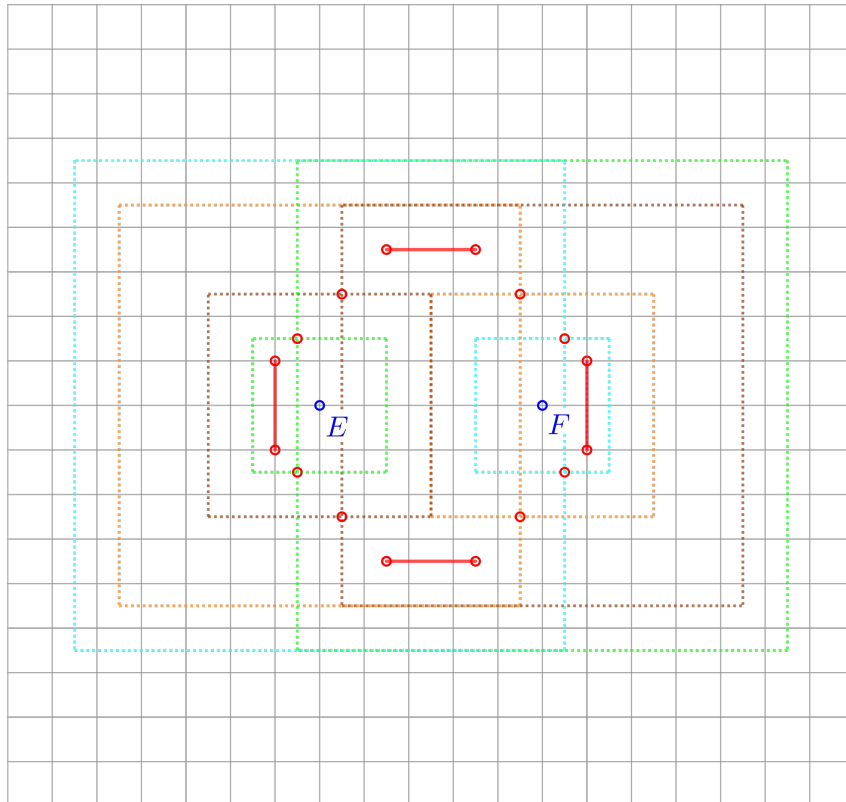
směrech. Pro každé další přípustné volby poloměrů kružnic získáváme body množiny „mezi“ těmi již získanými, několik takových dvojic je znázorněno v obr. 3.20. Z obrázku vidíme, že tyto body náležejí vždy jedné ze čtyř úseček rovnoběžných s osami kvadrantů, které propojují dosavadní části množiny. Celkový tvar množiny M_6^∞ je osmiúhelník, jehož každé dvě protější strany jsou shodné úsečky, viz obr. 3.21. Pro ohniska E, F zvolena na rovnoběžce s osou y by byl tvar množiny analogický.



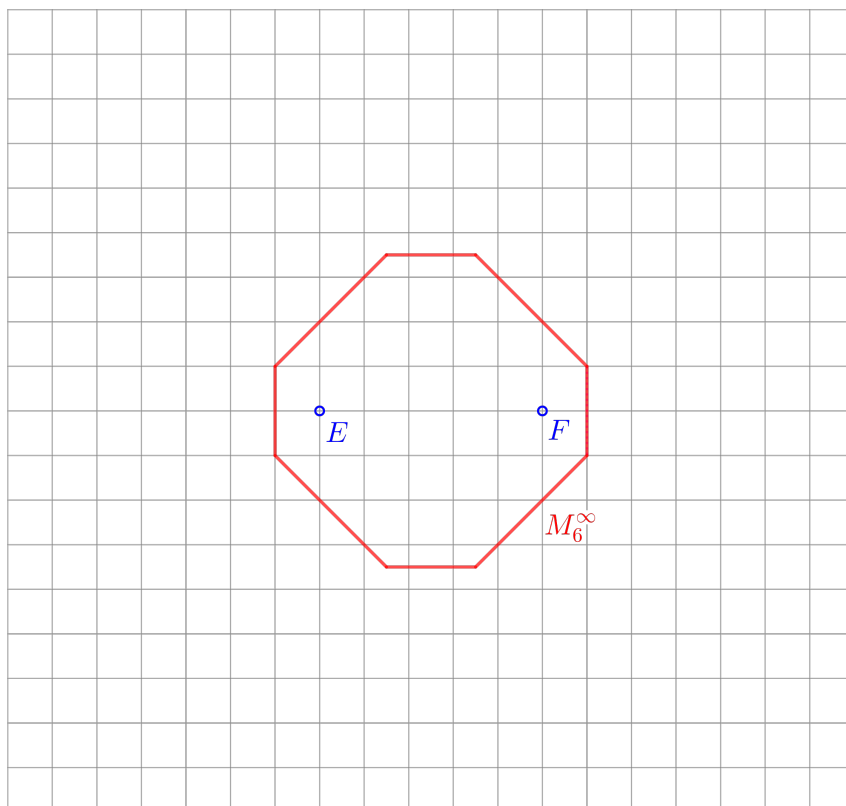
Obrázek 3.19: Konstrukce elipsy v \mathcal{P}_∞ I-1

Další zajímavý tvar množiny M_6^∞ , který probereme podrobněji, získáme při volbě ohnisek E, F na rovnoběžce s jednou z os kvadrantů. Bůno uvažujme osu 1. kvadrantu. Ohniska E, F jsou zvolena ve vzdálenosti 3, vzdálenost $2a = 7$. V obr. 3.22 jsou znázorněny dvě dvojice kružnic se středy v bodech E, F o poloměrech 5 a 2: k, l růžově, m, n fialově. Tyto dvojice kružnic se protínají ve vrcholu a částech stran, společně tvoří krajní části množiny. Všechny další dvojice kružnic se protnou ve dvou bodech, které leží na úsečkách rovnoběžných se spojnicí EF (hlavní osou elipsy) spojujících dosavadní nalezené části množiny. Několik příkladů je znázorněných v obr. 3.23. Celá množina (M_6^∞) má tak v tomto případě tvar šestiúhelníku, viz obr. 3.24 vlevo. Pro ohniska E, F zvolena na rovnoběžce s osou 2. kvadrantu by byl tvar množiny analogický.

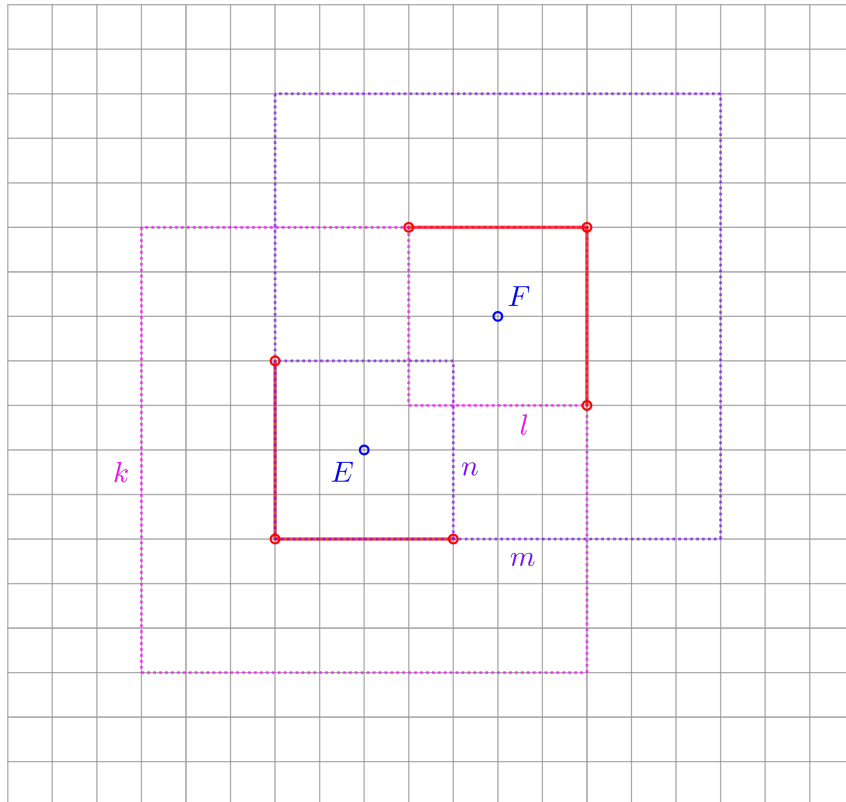
Na závěr této podkapitoly je v obr. 3.24 vpravo znázorněna i jedna varianta množiny při obecné volbě polohy ohnisek. Jelikož konstrukce množiny by probíhala stejným způsobem jako pro množiny ve speciálních polohách, podrobnějším popisem se zde již nezabýváme.



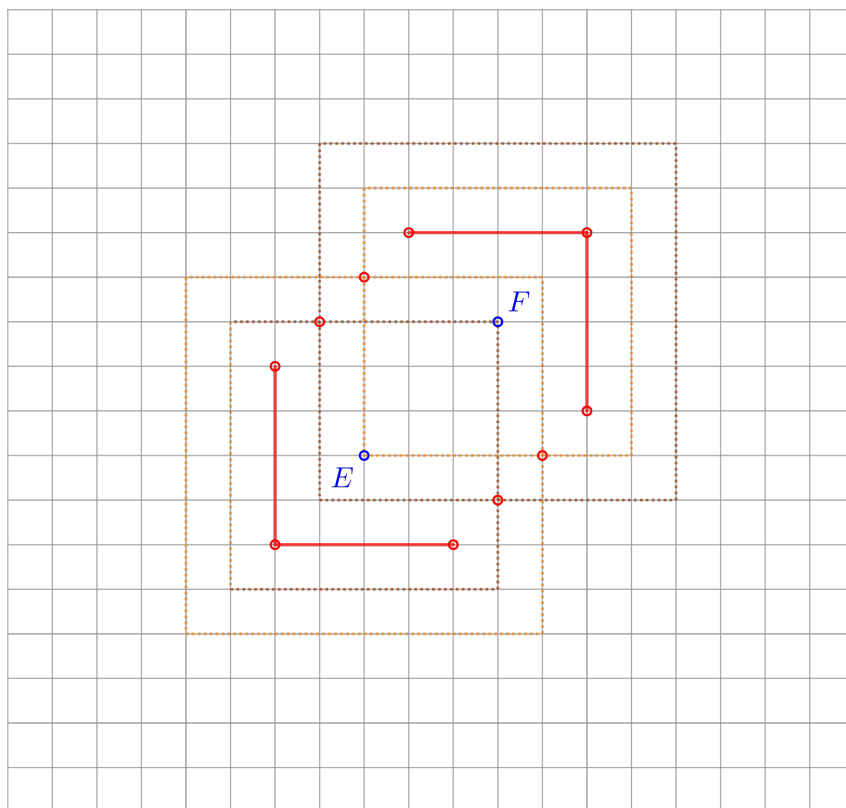
Obrázek 3.20: Konstrukce elipsy v \mathcal{P}_∞ I-2



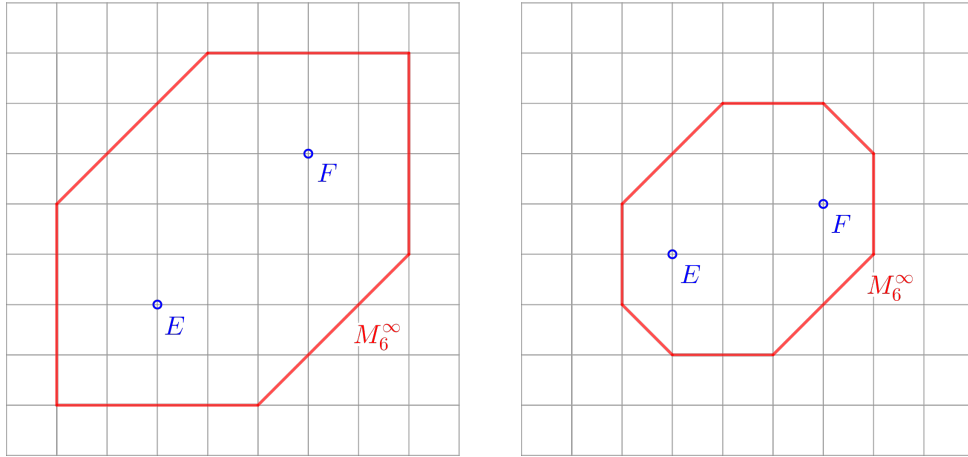
Obrázek 3.21: Elipsa v \mathcal{P}_∞ I



Obrázek 3.22: Konstrukce elipsy v \mathcal{P}_∞ II-1



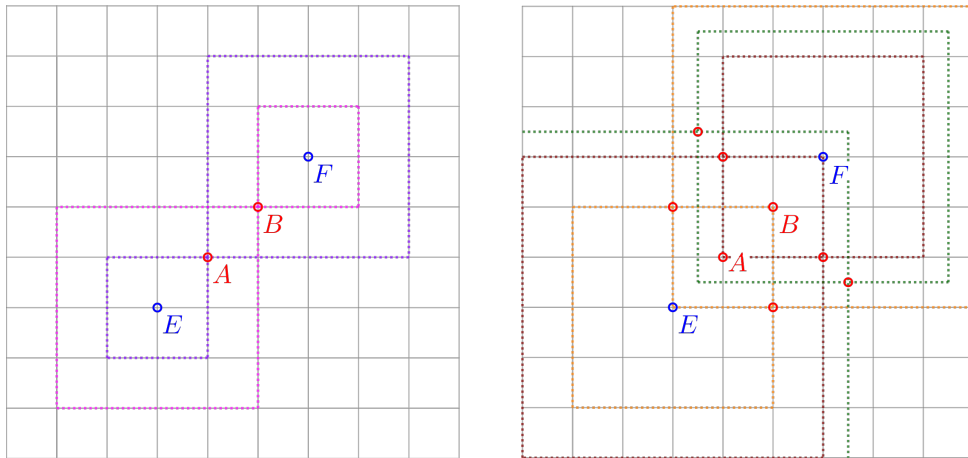
Obrázek 3.23: Konstrukce elipsy v \mathcal{P}_∞ II-2



Obrázek 3.24: Elipsa v \mathcal{P}_∞ II

3.8 Hyperbola (M_7^∞)

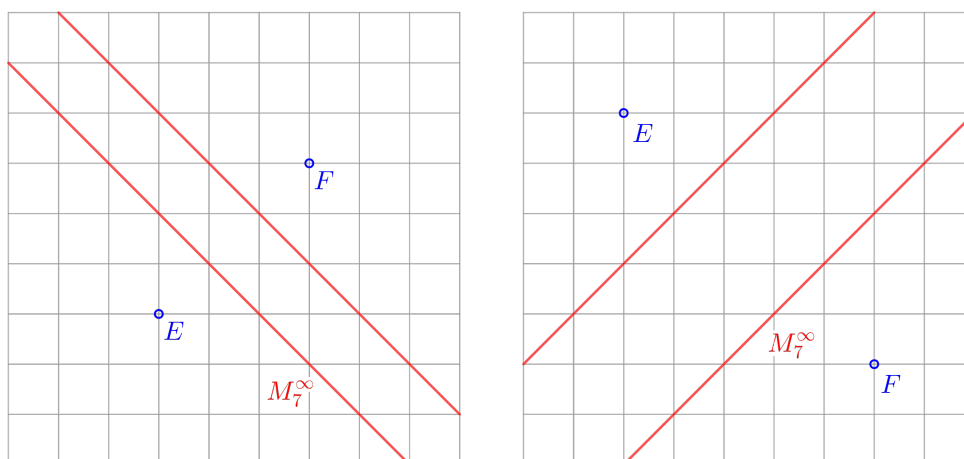
Předposlední množinou zkoumanou v této práci je hyperbola. Jedná se o množinu všech bodů v rovině, které mají konstantní rozdíl vzdáleností od dvou různých bodů E, F , které nazýváme ohniska hyperboly. Stejně jako u množiny M_6^∞ podrobněji popíšeme pouze speciální polohy.



Obrázek 3.25: Konstrukce hyperboly v \mathcal{P}_∞ I

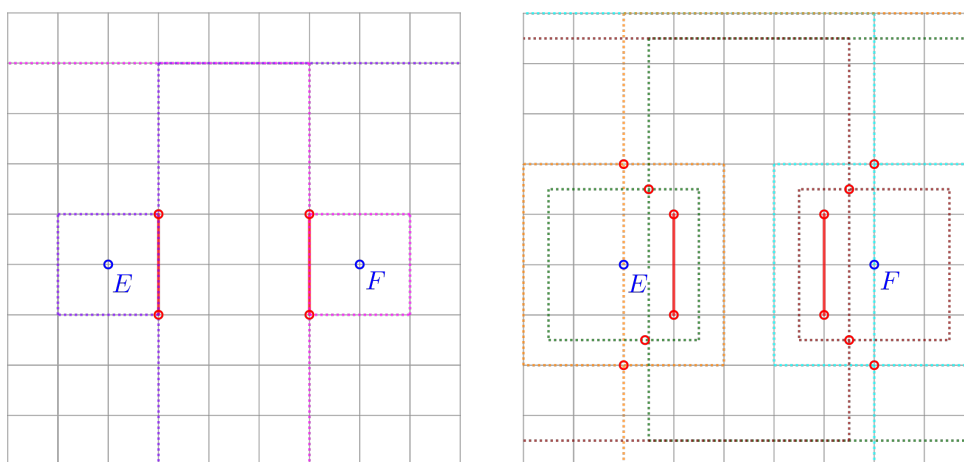
Vzhledem k její jednoduchosti zde jako první uvedeme variantu množiny při volbě úsečky EF rovnoběžné s jednou z os kvadrantů, buďto osou 1. kvadrantu, viz obr. 3.25 vlevo. Ohniska E, F jsou zvolena ve vzdálenosti 3, vzdálenost $2a = 1$. Jednotlivé body množiny M_7^∞ budeme sestrojovat opět jako průsečíky pomocných kružnic, abychom zajistili vlastnost z definice. Rozdíl poloměrů pomocných kružnic bude vždy roven $2a$. První dvě dvojice kružnic jsou znázorněny růžově a fialově již v obr. 3.25 vlevo, jedná se o kružnice s poloměry 1 a 2. Jedná se o nejmenší možnou volbu poloměrů, jelikož zároveň jejich součet je roven $|EF| = 6$. Každá z těchto dvojic kružnic se tak bude dotýkat právě v jednom bodě, jenž je analogií vrcholu hyperboly v \mathcal{P}_e . Vzniklé body označíme A, B .

Abychom získali další vyhovující dvojici kružnic, musíme oba poloměry shodně



Obrázek 3.26: Konstrukce hyperboly v \mathcal{P}_∞ II

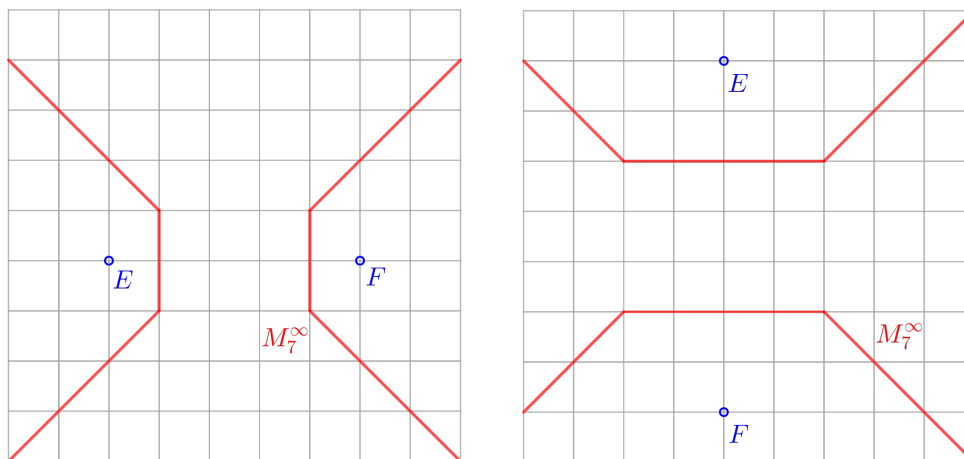
zvětšit. Při tomto zvětšení se vrcholy pomocných kružnic shodně oddalují od ohnisek, a stejným způsobem se budou oddalovat i průsečíky. V obr. 3.25 vpravo je několik takových dvojic kružnic znázorněno, budou mít vždy dva průsečíky, které společně s body A , B tvoří dvě přímky kolmé (v eukleidovském smyslu) na spojnici EF . Výsledný tvar množiny je znázorněn v obr. 3.26 vlevo, vpravo poté vidíme tvar množiny při volbě úsečky EF rovnoběžné s osou 2. kvadrantu.



Obrázek 3.27: Konstrukce hyperboly v \mathcal{P}_∞ III

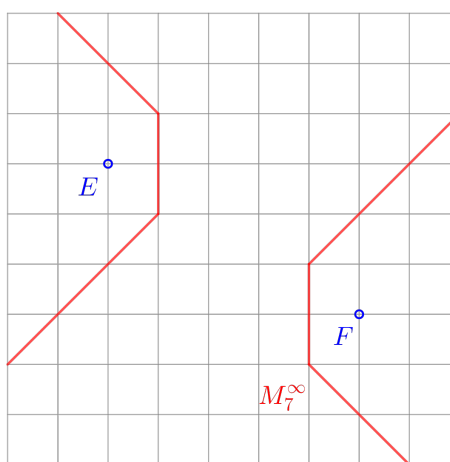
Druhý speciální případ tvaru množiny získáme při volbě polohy úsečky EF rovnoběžné s jednou ze souřadnicových os. Bůno rozebereme úsečku EF rovnoběžnou s osou x , viz obr. 3.27 vlevo. Vzdálenost $|EF|$ je zde volena 5, vzdálenost $2a = 3$. Stejně jako u předchozí varianty množiny nejprve určíme nejmenší možnou volbu poloměrů pomocných kružnic, a následně všechny ostatní možnosti. Nejmenší možnou dvojici poloměrů znovu určíme tak, že kromě rozdílu rovnému $2a$ musí zároveň jejich součet být roven $|EF|$, tj. v našem konkrétním případě 5. Dvojice poloměrů tak bude 4 a 1. Jelikož záleží na tom, v kterém ohnisku sestrojíme kterou kružnici, získáváme dvě takové dvojice, v obr. 3.27 vlevo znázorněné růžově a fialově. Podíváme-li se blíže např. na růžové kružnice, vidíme, že se dotýkají zároveň ve více bodech, neboli sdílí společnou úsečku. Celkem tak získáváme jako první část množiny dvě rovnoběžné úsečky. V obr. 3.27 vpravo je znázorněno ně-

kolik dalších dvojic kružnic, jejichž průsečíky tvoří zbývající část množiny. Jedná se o polopřímky rovnoběžné s osami kvadrantů. Celý výsledný tvar množiny je znázorněn v obr. 3.28 vlevo, vpravo poté vidíme analogický tvar množiny při volbě úsečky EF rovnoběžné s osou y .



Obrázek 3.28: Konstrukce hyperboly v \mathcal{P}_∞ IV

Na závěr je v obr. 3.29 znázorněn tvar množiny při obecné volbě M_7^∞ při obecné volbě úsečky EF , konstrukce by i v tomto případě probíhala analogicky.



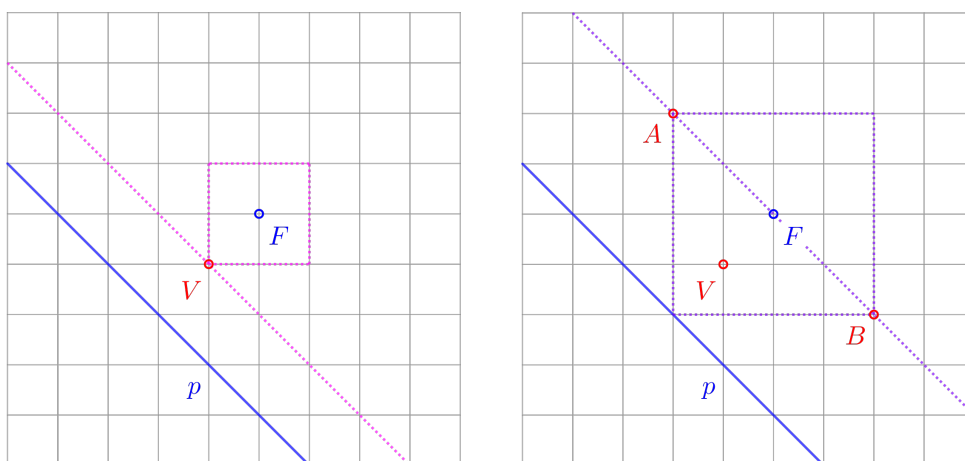
Obrázek 3.29: Hyperbola v \mathcal{P}_∞

3.9 Parabola (M_8^∞)

Poslední zkoumanou množinou je parabola. Parabola je množina všech bodů v rovině, které mají shodnou vzdálenost od daného bodu F a dané přímky p . Bodová konstrukce paraboly byla popsána u množiny M_8^m , stejný princip budeme využívat i zde. Jednotlivé body množiny hledáme jako průsečíky přímek a kružnic, které představují množiny bodů vzdálených od ohniska a řídicí přímky p o danou vzdálenost (značíme d).

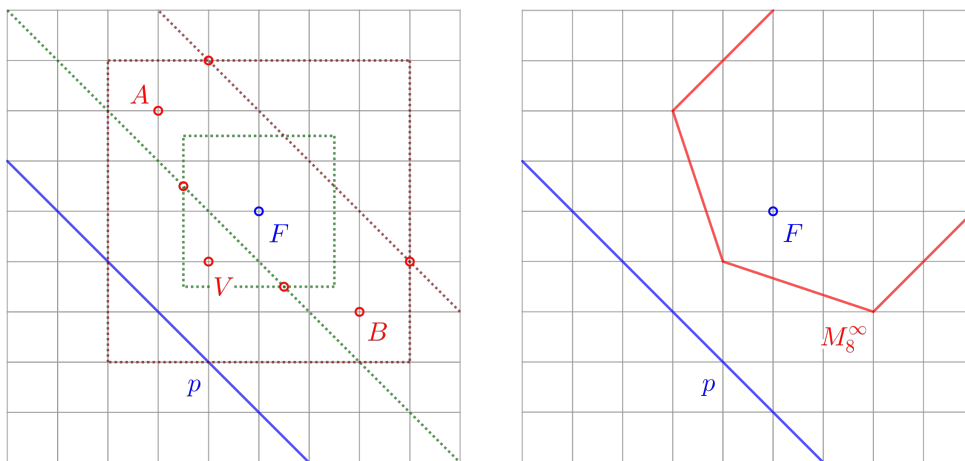
První volbou přímky p je rovnoběžka s osou kvadrantu, buďto volíme osu 2. kvadrantu. Ohnisko F zde volíme ve vzdálenosti 2 od přímky p , viz obr. 3.30 vlevo. Nejmenší možná vzdálenost d (kterou využíváme jako poloměr pomocné kružnice, a zároveň se jedná o vzdálenost pomocné přímky od přímky p) je polovina vzdálenosti $|Fp|$, v tomto případě 1. V tomto případě se pomocná kružnice pomocné přímky dotýká v jednom bodě, který označíme V , neboť se jedná o ekvivalent vrcholu paraboly. Konstrukce dalších dvou zajímavých bodů množiny je znázorněna v obr. 3.30 vpravo. Jestliže zvolíme jako vzdálenost d číslo $|Fp| = 2$, průsečíky vzniklé kružnice a přímky budou dva body A, B , které leží na rovnoběžce s přímkou p procházející bodem F .

Zbývající body množiny bychom mohli rozdělit do dvou skupin, pro $1 < d < 2$,



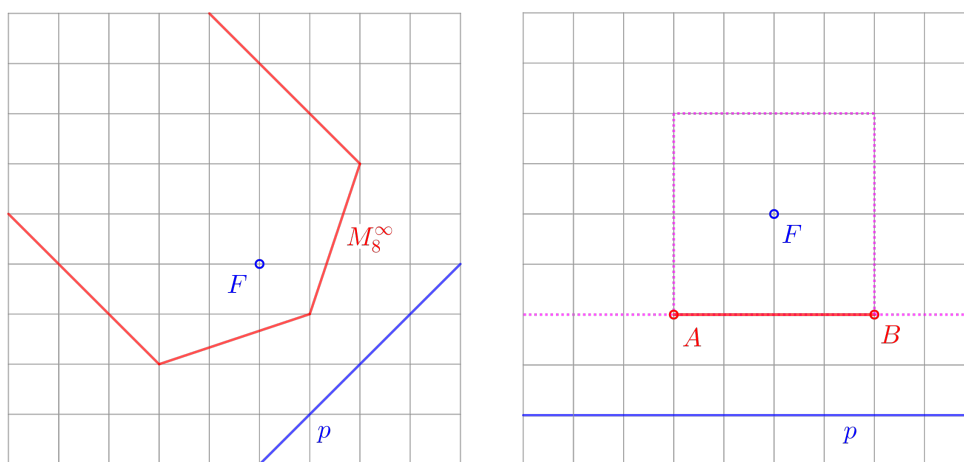
Obrázek 3.30: Konstrukce paraboly v \mathcal{P}_∞ I

a pro $d > 2$. Konstrukce jednoho bodu z každé skupiny je znázorněna v obr. 3.31 vlevo, zelená dvojice pomocné přímky a kružnice odpovídá volbě $d = 1,5$, hnědá dvojice přímky a kružnice číslu $d = 3$. Všechny body první skupiny bychom analogickou konstrukcí získali jako vnitřní body úseček VB, VA . Všechny body množiny z druhé skupiny budou tvořit s body A a B dvě polopřímky kolmé na řídicí přímku p s počátečními body A a B . Výsledný tvar takto sestrojené množiny M_8^∞ je znázorněn v obr. 3.31 vpravo. V obr. 3.32 vlevo je následně zobrazen tvar množiny při volbě přímky p rovnoběžně s osou 1. kvadrantu.

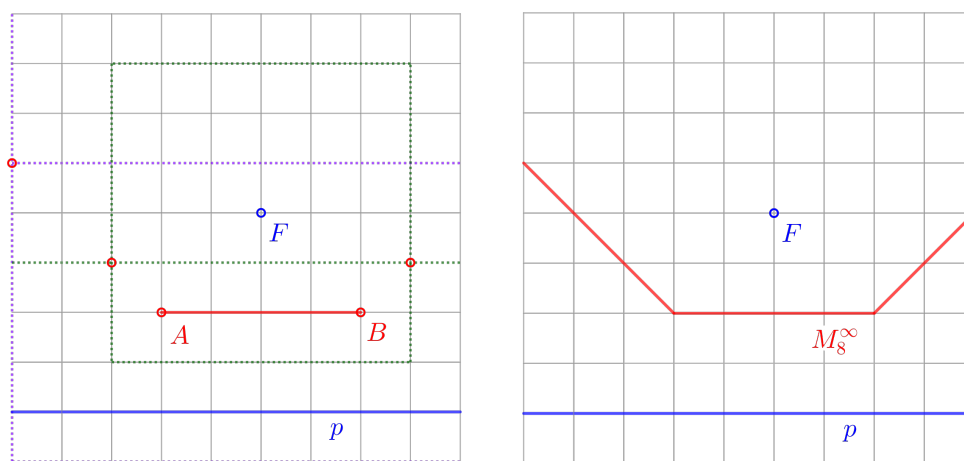


Obrázek 3.31: Konstrukce paraboly v \mathcal{P}_∞ II

Druhým speciálním případem, který podrobněji rozebereme, je tvar množiny při volbě přímky p rovnoběžně s jednou ze souřadnicových os, buďto volíme osu x . Ohnisko zde volíme ve vzdálenosti 4 od přímky p , viz obr. 3.32 vpravo. Přímou v tomto obrázku je již znázorněna první dvojice pomocné přímky a kružnice, konkrétně růžově, pro volbu $d = 2$. Vzhledem k volené poloze má pomocná přímka s kružnicí nekonečně mnoho společných bodů, které náležejí jedné straně pomocné kružnice. Tuto úsečku označíme AB . Budeme-li sestrojovat libovolné další dvojice pomocné přímky a kružnice pro $d > 2$, získáme vždy dva průsečíky, které náležejí jedné ze dvou polopřímek s počátečními body A, B , které jsou rovnoběžné s osami kvadrantů, viz. 3.33 vlevo. Výsledný tvar množiny je znázorněna v obr. 3.33 vpravo.

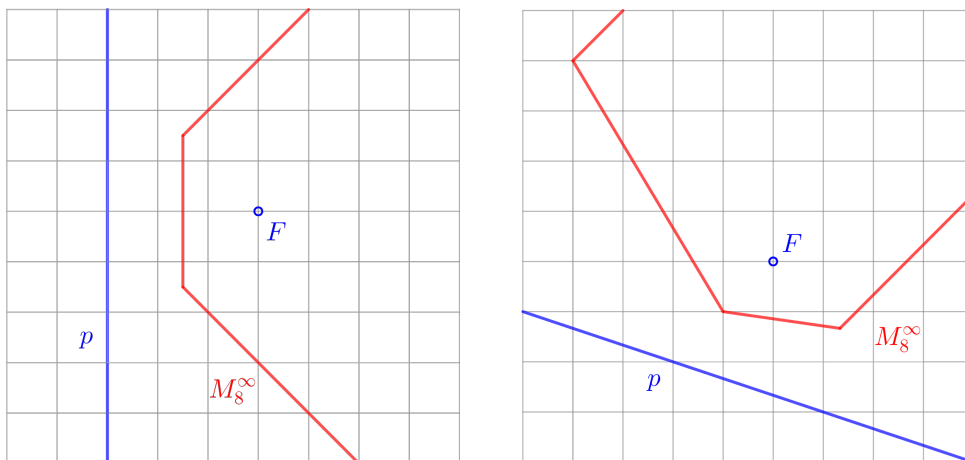


Obrázek 3.32: Konstrukce paraboly v \mathcal{P}_∞ III



Obrázek 3.33: Konstrukce paraboly v \mathcal{P}_∞ IV

V obr. 3.34 vlevo je na závěr zobrazen tvar množiny M_8^∞ při volbě přímky p rovnoběžné s osou y , vpravo vidíme tvar množiny pro obecnou polohu přímku p .



Obrázek 3.34: Parabola v \mathcal{P}_∞

4. Sbírka aplikačních úloh

V poslední kapitole této práce rozebereme úlohy, které byly autorkou vytvořeny pro účely této práce. Zadání úloh v podobě pracovních listů pro žáky je připojeno v příloze A, v této kapitole uvedeme řešení úloh s komentářem pro učitele.

Úlohy mají sloužit k nastínění práce s jinými metrikami, než je metrika eukleidovská, přičemž mohou být přínosné pro žáky různých věkových kategorií. Naleznout řešení úloh mohou již děti na prvním stupni, jelikož není nutně třeba hlubších matematických či geometrických znalostí, než jsou základní počty a orientace v prostoru. Starší žáci, zhruba od 8. třídy druhého stupně základní školy, mohou navíc v úlohách hledat analogie s množinami bodů daných vlastností, jejichž definice se ve škole učí. Nakonec pro žáky středních škol se v některých úlohách nabízí i přesah do jiných oblastí matematiky, např. kombinatoriky.

Celá sada úloh je zasazena do fiktivního města Kolmova. Na úvod je stručně popsána motivace k práci s jinou metrikou, než je běžně užívaná eukleidovská metrika, a pravidla, jakými se při řešení jednotlivých úloh řídit.

Pravidla a informace k úlohám:

1. Systém ulic odpovídá čtvercové síti.
2. Ulice, které se navzájem křížují, svírají pravý úhel, zároveň celé město leží na rovině.
3. Šířku ulic v úlohách zanedbáváme, budeme s nimi pracovat jako s úsečkami.
4. Budeme se vždy zabývat jen vzdálenostmi mezi křižovatkami.
5. Vzdálenost sousedních křižovatek položíme rovnou 1.

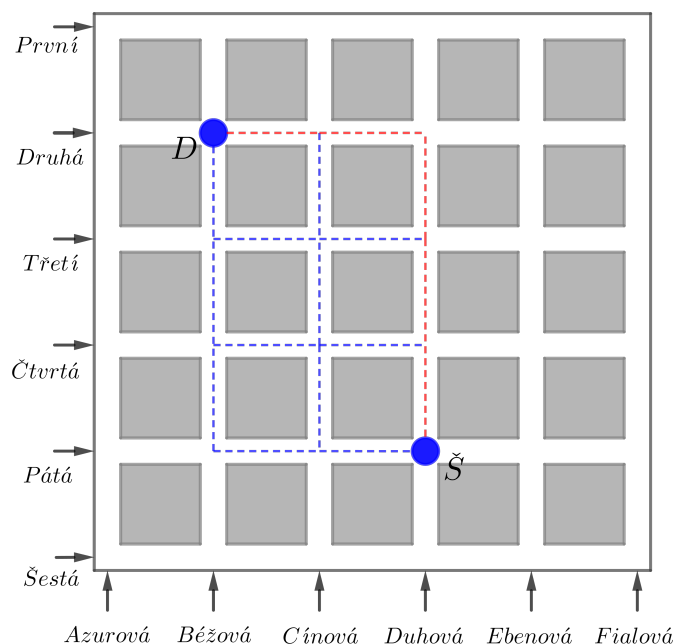
4.1 Kolmov

Úvodní řešená úloha má za cíl představit čtenáři způsob práce v daném prostředí, neboli jakým způsobem zde měříme vzdálenost. Úloha ještě neobsahuje žádnou množinu bodů, pouze ukazuje, jakým způsobem můžeme v manhattanském metrickém prostoru spojit dva body. Pro snazší orientaci jsou u této úvodní úlohy (a na ni navazující 1. úlohy) uvedeny i názvy ulic. V případě potřeby je možné doplnit obdobné pojmenování i u jiných úloh, jedná se o očíslování v jednom směru a pojmenování podle abecedy v druhém směru.

4.1.1 Petrova cesta do školy

Zadání: V úvodním řešeném příkladu jsme se seznámili s Petrem, který hledal nejkratší cestu z domu do školy. Pomůžete Petrovi nalézt další varianty trasy, aby nemusel chodit každý den stejnou cestou?

Otázka: Kolik různých tras délky 5 existuje mezi Petrovým domovem a školou?



Obrázek 4.1: Petrova cesta do školy

Řešení a komentář: První úloha je doplňková k řešené úloze, v níž mají žáci možnost sami hledat další různé cesty. Je žádoucí, aby při hledání všech cest sami zkusili postupovat přehledně. V obr. 4.1 jsou zvýrazněny části ulic, které lze využít. Lze například zvolit jednu z krajních variant, jít 2 bloky po Druhé ulici a následně dojít rovně 3 bloky po Duhové ulici (tato cesta je zobrazena červeně), a posléze postupně měnit trasu o jednu křižovatku. Možných cest existuje celkem 10.

Doplňující otázka: Lze počet cest z bodu D do bodu Š spočítat bez postupného kreslení?

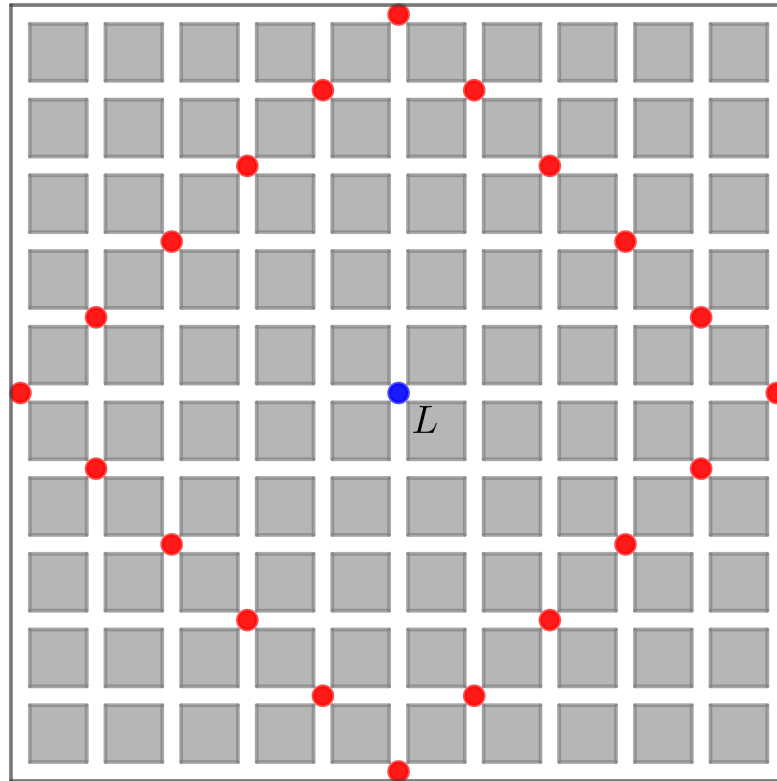
Jedná se o příklad z kombinatoriky. Každou cestu můžeme zapsat jako řetězec kroků *doprava* a *dolů*. Kroky *doprava* je třeba ujit 2, kroky *dolů* 3. Různé cesty se liší tím, jak tyto kroky seřadíme. Výpočet proto vypadá následovně:

$$\binom{2+3}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

4.1.2 Lenčiny vycházky

Zadání: Lenka měla nedávno úraz nohy, kterou má nyní posilovat pravidelnými zdravotními procházkami. Aby si nohu nepřetížila, smí ujít každý den trasu dlouhou maximálně 10 (celkem od domova zpět k domovu).

Otázka: Na jaká nejvzdálenější místa může Lenka ze svého bydliště (L) dojít?



Obrázek 4.2: Lenčiny vycházky

Řešení a komentář: Jelikož celková vzdálenost, kterou může Lenka každý den urazit, je 10, nejzazší možné místo musí být od domova vzdálené o 5. Takových míst (křižovatek) můžeme nalézt celkem 20. Všechna místa náleží hranici čtverce se středem v L o úhlopříčce dlouhé 10, viz obr. 4.2.

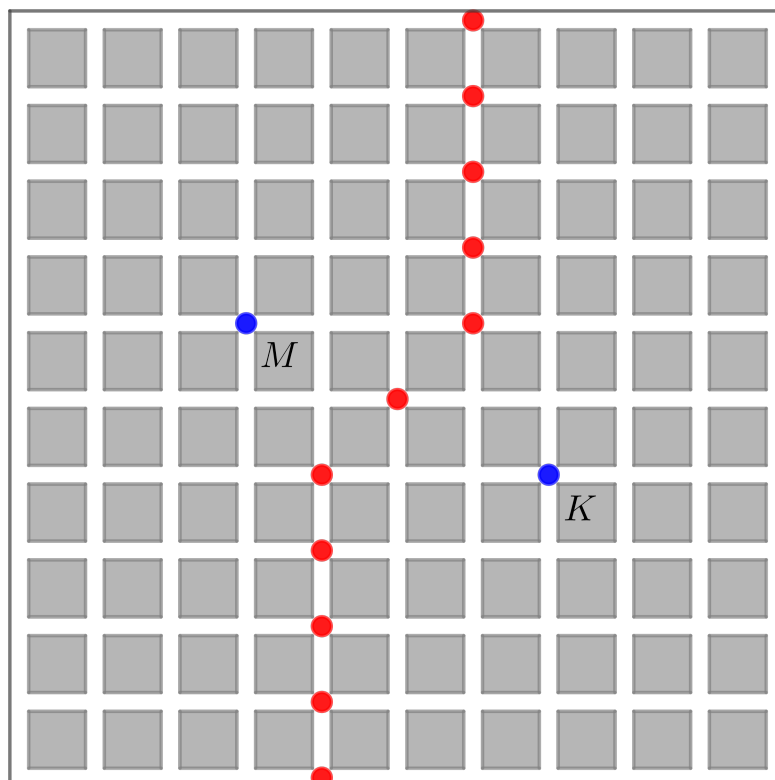
Doplňující otázka: Jaké množině bodů odpovídá formulace v zadání?

Jelikož zkoumaný problém snadno převedeme na hledání všech bodů ve vzdálenosti 5 od L , můžeme si všimnout podobnosti s definicí kružnice. Zde jsme našli pouze množinu izolovaných bodů. Pokud bychom si ale představili, že zde nemáme žádné domy, pouze holou pláň, ale přitom se můžeme pohybovat stále pouze v kolmých směrech, získali bychom jako řešení celou hranici čtverce. Můžeme tak říci, že při použití tohoto způsobu měření vzdálenosti (manhattanské metriky), má kružnice tvar hranice klasického eukleidovského čtverce (a to v této konkrétní poloze).

4.1.3 Marie a Karel na rande

Zadání: Mladá dvojice Marie (M) a Karel (K) z Kolmova si domluvila způsob potkávání na společných schůzkách s několika pravidly. Chtějí společně poznat co nejlépe své město, a tak spolu chodí na procházky. Aby nebyla procházka nikdy stejná, pokaždé se potkají na jiném místě, odkud vyrazí. Domluvili se, že na místo setkání to vždy musí mít oba stejně daleko ze svého bydliště.

Otázka: Na jakých místech ve vyznačené části města se Marie s Karlem mohou potkávat?



Obrázek 4.3: Rande Marie a Karla

Řešení a komentář: Hledáme všechny body, které budou stejně daleko od M a K . Jako první si pravděpodobně všimneme, že této podmínce odpovídá střed úsečky MK . U dalších bodů je zde jednoduše třeba zkusit, zda zadání odpovídají, či nikoli. Pokud jich několik najdeme, můžeme si všimnout toho, že každý další bude ležet na jedné ze dvou polopřímek (další bychom našli mimo výřez mapy), viz obr. 4.3.

Doplňující otázka: Jaké množině bodů odpovídá formulace v zadání?

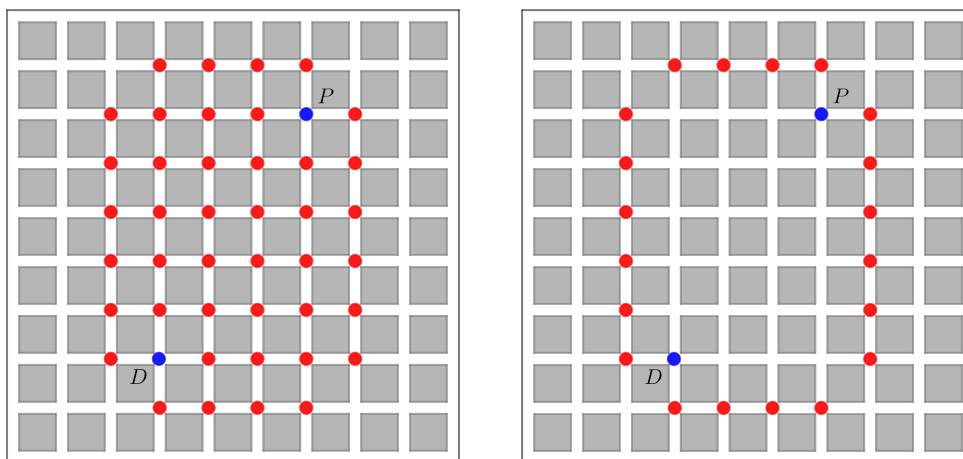
V této úloze se jedná o ekvivalent osy úsečky. Zvídaví žáci mohou navíc zkusit hledat analogie os jiných úseček. Různé varianty jejich tvarů jsou popsány v této práci v podkapitole 2.2.

4.1.4 Nákupy pana Davida

Zadání: Pan David z Kolmova každé odpoledne vyrazí přesně ve 3 hodiny z práce (P) a v půl čtvrté vyzvedává děti v družině (D). Cestou z práce k družině ale potřebuje ještě nakoupit potraviny na večeri. Ve městě Kolmov je našťástí obchod doslova na každém rohu. Cesta mezi sousedními rohy trvá panu Davidovi jednu minutu, z práce do obchodu i z obchodu do družiny jezdí vždy nejkratší možnou cestou.

Otázky:

1. Do kterých obchodů může pan David jezdit nakupovat, aby stihl děti vyzvednout včas, pokud nákupem potravin stráví 20 minut?
2. Do kterých obchodů může pan David jezdit, aby mu cesta i s nákupem trvala právě 30 minut? Zde předpokládáme, že cestu z práce do obchodu i z obchodu do družiny vždy absolvuje nejkratší možnou trasou.



Obrázek 4.4: Nákupy pana Davida

Řešení a komentář: Zde je třeba si nejprve uvědomit, že na samotnou cestu bez nákupu zbývá panu Davidovi 10 minut, takže může při dané rychlosti urazit cestu o délce maximálně 10. Nejkratší cesta mezi prací a družinou měří 8. Všechny obchody (křižovatky) uvnitř obdélníku s protějšími vrcholy P a D tak jsou součástí řešení. Jedná se o podobný obdélník, jaký jsme získali v 1. úloze u Petra. Mimo tyto body má ale pan David navíc možnost si prodloužit cestu o 2. Toto prodloužení může učinit kdykoli během cesty, takže do množiny řešení budou patřit také všechny křižovatky ve vzdálenosti 1 od dosud nalezených bodů. Výsledná množina řešení je znázorněna v obr. 4.4 vlevo. Množinou řešení druhé otázky jsou potom právě tyto poslední nalezené body, v obrázku 4.4 znázorněné vpravo. I u této úlohy lze nalézt analogii se známou množinou bodů dané vlastnosti, která je ovšem vyučována až na střední škole. Ve druhé otázce nás zajímají všechny body, do kterých se dostaneme v rámci cesty z P do D o délce 10. Tuto cestu lze vždy rozdělit na část z práce do obchodu a část z obchodu do družiny, které mohou být různě dlouhé, ale dohromady vždy musí dát 10. Taková množina odpovídá definici bodů elipsy.

4.2 Vodní čtvrť

V rámci posledních dvou úloh se od manhattanské metriky postupně přesuneme k metrice maximové. Manhattanská metrika má zřejmě využití a její princip lze s využitím ulic ve městě nastínit poměrně snadno. S podobným znázorněním metriky maximové je to již trochu složitější. Následující úlohy mají proto za cíl poskytnout jen stručné nahlédnutí do této problematiky, které mohou opět zvládnout již žáci základních škol.

Podstatné u práce s maximovou metrikou je jisté rozumové oddělení vzdáleností (tras) v obou kolmých směrech na dva různé údaje. Zavádíme zde proto v jednom směru ulic jiný způsob přepravy – po vodě. Náročnost přestupu z lodi na běžnou silnici musíme zanedbat. Na úvod je pro nastínění problematiky znovu zařazena řešená úloha.

4.2.1 Bedřichova cesta do práce

Zadání: Bedřich z Vodní čtvrti cestuje každé ráno z domu (D) do práce (P) o několik ulic dál. Z předchozí řešené úlohy víme, že Bedřich ráno urazí trasu o délce 4.

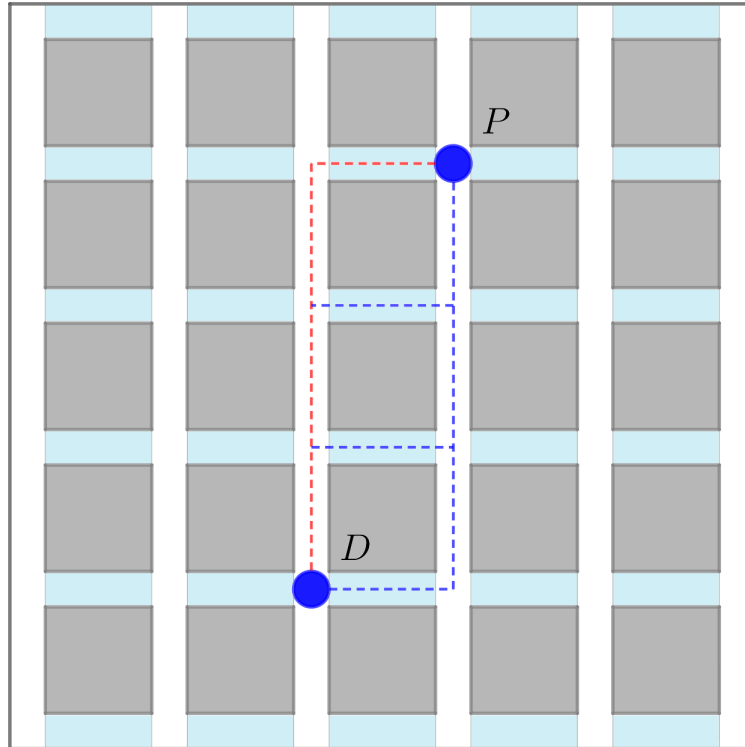
Otázky:

1. *Kolik různých tras délky 4 může Bedřich po cestě do práce využít?*
2. *Jaký je nejmenší a největší možný počet přestupů mezi kanálem a silnicí, které musí Bedřich během cesty absolvovat?*
3. *Jak velkou část trasy stráví na lodičce a jak velkou na běžné silnici?*

Řešení a komentář: Odpověď na první otázku lze opět nalézt pouhým vykreslením všech možností. V tomto případě existují čtyři možné cesty lišící se tím, v kterém momentě cesty Bedřich využije lodičku. V obrázku 4.5 je jedna z cest vyznačena červeně, ostatní by odpovídaly nejkratším projitím modrých čárkovaných čar. Také by bylo možné použít výpočet pomocí kombinačního čísla obdobně jako v případě Petra, jelikož vybíráme jednu konkrétní pozici pro cestu na lodičce ze čtyř částí trasy. Odpověď na druhou otázku je 1 a 2, počáteční nastoupení na lodičku či konečné vystoupení za přestup neuvažujeme. Jeden přestup Bedřicha čeká v případě, že cestu lodičkou absolvuje na začátku cesty a nebo naopak až na jejím konci, jinak musí přestoupit dvakrát. Jak bylo již zmíněno výše, celková trasa má délku 4, přičemž tři bloky absolvuje Bedřich po silnici a jeden na lodičce, což je odpověď na poslední otázku.

4.2.2 Tereza a Lucie hrají na schovávanou

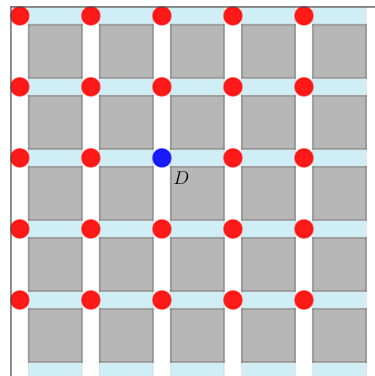
Zadání: Dvě kamarádky, Tereza a Lucie, které bydlí ve stejném domě na rohu ulice, si spolu rády hrají venku na schovávanou. Od rodičů mají dovoleno se schovávat jen v omezené vzdálenosti od domova (D), aby se neztratily, maximálně se



Obrázek 4.5: Bedřichova cesta do práce

mohou vzdálit o 2 po silnici a o 2 na lodičce.

Otázka: Na která místa ve městě se mohou děvčata schovat?



Obrázek 4.6: Schovávaná

Řešení a komentář: Všechna možná řešení jsou znázorněna v obr. 4.6. Nalézt je můžeme například postupným aplikováním obou směrů pohybu, tj. nejprve půjdeme vzdálenost 1 nebo 2 po silnici a následně popojedeme o 1 nebo 2 na lodičce, případně celý postup obrátíme. Do množiny řešení by dle zadání patřil i výchozí bod D , který není znázorněn červeně. Zařazení tohoto bodu může být předmětem diskuze s žáky, jelikož cílem hry děvčat je schovat se, čehož by na tomtéž místě těžko dosáhla.

Doplňující otázka: Označme L délku trasy po vodě a S délku trasy po silnici. Pokud vzdáleností dvou bodů (bodů D a jednoho bodu z řešení) budeme rozumět vždy tu největší z hodnot L a S , jaké množině bodů odpovídá formulace v zadání?

Tato otázka je obtížnější na porozumění než dosavadní úlohy. Pokud ale žákům vysvětlíme i s pomocí obrázku, jak nyní vzdálenost měříme, můžeme už poměrně snadno dospět k závěru, že maximální vzdálenost bodu D a libovolného bodu z množiny řešení je zde rovna 2. Množinou všech bodů, jejichž vzdálenost od daného bodu D je rovna 2 či menší, je kruh se středem v D a poloměrem 2. Odtud už můžeme diskutovat i o tom, jak by v této situaci vypadala kružnice. Podrobnější popis kružnice v maximovém metrickém prostoru lze nalézt v podkapitole 3.1 této práce.

Závěr

Cílem diplomové práce bylo vytvořit ucelený přehled množin bodů daných vlastností s využitím neeukleidovských metrik, konkrétně manhattanské a maximové metriky, který dosud nebyl v české literatuře k dispozici. Autorce není znám ani anglický zdroj, ve kterém by byly všechny tyto množiny popsány. U každé z prezentovaných množin byl popsán geometrický princip, jakým ji lze sestrojít, případně také obecné odvození. Popisy množin jsou doplněny čtenými obrázky vytvořenými v programu GeoGebra.

Kromě samotného zkoumání množin bylo také cílem práce vytvořit sadu úloh, na nichž lze princip práce s manhattanskou a případně maximovou metrikou ukázat žákům různých věkových kategorií. Komentáře k úlohám uvedené v kapitole 4 jsou určeny pro učitele, přičemž nabízí nejen řešení úloh, ale také doplňující otázky. S jejich pomocí lze studentům základních i středních škol nastínit poměrně pokročilou problematiku a zároveň prohloubit znalosti oblasti školské geometrie zabývající se množinami bodů.

Dalším případným prohloubením této práce by mohly být online nástroje umožňující dynamické zkoumání popsaných množin, jako byl například citovaný zdroj [9].

Během zkoumání různých množin v rámci 2. a 3. kapitoly si čtenář mohl všimnout časté podobnosti mezi tvarem množiny v manhattanském a v maximovém metrickém prostoru. Tato podobnost není náhodná, stačí, když se zaměříme na vzhled kružnice, kterou poté často používáme ke konstrukci dalších množin. Jedná se vždy o hranici čtverce, který je pouze jinak otočený vůči kartézské soustavě souřadnic a v mírně jiném měřítku. Často bychom tak mohli například množinu v maximovém metrickém prostoru získat pouhým správným otočením a „zvětšením“ (jednalo by se o otočení kolem počátku soustavy souřadnic a stejnolehlost s vhodným koeficientem) stejné množiny sestrojené s využitím manhattanské metriky. Také tento vztah mezi oběma metrikami by mohl být zajímavým rozšířením této práce.

Seznam použité literatury

- [1] Čech E. *Bodové množiny*. 2. rozšířené vydání. Academia, Praha, 1966.
- [2] Bruna J. *Vybrané objekty v neeukleidovských metrikách*. Univerzita Karlova v Praze, Praha, 2012.
- [3] Sutherland W.A. *Introduction to Metric and Topological Spaces*. Open university set book. Clarendon Press, 1975.
- [4] Pomykalová E. *Planimetrie*. Dotisk 4. vydání. Prometheus, Praha, 2002.
- [5] Harant M., Lanta O., Menšík M., and Urban A. *Deskriptivní geometrie pro II. a III. ročník SVVŠ*. Státní pedagogické nakladatelství, n. p., Praha, 1965.
- [6] E., Kočandrle and L., Boček. *Analytická geometrie*. Dotisk 2., upraveného vydání. Prometheus, Praha, 1995.
- [7] Krause E. *Taxicab Geometry*. Dover Publications, Inc., New York, 1986.
- [8] Bruna J. *Manhattanská metrika ve výuce na základní škole*. Univerzita Karlova v Praze, Praha, 2014.
- [9] Lewis H. Taxicab geometry. <https://www.mathscareers.org.uk/taxicab-geometry/>. [Online; 2022-03-03].
- [10] Dvořáková L' and Ponimatkin G. Kuželosečky v neeukleidovských prostorech. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, 93(1):1–14, 2018.
- [11] Veselý J. *Základy matematické analýzy*. Matfyzpress, Praha, 2009.
- [12] Proietti A. *Circuits and algorithms for information processing in pervasive systems*. PhD thesis, Sapienza University of Rome, 2016.

Seznam obrázků

1.1	Vzdálenost bodů v \mathcal{P}_m	5
1.2	Vzdálenost bodů v \mathcal{P}_∞	6
1.3	Kružnice	7
1.4	Osa úsečky	8
1.5	Osa rovnoběžek	10
1.6	Ekvidistanta přímky	11
1.7	Osa různoběžek	12
1.8	Elipsa	13
1.9	Hyperbola	13
1.10	Parabola	14
2.1	Kružnice v ϱ_m	15
2.2	Osa úsečky v ϱ_m I	16
2.3	Osa úsečky v ϱ_m II-1	17
2.4	Osa úsečky v ϱ_m II-2	18
2.5	Osa úsečky v ϱ_m III 1. a 2. část	18
2.6	Osa úsečky v ϱ_m III různé varianty	19
2.7	Vzdálenost bodu a přímky	20
2.8	Vzdálenost bodu a přímky	20
2.9	$ k \leq 1$ (vlevo), $ k > 1$ (vpravo)	21
2.10	Osa rovnoběžek v \mathcal{P}_m I	22
2.11	Osa rovnoběžek v \mathcal{P}_m pro $ k \leq 1$ (vlevo) a $ k > 1$ (vpravo)	22
2.12	Ekvidistanta přímky v \mathcal{P}_m I	23
2.13	Ekvidistanta přímky v \mathcal{P}_m II	23
2.14	Osy různoběžek I	24
2.15	Osy různoběžek II	24
2.16	Osy různoběžek III	25
2.17	Osy různoběžek IV	26
2.18	Bodová konstrukce elipsy v \mathcal{P}_e	27
2.19	Bodová konstrukce elipsy v \mathcal{P}_m I	28
2.20	Bodová konstrukce elipsy v \mathcal{P}_m II	29
2.21	Elipsa v \mathcal{P}_m – různé varianty	30
2.22	Bodová konstrukce hyperboly v \mathcal{P}_e	31
2.23	Bodová konstrukce hyperboly v \mathcal{P}_m	31
2.24	Hyperbola v \mathcal{P}_m I	32
2.25	Konstrukce hyperboly v \mathcal{P}_m II-1	33
2.26	Konstrukce hyperboly v \mathcal{P}_m II-2	33
2.27	Hyperbola v \mathcal{P}_m II	34
2.28	Hyperbola v \mathcal{P}_m III	34
2.29	Bodová konstrukce paraboly v \mathcal{P}_e	35
2.30	Konstrukce paraboly v \mathcal{P}_m I-1	35
2.31	Konstrukce paraboly v \mathcal{P}_m I-2	36
2.32	Parabola v \mathcal{P}_m I	36
2.33	Konstrukce paraboly v \mathcal{P}_m II	37
2.34	Parabola v \mathcal{P}_m II	37

2.35	Parabola v \mathcal{P}_m III	37
3.1	Kružnice v \mathcal{P}_∞	39
3.2	Konstrukce osy úsečky v \mathcal{P}_∞ I	39
3.3	Osa úsečky v \mathcal{P}_∞ I	40
3.4	Konstrukce osy úsečky v \mathcal{P}_∞ II	40
3.5	Osa úsečky v \mathcal{P}_∞ II	41
3.6	Konstrukce osy úsečky v \mathcal{P}_∞ III	41
3.7	Osa úsečky v \mathcal{P}_∞ III	42
3.8	Vzdálenost bodu od přímky v \mathcal{P}_∞ I	43
3.9	Vzdálenost bodu od přímky v \mathcal{P}_∞ II	43
3.10	Osa rovnoběžek v \mathcal{P}_∞ I	44
3.11	Osa rovnoběžek v \mathcal{P}_∞ II	45
3.12	Konstrukce ekvidistanty v \mathcal{P}_∞	46
3.13	Ekvidistanta v \mathcal{P}_∞	46
3.14	Osy různoběžek v \mathcal{P}_∞ I	47
3.15	Osy různoběžek v \mathcal{P}_∞ II	47
3.16	Osy různoběžek v \mathcal{P}_∞ III	48
3.17	Osy různoběžek v \mathcal{P}_∞ IV	48
3.18	Osy různoběžek v \mathcal{P}_∞ V	49
3.19	Konstrukce elipsy v \mathcal{P}_∞ I-1	50
3.20	Konstrukce elipsy v \mathcal{P}_∞ I-2	51
3.21	Elipsa v \mathcal{P}_∞ I	51
3.22	Konstrukce elipsy v \mathcal{P}_∞ II-1	52
3.23	Konstrukce elipsy v \mathcal{P}_∞ II-2	52
3.24	Elipsa v \mathcal{P}_∞ II	53
3.25	Konstrukce hyperboly v \mathcal{P}_∞ I	53
3.26	Konstrukce hyperboly v \mathcal{P}_∞ II	54
3.27	Konstrukce hyperboly v \mathcal{P}_∞ III	54
3.28	Konstrukce hyperboly v \mathcal{P}_∞ IV	55
3.29	Hyperbola v \mathcal{P}_∞	55
3.30	Konstrukce paraboly v \mathcal{P}_∞ I	56
3.31	Konstrukce paraboly v \mathcal{P}_∞ II	56
3.32	Konstrukce paraboly v \mathcal{P}_∞ III	57
3.33	Konstrukce paraboly v \mathcal{P}_∞ IV	57
3.34	Parabola v \mathcal{P}_∞	58
4.1	Petrova cesta do školy	60
4.2	Lenčiny vycházky	61
4.3	Rande Marie a Karla	62
4.4	Nákupy pana Davida	63
4.5	Bedřichova cesta do práce	65
4.6	Schovávaná	65
A.1	Mapa části Kolmova s Petrovým domovem a školou	74
A.2	Petrova cesta do školy	75
A.3	Lenčiny vycházky	76
A.4	Rande Marie a Karla	77
A.5	Nákupy pana Davida	78

A.6	Mapa Vodní čtvrti s domovem a prací Bedřicha	79
A.7	Bedřichova cesta do práce	80
A.8	Schovávaná	81
A.9	1. Petr	82
A.10	2. Lenka	82
A.11	3. Marie a Karel	83
A.12	4.1. David	83
A.13	4.2. David	83
A.14	5. Bedřich	83
A.15	6. Tereza a Lucie	83

Seznam použitých zkratk

búno bez újmy na obecnosti

KSS kartézská soustava souřadnic

A. Příloha

Aplikační úlohy na neeukleidovské metricky

Zuzana Skálová

Na výletě v Kolmově

V rukou nyní držíte pracovní listy s úlohami, které jsou zasazeny do prostředí fiktivního města Kolmova. V životě a obzvláště v matematice se jistě často setkáváte s pojmem vzdálenost. V matematických úlohách, početních či geometrických, máme většinou na mysli vzdálenost dvou bodů (případně jiných objektů) jako délku jejich spojnice. Například při použití mapy ji nazýváme vzdáleností „vzdušnou čarou“. Toto pojetí vzdálenosti vypadá rozumně; abychom zjistili, jak jsou dva body, případně jiné objekty, od sebe daleko, půjdeme jednoduše přímo od jednoho k druhému. V různých případech z našeho každodenního života nám ale vzdálenost dvou míst vzdušnou čarou příliš praktické informace neposkytne. Jestliže se ptáme, jak je to daleko autem z Prahy do Brna, musíme měřit délku silnice, která se různě zatáčí, nejen doprava a doleva, ale také má určité převýšení, takže celkem nepochybně ujedeme delší trasu, než kdybychom na mapě spojili obě města úsečkou a s pomocí měřítka spočítali její délku. Ani když se rozmyšlíme, za jak dlouho zvládneme z domova dojít pěšky do školy či práce o pár ulic dál, nebudeme vzdálenosti vzdušnou čarou uvažovat, jelikož po cestě několikrát zabočíme a ujdeme tak trasu určitě o něco delší.

A to už se dostáváme k podstatě následujících úloh. Abychom se nemuseli zabývat složitým systémem nepravidelných ulic či převýšením kopcovitého terénu, celá sada úloh je zasazena do fiktivního města Kolmova, které je příhodně pravidelné. Svůj název získalo podle rozložení jednotlivých ulic, které přesně odpovídá čtvercové síti. Ulice, které se navzájem křižují, svírají pravý úhel, zároveň celé město leží na rovině. Abychom měli práci co nejsnazší, zavedeme ještě několik jednoduchých pravidel:

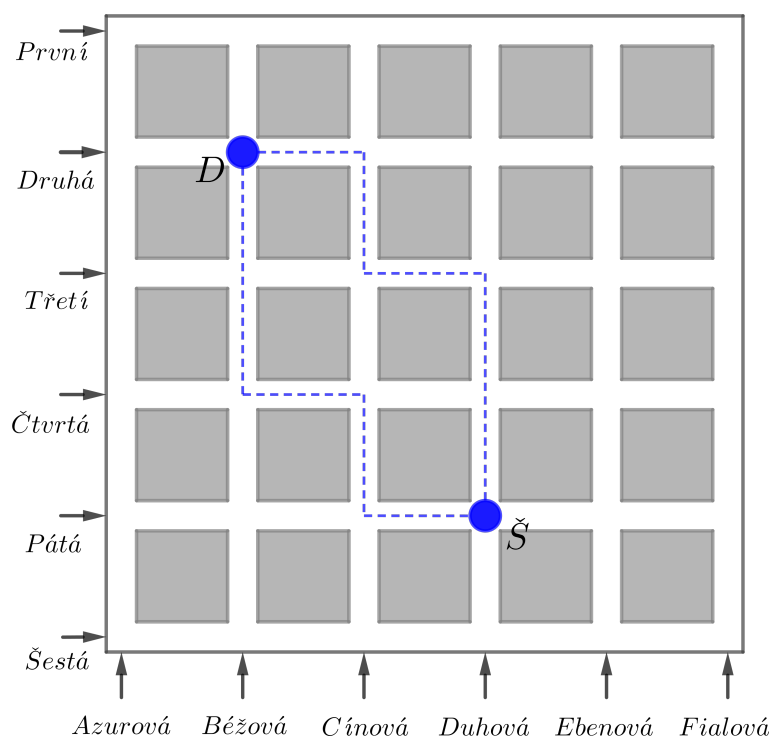
1. Šířku ulic v úlohách zanedbáváme, budeme s nimi pracovat jako s úsečkami.
2. Budeme se vždy zabývat jen vzdálenostmi mezi křižovatkami.
3. Vzdálenost sousedních křižovatek položíme rovnou 1.

V jednotlivých úlohách budeme řešit různé situace týkající se obyvatel Kolmova. Princip úloh ukážeme na první řešené úloze:

Řešený příklad: Petr začne od září chodit do nové školy a zkoumá, kudy to bude mít do školy nejbliž. V obrázku A.1 je znázorněna mapa části Kolmova i s názvy ulic. Petr bydlí na křižovatce Druhé ulice s Běžovou, škola se nachází na rohu Páté se Duhovou ulicí.

Otázky:

1. Jak dlouhá je nejkratší cesta z Petrova domova (D) ke škole ($Š$)?
2. Existuje jenom jedna nejkratší cesta, nebo má Petr více možností?



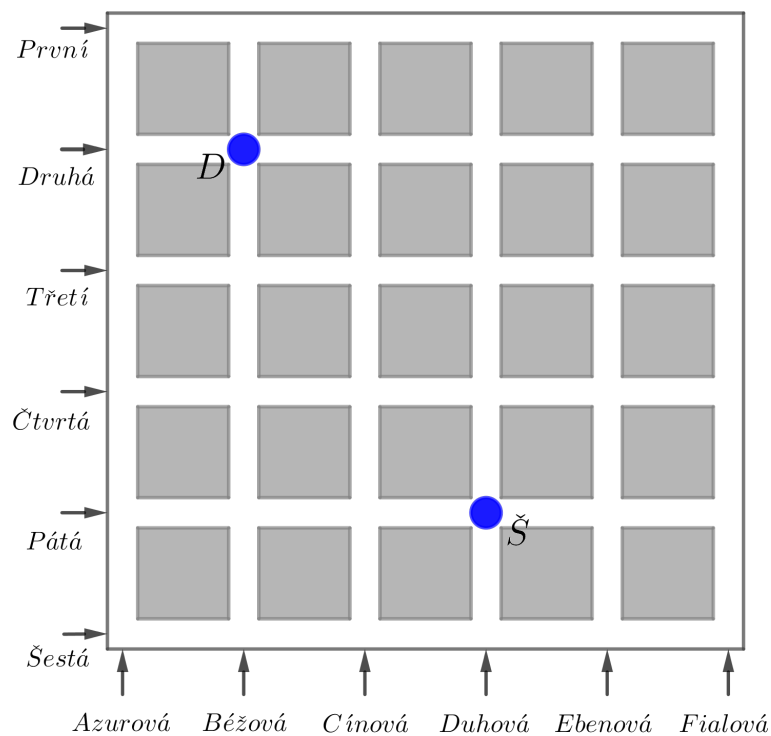
Obrázek A.1: Mapa části Kolmova s Petřovým domem a školou

Řešení: Po cestě do školy musí Petr překonat cestu o délce 3 v jednom směru ulic a cestu o délce dva v druhém směru ulic, celkem je tedy cesta dlouhá 5. Možných tras existuje více, v obrázku jsou zakresleny dvě varianty. Modře vyznačená varianta obsahuje nejprve cestu dva bloky Běžovou ulicí, poté Petr zabočí doleva a půjde jeden blok Čtvrtou ulicí, doprava jeden blok Cínovou ulicí a na závěr doleva jeden blok Pátou ulicí. V případě, že dodržíme počet bloků ujitých v obou směrech, můžeme Petrovi pomoci nalézt další možné trasy.

1. Petrova cesta do školy

Zadání: V úvodním řešeném příkladu jsme se seznámili s Petrem, který hledal nejkratší cestu z domu do školy. Pomůžete Petrovi nalézt další varianty trasy, aby nemusel chodit každý den stejnou cestou?

Otázka: Kolik různých tras délky 5 existuje mezi Petrovým domovem a školou?

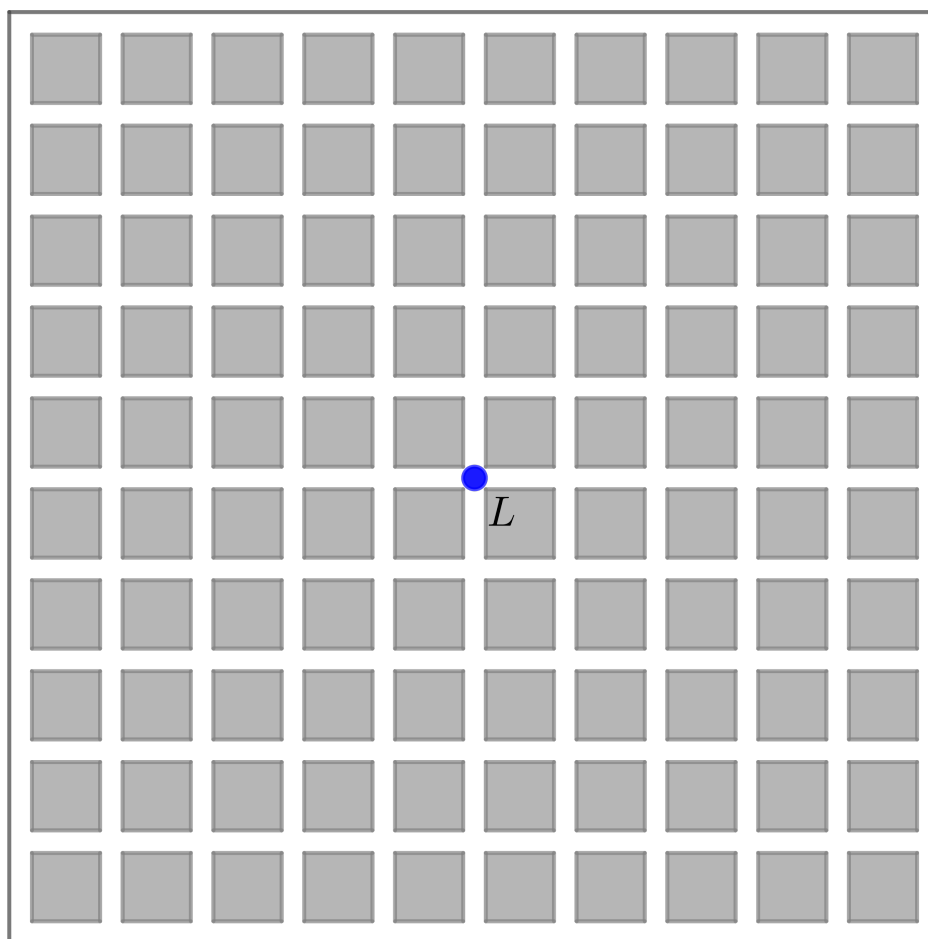


Obrázek A.2: Petrova cesta do školy

2. Lenčiny vycházky

Zadání: Lenka měla nedávno úraz nohy, kterou má nyní posilovat pravidelnými zdravotními procházkami. Aby si nohu nepřetížila, smí ujít každý den trasu dlouhou maximálně 10 (celkem od domova zpět k domovu).

Otázka: Na jaká nejvzdálenější místa může Lenka ze svého bydliště (L) dojít?

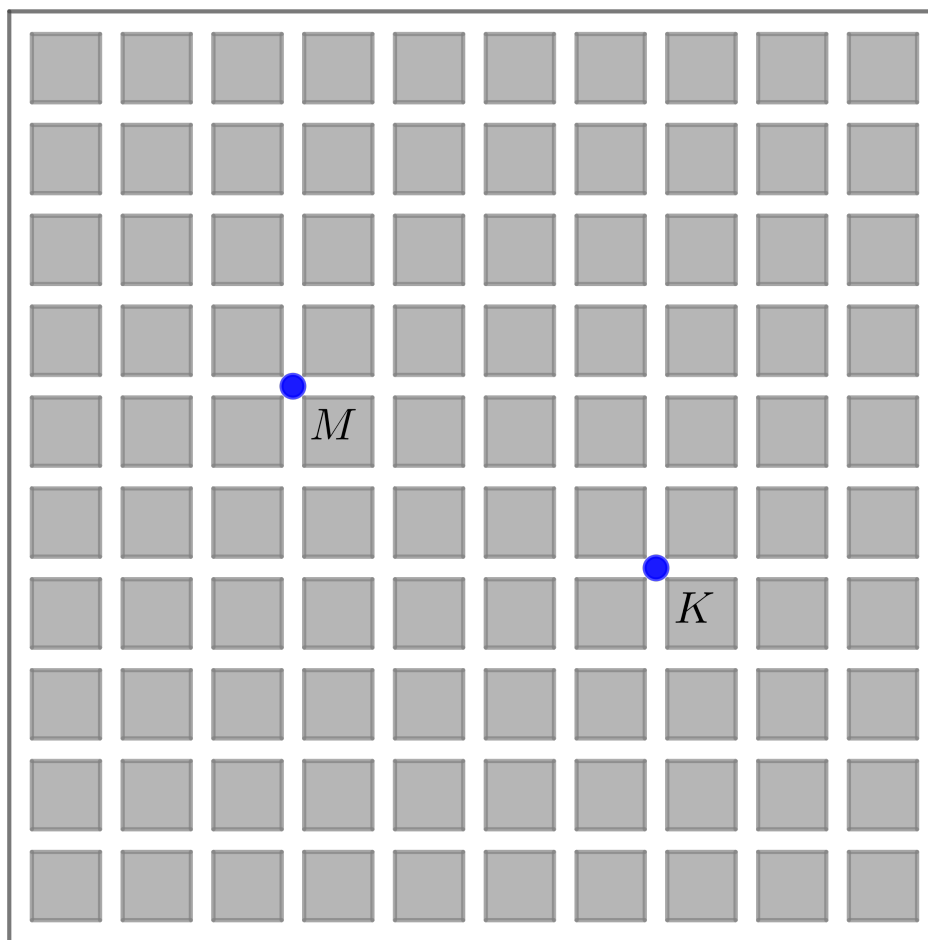


Obrázek A.3: Lenčiny vycházky

3. Marie a Karel na rande

Zadání: Mladá dvojice Marie (M) a Karel (K) z Kolmova si domluvila způsob potkávání na společných schůzkách s několika pravidly. Chtějí společně poznat co nejlépe své město, a tak spolu chodí na procházky. Aby nebyla procházka nikdy stejná, pokaždé se potkají na jiném místě, odkud vyrazí. Domluvili se, že na místo setkání to vždy musí mít oba přesně stejně daleko ze svého bydliště.

Otázka: Na jakých místech ve vyznačené části města se Marie s Karlem mohou potkávat?



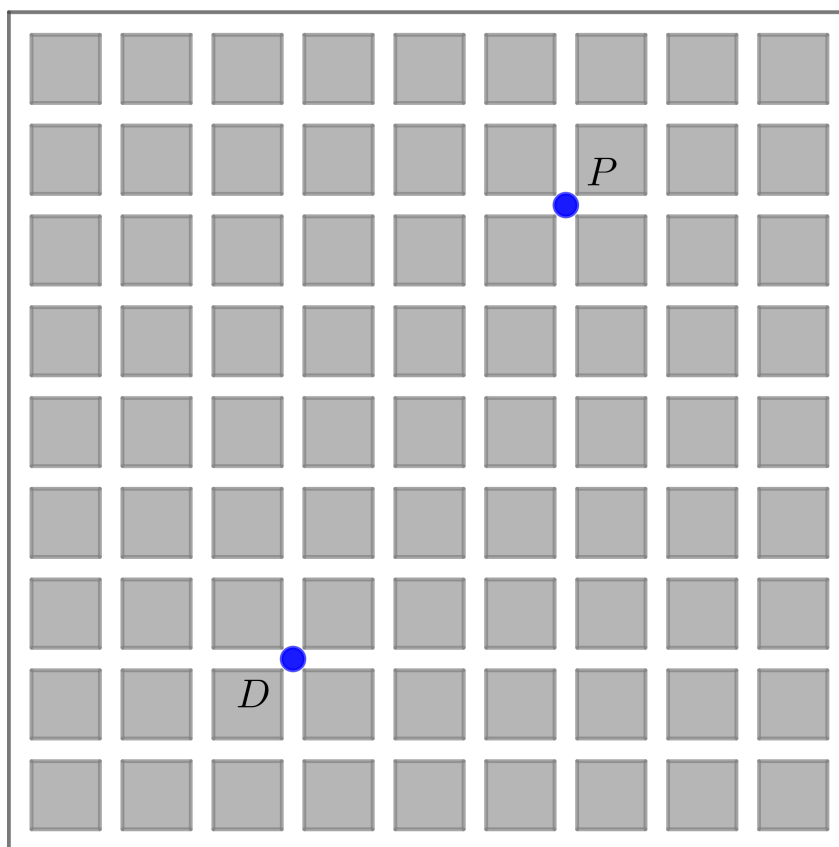
Obrázek A.4: Rande Marie a Karla

4. Nákupy pana Davida

Zadání: Pan David z Kolmova každé odpoledne vyrazí přesně ve 3 hodiny z práce (P) a v půl čtvrté vyzvedává děti v družině (D). Cestou z práce k družině ale potřebuje ještě nakoupit potraviny na večeri. Ve městě Kolmov je naštěstí obchod doslova na každém rohu. Cesta mezi sousedními rohy trvá panu Davidovi jednu minutu, z práce do obchodu i z obchodu do družiny jezdí vždy nejkratší možnou cestou.

Otázky:

1. Do kterých obchodů může pan David jezdit nakupovat, aby stihl děti vyzvednout včas, pokud nákupem potravin stráví 20 minut?
2. Do kterých obchodů může pan David jezdit, aby mu cesta i s nákupem trvala právě 30 minut? Zde předpokládáme, že cestu z práce do obchodu i z obchodu do družiny vždy absolvuje nejkratší možnou trasou.

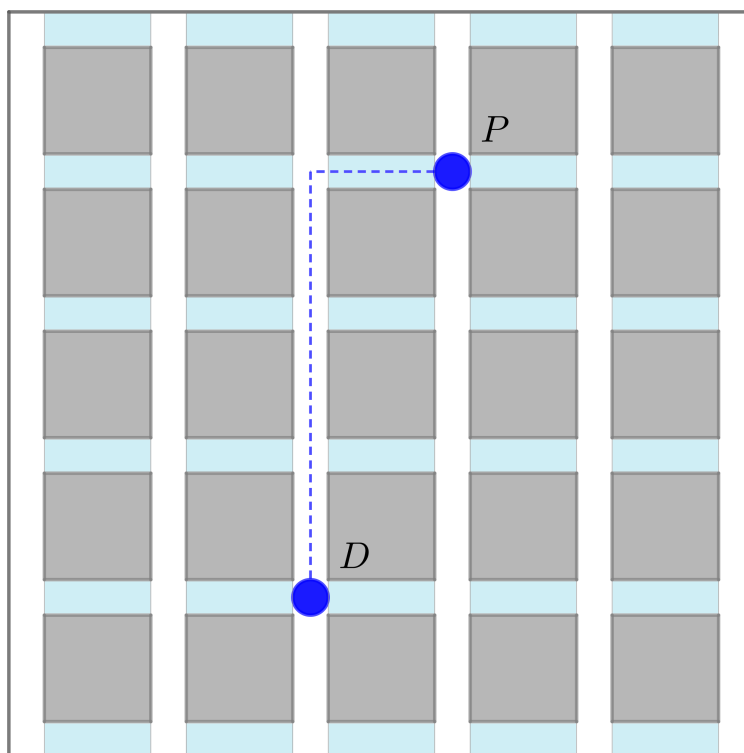


Obrázek A.5: Nákupy pana Davida

V následujících úlohách se přesuneme do jiné Kolmovské čtvrti, která leží na kraji přilehlého jezera. Čtvrť s příhodným názvem Vodní má stejný systém ulic jako zbytek Kolmova, pouze s jedním podstatným rozdílem. Místo všech ulic v jednom směru jsou zde vodní kanály, po kterých se obyvatelé pohybují na lodičkách. Klasické ulice v druhém směru jsou výše nad hladinou, přes jednotlivé kanály vedou v místě křižovatky mosty, takže se lze pohybovat ulicí rovně bez problému. Stejně tak po kanálu lze bez problému projíždět v lodičce pod mosty. U každého mostu lze nastoupit či vystoupit z lodičky. První úloha je opět zčásti uvedena i s řešením:

Řešený příklad: Bedřich z Vodní čtvrti cestuje každé ráno z domu (D) do práce (P) o několik ulic dál.

Otázka: Jak dlouhá je nejkratší možná trasa, kterou Bedřich každé ráno urazí?



Obrázek A.6: Mapa Vodní čtvrti s domovem a prací Bedřicha

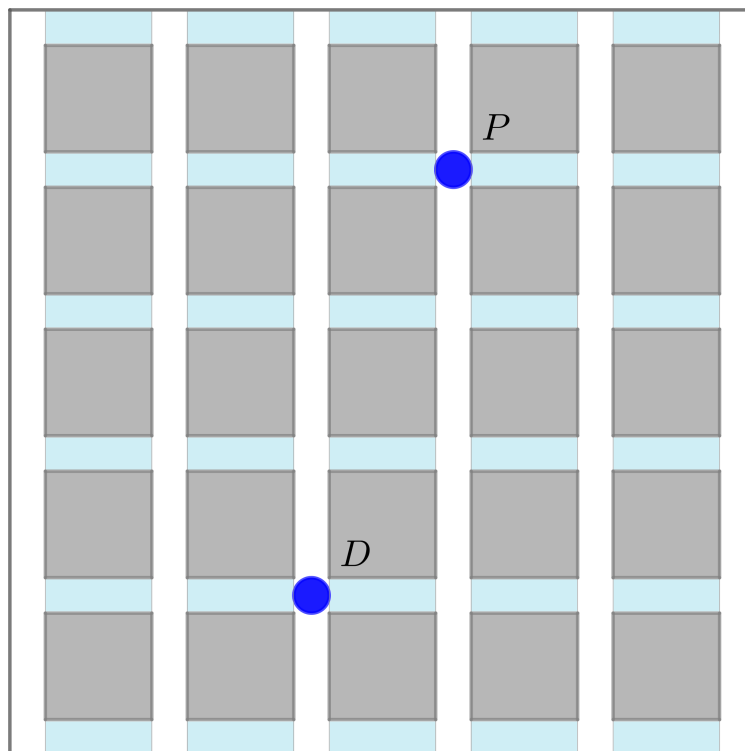
Řešení: Způsob pohybu osob ve Vodní čtvrti se liší, ovšem vzdálenosti nikoli. Nejkratších cest, jak se může Bedřich dopravit do práce je více, ale všechny se budou skládat z trasy délky 3 vedoucí po silnici a z trasy délky 1 po kanálu. Dohromady má tedy Bedřichova cesta do práce délku 4.

5. Bedřichova cesta do práce

Zadání: Bedřich z Vodní čtvrti cestuje každé ráno z domu (D) do práce (P) o několik ulic dál. Z předchozí řešené úlohy víme, že Bedřich ráno urazí trasu o délce 4.

Otázky:

1. Kolik různých tras délky 4 může Bedřich po cestě do práce využít?
2. Jaký je nejmenší a největší možný počet přestupů mezi kanálem a silnicí, které musí Bedřich během cesty absolvovat?
3. Jak velkou část trasy stráví na lodičce a jak velkou na běžné silnici?

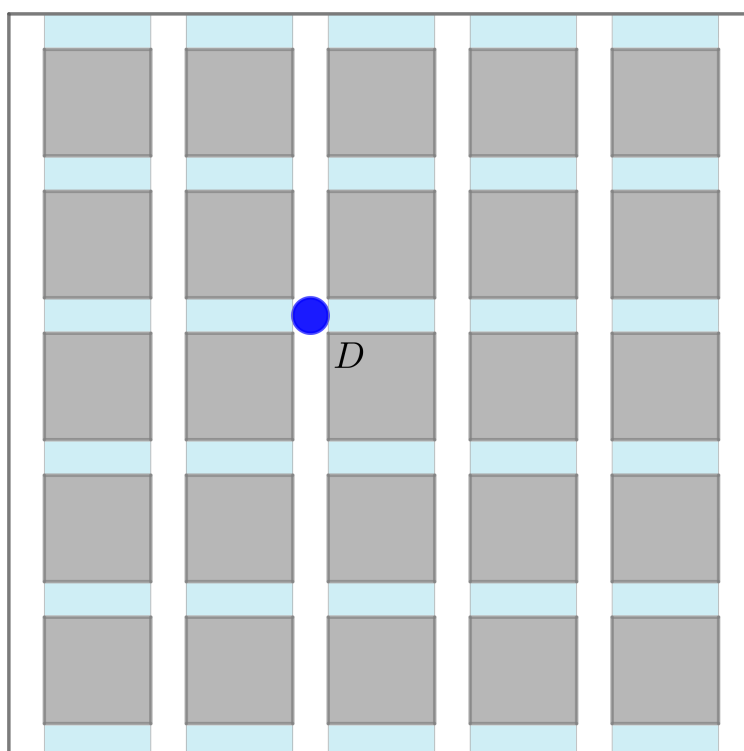


Obrázek A.7: Bedřichova cesta do práce

6. Tereza a Lucie hrají na schovávanou

Zadání: Dvě kamarádky, Tereza a Lucie, které bydlí ve stejném domě na rohu ulice, si spolu rády hrají venku na schovávanou. Od rodičů mají dovoleno se schovávat jen v omezené vzdálenosti od domova (D), aby se neztratily, maximálně se mohou vzdálit o 2 po silnici a o 2 na lodičce.

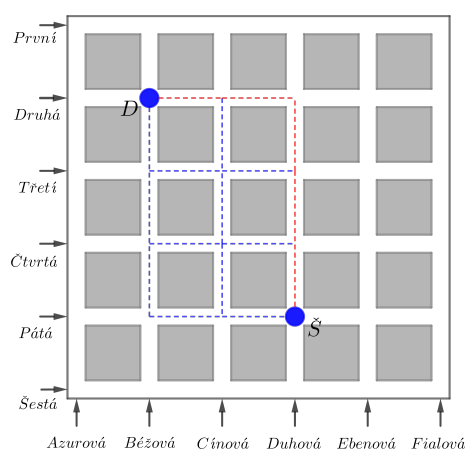
Otázka: Na která místa ve městě se mohou děvčata schovat?



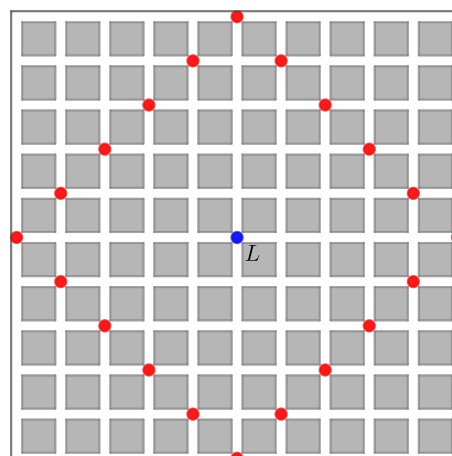
Obrázek A.8: Schovávaná

Řešení úloh

1. 10 cest viz obr. A.9
2. 20 různých bodů viz obr. A.10
3. 11 bodů viz obr. A.11
- 4.1. viz obr. A.12
- 4.2. viz obr. A.13
- 5.1. 4 různé cesty viz obr. A.14
- 5.2. Nejmenší možný počet je 1 a největší 2, přestup na začátku a konci trasy neuvažujeme.
- 5.3. Cesta na lodičce odpovídá vzdálenosti 1, cesta po silnici vzdálenosti 3.
6. viz obr. A.15



Obrázek A.9: 1. Petr



Obrázek A.10: 2. Lenka

