Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Valerie Bártů

Slovní úlohy o pohybu a strategie jejich řešení

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.
Studijní program: Specializace v pedagogice
Studijní obor: Matematika (jednoobor)

Praha 2022

Prohlášení

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Slovní úlohy o pohybu a strategie jejich řešení potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 26. června 2022 Valerie Bártů

Poděkování

Tímto bych ráda poděkovala prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., za trpělivost a ochotu, kterou mi v průběhu zpracování bakalářské práce věnovala. Velmi si vážím její pomoci, rad i připomínek, kterými přispěla k tvorbě této práce.

Abstrakt

Tato práce se zabývá slovními úlohami o pohybu určenými jak pro žáky druhého stupně základní školy, tak pro žáky středních škol (resp. gymnázií) a celkové strategii jejich řešení od správné interpretace zadání až po užití vhodných vzorců a algebraických úprav.

V první části se věnuji vymezení pojmu slovní úloha, její funkci, významu ve výuce a některým důvodům, proč je právě tato součást hodin matematiky u mých žáků nejméně oblíbená. Dále se zmiňuji o historii slovních úloh a jejich rozdělení včetně postupu řešení.

Ve druhé, teoretické části se zaměřuji na znalost teorie o pohybu. Přehledně zde shrnuji všechny poznatky, potřebné pro řešení úloh v následující části práce. Vymezuji pojem pohyb, rozděluji pohyby do jednotlivých typů a u každého odvozuji několik základních vzorců pro výpočty spojené se slovními úlohami o pohybu.

Třetí část je sbírka řešených úloh, které jsou rozděleny do kapitol podle typu pohybu z předchozí části práce a podle obtížnosti a jejich zařazení ve výuce (od základoškolských po středoškolské).

Klíčová slova

slovní úlohy, pohyb, slovní úlohy o pohybu, dráha, rychlost, čas, zrychlení

Title: Solving strategies of motion word problems

Abstract

This thesis deals with motion word problems intended for both lower secondary and grammar school students and the overall strategy of their solution from the correct interpretation of the assignment to the use of appropriate formulas and algebraic adjustments.

In the first part I deal with the definition of the term word problem in general and the question why this part of mathematics lessons is the least popular among my students. I also deal with the history of word problems and their categorization according to the method of solution.

In the second, theoretical part, I focus on the theory of motion. Here I summarize all the necessary knowledge for solving motion word problems in the following part of the work. I define the concept of motion, divide movements into individual types, and for each I derive several basic formulas for calculations associated with verbal tasks about movement.

The third part is a collection of solved word problems, which are divided into chapters according to the type of motion as it is defined in the previous part of the thesis and according to difficulty and their integration in teaching (from primary and lower secondary to upper secondary schools).

Keywords

word problems, motion, motion word problems, trajectory, speed, time, acceleration

OBSAH

1 Úvod

Jedním z cílů této práce je ukázat na důležitost slovních úloh a jejich zásadní roli v hodinách matematiky i v životě. V celé práci čerpám z odborné literatury a vlastních zkušeností s řešením úloh z dosavadní praxe. Slovní úlohy, jak bude upřesněno v textu, rozvíjejí hlavně schopnost správně interpretovat matematický text, převádět informace získané ze zadání do reálných situací, abychom byli ve svém životě schopni sami zvážit, která informace je pro nás relevantní a která ne, schopni sami si něco spočítat, sami se rozhodovat, a získat tak základní matematickou gramotnost. Vlastně jakákoliv otázka, kterou si člověk v životě položí, je svým způsobem slovní úlohou a různé otázky vyžadují různé způsoby řešení. Někdy je metodou řešení jen prosté rozhodnutí, nebo zvážení pro a proti, někdy naopak samotné hledání odpovědi vyžaduje čas, získávání informací a podkladů pro naše rozhodnutí a stejně jako v matematice, správných odpovědí může být více, žádná, nebo pouze jedna. Ale my do poslední chvíle nevíme, zdali bylo naše rozhodnutí (resp. řešení) správné, dokud si to neověříme, nebo dokud se neukáže, že správné nebylo.

Vybrala jsem ke zpracování slovní úlohy o pohybu, což je kapitola, která se v poslední době z učebnic matematiky téměř vytratila a buď se přesunula do učebnic fyziky, nebo zmizela úplně. Dalším cílem je sestavit tuto práci jako příručku pro žáky a učitele, v níž naleznou přehledně zpracovanou teorii k většině typů pohybu, včetně vzorově řešených a komentovaných úloh.

2 O slovních úlohách obecně

2.1 Vymezení pojmu

„Co znamená pojem slovní úloha?“ Odpověď na tuto otázku hledalo již mnoho učitelů i žáků. V následujících odstavcích uvedu několik definic pojmu slovní úloha z odborné literatury. Vybrala jsem autory, s jejichž publikacemi jsem se setkala v průběhu studia a ve své praxi. Definice těchto autorů jsem seřadila sestupně podle toho, které dle mého názoru nejpřesněji vymezují pojem slovní úloha a kterým bez větších problémů porozumí i čtenář, „nezasvěcený“ do problematiky.

„Slovní úlohy jsou úlohy, v nichž je obvykle popsána určitá reálná situace (např. s ekonomickou, přírodní, fyzikální, společenskou či jinou tématikou) a úkolem řešitele je určit odpovědi na položené otázky.“ (Kuřina, 1990, s. 61)

Kuřinova definice je první v pořadí, protože jasně a stručně popisuje všechny důležité aspekty slovní úlohy. Obsahuje přirovnání slovní úlohy k reálné situaci a jasně stanovuje úkol řešitele.

„Slovními úlohami ve školské matematice se rozumí všechny takové úlohy, jejichž zadání i položené otázky nejsou vyjádřeny pomocí matematické symboliky, ale jsou vyjádřeny ve slovní formě.“ (Polák, 2014, s. 141)

Polák ve své definici, narozdíl od Kuřiny, slovní úlohou rozumí jakékoli zadání a otázku, vyjádřenou ve slovní formě. To je v rozporu s mým názorem, že slovní úloha by měla popisovat, nebo alespoň se týkat nějaké reálné životní situace.

Odvárko (1995) definuje slovní úlohy takto: „slovními úlohami rozumíme ve školské matematice takové úlohy, v jejichž zadání se vyskytují objekty, jevy a situace (se svými rozmanitými vlastnostmi a vztahy) z nejrůznějších mimomatematických oblastí.“ (Novotná 2000, s. 10).

Odvárkova definice je v pořadí třetí z (pro mě) nejsrozumitelnějších definic, ale omezuje se zde pouze na zadání, ve kterých se objevují objekty a situace z mimomatematických oblastí.

Blažková ve svých publikacích uvádí více definic. Vybrala jsem proto definici z roku 1993, kterou Blažková následně rozšiřuje a upřesňuje v roce 2007. Pro jejich srovnání je uvedu v pořadí za sebou, přestože druhou definici Blažkové bych zařadila na druhé místo, dle kritérií stanovených v úvodu kapitoly.

„Slovními úlohami rozumíme takové úlohy, v nichž je souvislost mezi danými a hledanými údaji vyjádřena slovní formulací a v nichž je třeba na základě vhodných úvah zjistit, jaké operace je třeba provést s danými údaji, abychom došli k údajům, které máme určit." (Blažková, 1993. s. 35)

„Slovními úlohami rozumíme takové úlohy, ve kterých je souvislost mezi danými a hledanými údaji vyjádřena slovní formulací. Pomocí vhodných úvah zjišťujeme, jaké početní operace je potřeba provést se zadanými údaji, abychom mohli odpovědět na otázku slovní úlohy. Principem řešení těchto úloh je vytvoření matematického modelu konkrétní situace vyjádřené textem úlohy. Přechod od reálné situace k příslušnému matematickému modelu se nazývá matematizace reálné situace. Tímto rozumíme vyjádření vztahů mezi zadanými údaji a hledaným výsledkem v matematickém jazyce. Vyřešením získané matematické úlohy získáme výsledek, který musíme konfrontovat se zadáním slovní úlohy." (Blažková, 2007, s. 4)

První z definic Blažkové je pro mě ze všech ostatních výše uvedených nejvíce „krkolomná" a nekonkrétní, ale přesto svým způsobem čtenáři přibližuje pojem slovní úloha a popisuje i postup řešení.

Druhá, rozšířená autorčina definice je již mnohem konkrétnější a detailněji popisuje princip řešení úloh. Vyskytuje se v ní přirovnání úlohy k reálné situaci a její matematizace. Je zde jasně popsán úkol řešitele i následná kontrola získaných výsledků. Tato definice by se ve mnou určeném pořadí mohla rovnat definici od Kuřiny.

V této práci budeme nahlížet na slovní úlohu jako na slovy psané zadání, které se skládá z údajů a otázek, popisující reálné situace s minimem matematických symbolů a jehož úplného řešení můžeme dosáhnout zvolením správného postupu a užitím vhodných matematických operací.

2.2 První zmínky o slovních úlohách

Dějiny slovních úloh sahají stejně daleko, jako dějiny samotné matematiky. Tedy do doby, kdy matematika ještě nebyla vnímána jako samostatný obor. Původ a celkový vznik matematiky spočívá v lidské potřebě umět počítat, umět sdělit číslo, umět popsat velikosti, tvary a dorozumět se díky tomu s ostatními lidmi.[1]

Jedny z nejstarších záznamů matematických textů jsou dva papyry, které pocházejí ze starověkého Egypta z let 1850 př. n. l. a 1650 př. n. l. Starší, Goleniščenův papyrus obsahuje 25 úloh a mladší, obsáhlejší, Rhindův papyrus přepisuje 87 řešených úloh z dokumentu ještě o 200 let staršího, které jsou uspořádány do tematických okruhů a výpočty se provádějí převážně ve zlomcích.

Příklady úloh z Rhindova papyru:

Text úlohy č. 44: *Metoda počítání čtverhrané sýpky, jejíž délka je 10, šířka 10 a výška 10. Co je to, co do ní vejde v pytlích obilí?*

---

[1] FOLTA, Jaroslav. *Dějiny matematiky I*. Praha, 2004, s. 37-38

Řešení.

Počítej s 10 10krát, vyjde 100. Počítej se 100 10krát, vyjde 1 000. Připočítej $\frac{1}{2}$ z 1 000, je to 500, vyjde 1 500. To je její objem v pytlích.

Text úlohy č. 51: *Řekne-li se ti: trojúhelník, jenž má 10 chet na výšku a jeho základna 4 chet. Jaký je obsah jeho plochy?*

Řešení.

Spočítej $\frac{1}{2}$ ze 4, je to 2, pro udání jeho obdélníku. Počítej s 10 2krát, je to 20, to je obsah jeho plochy. [2]

Matematické texty se dochovaly nejen z Egypta, ale mladší záznamy byly nalezeny i v Mezopotámii, Indii a Číně. Slovní úlohy však existovaly mnohem dříve, i když v nepsané formě. Aniž by to tušili, řešili staří Egypťané slovní úlohy již při stavbě pyramid.[3]

Každá otázka, kterou si tehdy položili při stavbě, byla zároveň slovní úlohou, k jejímuž řešení museli využít základní znalosti astronomie, geometrie a počítání s velkými čísly. Odkaz na tuto dávnou historii můžeme dnes nalézt například v učebnici Matematika od autorů Hejný, Šalom a Jirotková, a to v kapitolách s názvy: *Egyptské dělení chleba*, *Indické násobení.*

2.3 Funkce slovních úloh ve výuce i v životě

Narozdíl od dob dávno minulých se v současnosti, v době povinné školní docházky, se slovními úlohami setká každé dítě. Jak jsem již popisovala výše, slovní úlohy jsou nedílnou součástí výuky matematiky, jejich témata nám pomáhají orientovat

---

[2] VYMAZALOVÁ, Hana. *Staroegyptská matematika: Hieratické matematické texty*. Praha, 2006. s. 126, 128

[3] BEČVÁŘ, Jindřich, Martina Bečvářová a Hana Vymazalová. *Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie*. Praha, 2003, s. 200-202

se v životě, přibližují a propojují matematiku s reálnými situacemi, které mohou nastat v průběhu života každého z nás. Přestože je slovní úloha žáky neoblíbené téma, je třeba si uvědomit, že právě slovní úloha dokáže propojit abstraktní kapitoly v hodinách matematiky, zodpovědět otázky typu *„K čemu mi to bude?"*, *„Kdy tohle využiji v reálném životě?"* a udělat z nezajímavých pouček, definic a vzorců věc, která bude dětem užitečná, propojí jejich doposud nabyté znalosti, dá smysl hodinám počítání jedné úlohy za druhou a zapojí jejich logické myšlení bez ohledu na to, jak jsou v matematice dobří.

V rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání (RVP ZV) je slovní úloha vnímána podobně, s tím rozdílem, že při jejím řešení je nezbytné zapojit logické myšlení a jejíž řešení je do velké míry nezávislé na znalostech žáka.

„Důležitou součástí matematického vzdělávání jsou Nestandardní aplikační úlohy a problémy, jejichž řešení může být do značné míry nezávislé na znalostech a dovednostech školské matematiky, ale při němž je nutné uplatnit logické myšlení. Tyto úlohy by měly prolínat všemi tematickými okruhy v průběhu celého základního vzdělávání. Žáci se učí řešit problémové situace a úlohy z běžného života, pochopit a analyzovat problém, utřídit údaje a podmínky, provádět situační náčrty, řešit optimalizační úlohy. Řešení logických úloh, jejichž obtížnost je závislá na míře rozumové vyspělosti žáků, posiluje vědomí žáka ve vlastní schopnosti logického uvažování a může podchytit i ty žáky, kteří jsou v matematice méně úspěšní."[4]

Cílem řešení slovních úloh v matematice podle RVP ZV je porozumění složitosti reálného světa, rozvíjení zkušeností s matematizací reálného prostředí, poznání, že reálný svět je mnohem složitější, než matematický model a uvědomění si, že jednu situaci lze znázornit různými modely a různé situace mohou využívat stejný model. Další dovedností, jež žáky naučí slovní úloha, je kontrola sama sebe, důvěra a schopnost obhájit si vlastní postup.

Novotná (2022) popisuje funkci slovních úloh v hodinách matematiky takto:

[4] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, MŠMT, Praha, 2021, s. 30 - 31.

„Základem úspěšného vyučování matematice je řešení úloh, které pomáhá rozvoji tvořivosti, jejímu rozšiřování a kultivaci. Je ukazatelem stavu porozumění pojmům, kterým se žáci učí. Úlohy pomáhají řešitelům rozhodnout, které předchozí znalosti lze aplikovat v nové situaci, jakou roli tato znalost hraje, která znalost je neužitečná nebo dokonce chybná a stává se překážkou pro další rozvoj jejich znalostí a dovedností."

Všechny tyto získané dovednosti nás provázejí a pomáhají nám vypořádat se s různými životními situacemi. Nejsou tedy užitečné jen v hodinách matematiky, a proto vnímám slovní úlohy jako naprosto nepostradatelnou součást výuky.

2.3.1 Neoblíbenost slovních úloh u žáků a jak tuto skutečnost změnit

V této kapitole čerpám převážně ze svých zkušeností. Výuce matematiky a fyziky se věnuji už tři roky, během této doby jsem působila na několika základních školách od klasických státních až po alternativní soukromé, vedla jsem skupinové i individuální kurzy přípravy na přijímací zkoušky i na maturitu a mohu říci, že s neoblíbeností slovních úloh jsem se setkala ve všech věkových kategoriích. Nezáleží na typu školy, ze které žák pochází, na jejím zaměření nebo na stylu výuky matematiky, slovní úlohy jsou všudypřítomným obávaným tématem nezávisle na snaze učitelů tento fakt změnit.

Ale proč tomu tak je? Proč mají žáci ze slovních úloh takový strach a proč je nebaví úlohy řešit? Jedním z důvodů může být způsob, jakým používají slovní úlohy tradiční učitelé. Ten popisuje Novotná (2022) takto:

„V tradičním pojetí matematiky ve škole učitelé používají úlohy hlavně jako nástroje pro testování, které pomáhají učiteli rozlišit mezi žáky, kteří „rozumějí" látce, a těmi, kteří neuspěli. Žáci vidí úlohy hlavně jako nástroj na hodnocení."

Slovních úloh existuje mnoho typů a každý typ má své způsoby řešení, ale žáci se setkají i s úlohami, které se nedají nikam zařadit a vyžadují logickou úvahu nad postupem, který by mohl vést k výsledku. Největším problémem žáků je správná interpretace zadání, tedy zařazení úlohy a její přirovnání k něčemu, co znají a vědí, jak to řešit. Vondrová popisuje neúspěšnost žáků při řešení slovních úloh takto: *„Žáci jsou v řešení slovních úloh často neúspěšní, a to z různých důvodů. Přirozeně tomu tak může být proto, že nezvládají matematizaci slovní úlohy – nedovedou vytvořit matematický model situace.“*[5]

Ze své zkušenosti mohu říct, že čím delší je zadání úlohy, tím větší je šance, že si ji žák ani nepřečte, natož vyřeší. Tomuto faktu nenapomáhá ani aktuálnost kontextu slovních úloh v učebnicích. Nedivím se, že žáky nebaví dokola počítat s jablky a hruškami nebo s Pepíčkem a Aničkou. Sama mohu potvrdit, že zájem žáků prudce naroste, když vymýšlíme zadání úlohy společně a počítáme například objem popelnic před školou nebo počet koček, které by na houpačce vyvážily traktor. Takže prvním důležitým krokem vpřed je zaujmutí žáka kontextem úloh, a to lze zajistit jedině aktualizací učebnic, nebo vynecháním učebnic a vymýšlením úloh vlastních.

Když už je žák vtažen do děje kontextem úlohy, přichází na řadu odhalení vhodného způsobu řešení. U úloh, které spadají do stejné kategorie způsobu řešení (např. sestavení rovnice), je snadné docílit zvolení správného postupu řešení, pokud s žáky probereme dostatek typových příkladů. Naopak velkým problémem a také velkým nepřítelem žáků jsou logické úlohy, které nevyžadují naučený postup, ale vytvoření nového unikátního řešení pouze pro jednu konkrétní situaci. Takový typ úloh, kde se každá další liší od té předchozí, můžeme s žáky procvičovat velmi dlouho, motivovat je ke snaze odhalit výsledek, snažit se rozvíjet jejich logické myšlení, ale nakonec se stejně najdou jedinci, kteří nebudou logických úvah schopni a úlohy nevyřeší. Z pozice učitele je v takové situaci důležité uvědomit si, že není možné naučit všechny všechno, a podpořit žáky v dalším snažení, aby nenastala právě ta chvíle, kdy žák bez rozdílu označí všechny slovní úlohy jako neřešitelné.

[5] VONDROVÁ, Naďa. *Příčiny používání povrchových strategií řešení slovních úloh a jak jim předcházet*. Učitel matematiky. Vol. 28, 2020, No. 2, s. 66–93

Pokud se úspěšně dostaneme přes zaujmutí žáka kontextem a odhalení vhodného způsobu řešení, je třeba, aby žák dokázal provést samotné řešení správně. Tedy aby uměl správně sestavit rovnici ze zápisu, ovládal úpravy algebraických výrazů, převody jednotek, nedělal numerické chyby apod. Zde nastává chvíle, kdy zužitkujeme předešlé hodiny abstraktního počítání bez kontextu, propojíme je s něčím užitečným a dáme jim v očích žáka konečně smysl. Předešlá teorie je naprosto nezbytná pro úspěšné propojení všech souvislostí a řešení konkrétních situací ve slovních úlohách. A pokud opravdu zajistíme, aby žáci tuto teorii ovládali, bude pro ně mnohem snazší a příjemnější slovní úlohy řešit.

Žáci nemají rádi slovní úlohy, protože se jim ve většině případů zdají nezajímavé, nevidí důvod, proč by se měli dát do řešení takové slovní úlohy, postrádají motivaci a myslí si, že jim to k ničemu není. Často nerozumí zadání a mnohdy se mu ani nesnaží porozumět. Také mají strach, že nenajdou mezi tolika způsoby řešení ten správný, a pokud ano, tak nejsou si jisti například v algebraických úpravách.

A většinu těchto žákovských nejistot jsme my, učitelé, schopni do jisté míry ovlivnit. Zajistíme, aby žáci ovládali potřebnou teorii a práci s čísly, vytvoříme pro ně zajímavá zadání, motivujeme je k přemýšlení nad úlohou a budeme s nimi dostatečně procvičovat, aby získali jistotu v sebe samé, že dokáží rozeznat typ úlohy a vědí, jak jej řešit. Pokud dokážeme naplnit podstatu výše zmíněných bodů, můžeme u žáků dosáhnout větší oblíbenosti slovních úloh.

Novotná (2022) odpovídá na otázku zlepšení výuky slovních úloh takto: *„Vyučování matematice založené na řešení úloh bez předávání hotových poznatků žákům, tzn. řešení tvořivým způsobem, musí být podloženo dobrou znalostí matematiky učitelů, jejich vlastní zkušeností s tvořivým přístupem k řešení úloh, ale také dostatkem informací a materiálů připravených k použití ve výuce."*

2.4 Postup řešení slovních úloh

Předtím, než zde začnu citovat konkrétní rozdělení postupu řešení z odborné literatury, uvedu univerzální postup, chcete-li výčet činností, které by měl řešitel (dále žák) automaticky provést při řešení každé slovní úlohy, bez ohledu na její typ. Tento postup uvádím v bodech, které odpovídají myšlenkovému pochodu žáka při obdržení slovní úlohy k vyřešení.[6] Dále zde uvádím již zmíněné postupy řešení od autorů odborné literatury, se kterými jsem již pracovala v kapitole 2.1 (Blažková, Kuřina, Odvárko, Novotná, Polák).

1. Důkladně si přečíst zadání se snahou mu porozumět a umět jej přirovnat k nějaké reálné situaci, kterou dobře zná (pokud zadání neporozumí, přečte si jej znovu). Žák musí být schopen pochopit, co je předmětem otázky a které údaje se nacházejí v zadání.

2. Provést zápis, tedy výtah relevantních informací ze zadání, které budou důležité pro výpočet. Stručný zápis přispívá k porozumění textu úlohy a rozvíjí schopnost rozlišit v textu podstatné informace.

3. Analyzovat vztahy mezi údaji v zadání a otázkou, uvědomit si a určit, o jaký typ úlohy se jedná. Vztahy mezi údaji v úloze je možné znázornit na konkrétním modelu nebo graficky. Žáci by měli znát více způsobů grafického znázornění a umět je vhodně použít v závislosti na typu úlohy.

4. Vzpomenout si, jak se tento typ řešil na hodinách matematiky, a zhodnotit, jestli je schopen toto řešení znovu provést. Někteří žáci se potřebují opřít o zkušenost s řešením úloh určitého typu

Blažková v rozboru postupu řešení uvádí výše uvedené body 3., 4., 5., pod jedním názvem: *rozbor – analýza podmínek ve vztahu k otázce úlohy.* [7]

Já zde tuto myšlenku rozděluji do tří různých bodů, protože popisuji postup řešení spíše jako myšlenkový pochod žáka, a výše zmíněné body obsahují v jeho očích tři odlišné činnosti.

[6] Dostupné z: https://skolaposkole.cz/matematika-zs/9-rocnik/slovni-ulohy

[7] BLAŽKOVÁ, Růžena, Květoslava Matoušková a Milena Vaňurová, 2007, Brno, s. 6–7

5. Aplikovat zvolený postup řešení na konkrétní úlohu. Blažková nazývá tento bod *matematizace slovní úlohy*. V tomto bodě by žák měl být schopen přepsat slovní zadání úlohy do matematického vyjádření, tedy transformovat matematický výraz zadaný slovy do symbolického vyjádření (např. o polovinu více, dvakrát menší, dvakrát větší atp.).

Blažková mezi těmito body uvádí ještě: *provedení odhadu řešení.* Já však tento bod nevnímám jako postup, který žák provádí automaticky při řešení libovolné slovní úlohy.[8]

6. Provádět ekvivalentní algebraické úpravy vedoucí k řešení. Blažková uvádí tento bod pod názvem *řešení matematické úlohy.* Pomocí naučených algoritmů (pamětních nebo písemných) vyřešit matematickou úlohu. U různých typů úloh se může jednat například o rovnici, nerovnici, nebo jiný početní příklad.

7. Usoudit, zda je výsledek reálný (například, že čas jízdy automobilem z Prahy do Brna nevyšel v jednotkách vteřin), a provést zkoušku (ověřit, zda výsledek odpovídá zadání). Blažková tento bod nazývá *zkouška správnosti*. Důsledné provedení zkoušky správnosti mnohým žákům usnadňuje pochopení řešení úlohy a mnohdy odhalí nesprávný výsledek.

V možnostech řešení od Kuřiny můžeme opět pozorovat, že klade důraz na to, aby slovní úlohy popisovaly reálné situace a byly tak pro žáka přehlednější a vedly k hlubšímu porozumění.

„Důležité je, aby model vyjadřoval pro žáka přesvědčivě reálnou situaci, aby v modelu viděl přehlednější informaci o úloze než v původním slovním vyjádření. Sestavení modelu úlohy vlastně znamená překlad jejího textu do jazyka, který umožňuje snáze úlohu řešit.“ (Kuřina, 1990, s. 62)

Dále uvádí dva typy řešení slovních úloh. Jako první možnost uvádí *experimentování*, které je podle něj v matematice nevhodné (experimentovat je vhodné spíše v chemii nebo fyzice), a často i nemožné. Tuto metodu moji žáci nazývají „*metoda: pokus, omyl*“ a přestože Kuřina uvádí tento způsob řešení jako nevhodný, je žáky

---

[8] BLAŽKOVÁ, Růžena, Květoslava Matoušková a Milena Vaňurová, 2007, Brno, s. 6–7

v hodinách matematiky velmi oblíbený. Druhou možností je podle něj *vhodné modelování*, jímž rozumí sestavení vhodného modelu slovní úlohy, odpovídajícímu reálné situaci.

Novotná rozděluje postup řešení slovních úloh do tří etap – *etapa uchopování*, *etapa transformace* a *etapa návratu do kontextu zadání úlohy*. Základní rozdělení postupu řešení pak definuje takto:

„Základním rozdělením procesu řešení úloh do etap, z něhož vycházejí další autoři, je rozdělení, které publikoval Polya. Obsahuje tyto základní etapy procesu řešení: uchopování, stanovování strategie, realizace strategie, interpretace výsledků.“ (Novotná, 2000, s. 19)

Dále ve své publikaci ukazuje možné postupy řešení například podle Odvárka (1990), který rozděluje řešení do čtyř částí: *matematizace situace, řešení matematické úlohy, návrat do kontextu zadání, dvojí zkouška (správnost řešení a kontextová správnost)*.

Řešení úloh od Poláka (2014) se liší od předchozích autorů detailním rozepsáním postupu.

„U aplikačních úloh je zadán určitý reálný problém, jehož řešení se převádí na matematické tímto postupem: Provede se matematizace reálného problému, tj. přechod od dané reálné situace k jejímu matematickému vyjádření neboli vytvoření matematického modelu reálné situace. Zpravidla je jím rovnice, nerovnice, resp. soustava rovnic či nerovnic. Ověří se, zda výsledky řešení matematické úlohy splňují podmínky dané reálné situace, příp. se zjistí, které z výsledků je splňují.“ (Polák, 2014, s. 141)

Při řešení úloh o pohybu, kterými se budu zabývat v další části práce, je důležité, aby žák, kromě znalosti matematických postupů, ovládal také potřebnou teorii, nutnou pro vhodnou interpretaci zadání úlohy a její správné řešení. K tomu se váže vhodné užití vzorců, jednotek a také správná interpretace matematického výsledku.

2.5 Rozdělení slovních úloh

Typů slovních úloh je mnoho. Každý typ slovní úlohy má své podtypy a obměny zadání. Také existuje mnoho různých způsobů, podle kterých lze úlohy rozdělit do jednotlivých kategorií. Novotná například rozděluje slovní úlohy podle jejich kontextu, Blažková podle obtížnosti řešení a Odvárko podle obsahu zadání.

Tato různá rozdělení slovních úloh od autorů odborné literatury upřesním v následujícím textu (opět sestupně, podle rozdělení, která mi dávají největší smysl).

Jak jsem již zmínila výše, Novotná ve svém díle Analýza řešení slovních úloh uvádí dělení slovních úloh podle kontextu (uvádí také rozdělení podle oblasti matematiky, to bude zpracováno u jiného autora).

Podle tohoto kritéria dělí slovní úlohy na úlohy o pohybu, úlohy o společné práci, úlohy o směsích, úlohy o obsahu a úlohy o dělení celku na nestejné části. Úlohy rozdělené podle kontextu dále dělí podle typu zadání. Pro účely této práce zde uvedu bližší rozdělení **slovních úloh o pohybu**:

a) Jednoduché úlohy, ve kterých dopočítáváme dráhu, rychlost nebo čas jednoho objektu,
b) úlohy, ve kterých se objekty pohybují se ve stejném směru po stejné dráze,
c) úlohy, ve kterých se objekty pohybují v opačném směru po stejné dráze.

Slovní úlohy o pohybu se pomocí výše zmíněných typů rozdělit i do dalších kategorií. Konkrétní rozdělení úloh o pohybu na jednotlivé typy pohybů budu rozebírat ve následující části práce, v kapitole č. 3 (teoretická část). U každého typu pohybu bude uvedena odpovídající teorie.

Blažková (2007, s. 4) dělí slovní úlohy na jednoduché a složené:

„Jednoduché slovní úlohy takové úlohy, k jejichž řešení stačí pouze jedna početní operace. Složené slovní úlohy jsou takové úlohy, k jejichž řešení je třeba více než jedna početní operace".

Toto rozdělení je prosté a jasné. Můžeme jej chápat tak, že k řešení složených slovních úloh je třeba využít řešení několika jednoduchých úloh.

Prvním dělením, které uvádí Odvárko, je rozdělení slovních úloh podle oblastí matematiky na slovní matematické úlohy a slovní úlohy s matematickým obsahem.

„Matematické úlohy, které nejsou vyjádřeny v příslušném symbolickém jazyce kalkulu, nazýváme slovní matematické úlohy." (Odvárko, 1990, s. 205)

K dalšímu rozdělení přistupuje Odvárko z jiného úhlu pohledu a dělí slovní úlohy do čtyř základních skupin: *slovní úlohy s aritmetickým obsahem*, *slovní úlohy s algebraickým obsahem*, *slovní úlohy s geometrickým obsahem* a *slovní úlohy s nematematickým obsahem.* (Odvárko, 1990, s. 205)

Slovními úlohami s nematematickým obsahem rozumí Odvárko *„úlohy s textem, ve kterém se zjevně vyskytuje alespoň jeden termín nepatřící do jazyka žádné matematické teorie"*. (Odvárko, 1990, s. 216)

Zařazuje zde úlohy ekonomické povahy, fyzikální úlohy a úlohy s geometrickými objekty.

Další dělení uvádějí také autoři Vondrová, Rendl a kol. v díle Kritická místa matematiky základní školy v řešení žáků, Vyšín v díle Metodika řešení matematických úloh a Polák v díle Didaktika matematiky: Jak učit matematiku zajímavě a užitečně, ale detailní rozbor všech dělení není cílem této práce. Vybrala jsem proto pouze autory, jejichž rozdělení je dle mého názoru nejvíc smysluplné a intuitivní.

3 Teorie o pohybu

Již za samotný vznik naší planety vděčíme pohybu, konkrétně částicím, které se před 4,6 miliardami let pohybovaly a srážely na oběžné dráze Slunce. Dodnes se zde udržel život pouze zásluhou rotace Země a jejímu pohybu kolem slunce, protože kdyby se naše planeta přestala otáčet, všechny oceány i vzduch, rovnoměrně rozložené odstředivou silou, by se nahrnuly k zemským pólům, každá noc i den by trval půl roku, probudila by se sopečná činnost, zemětřesení a kolísání teplot. Naše planeta by se bez pohybu začala doslova zevnitř trhat na kusy a stala by se tak neobyvatelnou.[9]

Pohyb je typický pro živočichy, kteří k němu mají uzpůsobené části těla a využívají jej zpravidla k přesunu z jednoho místa na místo jiné. Lidem však v průběhu let přestala stačit rychlost pohybu, kterou jsou schopni samostatně vyvinout, a začali hledat jeho urychlení. Začalo to využíváním jízdy na jiných, rychlejších živočiších (např. koních), po objevení kola začaly vznikat první koňmi tažené kočáry a lodě, uváděné do pohybu silou větru. Uběhlo mnoho let a lidem začala být nedostačující i tažná síla jiného živočicha, takže začali k přepravě vynalézat první stroje. Dnes se přesouváme například pomocí jízdních kol, motocyklů, automobilů, vlaků nebo letadel a cesty, které by dříve trvaly měsíce a dny, jsou dnes záležitostí několika minut, či hodin. Pohyb tedy můžeme považovat za neodmyslitelnou část každého lidského života.[10]

3.1 Charakteristika pohybu[11]

Pohybem rozumíme změnu polohy tělesa vzhledem k jinému tělesu, naopak klidem rozumíme situaci, kdy těleso vůči jinému tělesu svou polohu nemění. Pokud tedy

---

[9] Dostupné z https://www.reflex.cz/clanek/dokument/41076/co-by-se-stalo-kdyby-se-zeme-prestala-otacet.html

[10] ERNI, Hans. *Chemie, fyzika, astronomie*. Praha: Albatros, 1978, s. 150 - 164

[11] Podkapitola zpracována podle RANDA, Miroslav, Václav Havel, Jiří Kohout, Václav Kohout, Pavel Kratochvíl, Pavel Masopust, Jitka Prokšová a Karel Rauner. *Fyzika 7: pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň, 2018, s. 29-32 a RANDA, Miroslav, Václav Havel, Gerhard Höfer, et al. *Fyzika 6: pro základní školy a víceletá gymnázia*. Fraus, 2017, s. 34-37

chceme hovořit o změně polohy určitého tělesa, musíme najít druhé těleso, vzhledem ke kterému budeme tuto změnu posuzovat. Tělesa, vzhledem ke kterým posuzujeme změnu polohy, nazýváme **vztažná soustava**. Pohyb i klid jsou relativní. Jinými slovy, může nastat situace, kdy totéž těleso bude zároveň v pohybu i v klidu, v závislosti na volbě vztažné soustavy.

Pro přiblížení těchto pojmů čtenáři zde uvádím pár jednoduchých příkladů z běžného života, které lze najít v základoškolských učebnicích fyziky:

a) těleso v pohybu

- Země je v pohybu vzhledem ke Slunci
- Jedoucí cyklista je v pohybu vzhledem k silnici
- Letící letadlo je v pohybu vzhledem k pozorovateli

b) těleso v klidu

- Řidič automobilu je v klidu vzhledem k sedadlu řidiče
- Pouliční lampa je v klidu vzhledem k zemi
- Květina je v klidu vzhledem ke květináči

c) relativita pohybu a klidu

- Řidič autobusu je v klidu vzhledem k autobusu a zároveň v pohybu vzhledem k silnici
- Ležící pes je v klidu vzhledem k podlaze a zároveň v pohybu vzhledem ke Slunci
- Lyžař na lanovce je v klidu vzhledem ke kabině lanovky a zároveň v pohybu vzhledem k okolním stromům

Pohyb i klid fungují oboustranně, takže pokud je jedno těleso v pohybu (resp. klidu) vzhledem k druhému a my zaměníme jejich pořadí, bude také druhé těleso v pohybu (resp. klidu) vzhledem v prvnímu. Například je-li Země v pohybu vzhledem ke Slunci, je i Slunce v pohybu vzhledem k Zemi, a je-li řidič automobilu v klidu vzhledem k sedačce, pak je i sedačka v klidu vzhledem k řidiči.

3.1.1 Trajektorie pohybu

Dále můžeme u tělesa v pohybu zkoumat jeho polohu. Poloha tělesa se však při pohybu mění. Bude nás tedy zajímat, kde se těleso nacházelo na začátku pohybu, v průběhu pohybování a na konci pohybu. Pomyslnou stopu, kterou za sebou nechává pohybující se těleso, nazýváme **trajektorie**. Trajektorie je spojnice poloh (bodů), na kterých se nacházelo těleso v každém jednotlivém okamžiku svého pohybu. Podle vzhledu trajektorie tělesa můžeme pohyb dělit na **přímočarý** a **křivočarý**. Křivočarým pohybem tělesa nazýváme pohyb, při kterém trajektorie tělesa opisuje libovolnou obecnou křivku. Trajektorií přímočarého pohybu je přímka a pokud bychom uvažovali trajektorii každého jednotlivého bodu tělesa, pak by se tyto body pohybovaly po vzájemně rovnoběžných přímkách.

Rozeznání křivočarého a přímočarého pohybu je naprosto zásadní pro pozdější výpočty, které se liší v závislosti na typu pohybu. Proto zde uvedu několik příkladů obou typů pohybu:

a) křivočarý pohyb

- pohyb míčku při tenisovém zápase
- pohyb fotbalisty s míčem
- automobil projíždějící zatáčkou

b) přímočarý pohyb

- automobil jedoucí po rovné silnici
- jízda výtahem
- kulka vystřelená ze zbraně na střelnici (neuvažujeme-li vliv okolního prostředí)

Dále můžeme křivočarý a přímočarý pohyb jednotlivých bodů tělesa rozdělit na **posuvný** (translační) a **otáčivý** (rotační). Pohybem posuvným nazýváme takový pohyb tělesa, při kterém každý jeho jednotlivý bod opisuje trajektorii stejného tvaru a stejné délky. Otáčivým pohybem rozumíme pohyb, při kterém jednotlivé body tělesa opisují trajektorii ve tvaru kružnice, či její části a nenacházejí se na rotační ose. Body různě vzdálené od rotační osy opisují trajektorie různých délek. Dále se můžeme setkat s **obecným** pohybem, jenž je kombinací posuvného a otáčivého pohybu.

Pro názornost tohoto rozdělení zde opět uvedu několik příkladů:

a) **posuvný pohyb**
   - jízda autíčka po dětské autodráze (posuvný křivočarý pohyb)
   - stoupání výtahem (posuvný přímočarý pohyb)

b) **otáčivý pohyb**
   - dítě na houpačce (otáčivý pohyb kolem osy, která neprochází daným tělesem)
   - rotace Země (rotace kolem osy procházející tělesem)

c) **obecný pohyb**
   - ručičky tachometru v jedoucím automobilu (ručičky konají otáčivý pohyb kolem středu tachometru a zároveň se pohybují posuvným pohybem spolu s jedoucím vozem)

3.1.2 Dráha

Délka trajektorie (křivky), po které se těleso pohybuje, se nazývá **dráha** tělesa (s). Hlavní jednotkou dráhy je metr, ale můžeme ji samozřejmě měřit i v kilometrech, centimetrech a jakýchkoli jiných jednotkách délky.

Pro odvození vzorce na výpočet dráhy uražené tělesem při rovnoměrném pohybu zde uvedu reálnou situaci z hodiny matematiky.

Žáci šesté třídy dostali za úkol najít univerzální způsob pro výpočet dráhy, který bude fungovat pro jakékoliv pohybující se těleso.

Rychle přišli na to, že pokud chtějí vypočítat dráhu zdolanou pohybem nějakého objektu, potřebují znát celkový čas pohybu (t) a rychlost pohybu (v). Vymysleli si nějaký příklad, který ze života dobře znají. Jako první možnost většina žáků volila fixní rychlost (například auto jedoucí průměrnou rychlostí *60* km/h) a ptali se, jakou vzdálenost auto ujede za 1 hodinu? Za 2 hodiny? Za 5 hodin? Za 10 hodin? Za *t* hodin? Jako druhou možnost žáci zvolili fixní čas (například 1 hodinu) a ptali se, jakou vzdálenost ujedou rychlostí 50 km/h? *60* km/h? *100* km/h? *120* km/h? v km/h?

Pro názornost si řešení obou žáky zvolených možností ukážeme v následujících tabulkách.

Možnost 1. (fixní rychlost). Auto jede stálou rychlostí 60 km/h, jakou dráhu ujede za 1, 2, 5, 10, t hodin?

$\boldsymbol{v}$ (km/h)	$\boldsymbol{t}$ (h)		$\boldsymbol{s}$
60	1	$60 \cdot 1 = 60$	60 km
60	2	$60 \cdot 2 = 120$	120 km
60	5	$60 \cdot 5 = 300$	300 km
60	10	$60 \cdot 10 = 600$	600 km
60	t	$60 \cdot t = 60t$	$60t$ km
v	t	$v \cdot t$	$(v \cdot t)$ km

Možnost 2. (fixní čas). Jakou dráhu ujedou automobily jedoucí rychlostmi 50 km/h, 60 km/h, 100 km/h, 120 km/h, v km/h za jednu hodinu?

$\boldsymbol{v}$ (km/h)	$\boldsymbol{t}$ (h)		$\boldsymbol{s}$

50	2	$50 \cdot 2 = 100$	100 km
60	2	$60 \cdot 2 = 120$	120 km
100	2	$100 \cdot 2 = 200$	200 km
120	2	$120 \cdot 2 = 240$	240 km
v	2	$v \cdot 2 = 2v$	$2v$ km
v	t	$v \cdot t$	$(v \cdot t)$ km

Jak můžeme vidět, v obou zvolených možnostech se žáci dostanou k očekávanému závěru, že dráha se dá spočítat vynásobením rychlosti a času. Získají tedy vzorec $\boldsymbol{s = v \cdot t}$.

Po odvození vzorce by žáci měli také odhalit fakt, který plyne z prvního příkladu v tabulce. Vzorec se dá použít pouze v situacích, kdy se těleso pohybuje rovnoměrně. V případě, že se během jízdy vozidlo pohybuje různými rychlostmi a není známa jeho průměrná rychlost, nebo doba, po jakou se vozidlo odlišnými rychlostmi pohybovalo, nemohou výše odvozený vzorec pro výpočet takové úlohy použít.

3.1.3 Čas

Čas je spolu s dráhou stěžejní fyzikální veličinou, nutnou pro popis pohybu vykonávaného tělesem. Čas se obvykle značí malým písmenem t a jeho základní jednotkou je sekunda (hovorově vteřina). Pro výpočty spojené se slovními úlohami o pohybu budeme rozlišovat t_0 – výchozí čas (čas začátku pohybu), t_v – výsledný čas (čas na konci pohybu) a $t = t_v - t_0$ (celkový čas setrvání tělesa v pohybu). Těleso může za stejný čas urazit buď stejně, nebo různě dlouhé dráhy. Takové případy dělíme na **rovnoměrný** a **nerovnoměrný** pohyb. Rovnoměrný pohyb je takový, kdy těleso urazí za stejné časové úseky stejně dlouhé dráhy. Tedy rychlost tělesa se v průběhu pohybu nemění. Nerovnoměrný pohyb je pohyb, kdy těleso za stejné časové úseky urazí různě dlouhé dráhy. Tedy rychlost tělesa se během pohybu mění.

Pro lepší porozumění pojmům rovnoměrný a nerovnoměrný pohyb zde uvádím několik příkladů z reálného života:

a) rovnoměrný pohyb

- auto jedoucí stálou rychlostí
- pohyb pásového dopravníku
- pohyb hodinových ručiček

b) nerovnoměrný pohyb

- pohyb automobilu ve městě
- běžec na atletickém oválu
- vzlet a přistání letadla

3.1.4 Rychlost

Rychlost je fyzikální veličina, díky které můžeme porovnávat dráhy ujeté různými objekty za stejnou jednotku času. Rychlost se značí malým písmenem v a její hlavní jednotkou je metr za sekundu (m/s), ale běžně používanou jednotkou je též kilometr za hodinu (km/h). Rozlišujeme pojmy **okamžitá** a **průměrná rychlost**. Okamžitá rychlost ukazuje, jak rychle se těleso pohybuje v konkrétním čase. Pokud těleso v průběhu pohybu mění svoji okamžitou rychlost, využíváme označení průměrná rychlost (rychlost, kterou by se muselo těleso pohybovat po celou dobu trvání pohybu, aby urazilo stejnou vzdálenost). Jestliže se těleso pohybuje rovnoměrně, je jeho okamžitá rychlost v každém okamžiku rovna průměrné rychlosti.

Pokud víme, jakými rychlostmi se těleso pohybovalo v různých časových úsecích, jsme schopni vypočítat jeho průměrnou rychlost užitím vzorce na aritmetický průměr.

Úloha: Řidič osobního automobilu jel domů z práce celkem 1 hodinu. Prvních 20 minut jel rychlostí 90 km/h, poté vjel do vsi a snížil rychlost na 50 km/h na 30 minut, nakonec najel na dálnici a zbytek času jel rychlostí 120 km/h. Jaká byla jeho průměrná rychlost v kilometrech za hodinu? (zrychlení a vlivy okolního prostředí neuvažujeme).

$$v_p = \frac{s}{t} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{v_1 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_2 + v_3 \cdot t_3}{t_1 + t_2 + t_3}.$$

Vyjdeme ze vzorce pro výpočet rychlosti, ve kterém dráhu i čas rozdělíme na jednotlivé složky (v našem případě tři), podle zadání. Do vzorce dosazujeme ve správných jednotkách. Chceme, aby výsledná rychlost vyšla v kilometrech za hodinu, takže i čas v čitateli a jmenovateli zlomku dosadíme v hodinách.

$t_1 = 20 \text{ min} = \frac{20}{60} \text{ h} = \frac{1}{3} \text{ h},$

$t_2 = 30 \text{ min} = \frac{30}{60} \text{ h} = \frac{1}{2} \text{ h},$

$t_3 = 10 \text{ min} = \frac{10}{60} \text{ h} = \frac{1}{6} \text{ h}.$

Rychlosti máme v odpovídajících jednotkách již v zadání, takže jejich hodnoty můžeme rovnou dosadit do vytvořeného vzorce.

$v_1 = 90$ km/h,

$v_2 = 50$ km/h,

$v_3 = 120$ km/h.

$$v_p = \frac{90 \cdot \frac{1}{3} + 50 \cdot \frac{1}{2} + 120 \cdot \frac{1}{6}}{1} \text{ km/h}.$$

Zlomek upravíme a získáváme průměrnou rychlost v_p.

$$v_p = \frac{30 + 25 + 20}{1} \text{ km/h},$$

$$v_p = 65 \text{ km/h}.$$

3.1.4.1 Převody jednotek rychlosti

Nutnou znalostí pro výpočet rychlosti je znalost převodu dvou hlavních jednotek rychlosti. Pokud máme dráhu zadanou v kilometrech a čas v hodinách, potom rychlost vychází v kilometrech za hodinu. Pokud je dráha zadaná v metrech a čas v sekundách, pak je výsledná jednotka metr za sekundu.

Počítání se správnými jednotkami je důležitou částí řešení nejen slovních úloh o pohybu. Jednotky, které žáci ve výpočtech používají, si musí odpovídat. Žáci už umí převádět jednotky času (minuty na hodiny, minuty na sekundy atp.) i jednotky délky (metry na kilometry, kilometry na metry atp.) a v této souvislosti je na místě, ukázat jim odvození převodu jednotek rychlosti.

a) **km/h → m/s**

$$1\ \text{km/h} = \frac{1\,000}{3\,600}\ \text{m/s} = 0{,}2\overline{7}\ \text{m/s}.$$

Z odvození je zřejmé, že metry za sekundu dostaneme vynásobením kilometrů za hodinu číslem $0{,}2\overline{7}$, což je totéž, jako jejich vydělení číslem 3,6.

b) **m/s → km/h**

$$1\ \text{m/s} = \frac{\frac{1}{1\,000}}{\frac{1}{3\,600}}\ \text{km/h} = \frac{3\,600}{1\,000}\ \text{km/h} = 3{,}6\ \text{km/h}.$$

V odvozeném převodu můžeme vidět, že kilometry za hodinu dostaneme vynásobením metrů za sekundu číslem 3,6.

3.1.5 Zrychlení

Zrychlení je název procesu, kdy objekt libovolně mění svou rychlost (tedy i zpomalení) a je definováno jako míra změny rychlosti (v) v čase (t). Jeho hlavní jednotkou je m/s^2 a značíme jej malým písmenem a. Jelikož rychlost je veličina daná velikostí a směrem, tak zrychlení můžeme dosáhnout změnou velikosti rychlosti, změnou směru nebo změnou obojího zároveň. Pokud auto na rovné dálnici dosáhne své maximální rychlosti a pokračuje v jízdě touto rychlostí, jeho zrychlení je nulové (přestože se pohybuje velmi rychle). Pokud by ale v maximální rychlosti vjelo do zatáčky, pak jeho zrychlení ovlivní odstředivá síla.

Zrychlení je podle mé zkušenosti na základní škole první žáky těžko uchopitelná kapitola. Žáci se často domnívají, že pokud pojedou rychle, budou mít velké zrychlení, a naopak, pokud jedou pomalu, bude jejich zrychlení malé. Někteří se dokonce domnívají, že zrychlení a rychlost je tatáž věc, ale tak to není. Zrychlení ve skutečnosti vůbec nezávisí na velikosti rychlosti v dané chvíli. Můžeme mít velké zrychlení, i když jedeme pomalu a zrychlíme, ale také když jedeme hodně rychle a prudce zpomalíme.

Narozdíl od konstantní rychlosti, zrychlení je změna, kterou na sobě můžeme pocítit (například při vzletu v letadle, nebo při prudkém brždění v autě). Pro lepší představu o zrychlení zde uvádím několik příkladů z běžného života:

a) cyklista jedoucí rovnoměrně po silnici
    ➔ malá velikost rychlosti, žádné zrychlení

b) stíhačka letící maximální rychlostí vodorovným směrem
    ➔ velká velikost rychlosti, žádné zrychlení

c) prudce se rozjíždějící motocykl
    ➔ malá velikost rychlosti, velké zrychlení

d) auto na dálnici brzdící z plné rychlosti před dopravní nehodou

➔ velká velikost rychlosti, velké zrychlení

Pro vysvětlení, proč je prudké brzdění také bráno jako zrychlení a proč nerozlišujeme zpomalení od zrychlení, si zde uvedeme a rozebereme jeho vzorec pro výpočet.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_k - v_0}{\Delta t}.$$

Tento vzorec ukazuje, že zrychlení je rozdíl koncové a počáteční rychlosti dělený časem, který zabrala změna z počáteční rychlosti na koncovou. Je tedy zřejmé, že zrychlení může nabývat záporných i kladných hodnot, jelikož čitatel ve vzorci není v absolutní hodnotě. Kladné hodnoty zrychlení odpovídají zrychlování, zatímco záporné hodnoty zrychlení vnímáme jako zpomalování.

Ze vzorce můžeme také pozorovat, jak vznikla jednotka zrychlení m/s^2, což je počet metrů za sekundu, o které se změní rychlost každou sekundu. V čitateli je rychlost v metrech za sekundu a ve jmenovateli čas v sekundách. Obměnou tohoto vzorečku můžeme získat vyjádření koncové rychlosti, závislé na počáteční rychlosti a času působení konstantního zrychlení.

$$v_k = v_0 + a \cdot \Delta t.$$

Když už umíme počítat se zrychlením, můžeme si také odvodit vzorec pro dráhu, uraženou v průběhu rovnoměrně zrychleného pohybu. Vyjdeme ze vzorce pro výpočet dráhy z průměrné rychlosti.

$$s = v_p \cdot t = \frac{v_0 + v_k}{2} \cdot t = \frac{v_0 + v_0 + a\Delta t}{2} \cdot t = \frac{2v_0}{2} \cdot t + \frac{a\Delta t}{2} \cdot t = v_0 t + \frac{1}{2} a\Delta t \cdot t.$$

Koncovou rychlost jsme nahradili vyjádřením z předchozího vzorce. Δt je rozdíl počátečního a koncového času, ale v našem případě bude počáteční čas nulový, takže Δt a t bude tatáž hodnota. Dostáváme tedy vzorec:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2.$$

3.1.6 Veličiny a jejich derivace[12]

Rychlost vyjadřuje změnu dráhy za jednotku času a okamžitá rychlost je přibližně vyjádřena vztahem: $v \approx \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Proč jen přibližně? Chyba se zvětšuje v závislosti na volbě velikosti časového přírůstku. Čím větší přírůstek zvolíme, tím větší je chyba. Abychom dosáhli co nejpřesnějšího výsledku (resp. nejmenší chyby), budeme přírůstek zmenšovat (toho lze dosáhnout například půlením). Zmenšujeme přírůstek do chvíle, kdy se velikost obou přírůstků (Δs, Δt) blíží nule. Takové přírůstky nazýváme **diferenciály**. Diferenciál dráhy ($\mathrm{d}s$) je nekonečně malá změna dráhy a diferenciál času ($\mathrm{d}t$) je nekonečně malý přírůstek času.

$$v = \frac{\mathrm{d}\, s}{\mathrm{d}\, t}.$$

Podíl dvou diferenciálů je v matematice definován jako derivace. Dostáváme tedy okamžitou rychlost jako derivaci dráhy podle času, jejíž výpočet je již zcela přesný. Mění-li se dráha rovnoměrně, rychlost je pro libovolný časový údaj konstantní. Mění-li se dráha nerovnoměrně, získáme průměrnou rychlost v určitém časovém intervalu.

Rychlost můžeme opět derivovat a získat tak „rychlost změny rychlosti“ neboli **zrychlení**. Zrychlení vyjadřuje změnu rychlosti za jednotku času a můžeme jej vyjádřit jako první derivaci rychlosti, nebo druhou derivaci dráhy. Vztah $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ vyjadřuje stálou velikost okamžitého zrychlení rovnoměrně zrychleného pohybu nebo průměrné zrychlení

---

[12] Podkapitola zpracována podle z https://ackoo.estranky.cz/clanky/derivace-casove-funkce.html a http://www.elearn.vsb.cz/archivcd/FS/ZMech/CD_Zaklady_mechaniky/testy/res_46.htm

nerovnoměrného pohybu. Stejně jako v předchozím případě, budeme-li přírůstky nekonečně zmenšovat, získáme velikost okamžitého zrychlení jakéhokoliv zrychleného pohybu jako podíl diferenciálu rychlosti a diferenciálu času, který je definován jako derivace.

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

Tento proces lze samozřejmě provádět obousměrně. Můžeme získat rychlost jako integrál zrychlení a dráhu jako integrál rychlosti.

Kromě okamžité rychlosti a okamžitého zrychlení je možné tímto způsobem zavést mnoho dalších fyzikálních veličin (resp. jejich okamžitých hodnot). Stejným způsobem lze zavést například úhlovou rychlost a úhlové zrychlení, velikost okamžité síly, nebo okamžitý výkon.

3.2 Volný pád

Volný pád se řadí mezi přímočarý a rovnoměrně zrychlený pohyb, při kterém na padající těleso působí pouze gravitační síla (zanedbáváme odpor vzduchu). Těleso v tomto typu pohybu nemá žádnou počáteční rychlost, je zkrátka upuštěno. Jelikož se pohybujeme v gravitačním poli, je třeba definovat **gravitační zrychlení**. Gravitační zrychlení je jediné zrychlení, které neznačíme písmenem a, nýbrž písmenem g. Jeho směr vede vždy k zemi a jeho hodnota je konstantních *9,81* m/s^2. To znamená, že rychlost upuštěného tělesa se každou vteřinu zvyšuje o *9,81* m/s.

Rychlost tělesa je dána stejným vztahem, jako rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu, tedy vzorcem $v = v_0 + at$. U volného pádu je počáteční rychlost v_0 nulová a zrychlení se značí písmenem g. Dostáváme tedy vzorec:

$$v = gt.$$

Budeme-li chtít počítat vzdálenost, jakou těleso urazí za nějaký čas po upuštění, musíme vycházet z obecného vyjádření výpočtu dráhy v závislosti na rychlosti podle času:

$$s = \int v \, \mathrm{d}t = \int gt \, \mathrm{d}t = g\frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}gt^2.$$

Dráhu dostaneme jako integrál z rychlosti podle času. Rychlost volného pádu jsme nahradili jejím vyjádřením z předchozího odstavce a zintegrovali. Dostáváme tím vzorec pro výpočet uražené dráhy při volném pádu v závislosti na čase. Všimněme si, že se jedná o tentýž vzorec, jako pro výpočet dráhy rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu s nulovou počáteční rychlostí a s konstantním gravitačním zrychlením.

Pokud budeme chtít znát přesnou výšku (h), ve které se těleso aktuálně nachází, vycházíme z výšky h_0, ze které bylo těleso upuštěno.

$$h = h_0 - \frac{1}{2}gt^2.$$

Výšku tělesa v konkrétním čase získáme z celkové výšky, odečtením dráhy, kterou stihlo těleso zdolat od upuštění do doby, kdy jeho výšku zkoumáme.

Rychlost ani dráha volného pádu nezávisí na hmotnosti tělesa, jak můžeme vidět v odvozených vzorcích. Lehké a těžké předměty tedy padají stejně rychle. Žákům můžeme na toto téma pokládat otázky a sledovat jejich úvahy nad řešením. Například „*Co dopadne dřív na zem? Kilo peří, nebo kilo železa?*“. Odpovědi žáků by se měly lišit v závislosti na tom, jestli berou v úvahu odpor vzduchu a tvar upuštěné věci, protože při uvážení existence odporu vzduchu pravděpodobně pytel s peřím dopadne opravdu na zem později než železná tyč. Pro ověření, že žáci opravdu rozumí významu odvozených vzorců, můžeme využít i záludnější otázku. Například „*Co dopadne na zem dřív? Kilo železa, nebo 10 kilo železa?*“. Ti, kteří význam vzorečků opravdu pochopili, by měli dojít k závěru, že obojí dopadne na zem ve stejnou chvíli.

3.3 Vrhy[13]

3.3.1 Vrh vzhůru

Svislým vrhem vzhůru rozumíme pohyb v gravitačním poli, při němž je tělesu udělena počáteční rychlost v_0, proti směru gravitačního zrychlení (řekněme kladným směrem). Gravitační zrychlení zde bude tedy vždy v záporném směru, protože působí proti směru počáteční rychlosti (odpor vzduchu zanedbáváme). Vzorec pro výpočet okamžité rychlosti upravíme změnou znaménka takto:

$$v = v_0 - gt.$$

Okamžitá rychlost v je dána rychlostí v_0 a je rovnoměrně zmenšována gravitačním zrychlením v závislosti na čase. Jedná se tedy o rovnoměrně zpomalený pohyb.

Vzorec pro výpočet okamžité rychlosti svislého vrhu vzhůru můžeme odvodit také pomocí derivace. Víme, že rychlost je první derivací dráhy. Vztah pro dráhu rovnoměrně zpomaleného pohybu v gravitačním poli je: $s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$. Vypočtěme tedy jeho první derivaci podle času:

$$v = (v_0 t - \frac{1}{2} g t^2)' = v_0 \cdot 1 - \frac{1}{2} g \cdot 2t = v_0 - gt.$$

Z první derivace dostáváme stejný vzorec pro okamžitou rychlost, jako v předchozím odstavci. Víme také, že druhá derivace dráhy je zrychlení (v tomto případě pouze gravitační zrychlení). Můžeme tedy tento fakt snadno ověřit zderivováním vztahu pro okamžitou rychlost podle času:

$$(v_0 - gt)' = 0 - g \cdot 1 = -g.$$

[13] Podkapitola zpracována podle http://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/fyzika/pohyb/ a https://onlineschool.cz/fyzika/svisly-vrh-vzhuru/

Gravitační zrychlení zde vyšlo záporně, protože působí proti směru počáteční rychlosti.

Narozdíl od volného pádu, zde nastane moment, kdy se vyhozené těleso zastaví a obrátí směr své rychlosti k zemi. Gravitační zrychlení tak v určitém momentu začne působit opět po směru rychlosti tělesa a začne její hodnotu zvětšovat. U úloh tohoto typu budeme zjišťovat hlavně dobu, za kterou těleso vystoupá do maximální výšky, hodnotu maximální výšky a dobu, za kterou spadne zpět na zem. Čas, ve kterém těleso vystoupá do maximální výšky a obrátí se směrem k zemi, označíme t_z (čas zlomu) a výšku zlomu označíme h_{max} (maximální výška). Ve chvíli, kdy těleso dosáhne maximální výšky za čas t_z, je jeho rychlost nulová. Dosadíme tedy tuto hodnotu do vzorce pro okamžitou rychlost a vyjádříme z něj čas zlomu:

$$0 = v_0 - gt_z \ \rightarrow \ t_z = \frac{v_0}{g}.$$

Dostáváme čas zlomu, jako podíl počáteční rychlosti a gravitačního zrychlení.

Pro získání maximální výšky využijeme vzorec rovnoměrně zpomaleného pohybu v gravitačním poli:

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \ \rightarrow \ h_{max} = v_0\frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}g\frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Jelikož maximální výšky dosáhne těleso v čase t_z, dosadíme tuto hodnotu do vzorce a dostáváme vztah pro maximální dosaženou výšku, závislou pouze na hodnotě počáteční rychlosti.

Maximální výšku, tedy maximum funkce $s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, můžeme získat také z její první derivace podle času, kterou položíme rovnou nule. Dostáváme:

$$0 = v_0 - gt \ \rightarrow \ t = \frac{v_0}{g}.$$

Funkce dosáhne maxima v čase $t = \frac{v_0}{g}$, což je přesné vyjádření času zlomu t_z z předchozího odvození.

Ve chvíli, kdy těleso dosáhne maximální výšky, začne padat volným pádem k zemi. Pro výpočet celkového času t_c, za který těleso od vyhození dopadne zpět na zem (nebo nám do rukou), sečteme čas zlomu a čas volného pádu.

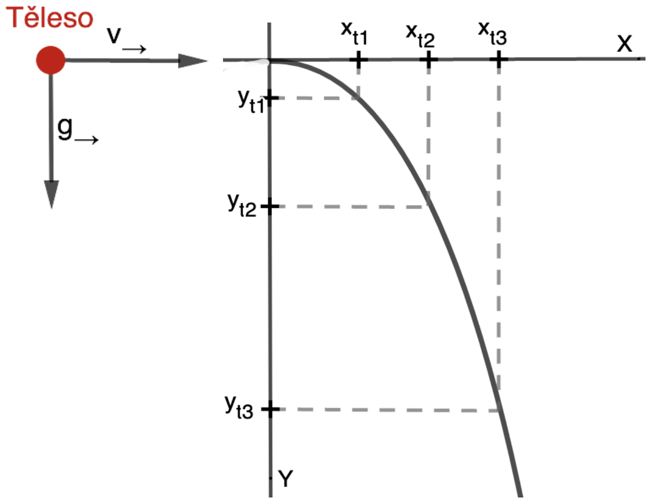
Čas zlomu máme již vyjádřený a čas volného pádu získáme ze vztahu pro dráhu volného pádu, kde dráha volného pádu se rovná maximální dosažené výšce:

$$h_{max} = \frac{1}{2} g t^2 \ \rightarrow \ t = \sqrt{\frac{2h_{max}}{g}}, t_z = \frac{v_0}{g} \rightarrow t_c = \ t_z + t = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{2h_{max}}{g}}.$$

3.3.2 Vodorovný vrh

Vodorovný vrh se skládá ze dvou pohybů. Těleso je vrženo rovnoběžně s povrchem země, s počáteční rychlostí v_0 (odpor vzduchu opět zanedbáváme) a gravitační zrychlení je kolmé na směr počáteční rychlosti. Trajektorií vodorovného vrhu tedy nebude přímka, nýbrž parabola (lineárně se zvětšujícím hodnotám na ose x přísluší kvadraticky se zvětšující hodnoty na ose y).

Tento pohyb rozložíme do směrů os x a y, ve kterých jsme schopni snáze vyjádřit rovnice popisující pohyb. Na obrázku (*obr. 1*) můžeme vidět, jak se mění dráha



Obr. 1

tělesa v závislosti na čase (t_1, t_2, t_3). Osa x znázorňuje dráhu posuvného pohybu ($x = v_0 t$), rovnoběžného se zemí. Na ose y pak vidíme dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu směrem k zemi ($y = \frac{1}{2} g t^2$).

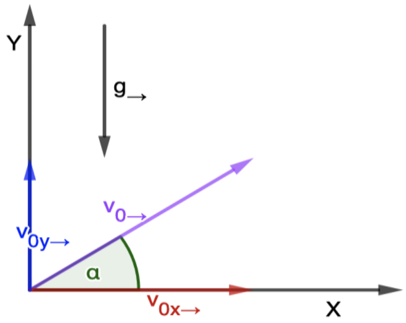
Okamžitou rychlost tělesa získáme složením dvou vektorů. Vektoru rychlosti v_0, který je rovnoběžný s osou x a jeho velikost zůstává po celou dobu pohybu neměnná, a vektoru rychlosti v_y, jehož velikost v závislosti na čase roste vlivem gravitačního zrychlení a je rovnoběžný s osou y:

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}.$$

Polohu tělesa v průběhu pohybu sledujeme opět ve dvou osách. Na ose x poloha odpovídá dráze rovnoměrného pohybu s počáteční rychlostí v_0 a na ose y dráze rovnoměrně zrychleného pohybu s nulovou počáteční rychlostí. Pro rovnoměrný přímočarý pohyb na ose x dostáváme vztah: $s_x = v_0 t$ a pro rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb na ose y vztah: $s_y = \frac{1}{2} g t^2$.

3.3.3 Šikmý vrh

Šikmý vrh je název nejobecnějšího pohybu v gravitačním poli. Představme si jej jako hod, kop, nebo odpal, jehož počáteční rychlost svírá nějaký obecný úhel s rovinou země (není kolmá ani rovnoběžná s rovinou země a počáteční souřadnice tělesa $[x, y] = [0,0]$). K tomu, abychom byli schopni vyjádřit rovnice pohybu, si musíme opět zavést systém souřadnic a rozložit vektor rychlosti do dvou směrů (viz *obr. 2*).



Obr. 2

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha.$$

Vyjdeme z vlastnosti pravoúhlého trojúhelníku a vyjádříme v_x pomocí funkce kosinus. Na průmět rychlosti v_0 do osy x nepůsobí žádné zrychlení, je v tomto směru konstantní. Na průmět rychlosti v_0 do osy y působí gravitační zrychlení v opačném směru, takže velikost vektoru gravitačního zrychlení odečteme od vektoru v_{0y}. Opět vycházíme z vlastnosti pravoúhlého trojúhelníku a k jejímu vyjádření využijeme funkci sinus. Dostáváme:

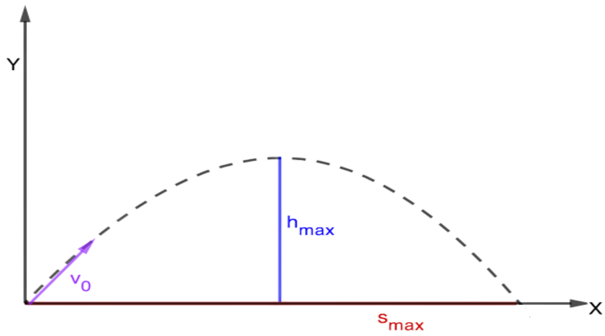
$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \cdot \sin\alpha - gt.$$

Když máme pomocí rovnic vyjádřené rozložení rychlosti v_0, jejich integrací najdeme rovnice pro polohu tělesa na osách x a y:

$$s_x = \int v_x \,\mathrm{d}t = v_x t = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t,$$
$$s_y = \int v_y \,\mathrm{d}t = v_y t = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Při výpočtech ignorujeme integrační konstantu, protože na začátku pohybu v čase $t = 0$ předpokládáme nulovou polohu (souřadnice tělesa $[x, y] = [0,0]$).

Trajektorie šikmého vrhu (stejně jako trajektorie vodorovného vrhu) má tvar paraboly (viz *obr. 3*). U takové paraboly nás bude zajímat y_{max} (h_{max}) – maximální tělesem dosažená výška a x_{max} (s_{max}) – dolet tělesa (maximální dosažená délka od počátku).



Obr. 3

Maximální výška tělesa je maximem funkce s_y z předchozího odvození. Čas, pro který nabude funkce s_y svého maxima, nalezneme tak, že položíme její derivaci (v_y) rovnou nule:

$$v_0 \cdot \sin\alpha - gt = 0 \rightarrow t = \frac{v_0}{g} \cdot \sin\alpha.$$

Získané vyjádření času dosadíme zpět do rovnice pro s_y. Jelikož do rovnice dosazujeme čas, ve kterém těleso dosáhne své maximální výšky, budu výšku nadále označovat jako h_{max}.

$$h_{max} = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{v_0}{g} \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} g \cdot \frac{v_0^2}{g^2} \cdot \sin^2\alpha,$$

$$h_{max} = \frac{{v_0}^2}{g} \cdot \sin^2\alpha - \frac{1}{2}\frac{{v_0}^2}{g} \cdot \sin^2\alpha,$$

$$h_{max} = \frac{1}{2}\frac{{v_0}^2}{g} \cdot \sin^2\alpha.$$

Už známe čas, ve kterém těleso dosáhne maximální výšky, a předpokládáme, že pohyb začíná v počátku soustavy souřadnic. Dosazením tohoto času do rovnice pro polohu tělesa na ose x (s_x) můžeme snadno dopočítat, jak daleko od počátku těleso maximální výšky dosáhne. Pro výpočet doletu tělesa (maximální dosažené vzdálenosti od počátku) opět vyjdeme z předpokladu, že pohyb začíná (tedy i končí) ve výšce $s_y = 0$. Položíme tedy výšku rovnou nule a zjišťujeme, v jakém čase těleso dopadne na zem.

$$v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = 0,$$

vidíme, že se jedná o kvadratickou rovnici, dostaneme tedy dvě různá řešení. Vytkneme t a zjišťujeme, pro která t se rovnice bude rovnat nule.

$$t \cdot (v_0 \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2}gt) = 0,$$

Jedním ze dvou řešení této rovnice je $t = 0$. Toto řešení popisuje moment, kdy bylo těleso vystřeleno. Čas dopadu tedy získáme z výrazu v závorce tak, že jej položíme roven nule.

$$v_0 \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2}gt = 0 \rightarrow t = \frac{2v_0}{g} \cdot \sin\alpha.$$

Když známe čas, ve kterém těleso dopadne zpět na zem, dosadíme jej do rovnice pro polohu tělesa na ose x (s_x) a získáme tak maximální vzdálenost od počátku, jakou těleso během pohybu urazí (dále označuji jako s_{max}).

$$s_{max} = v_0 \cdot cos\,\alpha \cdot \frac{2v_0 \cdot}{g} \cdot \sin\alpha,$$

$$s_{max} = \frac{{v_0}^2}{g} \cdot 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha,$$

$$s_{max} = \frac{{v_0}^2}{g} \cdot \sin 2\alpha.$$

3.4 Rovnoměrný pohyb po kružnici[14]

Pohyb po kružnici je velmi důležitý v přírodě i technice. Příkladem mohou být planety sluneční soustavy obíhající slunce po přibližně kruhových drahách (ty se však nepohybují rovnoměrně). Rovnoměrný pohyb po kružnici vykonává objekt v případě, že za stejně dlouhé libovolně zvolené časové úseky urazí stejně dlouhé oblouky kružnice. Těmto obloukům odpovídají stejné velikosti úhlu φ.

Kružnice tedy představuje trajektorii, po které se objekt (dále bod) pohybuje. Okamžitá rychlost bodu konajícího pohyb po kružnici má v každém bodě kružnice tečný směr. Tuto skutečnost můžeme žákům přiblížit na příkladu pohybu planet kolem Slunce: Kdybychom uměli lusknutím prstů Slunce odstranit, planety by přestaly obíhat a pokračovaly by dál ve směru jejich okamžité rychlosti.

3.4.1 Základní úhlové veličiny

Doteď jsme pracovali s pomocí délkových veličin, tedy pokud bychom chtěli spočítat obvod kruhu, použijeme vzorec $2\pi r$, a pokud bychom chtěli spočítat čas, za který bod oběhne kružnici, použijeme vzorec $\frac{s}{v}$, kde s je obvod kruhu a v je okamžitá rychlost bodu. Při pohybu po kružnici je vhodné vyjadřovat tyto veličiny v úhlech. Ke stanovení velikosti takového úhlu budeme používat radiány. V radiánech budeme určovat středový úhel, který odpovídá příslušnému oblouku kružnice. Radián je odvozená bezrozměrná jednotka, přesněji úhel odpovídající úseku na kružnici, který má po rozvinutí stejnou délku jako poloměr kružnice. Z klasických stupňů se dá radián snadno odvodit.

[14] Podkapitola zpracována podle http://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/fyzika/pohyb/pohyb-po-kruznici, http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/15-pohyb-hmotneho-bodu-po-kruznici, https://onlineschool.cz/fyzika/rovnomerny-pohyb-po-kruznici/, https://slideplayer.cz/slide/17438304/

$$1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi} \approx 57°.$$

Vystačíme se znalostí, že plný úhel (360°) je 2π radiánů. Pro jeden radián potom dostáváme výše uvedený přepočet.

Značení

s − obvodová dráha

r − poloměr kružnice (průvodič)

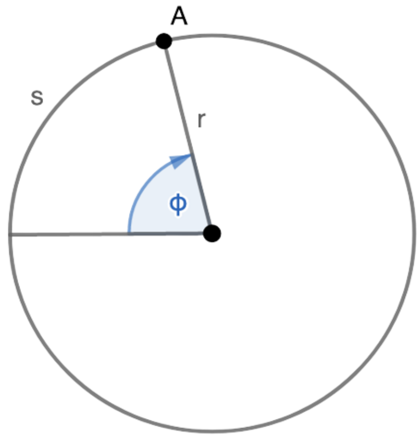
φ − úhlová dráha (orientovaný úhel)

ω − úhlová rychlost

T − perioda

f − frekvence

a_d − dostředivé zrychlení



Obr. 4

a) **úhlová dráha**

Úhlová dráha je pro žáky nejsnadněji představitelná veličina. Pokud bod A (viz *obr. 4*) objede kružnici jednou dokola, pak urazí vzdálenost 2π radiánů, tedy jeden obvod kružnice. Úhlová dráha tedy ukazuje, jaký úhel urazil průvodič kružnice, a její výpočet je analogií výpočtu dráhy ($s = v \cdot t$).

$$\varphi = \omega \cdot t \text{ rad}$$

a) **úhlová rychlost**

Uveďme si příklad. Závodník na okruhu vidí na svém tachometru okamžitou rychlost − to by byla rychlost obvodová. Ale v závislosti na velikosti poloměru takového okruhu můžeme jeho rychlost zapsat jako úhel, který za daný čas urazí.

Úhlová rychlost tedy vyjadřuje úhel, který za vteřinu urazí pohybující se bod, a budeme ji počítat obdobně jako rovnoměrný přímočarý pohyb ($v = \frac{s}{t}$).

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \text{ rad/s.}$$

Obvodová dráha se v tomto vztahu nahradí úhlovou dráhou a čas zůstává stejný. Jelikož úhlová dráha má jednotku jeden radián, jednotkou úhlové rychlosti je potom radián za sekundu.

b) vztah mezi úhlovou a obvodovou veličinou

Představme si, že sedíme na kolotoči. Všechny body tohoto kolotoče mají stejnou úhlovou rychlost, protože za stejný čas se otočí o stejný úhel. Pokud se ale posadíme na kolotoči blíž středu, bude se snižovat naše obvodová rychlost, jelikož za stejný časový úsek se otočíme o kratší vzdálenost, než kdybychom seděli na nejvzdálenějším bodu od středu. Na tomto příkladu je zřejmé, že ve vztahu mezi obvodovou a úhlovou rychlostí bude hrát důležitou roli poloměr kružnice. Provedeme tedy odvození tohoto vztahu.

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{t},$$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{t} = r\frac{2\pi}{t} \Rightarrow v = r \cdot \omega, s = r \cdot \varphi.$$

Z odvození vyplývá, že čím jsme vzdálenější od středu rotace, tím větší máme obvodovou rychlost. Pokud tedy budeme potřebovat znát jakoukoli obvodovou veličinu, stačí vynásobit poloměrem veličinu úhlovou.

3.4.2 Perioda, frekvence a dostředivé zrychlení

Pohyb po kružnici se opakuje stále dokola. Takový pohyb nazýváme **periodický** a dobu, za kterou bod oběhne kružnici jednou dokola, nazýváme **perioda.** Jelikož perioda je vlastně čas, za který provedeme jednu otáčku, můžeme pro její výpočet použít vzorec pro výpočet času rovnoměrného přímočarého pohybu, s tím rozdílem, že do vzorce dosadíme úhlové veličiny namísto obvodových.

$$t = \frac{s}{v} \rightarrow T = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega}\ \mathrm{s}$$

Ze vztahu vidíme, že perioda se dá spočítat jako uražená úhlová dráha dělená úhlovou rychlostí a její hlavní jednotkou je sekunda.

Další veličinou, kterou můžeme popsat pohyb bodu po kružnici, je **frekvence**. Frekvence je počet otáček, které bod udělá za jednu vteřinu, její jednotkou je Hertz (Hz) a její hodnotu můžeme získat jako převrácenou hodnotou frekvence. Vztah mezi periodou a frekvencí můžeme odvodit pomocí následujících kroků:

$$f \cdot 2\pi = \varphi,$$

počet otáček vykonaných za jednu sekundu vynásobíme délkou jedné otáčky a získáváme hodnotu úhlové dráhy, uražené za jednu sekundu. Tím dostáváme vztah pro úhlovou rychlost:

$$\omega = 2\pi f.$$

Ze vzorce pro úhlovou rychlost vyjádříme frekvenci a srovnáme s vyjádřením periody.

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \Leftrightarrow \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Jak můžeme vidět, perioda je převrácenou hodnotou frekvence (a opačně), takže pro ně platí vztah:

$$f = \frac{1}{T}, T = \frac{1}{f}.$$

O frekvenci a periodě má smysl se bavit pouze tehdy, pokud je pohyb rovnoměrný. Frekvence je neměnný počet otáček, které udělá bod za vteřinu. Pokud by se měnila rychlost bodu, měnil by se také počet otáček za vteřinu. Perioda je časový údaj, který označuje dobu potřebnou k tomu, aby se bod na kružnici dostal do výchozí pozice. Pokud by se bod nepohyboval rovnoměrně, jeho perioda by se s každou otočkou měnila a nemohli bychom tak hovořit o periodickém pohybu.

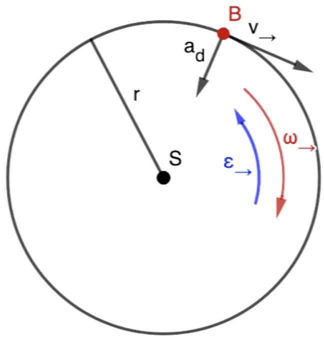
I v tomto pohybu musí na bod pohybující se rovnoměrně po kružnici působit určité zrychlení. Nazýváme jej **dostředivé zrychlení**. Dostředivé zrychlení působí na bod (resp. na vektor okamžité rychlosti bodu) směrem do středu kružnice a neustále zakřivuje dráhu jeho pohybu. Pokud by tu toto zrychlení nebylo, bod na kružnici by nerotoval kolem středu, ale pokračoval v rovnoměrném přímočarém pohybu. Žákům může připadat zvláštní, že se bavíme o rovnoměrném pohybu s konstantní rychlostí, a přesto zde působí nějaké zrychlení. Jelikož je vektor dostředivého zrychlení kolmý na vektor okamžité rychlosti, nemá vliv její velikost. Pro výpočet velikosti dostředivého zrychlení využijeme následující vztah:

$$a_d = \frac{v^2}{r} = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{r} = \omega^2 r \text{ m/s}^2$$

Využili jsme vztah mezi obvodovou a úhlovou rychlostí z kapitoly 3.4.1 c) a dostáváme dostředivé zrychlení jako r-násobek druhé mocniny velikosti vektoru úhlové rychlosti.

3.5 Nerovnoměrný pohyb po kružnici[15]

Rovnoměrný pohyb po kružnici byl specifický tím, že měl konstantní velikost úhlové rychlosti. Ale podobně jako u přímočarých pohybů, i zde se může rychlost pohybu ovlivnit nějaké zrychlení (resp. zpomalení). Takové zrychlení, které mění velikost úhlové rychlosti, nazýváme **úhlové zrychlení.** Úhlové zrychlení značíme ε, jeho jednotkou je rad/s^2 a jeho směr se odvíjí od změny, kterou působí na úhlovou rychlost. Zpomalení je vždy proti směru úhlové rychlosti (viz obr. *5*) a zrychlení naopak po směru.



Obr. 5

Stejně jako u přímočarého pohybu existuje vztah, který vyjadřuje okamžitou rychlost jako součet počáteční rychlosti a zrychlení v čase, u pohybu po kružnici platí jeho vyjádření v úhlových veličinách.

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \Delta t.$$

Kromě úhlového zrychlení (v úhlových veličinách) se setkáme také s **tečným zrychlením** a_t (v obvodových veličinách). Pokud si představíme poloměr jako rotující úsečku, tak úhlové zrychlení je stejné pro všechny body na takové úsečce. Velikost tečného zrychlení však závisí na vzdálenosti bodu od středu, podobně jako u obvodové rychlosti. Pro vztah mezi úhlovým a tečným zrychlením platí stejné pravidlo jako pro ostatní vztahy mezi úhlovými a obvodovými veličinami. Tedy, že obvodovou veličinu získáme z úhlové po vynásobení poloměrem:

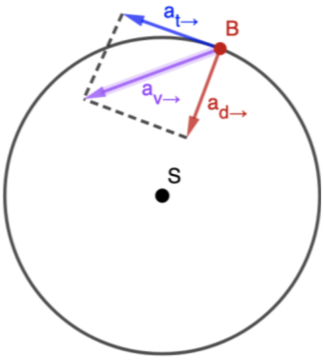
$$a_t = \varepsilon \cdot r.$$

Na bod rotující po kružnici tedy působí tečné i dostředivé zrychlení. Dostředivé zrychlení nemá vliv na velikost obvodové rychlosti, ale zakřivuje trajektorii bodu do tvaru

---

[15] Podkapitola zpracována podle http://www.multimediaexpo.cz/mmecz/index.php/Nerovnom%C4%9Brn%C3%BD_pohyb_po_kru%C5%BEnici a https://onlineschool.cz/fyzika/nerovnomerny-pohyb-po-kruznici/

kružnice. Naproti tomu tečné zrychlení mění velikost obvodové rychlosti. Vzorec pro výpočet okamžité obvodové rychlosti můžeme pomocí tečného zrychlení sestavit stejným způsobem jako vzorec okamžité úhlové rychlosti:



Obr. 6

$$v = v_0 + a_t \Delta t.$$

Složením vektoru dostředivého a tečného zrychlení získáme výsledný vektor zrychlení, působící na bod na kružnici. Tyto vektory jsou na sebe vždy kolmé, takže jejich výsledným vektorem je přepona trojúhelníku, jehož odvěsny tvoří naše vektory (viz *obr. 6*).

$$a_v = \sqrt{a_d^2 + a_t^2}.$$

Při výpočtu uražené dráhy můžeme při rotačním pohybu opět využít analogii s přímočarým pohybem a pouze nahradit obvodové veličiny úhlovými:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2.$$

Celá tato kapitola se týkala **rovnoměrně zrychleného** (resp. zpomaleného) pohybu. Rotační pohyb však může být zadán i obecnou rovnicí závislou na čase. Pro snadnější porozumění zde uvedu konkrétní příklad:

Je dána rovnice rotačního pohybu $\varphi = t^3 - 4t^2 + t$ na kružnici o poloměru $r = 3$ m. Napište rovnice, které popisují úhlovou rychlost, úhlové zrychlení a dostředivé zrychlení v závislosti na čase.

Nejprve vyjdeme ze vztahů, které obecně platí u přímočarého pohybu, a nahradíme je úhlovými veličinami:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}, a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \rightarrow \omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}.$$

U přímočarého pohybu platí, že rychlost je derivací dráhy podle času a zrychlení je derivací rychlosti podle času. Analogicky pro rotační pohyb platí, že úhlová rychlost je derivací úhlové dráhy podle času a úhlové zrychlení je derivací úhlové rychlosti podle času. Jinak by se také dalo říct, že rychlost a zrychlení jsou první a druhá derivace dráhy podle času.

Abychom tedy získali konkrétní vyjádření rovnice úhlové rychlosti a zrychlení, musíme zadanou úhlovou dráhu dvakrát zderivovat:

$$\omega = (t^3 - 4t^2 + 5t)' = 3t^2 - 8t + 5,$$
$$\varepsilon = (3t^2 - 8t + 5)' = 6t - 8.$$

Pokud by nás zajímaly konkrétní hodnoty úhlové rychlosti a zrychlení, musíme místo t dosadit konkrétní čas, ve kterém chceme tyto hodnoty sledovat. Například pro $t = 2$ s by úhlová rychlost činila 1 rad/s a úhlové zrychlení by se rovnalo 4 rad/s^2.

Dostředivé zrychlení získáme ze vztahu $a_d = \omega^2 r$, kde $r = 2$ m.

$r(3t^2 - 8t + 5)^2 = 2(9t^4 - 48t^3 + 94t^2 - 8t + 25) = 18t^4 - 96t^3 + 188t^2 - 16t + 50.$

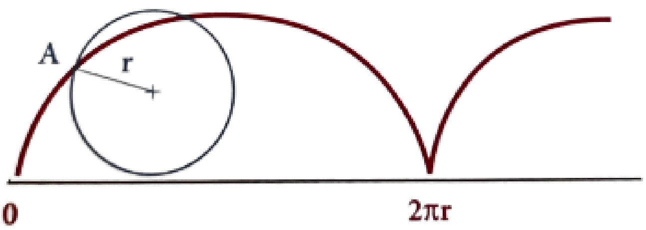
V námi zvoleném čase $t = 2$ s by dostředivé zrychlení dosahovalo hodnoty 2 m/s^2.

3.6 Valivý pohyb[16]

Valení se dá definovat jako složení posuvného a rotačního pohybu. Tělesa, která konají valivý pohyb, se otáčejí a zároveň se jako celek posouvají (uvažujme například koule, kola, nebo válce). Jako příklad můžeme uvést jízdu automobilem. Kola automobilu, který kousek popojede, se otáčejí (konají rotační pohyb), ale zároveň se posouvají, z místa, ze kterého jsme vyjeli, do místa, kde zastavíme.

Při otáčení kola na místě nastává situace, ve které se všechny body kola pohybují po soustředných kružnicích. Pro práci s valivým pohybem však budeme předpokládat, že se tělesa neprotáčejí čili že se netočí na místě.

Dráha bodu na jedoucím kole je totiž zcela odlišná. Budeme-li sledovat bod, který se v počátečním okamžiku pohybu dotýká silnice, zjistíme, že se pohybuje vpřed a zároveň nahoru až do maximální výšky rovné průměru kola. Poté bod začne opět klesat, až se znovu dotkne silnice. Bod takto opisuje široké oblouky křivky, kterou nazýváme **cykloida** (viz *obr. 7*). Cykloida není součástí kružnice, proto ji nelze sestrojit kružítkem.[17]



Obr. 7

Vzdálenost, o kterou se kolo (jeho střed) posune, se rovná vzdálenosti, kterou urazí bod na obvodu kola. Tento vztah můžeme zapsat jako:

$$s = \varphi r.$$

Uražená vzdálenost se rovná uražené úhlové dráze, násobené poloměrem.

---

[16] Podkapitola zpracována podle https://www.wikiwand.com/cs/Valiv%C3%BD_pohyb, http://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/fyzika/pohyb/valeni, https://onlineschool.cz/fyzika/valeni/

[17] CHAJDA, Radek. *Hravá matematika: hříčky s plochami i křivkami, úhly, čísly a šiframi*. Brno, 2012, s. 16-17

Z dřívějších kapitol víme, že při posuvném pohybu mají všechny body na tělese stejnou rychlost (za stejné časové úseky urazí stejnou dráhu). Při otáčivém pohybu je obvodová rychlost závislá na vzdálenosti bodu od středu otáčení ($v = \omega r$). Střed kola je jediná jeho část, která se pouze posouvá, a jelikož jeho rychlost posouvání není ovlivněna rotací, tak rychlost posouvání celého kola bude rychlost, kterou se posouvá jeho střed. Rychlost středu (stejně jako vzdálenost posunutí) tedy závisí na úhlové rychlosti otáčení, násobené poloměrem:

$$s = \varphi r \; \rightarrow \; v_S = \omega r.$$

4 Sbírka úloh

Jak jsem již zmínila v úvodu práce, v této části se budu zabývat řešením konkrétních úloh. Seřazení typových úloh odpovídá seřazení teorie z předchozí kapitoly, tedy od nejsnazších, základoškolských úloh, až po středoškolské úlohy. U každého typu pohybu uvádím ukázkovou úlohu a strategii jejího řešení (odpovídající předešlé teorii), kterou by podle mého názoru zvolila většina řešitelů. Mnoho zde řešených úloh se nachází v učebnicích pro základní a střední školy (příp. v on-line materiálech), ale některé úlohy vymýšlím sama – mnou vymyšlené úlohy budou označeny symbolem “☆”.

4.1 Rovnoměrný přímočarý pohyb

4.1.1 Pohyb jednoho objektu

Jedná se o jedny z nejjednodušších úloh o pohybu, v nichž se pohybuje pouze jeden objekt a k jejichž řešení je využit základní vztah $s = v \cdot t$. V tomto typu úloh vždy známe dvě z hodnot s, v, t a úkolem je dopočítat třetí, neznámou hodnotu. Tyto úlohy se vzájemně liší pouze v tom, které veličiny jsou zadány a v jakých jednotkách. Úlohy tohoto typu se dají řešit také graficky, ale tento způsob řešení (z mé zkušenosti) využívají žáci jen zřídkakdy, proto jej zde nebudu uvádět.

Úloha☆: Za kolik minut dojede vlak z Prahy do Berouna (40 km), jede-li průměrnou rychlostí 60 km/h?

Řešení:

$v = 60$ km/h,

$s = 40$ km,

$t = \frac{s}{v}$ [min].

Výsledný čas má vyjít v minutách, máme tedy dvě možnosti, jak postupovat.

1. Převedení jednotky rychlosti z kilometrů za hodinu na kilometry za minutu vydělením šedesáti.
   $v = 1$ km/min,
   $t = \frac{40}{1} = 40$ min
2. Dosadit rychlost v kilometrech za hodinu a výsledný čas převést na minuty vynásobením šedesáti.
   $t = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ h $= 40$ min

V obou případech docházíme k výsledku, že vlak z Prahy do Berouna dorazí za 40 minut.

4.1.2 Pohyb dvou objektů ve stejném směru

„*Tento typ patří ve školní výuce k jednomu ze dvou nejtypičtějších příkladů slovních úloh o pohybu. Jedná se o následující model: Z místa A vyjede první objekt rychlostí v_1 km/h, poté co urazí dráhu d km (nebo po čase t_0), za ním vyrazí druhý objekt rychlostí v_2 km/h, která je vždy vyšší než v_1. Otázka zpravidla zní, za jak dlouho dostihne druhý objekt první.*

Princip řešení je v tom, že v okamžiku setkání jsou oba objekty stejně vzdálené od místa A, tudíž se jejich dráhy rovnají. To je také zpravidla základní informace pro sestavení rovnic (rovnice).“[18]

Úloha☆: V 7 hodin ráno vyrazil Jarda pěšky do školy rychlostí 4 km/h. V 7:30 vyrazil do školy jeho bratr Lukáš na kole rychlostí 12 km/h (Jarda i Lukáš bydlí na stejném místě). Škola je od jejich domu vzdálená 6 km. V kolik hodin a jak daleko od domova dostihne Lukáš Jardu?

Řešení:

Jarda	Lukáš
$v_1 = 4$ km/h,	$v_2 = 12$ km/h,
$t = t_1$ [h],	$t = t_2 = t_1 - 0{,}5$ [h],

[18] SCHÖFFELOVÁ, Miroslava. *Porozumění slovním úlohám o pohybu*. Univerzita Karlova, 2008, s. 35, vedoucí diplomové práce PhDr. Miroslav Rendl, CSc.

$s_1 = v_1 \cdot t_1$ [km], $s_2 = v_2 \cdot t_2$ [km].

Čas, který stráví Lukáš na cestě, je o půl hodiny kratší než Jardův, protože vyrazil o 30 minut později. Dráha, kterou oba urazí do chvíle setkání, je stejná.

$s_2 = s_1$,

$v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot (t_1 - 0{,}5)$,

$4 \cdot t_1 = 12 \cdot (t_1 - 0{,}5)$,

$4t_1 = 12t_1 - 6$,

$6 = 8t_1$,

$t_1 = 0{,}75$ h $= 45$ min.

Jarda byl na cestě do školy 45 minut, než ho dostihl Lukáš. Setkali se tedy v 7:45.

Vzdálenost od domova, ve které Lukáš dostihne Jardu, spočteme tak, že dosadíme Jardovu rychlost a čas chůze do vzorce pro výpočet dráhy $s = v \cdot t$.

$s = v_1 \cdot t_1$,

$s = 4 \cdot 0{,}75$ km,

$s = 3$ km.

Lukáš dostihne Jardu 3 kilometry od domova.

4.1.3 Pohyb dvou objektů proti sobě

„*Tento typ je druhým nejčastěji se vyskytujícím ve školním vyučování, jedná se o klasické modelové příklady, zadávané na následujícím principu: Vzdálenost dvou míst A a B je d km. Z A do B se začne v určitém okamžiku pohybovat určitý objekt rychlostí* v_1 *km/h. Z B do A se ve stejný okamžik (nebo později – to už se jedná o variaci) začne pohybovat jiný objekt rychlostí* v_2 *km/h. Otázka zní, kdy a kde se objekty setkají. Základním principem řešení tohoto typu úloh o pohybu zpravidla bývá, že* $s_1 + s_2 = d$ *a* $t_1 = t_2$ *(pokud není úloha zkomplikována různou dobou startu objektů). Podobně jako u předchozího typu (a pochopitelně u všech ostatních) lze tento typ tak typických školních* *úloh mnoha způsoby zkomplikovat, měnit vstupní podmínky, což může vést ke zmapování skutečného pochopení principu řešení těchto úloh žáky.*“[19]

Úloha☆: Z místa A v 10:00 vyjel nákladní automobil průměrnou rychlostí 56 km/h. Z místa B o 0,5 h později vyjel opačným směrem osobní automobil průměrnou rychlostí 112 km/h. Místa A a B jsou od sebe vzdálená 280 km. V kolik hodin a jak daleko od místa A se setkají?

Řešení:

<u>nákladní automobil</u>

$v_1 = 56$ km/h,

$t = t_1$ [h],

$s_1 = v_1 \cdot t_1$ [km],

<u>osobní automobil</u>

$v_2 = 112$ km/h,

$t = t_2 = t_1 - 0{,}5$ [h],

$s_2 = v_2 \cdot t_2$ [km],

$d = 280$ km,

$d = s_1 + s_2$,

$280 = v_1 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_2$,

$280 = 56 \cdot t_1 + 112 \cdot (t_1 - 0{,}5)$,

$280 = 56t_1 + 112t_1 - 56$,

$336 = 168t_1$,

$t_1 = 2$ h.

Nákladní automobil bude na cestě 2 hodiny. Setkají se tedy ve 12 hodin.

Vzdálenost od místa A dopočítáme dosazením rychlosti a času jízdy nákladního automobilu do vzorce pro výpočet dráhy $v = s \cdot t$.

$s = v_1 \cdot t_1$,

$s = 56 \cdot 2$ km,

$s = 112$ km.

Setkají se 112 kilometrů od místa A.

---

[19] SCHÖFFELOVÁ, Miroslava. *Porozumění slovním úlohám o pohybu*. Univerzita Karlova, 2008, s. 36, vedoucí diplomové práce PhDr. Miroslav Rendl, CSc.

4.2 Rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb

Úloha: Těleso snížilo rovnoměrně zrychleným přímočarým pohybem svoji rychlost ze 72 km/h na 18 km/h za 10 sekund. Jakou dráhu urazilo? [20]

Řešení:

$v_0 = 72$ km/h $= 20$ m/s,

$v_k = 18$ km/h $= 5$ m/s,

$t = 10$ s.

1. Jedná se o rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb s nějakou počáteční rychlostí, při kterém se rychlost zmenšuje (vektor zrychlení míří proti vektoru rychlosti) a pro jehož dráhu platí: $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

   Zrychlení získáme ze vztahu $a = \frac{v_k - v_0}{\Delta t}$, kde $\Delta t = t = 10$ s. Do vzorce pro výpočet zrychlení dosazujeme počáteční i koncovou rychlost v metrech za sekundu.

   $a = \frac{5 - 20}{10} = -1{,}5$ m/s^2.

   Dosadíme do vzorce pro výpočet dráhy:

   $s = 20 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot (-1{,}5) \cdot 10^2$ m,

   $s = 200 - 75$ m,

   $s = 125$ m.

[20] Dostupné z: http://www.nabla.cz/obsah/fyzika/mechanika-priklady/rovnomerne-zrychleny-primocary-pohyb.php

2. U rovnoměrně zrychleného pohybu je závislost rychlosti na čase lineární funkcí, lze tak získat průměrnou rychlost celého pohybu (sečtením počáteční a koncové rychlosti a vydělením dvěma). Pro výpočet dráhy v tomto případě platí vztah $s = v_p \cdot t$.

$s = v_p \cdot t$,

$s = \frac{v_0 + v_k}{2} \cdot t$,

$s = \frac{5 + 20}{2} \cdot 10$ m,

$s = 125$ m.

V obou možnostech řešení docházíme k závěru, že dráha uražená tělesem za dobu snižování své rychlosti je 125 metrů.

4.2.1 Volný pád

Úloha: Těleso bylo upuštěno z výšky 30 metrů. Za jak dlouho a v jaké rychlosti dopadne na zem? [21]

Řešení:

$v_0 = 0$ m/s,

$h_0 = s = 30$ m,

$t = ?$ [s],

$v_{max} = ?$ [m/s].

Nejdříve vypočteme čas dopadu a ten poté dosadíme do vzorce pro výpočet rychlosti volného pádu.

[21] Dostupné z: https://onlineschool.cz/fyzika/volny-pad/

Jedná se o rovnoměrně zrychlený pohyb, tudíž vyjdeme ze vztahu $s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$, kde počáteční rychlost je nulová a zrychlení a je konstantní gravitační zrychlení ($g = 9{,}81$ m/s). Dostáváme: $s = \frac{1}{2} g t^2$.

$30 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t^2$ s,

$6{,}11 \doteq t^2$ s,

$t \doteq 2{,}47$ s.

Těleso dopadne na zem přibližně za 2,47 vteřiny.

$v_{max} = gt$,

$v_{max} = 9{,}81 \cdot 2{,}47$ m/s,

$v_{max} \doteq 24{,}23$ m/s.

Těleso těsně před dopadem na zem dosáhne rychlosti přibližně 24,23 metrů za sekundu.

4.3 Vrhy

4.3.1 Vrh vzhůru

Úloha: Jan stojí na střeše budovy vysoké 30 m a vrhne do vzduchu míč rychlostí 8 m/s. V jaké výšce od země (h_{max}) a za jak dlouho od vyhození (t_z) začne míč padat k směrem zemi? Za jak dlouho (t_c) od vyhození dopadne míč na zem? [22]

Řešení:

$\mathrm{h}_0 = 30$ m,

$v_0 = 8$ m/s,

$t_z = ?$ [s],

$h_{max} = ?$ [m],

$t_c = ?$ [s].

[22] Dostupné z: https://onlineschool.cz/fyzika/svisly-vrh-vzhuru/

Při výpočtech využijeme vzorce odvozené v kapitole 3.3.1.

$t_z = \frac{v_0}{g}$,

$t_z = \frac{8}{9{,}81}$ s,

$t_z \doteq 0{,}82$ s.

$h_{max} = h_0 + \frac{v_0^2}{2g}$,

$h_{max} = 30 + \frac{64}{19{,}62}$ m,

$h_{max} = 33{,}26$ m.

Míč se bude nacházet maximálně ve výšce 33,26 m.

$t_c = t_z + \sqrt{\frac{2h_{max}}{g}}$,

$t_c = 0{,}82 + \sqrt{\frac{66{,}52}{9{,}81}}$ s,

$t_c \doteq 3{,}42$ s.

Míč dopadne na zem přibližně za 3,42 vteřiny od vyhození do vzduchu.

4.3.2 Vodorovný vrh

Úloha: Jan stojí na střeše budovy vysoké 40 m a hází kámen ve vodorovném směru rychlostí 10 m/s. Za jak dlouho od vyhození dopadne kámen na zem (t_d) a jak daleko bude od budovy (s_x)? [23]

Řešení:

$h_0 = 40$ m,

[23] Dostupné z: https://onlineschool.cz/fyzika/vodorovny-vrh/

$v_0 = 10$ m/s,

$t_d = ?$ [s],

$s_{max} = ?$ [m].

Při výpočtu času dopadu vyjdeme ze vzorce $s_y = \frac{1}{2}gt^2$ z kapitoly 3.3.2 a vyjádříme z něj čas. Dostáváme: $t = t_d = \sqrt{\frac{2s_y}{g}}$. Výška budovy je zároveň dráha s_y, kterou kámen urazí, než dopadne.

$$t_d = \sqrt{\frac{2 \cdot 40}{9,81}} \text{ s},$$

$$t_d \doteq 2,85 \text{ s}.$$

Kámen dopadne na zem přibližně 2,85 vteřiny po odhození.

Abychom zjistili, jak daleko od budovy kámen dopadne, využijeme vzorec $s_x = v_0 t$. V čase dopadu je s_x zároveň s_{max}.

$$s_{max} = v_0 \cdot t_d,$$

$$s_{max} = 10 \cdot 2,85 \text{ m},$$

$$s_{max} = 28,5 \text{ m}.$$

Kámen dopadne na zem do vzdálenosti 28,5 metru od budovy.

4.3.3 Šikmý vrh

Úloha: Z děla byla vystřelena koule rychlostí 30 m/s. V době výstřelu svírala hlaveň děla se zemí úhel 30°. Jaké maximální výšky (h_{max}) dosáhne dělová koule a jak daleko od děla dopadne na zem (s_{max})? [24]

Řešení:

$v_0 = 30$ m/s,

[24] Dostupné z: https://onlineschool.cz/fyzika/sikmy-vrh/

$\alpha = 30°$,

h_{max} = ? [m],

s_{max} = ? [m].

Při výpočtech využijeme vzorce, odvozené v kapitole 3.3.3.

$$h_{max} = \frac{1}{2}\frac{v_0{}^2}{g} \cdot \sin^2 \alpha,$$

$$h_{max} = \frac{1}{2}\frac{900}{9{,}81} \cdot \frac{1}{4}\ \text{m},$$

$$h_{max} \doteq 11{,}46\ \text{m}.$$

Dělová koule se bude nacházet maximálně ve výšce přibližně 11,46 metrů.

$$s_{max} = \frac{v_0{}^2}{g} \cdot \sin 2\alpha,$$

$$s_{max} = \frac{900}{9{,}81} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{m},$$

$$s_{max} \doteq 79{,}45\ \text{m}.$$

Vystřelená dělová koule doletí přibližně 79,45 metru od místa výstřelu.

4.4 Rovnoměrný pohyb po kružnici

Úloha: Hmotný bod se pohybuje rovnoměrně po kružnici o poloměru 4,5 m úhlovou rychlostí 1,8 rad/s. Vypočítejte periodu, frekvenci a dostředivé zrychlení tohoto pohybu.[25]

Řešení:

$\omega = 1{,}8$ rad/s,

$r = 4{,}5$ m,

T = ? [s],

f = ? [Hz],

[25] Dostupné z: https://www.hackmath.net/cz/priklad-uloha/1047

$a_d = ?$ [m/s^2].

Ze vzorce $\omega = 2\pi f$ z kapitoly 3.4 vyjádříme frekvenci. Dostáváme: $f = \frac{\omega}{2\pi}$.

$f = \frac{1{,}8}{2\pi}$,

$f \doteq 0{,}29$ Hz.

$T = \frac{1}{f}$,

$T = \frac{1}{0{,}29}$ s,

$T \doteq 3{,}45$ s.

Pro výpočet dostředivého zrychlení použijeme vzorec, odvozený v kapitole 3.4.2.

$a_d = \omega^2 r$,

$a_d = 1{,}8^2 \cdot 4{,}5$ m/s^2,

$a_d = 14{,}58$ m/s^2.

Úloha: Minutová ručička věžních hodin má délku 2 m. Určete velikost rychlosti koncového bodu ručičky. [26]

Řešení:

$r = 2$ m,

$T = 3\,600$ s,

$v = ?$ [m/s].

---

[26] Dostupné z:
https://www.vascak.cz/data/priklady/priklady2.php?skupina=1&priklady=4_1;4_6;4_9;4_10;4_16;4_21;

Při řešení vyjdeme ze vztahu mezi obvodovou a úhlovou rychlostí ($v = \omega r$). Z kapitoly 3.5 víme, že úhlová rychlost se dá vyjádřit jako $\frac{2\pi}{T}$. Dostáváme tedy vztah: $v = \frac{2\pi}{T} \cdot r$.

$v = \frac{6{,}28}{3\,600} \cdot 2$ m/s,

$v \doteq 3{,}49$ m/s.

4.5 Nerovnoměrný pohyb po kružnici

Úloha☆: Okružní pila po pěti sekundách rovnoměrného zpomalování s úhlovým zrychlením $\varepsilon = -25$ rad/s^2 zpomalí na 200 rad/s. Určete počáteční úhlovou rychlost, původní periodu a frekvenci.

Řešení:

$\varepsilon = -25$ rad/s^2,

$\omega = 200$ rad/s,

$t = 5$ s,

ω_0 = ? [rad/s],

T = ? [s],

f = ? [Hz].

Abychom byli schopni dopočítat počáteční úhlovou rychlost, potřebujeme znát změnu rychlosti $\Delta\omega$, ke které došlo v průběhu zpomalování.

$\Delta\omega = \varepsilon \cdot \Delta t$,

$\Delta\omega = -25 \cdot 5$ rad/s,

$\Delta\omega = -75$ rad/s.

Vidíme, že počáteční rychlost se zmenšila o 75 rad/s na 200 rad/s. Z toho plyne, že před zpomalením se okružní pila otáčela rychlostí 275 rad/s.

Z kapitoly 3.4 víme, že perioda se dá vyjádřit jako $\frac{2\pi}{\omega}$. Do tohoto vztahu dosazujeme počáteční rychlost ω_0 z předchozího výpočtu.

$T = \frac{6{,}28}{275}$ s,

$T \doteq 0{,}02$ s.

$f = \frac{1}{T}$,

$f = \frac{1}{0{,}02}$ Hz,

$f = 50$ Hz.

Okružní pila udělá 50 otáček za vteřinu a jednu otáčku vykoná za 0,02 vteřiny.

Úloha: Rotační stroj rotuje rychlostí 3 000 otáček za minutu. Při této rychlosti rovnoměrným zrychlením zastaví svůj pohyb za 10 vteřin. Jaké je jeho úhlové zrychlení a úhlová dráha? Jaké je celkové zrychlení (a) bodu na okraji stroje na začátku brzdění, je-li jeho vzdálenost od osy otáčení 15 cm? [27]

Řešení:

$f = 3\,000$ ot/min = 50 Hz,

$\Delta t = 10$ s,

ε = ? [m/s²],

φ = ? [rad],

a_v = ? [m/s²],

$r = 15$ cm = $0{,}15$ m.

[27] Dostupné z: https://onlineschool.cz/fyzika/nerovnomerny-pohyb-po-kruznici/

V průběhu řešení úlohy budeme využívat vzorce, odvozené v kapitolách 3.4 a 3.5. Pro výpočet úhlového zrychlení potřebujeme nejdříve zjistit počáteční rychlost ω_0, kterou můžeme získat ze vztahu: $\omega = 2\pi f$.

$\omega_0 = 6{,}28 \cdot 50$ rad/s,

$\omega_0 = 314$ rad/s.

$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$,

$\varepsilon = \frac{0 - 314}{10}$ rad/s^2,

$\varepsilon = -31{,}4$ rad/s^2.

$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$,

$\varphi = 314 \cdot 10 + \frac{1}{2}(-31{,}4) \cdot 100$ rad,

$\varphi = 1\,570$ rad.

Pokud by nás zajímala úhlová dráha v otáčkách, museli bychom tento výsledek vydělit délkou jedné otáčky, tedy 2π.

Na bod na okraji stroje působí tečné a dostředivé zrychlení. Jelikož jsou vektory těchto dvou zrychlení na sebe kolmé, výsledné zrychlení vypočítáme jejich složením přes Pythagorovu větu.

$a_v = \sqrt{a_t^2 + a_d^2}$.

$a_d = \omega_0^2 r$,

$a_d = 98\,596 \cdot 0{,}15$ rad/s^2,

$a_d \doteq 14\,789$ rad/s^2.

Při výpočtu tečného zrychlení opět vyjdeme ze vztahu mezi úhlovými a obvodovými veličinami. Do vzorce pro výpočet tečného zrychlení dosazujeme kladnou hodnotu úhlového zrychlení, protože jejich vektory mají stejný směr.

$a_t = \varepsilon r,$

$a_t = 31{,}4 \cdot 0{,}15$ m/s^2,

$a_t \doteq 4{,}71$ m/s^2.

$a_v = \sqrt{a_t^2 + a_d^2},$

$a_v = \sqrt{22{,}18 + 218\,714\,521},$

$a_v \doteq 14\,789$ m/s^2.

Můžeme si všimnout, že velikost tečného zrychlení v této konkrétní úloze nemá téměř žádný vliv na velikost celkového zrychlení. Velikost celkového zrychlení je tedy přibližně stejná, jako velikost zrychlení dostředivého.

4.6 Valivý pohyb

Úloha: Válec o poloměru 20 cm se valí a celý se otočí za 1 sekundu. Jaká je úhlová rychlost jeho otáčení a jakou rychlostí se válec posouvá? [28]

Řešení:

$r = 20$ cm $= 0{,}2$ m,

$T = 1$ s,

$\omega = ?$ [rad/s],

$v = ?$ [m/s].

[28] Dostupné z: https://onlineschool.cz/fyzika/valeni/

$\omega = \frac{2\pi}{T}$,

$\omega \doteq 6{,}28$ rad/s.

Rychlost posouvání celého válce je stejná, jako rychlost posouvání jeho středu (viz kapitola 3.6)

$v = v_s = \omega r$,

$v = 6{,}28 \cdot 0{,}2$ m/s,

$v \doteq 1{,}26$ m/s.

Válec se otáčí rychlostí 6,28 radiánu za vteřinu a posouvá se rychlostí 1,26 metru za vteřinu.

5 Závěr

Jedním z cílů této práce bylo ukázat na důležitost slovních úloh a jejich zásadní roli v hodinách matematiky i v životě.

Během rešerše pro první část práce jsem se setkala s mnoha publikacemi, které obsahovaly různé definice pojmu slovní úloha a různé postupy jejich řešení. Všechny se však shodovaly v tom, že slovní úlohy a jejich řešení je nedílnou součástí hodin matematiky. Popsala jsem, jak nám slovní úlohy pomáhají nejen naučit se interpretovat matematický text a přirovnat jej k reálné situaci, ale také matematizovat reálné situace. Slovní úlohy nás do života učí také propojovat a chápat souvislosti a zvažovat svá rozhodnutí na základě dostupných faktů. Jinými slovy, slovní úlohy v hodinách matematiky na základní a střední škole nás připravují na budoucí život. Bez schopnosti umět si v případě potřeby matematizovat jednoduché životní situace bychom nebyli schopni se sami rozhodovat. Považuji tak svůj úvodní cíl za splněný.

Ve druhé části práce se mi podařilo zpracovat a shrnout většinu teorie týkající se pohybu a pohybových slovních úloh. Ukázala jsem několik možných způsobů odvození potřebných vzorců, nikoli však všechny. U některých vzorců jsem nastínila jejich odvození pomocí derivace a integrace, ale pokud budu svoji práci v budoucnu rozšiřovat, chtěla bych se na tento způsob odvození více zaměřit a hlouběji prozkoumat význam derivací při práci s grafickým znázorněním úloh o pohybu.

Práce může být použita jako příručka pro učitele a žáky, která shrnuje teoretické poznatky z oblasti pohybu a obsahuje k nim odpovídající řešené úlohy, což bylo mým druhým cílem. Mě osobně vždy více bavilo počítat příklady než učit se teorii, ale paradoxně v této práci mě mnohem více bavilo psaní teoretické části. U každé konkrétní úlohy totiž existuje mnoho způsobů řešení. Vybrat a detailně zpracovat takový postup řešení, který nejpravděpodobněji zvolí také většina řešitelů, pro mě bylo jedním z nejtěžších úkolů. Při řešení typových úloh jsem se proto omezila jen na řešení odpovídající zpracované teorii v předchozí části. V budoucnu bych chtěla u konkrétních úloh ukázat a porovnat více možných způsobu řešení.

Seznam použitých informačních zdrojů

1. **ACKOO - učební texty.** *Derivace časové funkce.* [Online] [Citace: 14. duben 2022.] https://ackoo.estranky.cz/clanky/derivace-casove-funkce.html.
2. **BEČVÁŘ, Jindřich, Martina Bečvářová a Hana Vymazalová.** *Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie.* Praha : Prometheus, 2003. 80-7196-255-4.
3. **BESEDOVÁ, Jana.** Škola po škole. [Online] 2022. [Citace: 18. duben 2022.] https://skolaposkole.cz/matematika-zs/9-rocnik/slovni-ulohy.
4. **BLAŽKOÁ, Růžena, Květoslava Matoušková a Milena Vaňurová.** *Texty k didaktice matematiky pro studium učitelství 1. stupně základní školy.* Brno : Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, 1993.
5. **BLAŽKOVÁ, Růžena, Květoslava Matoušková a Milena Vaňurová.** *Kapitoly z didaktiky matematiky: (slovní úlohy, projekty).* Brno : Masarykova univerzita, 2007. 80-210-3022-4.
6. **ERNI, Hans.** *Chemie, fyzika, astronomie.* [překl.] Pavel Andrle a Ivan Haverlík. Praha : Albatros, 1978.
7. **FOLTA, Jaroslav.** *Dějiny matematiky I.* Praha : Národní technické muzeum, 2004. Sv. 3. 80-239-4031-7.
8. **GEO.** *Co by se stalo, kdyby se Země přestala otáčet?* Reflex.cz. [Online] 4. duben 2011. [Citace: 27. květen 2022.] https://www.reflex.cz/clanek/dokument/41076/co-by-se-stalo-kdyby-se-zeme-prestala-otacet.html.
9. **HACKMATH.** *Pohyb po kružnici***.** HackMath.net. [Online] 2022. [Citace: 26. červen 2022.] https://www.hackmath.net/cz/priklad-uloha/1047.
10. **HÁJEK, Petr.** *Fyzika - Mechanika - Kinematika.* [Online] Integrovaná střední škola v Semilech, 2012. [Citace: 18. duben 2022.] https://slideplayer.cz/slide/17438304/.
11. **CHAJDA, Radek.** *Hravá matematika: hříčky s plochami i křivkami, úhly, čísly a šiframi.* Brno : Edika, 2012. 978-80-266-0055-8.
12. **KUŘINA, František.** *Umění vidět v matematice*. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1990. str. 297. 978-80-04-23753-0.

13. **MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY.** *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (RVP ZP). edu.cz.* [Online] 2021. [Citace: 15. červen 2022.] https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/.
14. **MULTIMEDIAEXPO - otevřená encyklopedie.** *Nerovnoměrný pohyb po kružnici.* [Online] 2013. [Citace: 7. květen 2022.] http://www.multimediaexpo.cz/mmecz/index.php/Nerovnom%C4%9Brn%C3%BD_pohyb_po_kru%C5%BEnici.
15. **NABLA.** *Rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb — řešené příklady* [Online] Národní knihovna České republiky, 2013. [Citace: 26. červen 2022.] http://www.nabla.cz/obsah/fyzika/mechanika-priklady/rovnomerne-zrychleny-primocary-pohyb.php.
16. **NOVOTNÁ, Jarmila.** *Analýza řešení slovních úloh: [kapitoly z didaktiky matematiky].* Praha : Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2000. 80-7290-011-0.
17. **NOVOTNÁ, Jarmila.** Řešení úloh ve vyučování matematiky se zěměřením na využití „neškolských strategií". *Text k webináři Využití „neškolských strategií" pro řešení úloh v matematice na 2. a 3. stupni.* Brno : Vzdělávací institut pro Moravu, 11. květen 2022.
18. **ODVÁRKO, Oldřich.** *Metody řešení matematický úloh.* Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1990. 80-04-20434-1.
19. **POLÁK, Josef.** *Didaktika matematiky: Jak učit matematiku zajímavě a užitečně*. Plzeň : Nakladatelství Fraus, 2014. str. 432. 978-80-7238-449-5.
20. **RANDA, Miroslav, Václav Havel, Gerhard Höfer, et. al.** *Fyzika 6: pro základní školy a víceletá gymnázia.* Plzeň : Nakladatelství Fraus, 2017. 978-80-7489-048-2.

21. **RANDA, Miroslav, Václav Havel, Jiří Kohout, Václav Kohout, Pavel Kratochvíl, Pavel Masopust, Jitka Prokšová a Karel Rauner.** *Fyzika 7: pro základní školy a víceletá gymnázia.* Plzeň : Nakladatelství Fraus, 2018. 978-80-7489-345-2.
22. **REICHL, Jaroslav.** *Pohyb hmotného bodu po kružnici*. Encyklopedie fyziky. [Online] 2022. [Citace: 2022. březen 2022.] http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/15-pohyb-hmotneho-bodu-po-kruznici.
23. **SCHÖFFELOVÁ, Miroslava.** *Porozumění slovním úlohám o pohybu.* Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy, 2008. str. 35, Diplomová práce.
24. **TECHMANIA SCIENCE CENTER - eduportál.** *Pohyb po kružnici.* **[**Online] 2007. [Citace: 27. leden 2022.] http://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/fyzika/pohyb/pohyb-po-kruznici.
25. **TECHMANIA SCIENCE CENTER - eduportál.** *Pohyb*. [Online] 2007. [Citace: 27. leden 2022.] http://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/fyzika/pohyb/.
26. **TECHMANIA SCIENCE CENTER - eduportál.** *Valení.* [Online] 2007. [Citace: 27. leden 2022.] http://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/fyzika/pohyb/valeni.
27. **VAŠČÁK, Vladimír.** *Pohyb po kružnici - př. č. 1*. Vascak.cz. [Online] 2022. [Citace: 26. červen 2022.] https://www.vascak.cz/data/priklady/priklady2.php?skupina=1&priklady=4_1;4_6;4_9;4_10;4_16;4_21.
28. **VONDROVÁ, Naďa.** *Příčiny používání povrchových strategií řešení slovních úloh a jak jim předcházet.* Učitel matematiky. 2, 2020, 28.
29. **VYMAZALOVÁ, Hana.** *Staroegyptská matematika: Hieratické matematické texty.* 1. Praha : Český egyptologický ústav FF UK, 2006. Sv. 31. 80-7308-156-3.
30. **VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ - Technická univerzita Ostrava.** *Základy mechaniky.* [Online], 2008. [Citace: 8. květen 2022.] http://www.elearn.vsb.cz/archivcd/FS/ZMech/CD_Zaklady_mechaniky/testy/res_46.htm.

31. **WIKIWAND.** *Valivý pohyb.* [Online] [Citace: 23. květen 2022.] https://www.wikiwand.com/cs/Valiv%C3%BD_pohyb.
32. **ZEMAN, Radek.** *Nerovnoměrný pohyb po kružnici***.** Onlineschool.cz. [Online] 2022. [Citace: 23. únor 2022.] https://onlineschool.cz/fyzika/nerovnomerny-pohyb-po-kruznici/.
33. **ZEMAN, Radek.** *Rovnoměrný pohyb po kružnici*. Onlineschool.cz. [Online] 2022. [Citace: 23. únor 2022.] https://onlineschool.cz/fyzika/rovnomerny-pohyb-po-kruznici/.
34. **ZEMAN, Radek.** *Svislý vrh vzhůru*. Onlineschool.cz. [Online] 2022. [Citace: 23. únor 2022.] https://onlineschool.cz/fyzika/svisly-vrh-vzhuru/.
35. **ZEMAN, Radek.** *Šikmý vrch*. Onlineschool.cz. [Online] 2022. [Citace: 23. únor 2022.] https://onlineschool.cz/fyzika/sikmy-vrh/.
36. **ZEMAN, Radek.** *Valení.* Onlineschool.cz. [Online] 2022. [Citace: 23. únor 2022.] https://onlineschool.cz/fyzika/valeni/.
37. **ZEMAN, Radek.** *Vodorovný vrh.* Onlineschool.cz. [Online] 2022. [Citace: 23. únor 2022.] https://onlineschool.cz/fyzika/vodorovny-vrh/.
38. **ZEMAN, Radek.** *Volný pád.* Onlineschool.cz. [Online] 2022. [Citace: 23. únor 2022.] https://onlineschool.cz/fyzika/volny-pad/.