Posudek oponenta k diplomové práci
Local properties of modules
Tomáše Lysoňka

Předložená práce studuje pojem relativní čistoty v kategorii modulů a s ním související témata. Za jeden z hlavních výsledků lze považovat zobecněné věty o 'descentu' projektivity pro věrně plochá rozšíření komutativních okruhů publikované v klasickém článku Raynauda a Grusona v roce 1971.

Práce je rozčleněna do 8 kapitol, první 3 kapitoly jsou souhrnem poznatků využívaných dále. Čtvrá kapitola zavádí klíčový pojem relativní čistoty, tedy čistoty vzhledem k nějaké třídě konečně prezentovaných modulů uzavřené na izomorfismy, dikretní součty a sčítance. S tímto pojmem pak souvisejí pojmy relativně projektivních a relativně plochých modulů, které jsou detailně studovány, například Theorem 4.20 je relativní verzí Lazardovy charakterizace plochých modulů. Pro důkaz hlavního výsledku práce je zásadní Proposition 4.25 charakterizující relativně projektivní moduly jako relativně ploché Mittag-Lefflerovy moduly, které jsou direktní součty spočetně generovaných modulů.

Pátá kapitola vysvětluje, jak chápat 'ascent' a 'descent' pro vlastnosti definované pomocí třídy konečně prezentovaných modulů (například relativní projektivita a plochost).

Šestá kapitola se zabývá vlastnostmi funktoru $-\otimes_R S : \mathrm{Mod}{-}R \to \mathrm{Mod}{-}S$ zadaného okruhovým homomorfismem $\varphi\colon R \to S$. Jde zejména o to, kdy tento funktor zachovává či reflektuje (čisté) monomorfismy a epimorfismy. Sedmá kapitola pak zkoumá 'ascent' a 'descent' vybraných vlastností kategorie modulů pro funktor $-\otimes_R S$. Hlavní výsledek Theorem 7.13 pak ukazuje descent projektivity, pokud je φ čisté a funktor $-\otimes_R S$ reflektuje plochost. Dále descent relativní projektivity pokud φ je čisté a funktor reflektuje čisté epimorfismy.

Závěrečná kapitola pak ukazuje aplikace dosažených výsledků pro určitá rozšíření centrálních algeber.

Studovaná problemtika je velice hezky prezentována, jednotlivé části práce na sebe logicky navazují. Autor zvládnul poměrně obtížné téma vyžadující dobrou orientaci v pokročilejších partiích teorie okruhů. Přestože některé argumenty v důkazech lze do určité míry chápat jako adaptaci známých postupů, celkově považuji práci za originální s podstatným vlastním přínosem autora.

Po formální stránce je úroveň práce dobrá, nicméně některé překlepy trochu snižují čitelnost práce. Konkrétní připomínky k práci jsou uvedeny níže.

Celkově si myslím, že autor splnil zadání práce a doporučuji uznat práci jako práci diplomovou.

V Krnově, 31. 8. 2022

Pavel Příhoda

Připomínky k práci:

- Lemma 1.1: Q_i jsou spočetně generované
- Definice 2.1: Bylo by dobré definovat direktní a inverzní systém. Překlepy v Theorem 2.3 pak trochu snižují srozumitelnost textu.
- str. 15, l.11: $\nu h = f - h'q$
- str. 29, Example: $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Z}_p$
- str. 29, dole: přijde mi, že ψ_L je homomorfismus pravých A-modulů a ψ_R homomorfismus levých A-modulů
- Lemma 6.12: Jaká R-modulová struktura na $Q \otimes_R S$ je uvažována?
- str. 48: Není mi jasný argument dokazující čistotu $M_{\alpha+1} \to M$.
- Často jsem měl problém dohledat správné tvrzení z kapitoly 6. Například Corollary 7.16 uvedené bez důkazu je kombinací Theorem 7.13 a několika tvrzení šesté kapitoly.
- V kapitole 6 by se asi hodilo napsat, které klasické konstrukce (zúplnění, Henselizace, různé typy lokalizací nekomutativních okruhů jsou čisté, případně věrně ploché) splňují plochost či čistotu.