

POSUDEK VEDOUcíHO DIPLOMOVÉ PRÁCE

Název: Local properties of modules

Autor: Tomáš Lysoněk

Z hlediska algebraické geometrie jsou obzvláště užitečné ty vlastnosti modulů nad komutativními okruhy (zvané ad-vlastnosti), které se přenáší podél plochých morfismů komutativních okruhů, a sestupují (tj. dají se testovat) podél těch rozšíření, která jsou navíc věrná. Takové vlastnosti je totiž možno smysluplně definovat lokálně pro svazky nad schémata. Pro řadu klasických vlastností modulů není příliš těžké ukázat, že jsou ad-vlastnostmi, například plochost či konečná prezentovanost. Naopak obtížným se ukázalo dokázat, že takovou vlastností je projektivita, a tedy že pojem vektorového bandlu na schématu je lokální. Toto je slavným výsledkem Raynauda a Grusonů z roku 1971 (důkaz se však ukázal jako neúplný a byl úplně dotažen až relativně nedávno).

Předložená práce se zabývá několika různými směry, jak Raynaud-Grusonův výsledek zobecnit. Původním cílem bylo dokázat, že ad-vlastností je i čistá projektivita modulů nad komutativními okruhy. Autor práce tento cíl více než naplnil tím, že tvrzení dokázal pro obecnější pojem relativní projektivity vzhledem k podkategorii konečně prezentovaných modulů. Za cennou považuji čtvrtou kapitolu práce, kde student zpracoval tuto verzi relativní projektivity vlastním přístupem, odlišným od dostupné a řídké literatury. Pro speciální případy klasické a čisté projektivity použitá metoda dává důkaz sestupu i pro obecnější čisté morfismy.

V literatuře málo dotknutým je téma přenášení vlastností přes okruhové morfismy nekomutativních okruhů. Jedná se o poněkud odlišnou situaci, protože po věrně plochých morfismech nekomutativních okruhů nemusí obecně sestupovat plochost modulu. V citovaném článku Osofsky z roku 1979 je zmínka o testování projektivity plochých modulů přes čisté morfismy ne nutně komutativních okruhů, avšak bez důkazu i bez rigorózní formulace. Student předpoklady upřesnil a tvrzení dokázal, což se ukázalo jako netriviální úkol. Pro nekomutativní sestup čisté či obecněji relativní projektivity si dále student všiml, že kruciální vlastností okruhového morfismu není ani tak jeho čistota, ale vlastnost reflexe čistých epimorfismů - rozdíl, který není vidět v komutativním případě. Jako hlavní výsledek autor formuluje obecný nekomutativní sestup relativně projektivních modulů, a v poslední kapitole práce vybudovanou teorií aplikuje pro širokou třídu morfismů vzniklých kombinací dvou centrálních rozšíření jednoho komutativního okruhu.

K práci studenta nemám žádné výhrady. Dokázal se velmi rychle zorientovat i v poměrně obskurní literatuře. Kromě řešení mnou navržených problémů student formuloval a řešil vlastní zajímavé otázky. Dle mého názoru jsou výsledky publikovatelné ve slušném algebraickém časopise. Samotná práce je dobře strukturovaná a pečlivě zpracovaná. Množství drobných překlepů a jiných vad na kráse je přiměřené délce práce, obzvláště s přihlédnutím k nestandardně krátké době, během které byla vypracována. Domnívám se, že jde o výbornou práci, a je mi potěšením ji **doporučit uznat jako práci diplomovou**.

Návrh klasifikace oponent sdělí předsedovi zkušební (sub)komise.

RNDr. Michal Hrbek, Ph.D.

Matematický ústav Akademie věd České republiky

26.8.2022