Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Mapování metody pokus-omyl při řešení úloh ze strukturálního prostředí Pavučiny a Výstaviště

Mapping of the trial and error method in solving problems in structural environments Spider web and Exhibition grounds

Lucie Kučerová

Vedoucí práce: Mgr. Radka Havlíčková, Ph.D.

Studijní program: Učitelství pro základní školy (M7503)

Studijní obor: I.ST (7503T047)

2022

Odevzdáním této diplomové práce na téma Mapování metody pokus-omyl při řešení úloh ze strukturálního prostředí Pavučiny a Výstaviště potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze, 8. července 2022

Lucie Kučerová

Ráda bych poděkovala vedoucí mé diplomové práce paní Mgr. Radce Havlíčkové, Ph.D. za odborné vedení, cenné a podnětné rady a věnovaný čas. Zároveň bych chtěla také poděkovat paním učitelkám, které byly ochotné se zapojit do výzkumu. V neposlední řadě můj největší dík patří mé rodině, která mě po celou dobu podporovala nejen během mého studia.

ABSTRAKT

Cílem této diplomové práce je sledovat a popsat použití strategie pokus – omyl ve dvou didaktických prostředích z Hejného metody u žáků v druhém a třetím ročníku základní školy, kteří jsou vzděláváni běžnou metodou výuky matematiky. Teoretická část se zabývá vymezením heuristických strategií, její klasifikací a bližším popisem některých vybraných heuristických strategií. Klíčová kapitola se věnuje popisu strategie pokus – omyl a jejímu zařazení mezi řešitelské strategie. Dále se zabývá problematickým postojem učitelů i širší veřejnosti k této strategii. Na závěr kapitoly jsou zařazeny výhody jejího použití při řešení matematických úloh. Další kapitoly se zabývají prací s chybou, experimentem dítěte nejen ve výuce a navazují tak na kapitolu 1.3. Kapitola 1.7 popisuje Hejného metodu výuky matematiky a didaktická prostředí, se kterými tato metoda pracuje a která jsou důležitá pro praktickou část. Na závěr teoretické části vymezuji rozložení učiva v druhém a třetím ročníku, které ovlivňují přístupy žáků k řešení. V praktické části jsou využity výzkumné metody nestrukturovaného pozorování a metody verbálních výpovědí, které společně nejlépe sledovaly výzkumný cíl. V praktické části byly realizované dva pilotní výzkumy a jeden finální výzkum. Nejprve byla sestavena sada úloh z prostředí Pavučin a Výstavišť, která byla doplněna o otázky, které měly žákům pomoci pochopit pravidla prostředí a vzbudit v nich zájem řešit úlohu. V práci jsou analyzovány a popsány řešitelské strategie 19 žáků druhého a třetího ročníku. Výsledky výzkumu ukázaly, že žáci dokážou mnohem lépe a ochotněji používat strategii pokus – omyl v úlohách z prostředí Výstavišť než v prostředí Pavučin. Zároveň žáci v druhém ročníku při řešení úloh z prostředí Pavučin potřebovali větší podporu při experimentování.

KLÍČOVÁ SLOVA

Metoda pokus – omyl, Pavučiny, Výstaviště, žáci 1. stupně, experimentování v matematice, řešení úlohy, strukturální prostředí, řešitelská strategie

ABSTRACT

The aim of this diploma thesis is to observe and describe the use of the trial-and-error strategy in two didactic environments from the Hejné method among pupils in the second and third year of primary school, who are educated using the usual method of teaching mathematics. The theoretical part deals with the definition of heuristic strategies, their classification and a closer description of some selected heuristic strategies. The key chapter is devoted to the description of the trial-and-error strategy and its inclusion among the solving strategies. It also deals with the problematic attitude of teachers and the wider public towards this strategy. At the end of the chapter, the advantages of its use in solving mathematical problems are included. The next chapters deal with work with mistakes, the child's experiment not only in teaching, and thus follow on from chapter 1.3. Chapter 1.7 describes Hejné's method of teaching mathematics and the didactic environments with which this method works and which are important for the practical part. At the end of the theoretical part, I define the distribution of the curriculum in the second and third years, which influence the students' approaches to solving. In the practical part, the research methods of unstructured observation and the method of verbal statements are used, which together best followed the research goal. In the practical part, two pilot studies and one final study were carried out. First, a set of tasks from the Spiders and Exhibitions environment was compiled, which was supplemented with questions that were supposed to help the pupils understand the rules of the environment and arouse their interest in solving the task. The problém solving strategies of 19 students from second and third year were analyzed and described in the thesis. The results of the research showed that pupils can use the trial and error strategy much better and more willingly in tasks from the Exhibition Sites than in the Spiders environment. At the same time, students in the second year needed more support in experimenting when solving problems from the Spider web environment.

KEYWORDS

Trial and error method, Spider web, Exhibition grounds, primary school pupils , experiments in mathematics, solving problems, structural environment, solving strategy

Obsah

Úvod

Už od druhé třídy jsem s matematikou velmi bojovala. Byl to první předmět, ze kterého jsem měla na vysvědčení dvojku. Zároveň jsem od začátku školní docházky měla paní učitelku, která všechny žáky škatulkovala. Já jsem se již ve druhé třídě dostala do skupiny „nematematických typů“. Paní učitelka ke mně přistupovala tak, že mě matematika nejde a že v ní nikdy nemůžu být dobrá, protože tomu nikdy nebudu rozumět.

Od páté třídy jsem přešla na osmileté gymnázium, ale tahle „nálepka“ nematematický typ mi zůstala dál. Nemyslím si, že by mě učitelé zprvu takhle posuzovali, ale já jsem se pořád takhle vnímala. Pokud jsem něco řešila, rovnou jsem předpokládala, že to sama nevyřeším a že budu potřebovat poradit.

S matematikou jsem měla problémy až do prvního ročníku na vysoké škole. Tam jsem objevila matematiku pana profesora Hejného, která mě velmi zaujala a díky které jsem zjistila, že nejsem tak úplně „nematematický typ“. A že i když mi matematika celých jedenáct let nešla a nebavila mě, tak že jsem si najednou cestu k matematice našla a začala mě bavit. Dokonce jsem začala trávit hodiny nad matematikou i mimo semináře. Bavilo mě objevovat zákonitosti úloh a vždy mě velmi potěšilo, když jsem je dokázala najít sama bez cizí pomoci.

Proto jsem se rozhodla, že bych se ve své diplomové práci chtěla věnovat matematice pana profesora Hejného. Chtěla bych, aby se tato matematika dostala do podvědomí více učitelů a aby pronikla i do menších měst, kam se pokrok dostává velmi pomalu. Myslím si totiž, že je tento přístup v matematice velmi užitečný a dokáže efektivně motivovat žáky.

Téma jsem si vybrala řešení úloh metodou pokus-omyl. Jako studentka jsem se setkávala a pořád se často setkávám s učiteli, kteří vůbec neřeší postupy žáků. Kontrolují pouze výsledek, jestli je správně nebo není. V lepším případě se podívají na postup řešení, ale pokud není podle toho, jak je to učili oni, tak je celý příklad opět špatně. Na základní a ani na střední škole jsem se nikdy nesetkala s metodou pokus-omyl. Vždy jsme vše řešili podle postupu, který nám předložila paní učitelka. Ale proč se s touto řešitelskou strategií nepracuje? Vždyť pro seznámení s postupem řešení příkladu je velmi potřebná. I v běžném životě se už od útlého dětství s ní setkáváme. Je to základní strategie, pomocí které se děti učí už v mateřských školách, například když rozlišují tvary. Bohužel ale na základní a střední škole se s ní vůbec nepracuje a pokud ji náhodou nějaký žák použije, tak je za ni pak negativně hodnocen. Já bych se proto v této diplomové práci chtěla zaměřit právě na tuto metodu, na její používání u žáků na prvním stupni základní školy. Chtěla bych vědět, jestli jsou žáci ochotni tuto metodu samostatně použít v druhé a třetí třídě v didaktických prostředích matematiky Hejného. Zároveň bych chtěla poukázat na důležitost této strategie pro pochopení řešení příkladu, přiblížit vývoj této strategie a přechod žáků k jiným strategiím.

1 Teoretická část

V teoretické části diplomové práce nejprve vymezím pojem heuristické strategie a blíže popíši některé vybrané strategie. Samostatnou kapitolu budu věnovat strategii pokus – omyl, která je důležitá pro praktickou část. Dále se pak budu zabývat vymezením didaktických prostředí, detailnějším popisem prostředí Pavučin a Výstaviště a přiblížením problematiky práce s chybou. Tuto část zakončí dvě kapitoly, které se zabývají experimentem. První z nich popíše možnosti experimentu v badatelsky orientované výuce a druhá vymezí pojem experiment a přístupy žáka k experimentu. Na závěr ještě stručně shrnu obsah učiva v matematice v aritmetice v druhém a třetím ročníku prvního stupně na základních školách.

1.1 Heuristické strategie

Heuristické strategie jsou přístupy řešitele, které používá při řešení úloh, aniž by znal postup jejich řešení, pomocí něhož by úlohu vyřešil. Úplně odlišným přístupem je řešení úlohy na základě vzorečků a předložených postupů, které řešitel může použít, aniž by úloze porozuměl. Jak popisuje Hejný (2014), nové učivo je v takto vedené výuce překládáno v rámci výkladu. Heuristické strategie jsou naopak založeny na autonomním objevování žáka, které je podporováno ze strany učitele. Např. strategie pokus – omyl je založena na řešení úloh pomocí jednotlivých pokusů, v rámci kterých se řešitel snaží úlohu vyřešit bez jakýchkoliv předchozích zkušeností a bez nutnosti výkladu učitele.

Podle Eisenmanna, Přibyla a Novotné (2017) lze k řešení úlohy dojít třemi způsoby. Prvním způsobem je již zmiňovaný pokus, který je vyvolán pouze vnější motivací žáka. V dalším způsobu žák postupuje pouze podle předem daných a naučených algoritmů a znalostí. Posledním způsobem jsou heuristické strategie.

Na základě svých dosavadních zkušeností jsem zjistila, že v hodinách matematiky je kladen důraz převážně na způsob, kde je žákovi předkládán scénář, který si musí zapamatovat a podle kterého bude v úloze postupovat. Učitelé si následně ověřují hlavně pamětní učení žáka. Zároveň jsem měla možnost zjistit, že ve výuce matematiky na některých školách, které jsem navštívila nebo na kterých studoval někdo z okolí, je užití heuristických strategií v hodinách matematiky minimální nebo se nevyskytuje vůbec. Učitelé, se kterými jsem se setkala, se často obávali neúspěchu a nejistoty, že žák nezvládne úlohu vyřešit nebo neobjeví všechna řešení u úloh, které mají více řešení. Také zdůrazňovali časovou náročnost heuristických strategií, a proto raději volili metodu, ve které jsou si jistí, která jim zaručuje požadované výsledky a nebude tolik časově náročná. Jak uvádí Hejný (2014), důvodem, proč učitelé ve výuce nepoužívají heuristické strategie je, že učitelé na prvním stupni vidí jako hlavní cíl výuky naučit žáky velmi rychle a bezchybně sčítat a odčítat, násobit a dělit. Nezaměřují se ale na to, jestli žáci pochopili úlohu a objevili postup, jak úlohu vyřešit.

Ve vymezení heuristických strategií se čeští i zahraniční autoři liší. Největší rozdíl je v zařazení strategie pokus – omyl. Někteří autoři, jako je například Kopka (2013), řadí tuto metodu mezi heuristické strategie. Eisenmann, Přibyl a Novotná (2017) ale ve svých publikacích řadí tuto metodu pouze mezi řešitelské strategie, nikoliv pod heuristické strategie. Zároveň od sebe odlišují strategii pokus – omyl a pokus – ověření – korekce (Nováková & Novotná, 2018) nebo odhad, ověření a oprava (Kopka, 2013). V dalších částech své práce budu používat rozlišení mezi metodami podle Eisenmanna, Přibyla a Novotné (2017).

1.2 Klasifikace heuristických strategií

Na začátku bych uvedla výčet heuristických strategií, které ve svých publikacích uvádí Nováková a Novotná (2018) a které blíže popisují autoři Eisenmann, Přibyl a Novotná (2017) a Kopka (2013) ve svých publikacích. Jednou z nich je již zmiňovaná strategie *pokus – ověření – korekce*. Dále pak autoři uvádějí strategii *systematického experimentování*, *analogii*, *přeformulování úlohy*, *použití řešitelského obrázku*, *vypuštění podmínky*, *zobecnění a konkretizace*, *cesta zpět* a další. Pro lepší vymezení strategie pokus-omyl blíže popíši strategie, které jsou si svými řešitelskými postupy nejvíce podobné.

1.2.1 Pokus – ověření – korekce

Jednou z nich je strategie *pokus – ověření – korekce*. Řešitel na začátku náhodně určí první chybějící hodnotu. Dále pak ověří, jestli se jeho odhad shoduje se zadáním. Tyto kroky jsou stejné jako u strategie pokus – omyl. V dalších krocích se ale už postupy liší. U strategie pokus – ověření – korekce řešitel pracuje se svým odhadem, na základě kterého poupravuje svá další řešení do té doby, dokud nenajde vyhovující řešení. Zásadní rozdíl mezi těmito dvěma strategiemi je ve zpětné vazbě. Ve strategii pokus – omyl ji žák vůbec nepoužívá, nepracuje se získanými informacemi a zkušenostmi. Ve strategii pokus – ověření – korekce se ale už žák zaměřuje na již získaná data, hledá mezi nimi souvislosti a vztahy a poupravuje následné pokusy podle zjištěných informací. Jak uvádí Kopka (2013), je velmi užitečné, aby řešitel zaznamenával svá řešení do tabulky. Ta mu umožňuje přehlednější pohled na jednotlivé pokusy a lépe jsou v ní vidět zákonitosti a vztahy mezi jednotlivými výsledky.

1.2.2 Systematické experimentování

Další podobnou strategií je strategie *systematické experimentování*. Ta je založena stejně jako předchozí strategie a strategie pokus – omyl na jednotlivých experimentech. Ty ale nejsou náhodné, ale dopředu promyšlené. Jak uvádí Eisenmann, Přibyl a Novotná (2017), hodnoty, které řešitel používá, nejsou vybrány náhodně. Řešitel si na začátku uvědomí, že výsledek leží v množině prvků, která je dána zadáním. Poté dosazuje prvky z množiny a vyhodnocuje, jestli dané řešení odpovídá zadání. Také u této strategie Kopka (2013) zmiňuje, že řešitel často pracuje s tabulkou, kam zaznamenává svá řešení a která mu umožní lepší vhled do dané problematiky.

1.2.3 Cesta zpět

Další strategie, která spadá do heuristických strategií, ale která se v potupu neshoduje se strategií pokus – omyl, je *cesta zpět*. Je velmi používaná v úlohách, ve kterých známe výsledek, ale nevíme počáteční hodnotu (např: rovnice, Myslím si číslo, slovní úlohy, …). Řešitel úlohu začíná řešit od konce a postupně se snaží dostat na začátek úlohy. Postupuje od místa, kde ví, jak to vyřešit, k začátku úlohy. Na závěr řešitel postup otočí. Např.: řešitel ve slovní úloze, ve které má zjistit, jaká byla původní cena knihy, když byla zlevněná o polovinu a po slevě stojí 250 Kč, bude postupovat pravděpodobně od konce. Cenu knihy po slevě (250 Kč) vynásobí dvěma a tím zjistí původní cenu. Během kontroly, ve které už jde od začátku do konce, si musí uvědomit, že už nebude násobit ale dělit.

1.2.4 Vypuštění podmínky

Poslední metodu, kterou bych ráda zmínila, je *vypuštění podmínky*. V některých úlohách musí řešitel dodržet několik podmínek. Jednou z možností, jak tuto úlohu vyřešit, je vypustit jednu z podmínek. Důležité pro další postup je, kterou podmínku řešitel vypustí (Kopka, 2013). V případě, že úloha má větší počet podmínek, je možné vypustit tolik podmínek, kolik bude řešitel potřebovat, aby byl schopen najít řešení. Řešitel takto zjednodušenou úlohu vyřeší. Na závěr ale musí vrátit zpátky k vypuštěným podmínkám a poupravit své řešení tak, aby výsledek odpovídal zadání, tedy i všem podmínkám.

1.3 Strategie pokus-omyl

Jak jsem již zmiňovala v předchozí kapitole, zařazení strategie pokus – omyl je u různých autorů odlišné. Některé odborné publikace zařazují strategii pokus – omyl mezi heuristické strategie (Kopka, 2013). Jiné ji stejně jako Eisenmann, Přibyl a Novotná (2017) uvádí mimo tuto skupinu strategií. Mezi heuristické strategie potom tito autoři řadí upravenou verzi strategie pokus – omyl označovanou jako pokus – ověření – korekce.

Strategie pokus – omyl je založená na řešení úlohy postupným dosazováním obvykle čísel a ověřováním jejich správnosti. Řešitelé ji někdy využívají, pokud se poprvé setkají s úlohou, se kterou nemají doposud žádné zkušenosti. Tuto strategii aplikují bez jakýchkoliv pravidel. Je to vždy série pokusů, která není ničím v průběhu řešení ovlivněna ani nějak upravena. Získané informace nejsou sbírány, zaznamenávány a ani tříděny. Řešitel náhodně vybírá hodnoty, které dosazuje do zadání, a čeká, kdy se mu podaří najít správné řešení. Kopka (2013) ve své publikaci označuje strategii pokus – omyl jako nesystematické experimentování. Jak jsem již zmiňovala, tato metoda ale nezaručuje, že řešitel objeví všechna řešení, a proto vyžaduje, aby na ni navázala jiná heuristická strategie.

Žák během svého řešení dělá chyby, a proto je tato strategie učiteli ale i rodiči odmítána a často kritizována. Tento postoj souvisí s vnímáním chyby jako negativního jevu při výuce a při učení. Ve školách často zůstává špatný a negativní pohled na chybu. Učitelé i žáci se chyb obávají a snaží se je co nejvíce eliminovat. Jak popisuje Hejný, Jirotková a Kratochvílová (2006), náš postoj k chybě je ovlivněn předsudky, a proto se bojíme chybu udělat a zároveň nechceme připustit, že bychom mohli chybovat. Této problematice se blíže věnuje kapitola 1.6 Práce s chybou. Strategie pokus – omyl ale není odmítána jen kvůli chybě, ale zároveň je kritizována kvůli časové náročnosti a také kvůli tomu, že nezaručuje správnost řešení nebo objevení všech řešení. Učitelé často tuto strategii nevyužívají, protože na ni pohlížejí jako na strategii nevhodnou k používání v hodině matematiky (Kopka, 2013). V disertační práci Paull (1971) uvádí, že opovrhování strategií pokus – omyl je nesprávné, pokud se z předchozích pokusů poučíme pro pokusy následující. Paull vidí jako důležitou složku řešení úloh pomocí této strategie zpětnou vazbu, která ovlivní naše další pokusy. Ve své publikaci oproti Eisenmannovi, Přibylovi a Novotné (2017) nerozlišuje mezi metodou Pokus – omyl a mezi metodou Pokus – ověření – korekce.

Žáci ale pomocí této strategie mohou vyřešit různě těžké úlohy. Strategie jim umožňuje proniknout do problémů bez jakýchkoliv předchozích zkušeností. Zároveň umožňuje žákům řešit zdánlivě neřešitelné úlohy, protože si buď nepamatují nebo neznají postupy (vzorečky). Žáci skrze tuto řešitelskou strategii získávají lepší vhled do dané problematiky a mohou porozumět vztahům v úloze. Zároveň zažívají pocit úspěchu a získávají vlastní kompetentnosti k řešení. To souvisí s vnitřní motivací žáka. Žák, který má možnost zažívat radost z vlastního objevení řešení nebo zákonitostí přiměřeně náročné úlohy, má větší zájem o další práci. I Hejného metoda uvádí jako jeden z dvanácti principů *radost z matematiky*, kde blíže specifikuje, že nejlepší motivaci žák získává z bezprostřední radosti z vyřešení přiměřené úlohy. Aby každý žák mohl prožívat radost z vlastního úspěchu, je důležité, jak jsem již zmiňovala, aby úlohy respektovaly individuální potřeby žáka, tedy aby byly přiměřené schopnostem žáka a aby výuka byla individualizovaná. Žák ale není vždy schopen ve třídě objevit všechny zákonitosti dané úlohy sám, proto je kromě intelektuální autonomie žáka důležitá také intelektuální autonomie třídy (Hejný, 2014). Žáci nejprve objeví něco samostatně a následně si svoje zjištění mezi sebou nasdílejí.

1.4 Práce s chybou

V internetové jazykové příručce Ústav pro jazyk český jsou uvedeny dvě definice chyby. Chyba jako něco nesprávného, omyl. Dále pak uvádí chybu jako něco závadného nebo jako nějaký nedostatek. Ve společnosti je chyba posuzována jako něco, čeho bychom se měli bát a co nejvíce se snažit ji vyvarovat. V tradičním školství je chyba vnímána jako selhání, které je následně potrestáno ať už slovním pokáráním učitele nebo špatným ohodnocením práce. Chyba je ale přirozený jev, který se vyskytuje během učení jedince po celý život. Už malé dítě začíná objevovat svět tak, že zkusí něco udělat a ono se mu to nepovede. U dítěte v útlém věku je ale stále ochota udělané chyby tolerovat. Dokonce jsou děti okolím často podporovány, aby zkoušely nové věci, se kterými ještě nemají zkušenosti a dělaly chyby, které je v dané problematice posunou dál. Během nástupu do předškolního vzdělávání ale tolerance chyb klesá. A s nástupem do školy se počítá, že bude dítě chybovat pouze minimálně. Rodiče negativně hodnotí nejen chyby svých dětí, ale zároveň i chyby učitele. Ve společnosti je zároveň hluboce zakotveno, že ti, co často chybují, brzy ze vzdělávacího systému odcházejí. Hejný na problematiku chybování ve výuce nahlíží jinak. V roce 1934 během svého působení na obchodní akademii v Nitře si do svých pedagogických deníků zaznamenal: *„Chyba nemusí odradit. Chyba může a měla by být pro žáka užitečnou zkušeností, poučením. Úlohou učitele je pomoci žákovi z chyb se poučit. Naučit žáka učit se z chyb. Učitel, který žáka za chybu kárá, mu to znesnadňuje.“*[4]

V současném vzdělávání se můžeme setkat s rozdílným přístupem v práci s chybou během řešení úloh. V tradičně orientované výuce požaduje učitel od žáků řešení úloh přes předem naučené vzorce a jejich aplikaci, pak je chyba během řešení brána jako nežádoucí a také jako neochota žáka se naučit nazpaměť dané informace. Vždyť pokud by se mechanicky naučil předložené vzorce, nemohl by udělat chybu. Oproti tomu v řešení úloh pomocí heuristických metod a metody pokus – omyl je chyba základním a potřebným „stavebním kamenem“ pro vyřešení dané úlohy. Žák, který by nechyboval, by nepocítil zkušenost s chybou, která by mu mohla pomoci s porozuměním dané problematiky. Žák často nezná všechny zákonitosti úlohy, dokud nenarazí na řešení, které úloze nevyhovuje. Takovýto poznatek posune žáka v jeho řešitelské strategie a v porozumění danému problému, pokud se žák z chyby poučí a založí na ní svojí další řešitelskou strategii.

V současné době je práce s chybou diskutována nejen v odborné ale i laické společnosti. V rámci jednotlivých předmětů jsou navrhovány přístupy a postupy, jak s chybou pracovat a jak k ní přistupovat, abychom nezpůsobili ztrátu zájmu dítěte o učení. V této práci bych ráda uvedla dva přístupy žáků k chybě v hodinách matematiky. První způsob v práci s chybou je ten, který očekávám, že se objeví v řešení žáků během výzkumu. Žák bez jakékoliv zkušenosti a návodu dosadí náhodně číslo do úlohy. Ověří si správnost dosazeného čísla. Pokud zjistí, že toto řešení není správné, opakuje celý proces znovu. Žák si uvědomuje, že udělal chybu. Svá chybná řešení si ale nijak nezaznamenává, netřídí je a nedělá z nich žádné závěry. Žák ve svých dalších postupech není ovlivněn předchozími zkušenostmi s úlohou, které v rámci pokusů získal. Tento způsob práce s chybou je pouze dočasný. Žák si během několika pokusů většinou začne všímat vlastností, které jsou pro některé pokusy stejné a pro jiné se liší. Když žák objeví tyto poznatky, tak často na základě tohoto zjištění a předchozích zkušeností přechází k náročnějším heuristickým strategiím. Druhý přístup popisuje profesor Hejný ve své knize, kde uvádí, že učitel chybu didakticky využívá. Práce s chybou pak má dvě složky. Jedna z nich je diagnostická, ve které učitel zjišťuje, do jaké míry si žák svoji chybu uvědomuje. V edukační složce se následně řeší, jak by měl učitel na chybu žáka reagovat.

Dalším velmi diskutovaným tématem je definice chyby. Pokud žák nedodrží přesně stanovené postupy, hodnotí tradiční učitel jeho práci jako chybnou. V konstruktivistickém učebním stylu jsou ale nové alternativní přístupy k řešení hodnoceny kladně. Žák díky nim získává jiný vhled na danou problematiku. Objevování řešitelských strategií významně ovlivňuje vnitřní motivaci žáka úlohu vyřešit a vytváří kladný vztah k matematice. Hejný (2014) ve své publikaci uvádí, že žák potřebuje během svého řešení používat tvůrčí přístup, protože ten umožní, aby žák hluboce porozuměl textu. Také Eisenmann, Přibyl a Novotná (2017) ve své definici úspěšného vyučování matematiky popisují, že je velmi důležité řešení úloh, které podporuje tvořivost u žáků a napomáhá její kultivaci a rozšiřování. V rámcovém vzdělávacím programu základního vzdělávání je také jedním z cílů: *„podněcovat žáky k tvořivému myšlení, logickému uvažování a k řešení problémů“.*

1.5 Experiment a škola (Badatelsky orientovaná výuka)

Podle Dostála (2015) autoři ve svých publikacích rozlišují dvě různé definice, které vymezují pojem badatelsky orientovaná výuka (dále už jen BOV). Někteří ji vymezují jako výuku zaměřenou na řešení problémů a kladou důraz na její propojení s problémovou výukou. Jiní autoři sice také BOV definují jako výuku zaměřenou na řešení problémů, ale chápou ji v širším kontextu. V rámci této práce budu pracovat s definicí, která vychází z článků publikovaných Hošpesovou (2016) a Samkovou (2016), které se věnují zařazení BOV v hodinách matematiky. *„Badatelsky orientovaná výuka, zjednodušeně řečeno, znamená, že učitel vytvoří ve škole podmínky pro to, aby žák mohl část poznatků, které se má naučit, sám objevit. Snahou je navodit takovou situaci, aby žáci používali postupy, kterými se získávají poznatky ve vědě, v běžné školní práci.“* (Hošpesová, 2016, str. 118). Samková (2016) ještě dodává, že výzkumné metody vědeckých pracovníků musí být poupravené školním potřebám a že žáci místo nových teorií pro sebe objevují už známé matematické zákonitosti. BOV navazuje na přirozenou zvídavost žáka objevovat a prozkoumávat nové věci reálného světa. Získané znalosti a dovednosti žáka v BOV jsou trvalejší a hlubší, protože je získává na základě vlastního osobního prožitku. Žákům jsou na začátku předložené podnětné úlohy, které umožňují použít více různých řešitelských postupů, se kterými se doposud nesetkali a na které nemají objevené a naučené strategie řešení. Žáci nejprve odhalí problematiku, která se v úloze vyskytuje a formulují ji. V dalších krocích probíhá příprava a realizace experimentu. Následně dochází k porovnávání výsledků a formulaci vlastních závěrů. Učitel vytváří prostor pro diskusi žáků, která může probíhat v menších skupinách, a podněcuje žáky ke zpětné kontrole vlastních řešení. Na závěr jsou získaná data k dané problematice zobecněna. Během BOV žáci používají heuristické strategie, zaměřují se na kritické myšlení, projektovou výuku atd. BOV by neměla být jen zábavná aktivita, ale měla by navazovat na aktuální učivo v daném ročníku např.: v matematice a obsahovat matematické problémy (Hošpesová & Samková, 2012). U BOV rozlišujeme několik typů bádání. Např.: potvrzující bádání, strukturované bádání, nasměrované nebo otevřené bádání, které jsou blíže popsány v publikacích Dostál (2015) nebo Samková (2015).

S badatelsky orientovanou výukou velmi úzce souvisí experimentování v hodině, které žáci využívají během řešení problémů a objevování nových informací. Postupy řešení problémů nejsou předem dané, proto žák zkouší různé přístupy, které by mohly vést k řešení a které ověřuje jednotlivými pokusy. Výsledky těchto pokusů, jak již bylo řečeno, jsou porovnávány a zobecňovány. Jak ale zmiňuje Hošpesová (2016), žáci by měli být vedeni k systematickému experimentování, jinak nelze očekávat, že v badatelsky orientované výuce samostatně připraví a zrealizují experiment. Zároveň dodává, že úspěšnost žáka během řešení a míra zkušeností, ovlivňují jeho postoj a přístup k bádání (Hošpesová, 2016).

Stejně jako v konstruktivisticky vedené hodině je žák v BOV aktivním řešitelem. Je kladen důraz na autonomní práci žáka a společné sdílení zkušeností, hledání zákonitostí a formulace výsledků experimentu. Badatelsky orientovaná výuka je využívaná převážně v hodinách přírodovědných předmětů. Setkat se s ní ale můžeme i v ostatních předmětech. Například ji učitelé využívají ve výtvarné výchově. V matematice velmi úzce souvisí s konstruktivistickým pojetím výuky. Oba tyto přístupy se snaží, aby žáci pronikli do dané problematiky, pochopili její zákonitosti a jejich vzájemné vztahy. Jak uvádí Hošpesová

(2016), badatelsky orientovaná výuka v hodinách matematiky vede k porozumění žáků matematice.

1.6 Experiment a dítě

Už v předškolním vzdělávání se dítě učí a zkoumá okolní svět pomocí experimentu. Dítě u předmětů, se kterými se setkalo poprvé a u kterých nezná jeho použití, pomocí experimentu objevuje jeho vlastnosti. S pojmem experiment ve výuce se často setkáváme v souvislosti s předměty chemie nebo fyzika. Z předmětů na prvním stupni je to potom předmět prvouka. Na začátku považuji ale za důležité uvést vymezení, v jakém budeme experiment ve výuce chápán.

Dostál (2014) rozlišuje mezi experimenty zaměřenými na vzdělávání a vědeckými experimenty. Experimenty zaměřené na vzdělávání musí obsahovat didaktickou složku, jejíž hlavním smyslem je rozvoj kompetencí žáků. Pro pojem experiment ve výuce formuluje vlastní definici: *„Školní experiment je za účelem vzdělávání záměrně vyvolaný proces, ve kterém jsou žákem nebo učitelem ovlivňovány podmínky a následně prováděno vyhodnocení jeho průběhu nebo výsledku.“* (Dostál, 2014, str. 10). V této diplomové práci bude experiment chápán podle definice Dostála, která bude přizpůsobena tak, aby přesněji popisovala experiment během řešení úloh v hodinách matematiky. Dále budu pracovat s vymezení experimentu jako procesu, který může být vědomý ale i nevědomý, ve kterém jsou jeho podmínky buď ovlivněny získanými zkušenostmi, které žák získá při jednotlivých pokusech, nebo neovlivněny. Cílem je pak chápáno v užším slova smyslu vyřešení matematické úlohy, získání nových zkušeností a porozumění zkoumané problematice. Stejně jako Dostál (2014) i v poupravené definici je experiment chápán jako proces, ve kterém musí být didaktická složka.

V experimentu můžeme rozlišit mezi systematickým a nesystematickým experimentováním v řešení matematických úloh. Žák, který si data zaznamenává, třídí a hledá v nich souvislosti a zákonitosti dané úlohy, používá systematické experimentování. Nejefektivnější je zaznamenat si své získané výsledky do tabulky, kde je nejlépe vidět opakování určitého prvku nebo systému. V opačném případě, kdy žák data nesbírá a ani s nimi dále nepracuje, dochází k nesystematickému experimentování. Systematické i nesystematické experimentování se shoduje v postupu řešení jednotlivých úloh. V obou případech je řešitelská strategie založena na neustálém opakování jednotlivých pokusů. Obě tyto metody začínají náhodným pokusem, který není ovlivněn předchozími zkušenostmi s úlohou. V dalších pokusech se ale už jednotlivé typy experimentování liší.

Nesystematické a systematické experimentování vnáší do výuky matematiky až konstruktivistický styl vyučování a používání heuristických metod. S experimentem se v rámci heuristických strategií setkáváme v metodě Pokus – omyl, Pokus – ověření – korekce nebo Systematické experimentování. V první zmíněné metodě se jedná o nesystematické experimentování (Kopka, 2013). V dalších dvou metodách je experiment systematický.

Jak jsem zmiňovala již na začátku kapitoly, žáci v mateřských školkách experimentují s novými předměty spontánně a bez jakékoliv zábrany. Jak ale zmiňuje Hoskovcová (2006), když se dítě začne podřizovat cizí autoritě, tak někdy dochází ke ztrátě ochoty experimentovat, ztrátě spontánního jednání a tvořivosti. Používání experimentu je u žáků v hodinách matematiky ovlivněno různými podmínkami. První zmíněnou podmínkou je motivace žáka. Již v předchozích kapitolách byla zmíněna potřeba atraktivity úlohy. Pokud žák nedostává podnětné a zajímavé úlohy, pak jeho zájem o danou problematiku, a tedy i o experimentování klesá. Dalším faktorem, který ovlivňuje ochotu žáka začít experimentovat, je předchozí zkušenost s experimentováním a reakce autority na jeho použití. Pokud žák v předchozích úlohách zažíval v rámci experimentu úspěch a radost z vyřešené úlohy, pak jeho ochota použít metodu experimentu při dalších řešení bude výrazně vyšší. Když se ale žák setkává při experimentování pouze s neúspěchem a neschopností se v úloze někam posunout, jeho zájem o experimentování bude v dalších úlohách klesat. Dalším důležitým předpokladem je kladné přijetí řešení metodou experimentování od autority, kterou může být paní učitelka ve škole nebo rodič. Pokud se žák setká s odporem a s negativní zpětnou vazbou od strany autority při řešení úlohy experimentováním, bude se snažit příště této metodě vyhnout a nuceně ji přestane používat. Další důležitou podmínkou při experimentování žáků v hodinách matematiky, která částečně souvisí s předchozí problematikou, je přístup učitele v hodinách matematiky. V rámci této problematiky se odlišují dva vyučovací styly. Konstruktivistický styl vyučování jsem již rozebírala v předchozích kapitolách. Zde bych jenom zmínila, že učitel, který vede svoji výuku podle

tohoto stylu, nahlíží na experimentování ve výuce jako na přínosnou řešitelskou strategii. Zároveň pracuje s vnitřní motivací žáka při řešení úloh.
Koťátková (2005) také ve své publikaci zmiňuje, že je důležité, aby učitelé nechali nejprve žáky s novými a neznámými předměty chvíli experimentovat. V tradiční výuce matematiky je experimentování během řešení bráno jako zbytečné a nežádoucí. V klasické matematice je žák pasivní a nehledá nové přístupy, jak vyřešit danou úlohu. Do výuky se dostává ale čím dál více, které se zaměřují na experimentování ve výuce a její přínosy pro výuku. Stále častěji se diskutuje o nutnosti změny přístupů k učivu v jednotlivých předmětech. Učitelé se začínají zaměřovat na to, jak výuku koncipovat tak, abychom u žáků rozvíjeli zájem o výuku a vytvářeli vhodné prostředí pro učení. Hejný (2014) vymezuje dále pak dva edukační styly, které jsou velmi podobné. Prvním z nich je velmi běžně v hodinách matematiky používaný Transmisivní styl vyučování. Ten se zaměřuje spíše na předem dané vzorce a postupy řešení, které učitel žákům na začátku nového učiva ukáže během výkladu. V hodině si pak žáci nácvikem osvojují a procvičují získaný poznatek. V takto vedené výuce ale učitel nezakazuje odlišné přístupy řešení úlohy, než jaké jim na začátku předložil. Používání jiných postupů chválí, ale nedává moc prostor pro jejich objevování a sdílení ve třídě. Další vyučovací styl, který Hejný vymezuje, je označován jako Instruktivní styl. Při vyučování seznamuje žáky s novou látkou stejně jako transmisivní styl. Liší se ale v pohledu na jiné postupy řešení než, které jsou předkládány učitelem. To má negativní vliv na žáka a na jeho ochotu experimentovat. Žák, který je za jiné řešení úlohy kárán, se v příští úloze zaměří na pouhou nápodobu předloženého postupu, aby vyhověl požadavkům učitele. Jeho ochota vyřešit úlohu pomocí experimentu bude značně ovlivněna negativními zkušenostmi. Zároveň je řešení úlohy pomocí experimentu spojeno s chybou a jejím vnímáním při řešení. Touto problematikou jsem se zabývala již v předchozích kapitolách. Zde bych jen uvedla, že pokud se žák opět setká s negativní reakcí na chybu během svého řešení, pak jeho další postupy se budou ubírat směrem, který je pro něj známý a kde nemůže udělat chybu. Během řešení pak bude používat předem dané postupy, které jsou jasné a ve kterých je šance, že udělá chybu, menší. V neposlední řadě žáka při rozhodování jakou řešitelskou strategii použije, ovlivňují jeho dosavadní zkušenosti v matematice a zkoumané problematice.
Každý žák je ochotný v hodině experimentovat, nejvíce ale záleží na přístupu učitele, který dále formuje přístup žáka k řešení úloh v hodinách matematiky.

1.7 Hejného metoda výuky matematiky a didaktická prostředí

Metoda vyučování matematiky podle Hejného se dostává čím dál více nejen do povědomí učitelů ale i širší veřejnosti. Výuka matematiky podle Hejného metody je založena na dvanácti principech[1], specifických způsobech práce a teoretických východisek jako je např.: Teorie generického modelu, kterou blíže popisují publikace zabývající se Hejného metodou (např.: Hejný, 2014). Hejného metoda vychází z konstruktivistického přístupu ve vyučování. Zároveň pracuje s didaktickými prostředími, ve kterých jsou vytvářeny a zadávány úlohy. Každé prostředí má své specifické zákonitosti a pravidla. Vymezením Hejného metody výuky matematiky a pojmu didaktická prostředí se budu zabývat v následujících odstavcích.

Hejný ve své knize z důvodu obavy špatné interpretace daného edukačního stylu začíná používat název „Vyučování orientované na budování schémat (VOBS)[2]". Jde o snahu u žáků rozvíjet nejen schopnosti řešit matematické úlohy, ale také se zaměřuje na rozvoj osobnosti žáka, který není pouze pasivním příjemcem informací, ale aktivně se do výuky zapojuje. Výuka není postavena na pamětním učení žáka, ale na jeho aktivním objevování. Tato metoda výuky pracuje se vstupními vlastními zkušenostmi a dovednostmi každého žáka, které jsou označovány jako prekoncepty. Jednotlivé úlohy poté navazují a vychází z těchto prekonceptů a tím dochází k propojování nově osvojených a dříve získaných znalostí. Vlastní zkušenosti žáků, se kterými přicházejí do výuky, se liší. Důležité v Hejného metodě výuky matematiky je, že jednotlivé úlohy a celkově i hodina jsou přizpůsobeny individuálním potřebám každého žáka. S tím souvisí i práce s gradovanými úlohami[3], které jsou přiměřené schopnostem řešitele. Každý žák pracuje v hodině podle svého tempa. Učitel nechává žáky ve výuce experimentovat a samostatně řešit a objevovat zákonitosti úlohy, které někdy vedou k objevení nových postupů řešení, vyvození závislosti či zobecnění. Následně probíhá diskuse a vzájemná interakce žáků k dané problematice, kterou v úloze řešili. Žáci ve třídě sdílejí své zkušenosti. Důležitá je také role učitele, který není tím, kdo by předkládal žákům hotové poznatky, ale v hodině koordinuje spolupráci žáků. Učitel vytváří podnětné a bezpečné klima, které žákům umožňuje zažívat radost z vlastního

[1] Ty jsou blíže popsány a vymezeny v https://www.h-mat.cz/principy.

[2] Vyučováním orientované na budování schémat se zabývá Hejný ve svých publikacích (např.: Hejný, 2014).

[3] Gradované úlohy jsou úlohy, které se zabývají stejnou problematikou na různě náročných úrovních. Nejčastěji se pracuje s třemi úrovněmi (nejlehčí, středně náročná a nejtěžší) (Gradované úlohy. In: Hejného metoda)

úspěchu a motivuje žáky k další práci (Babušová, 2012). V hodině žákům pokládá podnětné otázky, které je rozvíjejí. Zároveň zde je i prostor pro diskusi a žák se ve třídě nebojí projevit své vlastní názory a udělat chybu, která je vnímána jako důležitá součást procesu učení. Ve výuce je pozitivní přístup k chybě, která je v ní vítána a se kterou učitel dále didakticky pracuje.

Hejného metoda pracuje s tzv. didaktickými prostředí. *„Didaktickým matematickým prostředím rozumíme takový soubor vzájemně propojených pojmů, vztahů, procesů a situací, který dovoluje tvořit úlohy:*

- *umožňující žákům odhalovat hluboké matematické myšlenky*
- *obdařené silným motivačním potenciálem*
- *přiměřené žákům jak 1., tak i 2. stupně*
- *s nastavitelnou obtížností*

(Hejný, 2014, str. 13).

Didaktická prostředí se snaží být svojí strukturou a kontextem pro žáky atraktivní. Jsou vytvořena tak, aby žáci zábavnou formou objevovali a pochopili určité pojmy a vztahy v matematice.

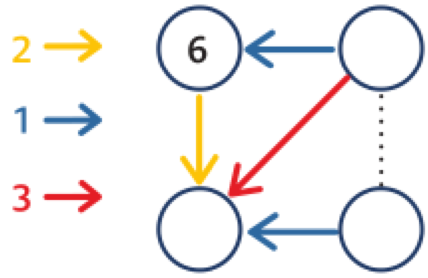
S jednotlivými prostředími se žáci setkávají nejprve v jednoduchých úlohách, které jsou žákům předkládané bez jakýchkoliv předem daných postupů. Žáci se s úlohou seznamují a samostatně objevují specifikace práce v ní. Na individuální práci žáků poté navazuje spolupráce více spolužáků a sdílení vlastních myšlenek ve třídě. Žáci tím, že se opakovaně vrací do daných prostředí a začínají řešit náročnější úlohy, získávají zkušenosti s prostředím, které se pro ně stává známým. V prostředí pak nabývají větší jistotu a lépe se jim formulují své myšlenky. S tím velmi úzce souvisí používání popisného jazyka při práci v daném prostředí a sdílení postupu řešení v něm. Žáci se učí co nejpřesněji vyjádřit své myšlenky a jednotlivé kroky. Použitý jazyk se pro jednotlivá prostředí částečně liší, protože jednotlivé úlohy se odlišují ve struktuře, uspořádání grafických prvků a sledování problematiky. Přesto ale některé úlohy, které mají rozdílnou strukturu a vzhled a na první dojem působí, že jsou naprosto odlišné, se zabývají stejnou problematikou. Tyto úlohy nazýváme izomorfní. Například žákům zadáme, aby našli myšlené číslo. Když ví, že pokud přičtu k hledanému číslu číslo šest a odečtu číslo tři, dostanu číslo jedenáct. Další příklad může být, když žákům zadáme, aby objevili číslo na číselné ose. Pokud ví, že když od hledaného čísla udělají na ose šest kroků dopředu a tři kroky dozadu, tak budou stát na čísle jedenáct. Přesto, že první zmíněná úloha u žáků rozvíjí řešení početních operací pouze v paměti bez počítání na papíře a druhá se zaměřuje na práci na číselné ose, obě tyto úlohy sledují stejnou problematiku. V obou příkladech je u žáků rozvíjena problematika lineárních rovnic. Proto tyto dvě úlohy můžeme nazvat jako izomorfní.

Prostředí se dělí do několika skupin. Do první skupiny řadíme tzv. sémantická prostředí, ve kterých číslo navazuje na konkrétní objekty a na životní zkušenost žáka. Nejtypičtějšími úlohami tohoto typu jsou slovní úlohy. Patří sem ale také prostředí Krokování (ve kterých se pracuje s kroky řešitele a s číselnou osou), Rodina (kde jsou objekty členové rodiny a jejich vzájemné příbuzenské vztahy) nebo Autobus (kde se pracuje s cestujícími). Dalším typem jsou tzv. prostředí strukturální, v nichž žák pracuje s abstraktní podobou čísla v určité struktuře, která je tvořena různými grafickými prvky, jak jsou šipky, kolečka, tabulky, sítě atd. Příkladem tohoto prostředí jsou například Násobilkové čtverce (kde se pracuje s násobením a dělením ve čtvercové struktuře), Barevné trojice (kde řešitel spojuje čísla podle barev tak, aby jejich součet byl např.: 6), Algebrogramy (kde řešitel dosazuje číslice za písmena do vztahu), Pavučiny nebo Výstaviště.

V další kapitolách se budu zabývat pouze dvěma vybranými strukturálními prostředími – Pavučiny a Výstaviště. Nejprve popíši jejich zařazení v Hejného metodě, poté se blíže zaměřím na popis úloh. Na závěr uvedu zásadní části úlohy a možné řešitelské postupy.

1.7.1 Pavučiny

Úlohy z prostředí Pavučin mají několik strukturálních prvků. Jedním z nich jsou kolečka, ve kterých jsou buď čísla zadaná nebo je do nich musí žáci doplnit. Čísla v kolečkách jsou označována jako stavy. Dalším prvkem, se kterým se můžeme v pavučině setkat, jsou šipky. Jejich hodnota, která je uvedena v zadání (mimo Pavučinu), určuje, kolik je třeba přičíst nebo odečíst ke stavům, aby zjistil, jaké číslo má doplnit do prázdných koleček. Šipky a jejich hodnoty jsou označovány jako operátory. Jedním z principů prostředí Pavučiny je, že šipky, které mají stejnou barvu, přičítají stejnou hodnotu. Hledaná čísla, která nejsou doplněná v zadání, se objevují v oblasti stavů i operátorů, a proto žák musí řešit úlohu v těchto dvou rovinách zároveň. Důležitým momentem při řešení těchto úloh je, když si žák uvědomí rozdíl mezi šipkami, které jsou orientované opačným směrem. U různě orientovaných šipek je potřeba použít jinou početní operaci. Tuto problematiku lze blíže

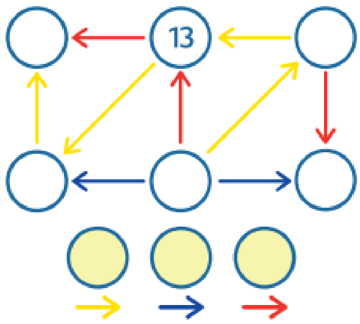


Obr. 1: Příklad Pavučiny (převzato z blog Hejného metoda[4])

přiblížit na obrázku 1. Na něm můžeme vidět, že levá žlutá šipka, která směřuje od stavu, u kterého známe jeho číslo (tedy od čísla 6), ke stavu, který máme vypočítat, bude žák sčítat. Pravděpodobně bude řešit příklad $6 + 2 = x$. V úloze, kde modrá horní šipka směřuje od kolečka s hledanou hodnotou ke kolečku, ve kterém známe číslo (k číslu 6), si žák musí uvědomit opačnou orientaci šipky. V tuto chvíli buď může od známého čísla odečíst hodnotu šipky a zjistí hledané číslo. To vede k příkladu např.: $6 - 2 = x$ (hledané číslo). Další postup řešení je náročnější a vede na jednoduchou lineární rovnici. Žák objeví vztahy mezi kolečky a šipkami a uvědomí si, že pokud k hledanému číslu přičte číslo 3 dostane číslo pět. Žák úlohu řeší na základě rovnice: $x + 2 = 6$.

V obou postupech žák pracuje na úrovni jednodušších rovnic, ve kterých používá základní početní operace. Výběr postupu řešení obrácené orientace šipek záleží na zkušenostech žáka. V učebních se žák poprvé setkává s tímto prostředím již v prvním ročníku. Ve vyšších ročnících (3. a 4. ročník) je úloha z prostředí Pavučin doplněná o podmínky. Například na obrázku 2. můžeme vidět pavučinu určenou pro 4. ročník, jejíž zadání je: Vyřeš pavučinu, když nejmenší číslo je 7.

[4] Didaktická prostředí: Pavučiny. In: *Hejného metoda* [online]. [cit.15.6.2022]. Dostupné z: http://blog.h-mat.cz/didakticka-prostredi/pavuciny



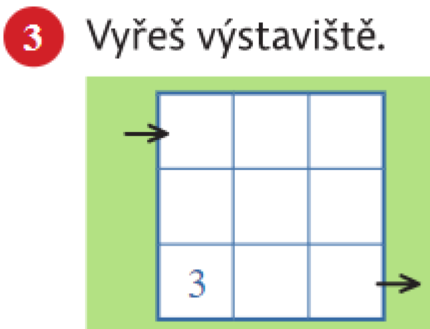
Obr. 2: Příklad Pavučiny s podmínkou (převzato z učebnice Matematika 4. ročník)

Pavučiny patří mezi strukturální prostředí. Toto prostředí u žáků rozvíjí strukturální představy o čísle, které nejsou navázány na vlastní zkušenost žáků, ale zabývají se vzájemnými vztahy mezi čísly. Řadí se do oblasti aritmetiky. Jedná se o orientovaný graf. Orientovaný graf je takový graf, u jehož vrcholů, které mají společnou hranu, můžeme určit pořadí (počáteční a koncový vrchol). V úlohách tohoto typu jsou čísla umístěna do struktury, která vypadá jako pavučina. V prostředí Pavučin si žáci v rámci zajímavých a zábavných úloh opakují a procvičují aditivní operace (sčítání a odčítání). Zároveň žáky připravuje na problematiku lineárních rovnic. Prostředí pracuje s vizuálními prvky, které určují jednotlivé vztahy mezi čísly.

1.7.2 Výstaviště

Výstaviště má obvykle čtvercový nebo obdélníkový tvar, je složen z malých čtverečků, které představují jednotlivé místnosti výstaviště (muzea). Místnosti jsou buď očíslované nebo žák musí čísla do některých místností doplnit. Sousední čísla, jejichž rozdíl je 1, tedy číslo n a $n + 1$, mají společnou stěnu místnosti. Úkolem žáka je najít pořadí místností, podle kterého můžeme do výstaviště zakreslit např.: klikatou čáru, kterou označujeme jako cesta výstavištěm. V tomto prostředí je důležité dodržet několik pravidel, které se k němu vážou. Žák musí projít všemi místnostmi a žádnou místnost nesmí navštívit dvakrát. Místnostmi musí procházet tak, aby číselná řada na sebe navazovala od 1 do n, přičemž n je počet místností. Dále pak musí do jednotlivých místností vepsat pořadí, jak jimi procházel. Z jedné místnosti do druhé nesmíme přecházet přes rohy místnosti, musíme použít pouze stěny, které jsou pro obě místnosti společné. Vstup i výstup z výstaviště musí být na jeho okraji.

Učitel na začátku s žáky „prochází“ jednotlivými místnostmi výstaviště. První úlohy jsou podpořeny vizuálními prvky (např.: hračky, atrakce na pouti). Na začátku je žákovi předložen plán vyplněného výstaviště, ve kterém je zaznamenaná i cesta výstavištěm a které ho seznamuje s pravidly tohoto prostředí. Žáci se seznamují s prací v prostředí, diskutují o vyplněném výstavišti a učí se v něm orientovat a popisovat svůj postup. Poté žáci dostanou už částečně doplněné výstaviště, jehož příklad můžeme vidět na obrázku 3. Tento typ úloh více podněcuje žáky řešit je strategií pokus – omyl, během kterého zkouší doplnit čísla a poté zjišťují, jestli dané řešení vyhovuje pravidlům výstaviště. Zároveň ale žáci při řešení používají řešitelské strategie jako je například cesta zpět, řešení jasných



Obr. 3: Příklad Výstaviště (převzato z blog Hejného metoda[5])

úseků neb systematické experimentování. S tímto prostředím se stejně jako s prostředím Pavučin seznamují žáci již v první třídě. První seznámení je zaměřené na osobní prožitek žáka. Na začátku je v úlohách označen vstup i výstup z Výstaviště. V dalších úlohách musí žáci nejen doplnit čísla do nevyplněných místností, ale také musí objevit buď vstup nebo výstup nebo oboje. V druhém ročníku jsou úlohy z prostředí Výstaviště doplněny o pokyn, aby žáci spočetli součet čísel ve všech řádcích nebo sloupcích. V rámci těchto poupravených zadání si žáci procvičují základní aditivní operace a seznamují se s řešením úloh z prostředí Výstavišť s podmínkou. V dalších úlohách a ve vyšších ročnících už je v podmínce přesně určený součet vybraných sloupců nebo řádků. Např.: Vyřeš výstaviště.

[5] Didaktická prostředí: Výstaviště. In: *Hejného metoda* [online]. [cit.15.6.2022]. Dostupné z: http://blog.h-mat.cz/didakticka-prostredi/vystaviste

Znáš součet čísel dolního řádku (převzato z blog Hejného metoda). Ve třetím ročníku přichází vícepatrové Výstaviště[6].

Výstaviště patří do oblasti geometrie, ale zároveň i aritmetiky. Je to prostředí, kde se žák orientuje v rovině, do které dosazuje postupně řadu čísel. Prostředí je založeno na vlastní zkušenosti žáka s výstavou nebo muzeem.

1.8 Rozložení učiva v druhém a třetím ročníku ZV

V Rámcovém vzdělávacím programu (dále už jen RVP) je předmět matematika zařazen do vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace. V charakteristice této oblasti je kladen důraz na aktivní zapojení žáka při procesu učení. Obsah učiva v matematice by měl navazovat na potřeby reálného světa a prohlubovat u žáků takové dovednosti a vědomosti, které budou využitelné v běžném životě. V rámci této oblasti by měl žák rozvíjet svoji matematickou gramotnost[7]. Matematika a její aplikace je v rámci RVP rozdělena na prvním stupni do čtyřech tematických okruhů. Každý tento okruh je dále rozdělen na první období, ve kterém je zařazen první, druhý a třetí ročník, a druhé období, ve kterém je zařazen čtvrtý a pátý ročník. V jednotlivých okruzích jsou vymezené očekáváné výstupy, minimální doporučená úroveň pro úpravy očekávaných výstupů v rámci podpůrných opatření a učivo. Na začátku je zařazen okruh Číslo a početní operace, dále pak je okruh Závislosti, vztahy a práce s daty, následně je zařazen okruh Geometrie v rovině a v prostoru a poslední je zařazen okruh Nestandartní aplikační úlohy a problémy, které jsou ale až v druhém období 1. stupně.

Já zde zmíním pouze ty oblasti a očekávané výstupy, které jsou důležité pro moji diplomovou práci. Na konci prvního období by měl žák v oblasti Číslo a početní operace užívat lineární uspořádání (M-3-1-03), provádět zpaměti jednoduché početní operace s přirozenými čísly (M-3-1-04) a řešit a tvořit úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace (M-3-1-05). Žák na konci třetího ročníku by měl zvládat z oblasti Závislosti,

[6] Výstaviště má podobu dvou obdélníků nebo čtverců. Ty jsou vzájemně propojené označenou místností (schodiště), kde se přechází z jednoho patra do druhého. Úkolem řešitele je stejně jako u jednopodlažních Výstavišť najít cestu výstavištěm, vstup a výstup a doplnit čísla do nevyplněných místností. Cesta prochází oběma podlažími.

[7] Matematická gramotnost je chápána jako dovednost žáka pochopit matematiku a umět ji aplikovat. Kuřina (2009) ve svém článku uvádí, že definici matematické gramotnosti bychom mohli shrnout pouze do krátkého slovního spojení: „rozumět a umět použít“ a to učivo příslušného ročníku. Metodicky portál RVP.CZ ještě uvádí, že matematika, kterou si žák osvojuje, by měla navazovat na životní potřeby žáka, který je tvořivý a přemýšlivý.

vztahy a práce s daty popisovat jednoduché závislosti (M-3-2-02) a doplňovat tabulky, schémata, posloupnosti čísel (M-3-2-03).

Ačkoliv obě prostředí pracují převážně s čísly, zabývají se i částečně učivem z geometrie. Proto vidím jako důležité zběžně shrnout i obsah učiva geometrie. Žák by měl na konci prvního období zvládat pracovat s rovinnými útvary (rozeznat, pojmenovat, vymodelovat a popsat). Žák by měl v oblasti Geometrie v rovině a v prostoru zvládat rozeznat a modelovat jednoduché souměrné útvary v rovině (M-3-3-03). V rámci prostředí Výstaviště se seznamuje s obsah čtverce nebo obdélníku, který je ale na prvním stupni zařazen až ve čtvrtém ročníku.

V této kapitole se zaměřím na aritmetiku, ve které vymezím učivo v matematice v druhém a třetím ročníku prvního stupně základního vzdělávání.

V druhém i ve třetím ročníku se pracuje pouze s přirozenými čísly. V druhém ročníku se žáci zabývají číselným oborem od 0 do 100, ve kterém se učí sčítat a odčítat s přechodem přes desítku a orientovat se na číselné ose. Zároveň čísla porovnávají a zaokrouhlují je na desítky. V druhé třídě se také poprvé setkávají s násobením a dělením, které je ale ještě omezené pouze na násobky 2,3,4,5 a 10. Pracují se základními zlomky (např.: polovina, třetina, čtvrtina).

Ve třetím ročníku žáci pracují už v číselném oboru od 0 do 1 000, ve kterém sčítají a odčítají s přechodem násobků sta. Porovnávají jednociferná, dvojciferná a trojciferná čísla na číselné ose. Čísla zaokrouhlují nejen na desítky, ale také na stovky. Učí se písemným algoritmům sčítání a odčítání. V násobení a dělení už pracují s celou násobilkou, tedy s násobky čísel od 0 až do 10. Násobí a dělí dvojciferné číslo jednociferným číslem a zároveň se učí dělit se zbytkem. Ve třetím ročníku se velká část učiva věnuje upevnění, procvičení a rozšíření násobilky. Žáci se učí pracovat se zlomky např.: ve slovních úlohách.

2 Praktická část

Na začátku vymezím cíle praktické části této diplomové práce. V další kapitole se budu zabývat výzkumnými metodami a strategiemi, které jsou důležité pro výzkumnou část. V další části se budu zabývat samotným experimentem. Na začátku charakterizuji výzkumný vzorek, popíši provedený předexperiment a jeho význam pro finální experiment. V samostatné kapitole představím úlohy, které byly žákům zadávány a zdůvodním jejich výběr. Popíši scénář experimentu, jeho jednotlivé části a strukturu zadávaných úloh. Následně představím průběh experimentu, ve kterém se více zaměřím na používání strategie pokus – omyl u žáků. V neposlední řadě formuluji výsledky výzkumu, jejich interpretaci a závěr praktické části diplomové práce.

2.1 Cíl výzkumu a výzkumné otázky

Odborná literatura se zabývá různými heuristickými strategiemi, které žáci často používají při řešení různých typů úloh v hodinách matematiky na prvním stupni. Ve své diplomové práci jsem se rozhodla zaměřit na strategii, kterou řešitel může aplikovat bez předchozích zkušeností s úlohou. Je to jedna z prvních řešitelských strategií, se kterou se žáci setkávají již v mateřské škole. Tato strategie se nazývá pokus – omyl, ale je někdy označována také jako nesystematické experimentování (kapitola 1.3). Vědecké experimenty se ale více zabývají výčtem jednotlivých řešitelských strategií, ve kterých strategii pokus – omyl zmiňují pouze okrajově nebo ji tam vůbec nezařazují. Proto se ve svém výzkumu zaměřím především na řešitelskou strategii pokus – omyl, na ochotu použití této strategie a experimentování u žáků na prvním stupni, na vývoj této strategie a moment, kdy žáci začnou používat jiné řešitelské strategie. Hlavním cílem praktické části je zjistit, zda jsou žáci v 2. a 3. ročníku na základní škole, kteří nejsou vzděláváni Hejného metodou, ochotni používat tuto strategii v didaktických prostředích Pavučin a Výstavišť. S žáky, kteří jsou vzděláváni běžnou metodou výuky matematiky pracuji proto, že nemají zkušenosti s didaktickými prostředími, neznají jejich pravidla a neví, jak je řešit. Na základě toho předpokládám, že budou v úlohách z těchto prostředí používat strategii pokus – omyl. Zároveň ale pracuji s žáky až od druhého ročníku, protože je nutné, aby uměli už používat základní operace (sčítání a odčítání). Protože ve výzkumu pracuji s žáky, kteří nejsou vzděláváni Hejného metodou a neznají didaktická prostředí, předpokládám, že budou řešit úlohy náhodným dosazováním čísel, ověřováním si správnosti řešení a postupně přejdou na základě získaných zkušeností a objevených zákonitostí k jiným strategiím. V diplomové práci se zaměřím na výzkumnou otázku:

1. Jak žáci postupují při řešení úlohy metodou pokus – omyl?

Ve praktické části bych se chtěla také věnovat zároveň těmto výzkumným otázkám:

1. Jsou žáci schopni a ochotni samostatně používat metodu pokus – omyl při řešení úloh?
2. Kdy žáci přecházejí od strategie pokus – omyl k jiným strategiím?
3. Jaké jiné strategie žáci používají?

2.2 Výzkumné metody a strategie

Na základě tématu diplomové práce a výzkumného cíle jsem zvolila kvalitativně orientovaný výzkum. Ten zdůrazňuje subjektivní hlediska řešení žáků a pracuje s existencí více realit (Chráska, 1993), což odpovídá tomu, že se ve své práci zaměřuji na individuální přístupy žáků k zadaným úlohám. Ve výzkumu pozoruji rozdílné přístupy žáků ke strategii pokus – omyl. V řešeních hledám stejné postupy u žáků při řešení úloh touto strategií, zároveň se ale také zabývám jedinečnými řešitelskými postupy v rámci této strategie. Ve své práci sleduji řešení konkrétních úloh na malém výzkumném vzorku. V praktické části si nestanovuji na začátku výzkumu hypotézu. Nejprve začínám sběrem dat a tříděním. A poté na jejich základě stanovuji a formuluji výsledky (Gavora, 1996).

Ve výzkumu pracuji s výzkumným nástrojem nestrukturovaného pozorování[8], které je doplněno o metodu verbálních výpovědí[9]. Gavora (1996) uvádí dva typy verbálních výpovědí. První zmiňuje *průběžné verbální výpovědi*, při kterých zkoumaná osoba nahlas komentuje a popisuje postup svého uvažování. Druhým typem jsou *retrospektivní verbální výpovědi*, při kterých není možné, aby zkoumaná osoba při pozorování popisovala, jak uvažuje. Zkoumaná osoba své myšlenky a postupy sděluje ihned po skončení pozorované činnosti. V rámci výzkumu budou využity oba typy verbálních výpovědí, podle

[8] V nestrukturovaném pozorování výzkumník zasahuje do výzkumu bez předem daného scénáře (Gavora, 1996).
[9] Tato metoda byla popsána v odborné publikaci Petera Gavory Výzkumné metody v pedagogice, Paido, Brno.

individuálních potřeb žáků. Verbální výpovědi společně s nestrukturovaným pozorováním mi umožňují částečně proniknout do toho, jak žáci nad úlohou přemýšlejí, jak postupují při jejím řešení a jaké řešitelské strategie používají.

V rámci výzkumu pracuji s audiozáznamem, v rámci kterého si budu zaznamenávat jednotlivé rozhovory. K těm se budu vracet při zpracovávání výsledků výzkumu. Díky těmto audiozáznamům budu mít možnost se vracet k verbálním výpovědím žáků a jejich slovnímu popisu jejich řešitelských strategií. Zároveň se tak eliminuje možnost zkreslení výsledků výzkumu. Ve své práci budu také analyzovat jednotlivá žákovská řešení.

2.3 Charakteristika výzkumného vzorku

První část výzkumu jsem realizovala na menší základní škole, která je situovaná v okrajové části města v blízkosti přírodního parku. Je to škola s dlouholetou tradicí, která funguje už od roku 1977. Škola klade důraz na individuální přístup k žákům, vytváření bezpečného prostředí a používání různorodých učebních metod. Zároveň je tato škola modelovou školou projektu Pomáháme školám k úspěchu. Škola se také zapojuje v rámci projektů Hejného metody výuky matematiky. Vize školy je: *„Chceme být školou, ve které je důležitý každý žák, a která vytváří bezpečné prostředí, kam budou chodit rádi žáci, pedagogové i rodiče.“*. Škola má v každém ročníku dvě třídy. V jedné se vyučuje Hejného metoda a v druhé se vyučuje běžná metoda výuky matematiky. Zároveň se v těchto třídách vyučuje buď analyticko-syntetická metoda čtení a psaní nebo genetická metoda. Na škole žáky hodnotí známkami. Výzkum jsem realizovala na této škole v druhém ročníku, kde jsou žáci vzděláváni klasickou matematikou. Ve třídě je 21 žáků. Paní učitelka má dlouholetou učitelskou praxi. Experiment jsem realizovala s devíti žáky, které vybírala paní učitelka podle úspěšnosti v matematice tak, aby výzkumný vzorek zahrnoval různě úspěšné žáky v matematice. Výzkum byl realizován se čtyřmi dívkami a pěti chlapci.

Druhou část výzkumu jsem měla možnost realizovat na menší škole, která se nachází také v okrajové části okresního města. Je to církevní škola, která byla postavena nedávno a funguje od roku 2014. Tato škola se neustále rozrůstá a rozšiřuje svoje prostory. Škola klade důraz na vytváření bezpečného prostředí, všestranný rozvoj potenciálu žáka, vzájemný respekt a spolupráci, zapojení žáka do společnosti. Tato škola je rodinného typu. Do třídy chodí maximálně 15 žáků. Škola se tím snaží zajistit individuálnější přístup učitele k žákům.

Zároveň se očekává, že v menším kolektivu budou pevnější vztahy mezi dětmi. Vize školy je: *„Vzdělané mladé osobnosti se zdravým vztahem k Bohu, k sobě a k lidem“*. Už od první třídy probíhá etická výchova, která klade důraz na charakter žáka a jeho postoj k životu ve společnosti. Každé ráno probíhá *Slovo na cestu*, které je buď samostatně ve třídách nebo společně pro celou školu v tělocvičně. Škola nabízí přátelské a bezpečné prostředí. Ve škole hodnotí žáka známkami. Používají klasickou formu výuky obohacenou o moderní metody. Ve třídách probíhá intenzivní výuka anglického jazyka již od první třídy. V hodinách matematiky jsou žáci vzděláváni běžnou metodou výuky matematiky. Škola se snaží o pozitivní motivaci a všestrannou přípravu pro život. Výzkum jsem zadávala na této škole ve třetím ročníku. Třída, která se zúčastnila výzkumu, měla 15 žáků. Bylo v ní 10 kluků a 5 dívek. Třída působila velmi klidně a přátelsky. Ve třídě bylo bezpečné klima, kde se nikdo nebál vyjádřit svůj názor. V kolektivu byl pouze jeden žák s podpůrným opatřením. Paní učitelka je zkušená pedagožka s dlouholetou praxí, která má velmi otevřený a přátelský přístup k žákům. Ve třídě jsem spolupracovala s deseti žáky, kteří byli náhodně vybráni paní učitelkou, protože během výzkumu byla velká část žáků nemocná. Jednalo se o dvě dívky a osm chlapců. V rámci této školy jsem měla možnost ještě realizovat experiment u jednoho nadaného žáka z prvního ročníku, který je také vzděláván běžnou metodou výuky matematiky. V první třídě už zvládá násobit, dělit, počítá s mocninami. Paní učitelka s ním pracuje individuálně.

2.4 Pilotní výzkum

V rámci praktické části diplomové práce byly realizovány dva pilotní výzkumy. V obou případech byly úlohy zadávány žákům druhého ročníku, kteří nejsou vzděláváni v matematice Hejného metodou. Nejprve byla připravená sada úloh předložena ve dvou třídách na dvou odlišných základních školách v okresním městě, v druhém předvýzkumu už byly úlohy zadány pouze v rámci jedné třídy. Na začátku obou experimentů jsem žákům rozdala připravené úlohy a poté jsem jim pokládala otázky, které žáky směřovaly k objevení pravidel úlohy a následnému řešení strategií pokus – omyl. V obou předvýzkumech byly úlohy v jednotlivých prostředích zadávány samostatně. Nejprve jsem jim rozdala seznamovací úlohu, kterou jsem po jejím dokončení a diskusi zase vybrala a místo ní jsem jim dala další úlohu. Takhle jsem postupovala v rámci celého experimentu. Chtěla jsem totiž, aby se žáci opravdu soustředili na danou úlohu a snažili se ji vyřešit. Bylo nežádoucí, aby žáci opisovali například v pavučinách hodnoty šipek do *Základní úlohy* podle *Nevyplněné pavučiny* (označení úloh je vysvětleno a popsáno v kapitole 2.5). Pouze u úloh z prostředí Výstaviště jsem jim nechávala záznamy předchozích pokusů o řešení, aby se mohli podívat, jakou cestu ve Výstavišti už zkoušeli. V předvýzkumu jsem zjišťovala, jak budou žáci úlohy chápat, jestli je budou řešit strategií pokus – omyl a jak budou reagovat na připravené otázky. Na základě výsledků z tohoto předvýzkumu byly úlohy poupraveny a scénář experimentu (pokládané otázky) byl lépe přizpůsoben zadávaným úlohám.

V prvním předvýzkumu byly úlohy zadány celé třídě najednou. Žáci nejprve pracovali s úlohami z prostředí Pavučin. Na jejich základě bylo zjištěno, že žáci místo používání strategie pokus – omyl, řešili úlohy přes jednobarevnou cestu[10]. Dále měli žáci problém s grafickou podobou úloh z prostředí Pavučin. Na začátku vůbec nechápali, že šipky pod Pavučinou do ní přímo nepatří a že pouze určují hodnotu operátorů. Po odpovědích žáků na otázku „Co nám ty šipky říkají a co pomocí nich můžeme zjistit“, kde jsem se ptala konkrétně na ty šipky mimo Pavučinu, jsem měla pocit, že to chápou. V následujících úlohách ale žáci šipky určující hodnotu operátorů zařazovali do Pavučiny. Jedna žákyně sice řekla, že šipky jsou příklady, ale bohužel poté nedokázala a ani nechtěla tuto myšlenku rozvést a sdělit ostatním spolužákům, jak to myslela.

Poté jsem žákům předložila úlohy z prostředí Výstaviště. V tomto prostředí nebyly takové zásadní problémy jako v předchozích úlohách. Ačkoliv jsem s žáky prošla vyplněné Výstaviště, kde bylo zapsané pořadí místností i cesta, a ptala jsem se, jak se jednotlivými místnostmi procházelo, bylo pro většinu třídy náročnější objevit, že se v prostředí Výstaviště pracuje s číselnou řadou. Když se jim ale podařilo tuto zákonitost objevit, tak dále pak už neměli s tímto prostředím žádný problém. Proto byla druhá úloha z připravené sady úloh doplněna pouze o sémantický prvek (obrázky večerníčků), který se stejně jako u první úlohy zaměřoval na vlastní zkušenost žáků.

V druhém předvýzkumu byly už poupravené úlohy podle předchozího pilotního výzkumu zadávány pouze třem vybraným žákům a průběh byl zaznamenáván na video. Podmínkou

[10] Řešení přes jednobarevnou cestu je postup, kde řešitel zná hodnotu šipek, které mají stejnou barvu a které procházejí celou Pavučinou.

bylo, aby vybraná skupina žáků byla schopná spolupracovat a nebála se před sebou vzájemně projevit. Nejdůležitějším kritériem pro výběr zkoumaných osob bylo, aby se spolu přátelili. Zadávání úloh třem žákům najednou bylo založeno na zkušenostech z předchozího předvýzkumu, kde se ukázalo jako velmi užitečné, že žáci mohli na sebe vzájemně reagovat. Zároveň ale nešlo sledovat řešitelské postupy v celé třídě najednou, proto byla organizace druhého pilotního výzkumu uspořádána do skupin po třech žácích. V předvýzkumu jsem spolupracovala s jednou dívkou a dvěma chlapci. Cílem druhého pilotního výzkumu bylo si ověřit, že připravený scénář je funkční a že je dobře sestavený pro finální výzkum. Výsledky získané z toho pilotního výzkumu neukázaly žádné zásadní nedostatky zadaných úloh ani sestaveného scénáře. Ukázalo se, že během rozhovoru je potřeba zdůraznit pravidla pro doplňování pavučiny (stejné šipky musí přičítat v Pavučině stejné číslo). Na základě druhého pilotního výzkumu byla pozměněná pouze organizační forma výzkumu. Přestože skupina po třech žácích byla dobrá z hlediska spolupráce a vzájemné interakce, nebylo možné se podrobně soustředit na tři řešitelské postupy najednou. Každý žák také potřeboval rozdílnou dopomoc a individuální přístup.

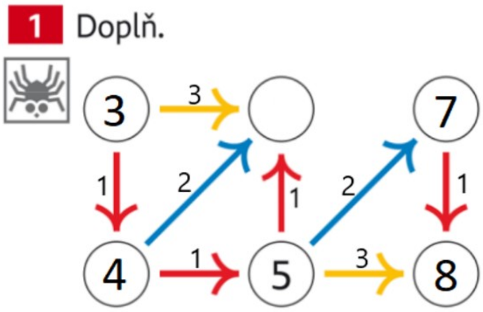
Pilotní výzkumy pozměnily organizační formu výzkumu, protože se ukázalo, že cíl výzkumu se bude lépe sledovat u každé osoby samostatně než u skupiny osob. Zároveň se poupravily informace a otázky, které byly žákům sdělovány.

2.5 Popis úloh

Hlavním cílem sestavených úloh bylo seznámit žáka s pro něj neznámými prostředími Pavučin a Výstavišť[11] a vyvolat v něm zájem řešit je pomocí heuristických strategií nebo např.: strategií pokus – omyl (viz kapitola 1.2 a 1.3). Připravená sada úloh byla upravována na základě pilotních výzkumů. Prostředí Pavučiny i Výstaviště byly po realizaci pilotních výzkumů doplněny o *Úlohy pro super-rychlíky*. Všechny úlohy z prostředí Pavučin a z prostředí Výstavišť (kromě *Úlohy pro super-rychlíky*) mají pouze jedno řešení.

[11] Jednotlivá prostředí jsou blíže popsaná v kapitole 1.4 Didaktická prostředí.

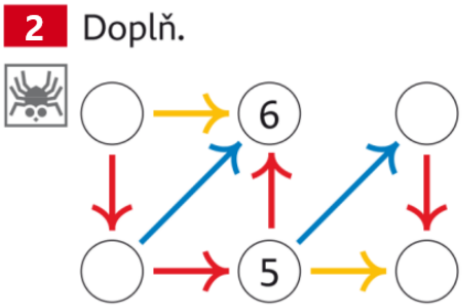
V prostředí Pavučiny je úloha nazvaná *Seznamování s prostředím* (obr. 4), ve které se žáci poprvé setkávají s tímto prostředím.



Obr. 4: Seznamování s prostředím (inspirována úlohou z učebnice Matematika 3. ročník)

Je skoro celá vyplněná kromě horního prostředního kolečka. Pavučina má tvar obdélníku, je tvořena šesti kolečky (stavy) a osmi šipkami, které mají tři různé barvy. Nejmenší číslo v pavučině je v levém horním rohu a je to číslo tři. Největší číslo v úloze je v pravém spodním rohu a je to číslo osm. V kolečkách je doplněná řada šesti po sobě jdoucích čísel od tří do osmi. Šipky (operátory) nabývají hodnot jedna, dvě nebo tři. Z původní pavučiny byla vynechána pravá horní červená šipka, protože výsledky pilotního výzkumu poukázaly na to, že žáci velmi rychle objevili jednobarevnou cestu, která vedla právě přes červené šipky. V dalších úlohách pak vše řešili přes jednobarevnou cestu a pokud v pavučině nešla použít tato strategie, tak nebyli schopni úlohu vyřešit. V pavučině byla také zrušena legenda, ve které byly zadány hodnoty operátorů. Ty byly přesunuty přímo do pavučiny nad šipky. Tato změna byla provedena také na základě pilotních výzkumů, ve kterých žáci nechápali, že čísla vyjadřující hodnotu operátorů nepatří do samotné pavučiny. Tato úprava byla provedena u všech úloh z prostředí Pavučin. Úloha *Seznamování s prostředím* měla žáky vést k tomu, aby si uvědomili, že stejně barevné šipky přičítají stejnou hodnotu, která je uvedena nad nimi a vybrali si jednu z cest, jak dojít k prázdnému kolečku, a přes ni doplnili hledané číslo.

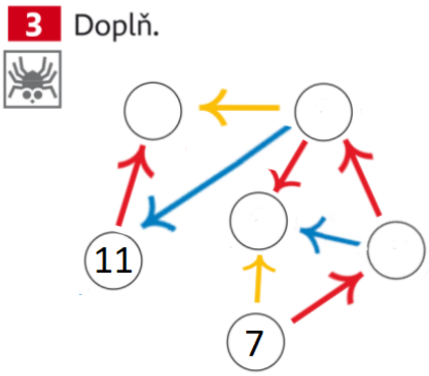
Druhá pavučina v sadě úloh je označená jako *Nevyplněná pavučina*, která má úplně stejnou strukturu jako předchozí úlohy (obr. 5).



Obr. 5: Nevyplněná pavučina (inspirována úlohou z učebnice Matematika 3. ročník)

Operátory a stavy mají stejné hodnoty jako v úloze *Seznamování s prostředím*. Pouze se liší v počtu čísel v zadání. V úloze *Nevyplněná pavučina* jsou vyplněná čísla pět a šest v kolečkách, mezi kterými je červená šipka. Ostatní čísla musel žák objevit sám. Tato úloha se zaměřuje na to, že se žák vrací do struktury, kterou zná z předchozí úlohy a ve které už ví, jak postupovat při řešení. Zároveň už není tak na první posled jasné její řešení.

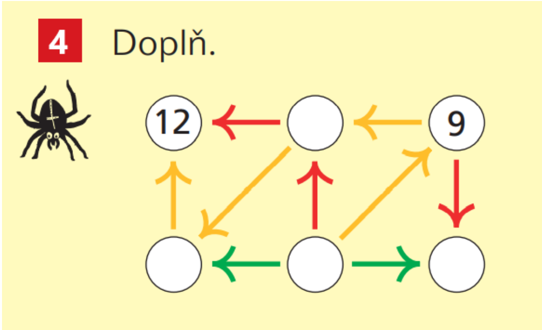
Jako klíčová úloha, ve které jsem předpokládala, že se objeví převážně strategie pokus – omyl, byla *Základní úloha*, kde jsem předpokládala, že žáci odhadnou hodnotu šipek a na jejich základě doplní čísla do koleček (obr. 6).



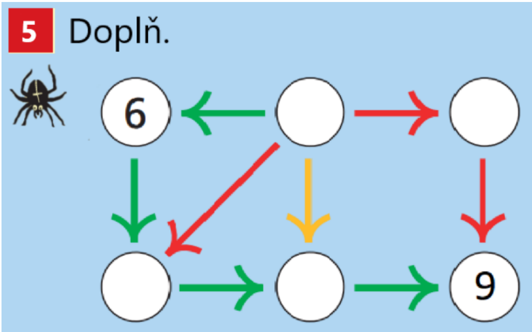
Obr. 6: Základní úloha (inspirována úlohou z učebnice Matematika 3. ročník)

Pavučina má jinou strukturu než předchozí úlohy, má tvar pětiúhelníku. V sadě úloh, která byla zadávána v rámci pilotních výzkumů, měla i *Základní úloha* podobu obdélníku. Ukázalo se ale, že žáci řeší úlohy podle toho, co si pamatují z předchozích řešení. Proto byla pozměněna struktura, aby nepřipomínala první dvě úlohy. Pavučina ale stejně jako předchozí dvě má osm šipek, které mají tři různé barvy, a šest koleček. Hodnoty šipek jsou stejné jako u *Nevyplněné pavučiny*. V zadání jsou doplněná opět dvě čísla. Tentokrát je to ale číslo sedm a jedenáct. Čísla v úloze tvoří také číselnou řadu, která je ale od sedmi do dvanácti. Nejmenší číslo je umístěné dole uprostřed (sedm). Největší číslo je v levém horním rohu (dvanáct).

Dvě doplňkové úlohy, které jsou označeny jako *Úloha pro rychlíky* (obr. 7) a *Úloha pro super-rychlíky* (obr. 8) mají stejně jako první dvě pavučiny podobu obdélníka.



Obr. 7: Úloha pro rychlíky (převzato z učebnice Matematika 2. ročník, 2. díl)



Obr. 8: Úloha pro super-rychlíky (převzato z učebnice Matematika 2. ročník, 2. díl)

První zmíněnou úlohu lze řešit přes jednobarevnou cestu, která vede od čísla devět k číslu jedenáct. Jelikož jde zprava do leva, tak je pro žáka obtížnější ji objevit. Mnohem přirozenější je pro ně, když hledaná cesta vede z levé části pavučiny do pravé (stejně čtou). Zároveň tato úloha otevírá problematiku symetrie ve dvourozměrném útvaru, protože od spodního prostředního čísla jdou dvě stejně barevné šipky, které směřují ke kolečkám na krajích. V krajních kolečkách bude tedy doplněné stejné číslo. *Úloha pro super-rychlíky* se dá řešit také přes jednobarevnou zelenou cestu, která vede od čísla šest k číslu devět. Opět je zde symetrie. V pravém horním a levém spodním kolečku bude opět doplněné stejné číslo, protože od prostředního horního kolečka jdou dvě stejně barevné červené šipky. V těchto dvou úlohách se hodnoty většiny šipek u barev liší. Žlutá šipka přičítá jiné číslo v *Úloze pro rychlíky* (přičítá číslo jedna) než v *Úloze pro super-rychlíky* (přičítá číslo tři).

Úvodní úloha v prostředí Výstaviště se nazývá *Seznamování s prostředím* (obr. 9).

Obr. 9: Seznamování s prostředím (převzato z blog Hejného metoda[12])

Má podobu čtverce, který je tvořen devíti místnostmi. Ve všech jsou doplněná čísla (pořadí místností). Zároveň ale také každá místnost obsahuje hračku, která žákovi přibližuje představu muzea. V úloze je také zakreslena cesta, která vede zleva doprava (z levého sloupce do pravého sloupce). Vstup i výstup jsou označeny. Jak jsem již zmiňovala výstaviště *Seznamování s prostředím* je úplně celé vyplněné, což umožňuje žákům částečně objevit, co mají v úloze doplnit a jak.

Navazující úloha nazvaná *Nevyplněné výstaviště* (obr. 10), má stejnou strukturu jako úloha *Seznamování s prostředím*.

Obr. 10: Nevyplněné výstaviště (inspirováno úlohou z blogu Hejného metody[13])

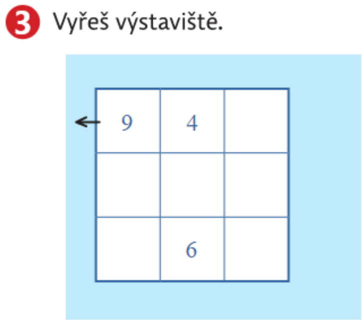
Ve výstavišti jsou ale oproti předchozí úloze zadaná pouze čtyři čísla a místnosti jsou doplněny o postavy z pohádek (Muzeum pohádek). Vstup a výstup z výstaviště jsou opět označeny. Tato úloha byla upravena na základě výsledků z předvýzkumů, kde se ukázalo, že žáci potřebují ještě oporu ve vizuálním prvku (hračky nebo postavy z pohádek). Jinak ale

[12] Didaktická prostředí: Výstaviště. In: *Hejného metoda* [online]. [cit.15.6.2022]. Dostupné z: http://blog.h-mat.cz/didakticka-prostredi/vystaviste

[13] Didaktická prostředí: Výstaviště. In: *Hejného metoda* [online]. [cit.15.6.2022]. Dostupné z: http://blog.h-mat.cz/didakticka-prostredi/vystaviste

čísla ve výstavišti, zadání a její struktura zůstaly zachovány tak, jak byly realizovány v pilotním výzkumu. Cesta opět jde zleva doprava, protože začíná v levém sloupci a končí v pravém sloupci.

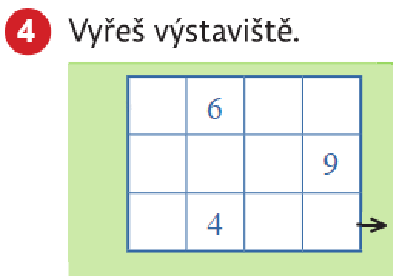
Základní úloha z prostředí Výstaviště je strukturou opět stejná jako předchozí dvě úlohy (obr. 11).



Obr. 11: Základní úloha (převzato z blog Hejného metoda[14])

V úloze jsou ale doplněna už pouze tři čísla. Je také zadán pouze výstup z výstaviště, vstup je třeba objevit. Zároveň cesta vede zprava do leva. Možné řešitelské strategie, které se tady nabízejí je strategie pokus – omyl nebo cesta zpět (řešení od konce). Jak jsem již zmiňovala postup řešení zprava doleva a řešení od konce, je pro žáky méně přirozené než řešení zleva doprava.

Také série úloh z prostředí Výstaviště obsahuje dvě další úlohy, které jsou označené jako *Úloha pro rychlíky* (obr. 12) a *Úloha pro super-rychlíky* (obr. 13).

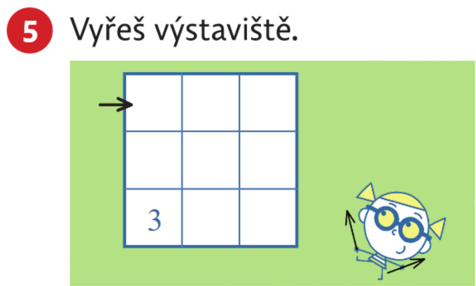


Obr. 12: Úloha pro rychlíky (inspirováno úlohou z blogu Hejného metody [15])

[14] Didaktická prostředí: Výstaviště. In: *Hejného metoda* [online]. [cit.15.6.2022]. Dostupné z: http://blog.h-mat.cz/didakticka-prostredi/vystaviste

[15] Didaktická prostředí: Výstaviště. In: *Hejného metoda* [online]. [cit.15.6.2022]. Dostupné z: http://blog.h-mat.cz/didakticka-prostredi/vystaviste

První zmíněná úloha se od předchozích liší, má tvar obdélníku a je tvořena dvanácti místnostmi. Označen je pouze výstup z výstaviště a v úloze jsou zadaná tři čísla. Cesta výstavištěm jde zleva doprava. Poslední úloha je *Úloha pro super-rychlíky*, ve které má žák objevit, co nejvíce řešení.



Obr. 13: Úloha pro super-rychlíky (inspirováno úlohou z blogu Hejného metody[16])

Úloha vede na dvě řešení. Výstaviště má čtvercový tvar a je tvořeno devíti místnostmi. V úloze je zadané pouze jedno číslo a vstup do výstaviště. Cesta vede opět zleva doprava.

2.6 Scénář experimentu

Výzkumné otázky byly zkoumány ve třech částech (dva pilotní výzkumy a jeden finální výzkum). Nejprve byl sestaven předběžný scénář, jehož kvalita byla ověřována v rámci předvýzkumu. Na základě jeho výsledků byl scénář upraven a znovu realizován. Následně proběhly ještě malé úpravy a poté byl uskutečněn finální výzkum. Finální experiment byl rozdělen do dvou částí, které jsou rozlišeny podle prostředí, ve kterém žáci úlohy řešili. Na začátku obou částí výzkumu byl vybrán jeden žák ze třídy. Následně s ním byl realizován experiment, ve kterém byly zadány úlohy z obou prostředí.

2.6.1 Pavučiny

Nejprve se žák zabýval úlohami z prostředí Pavučin (dále jen označovaná jako úloha „pavučina“). Na začátku byla žákovi předložena úloha označená jako *Seznamování s prostředím*. Nechala jsem mu chvilku, aby se s úlohou seznámil, prohlídl si ji a zamyslela se nad tím, jak by ji řešil. Následně mu byly pokládány otázky, které se zaměřovaly na porozumění úloh z prostředí Pavučin.

- Jaké druhy šipek v pavučině vidíš?

[16] Didaktická prostředí: Výstaviště. In: *Hejného metoda* [online]. [cit.15.6.2022]. Dostupné z: http://blog.h-mat.cz/didakticka-prostredi/vystaviste

- Co pomocí nich můžeme zjistit?
- Dokážeš říct, jaké číslo má žlutá šipka?
- Funguje to tak v celé pavučině, že žlutá šipka má číslo tři?
- Je to stejné i u ostatních šipek?
- Jaké číslo má modrá (červená) šipka?
- Dokázal/a bys doplnit chybějící číslo v horním prostředním kolečku?

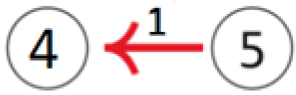
Po zodpovězení těchto otázek byl žákovi ponechán čas, aby si úlohu znovu prohlédl a případně se zeptal na to, co mu není jasné. Úlohu *Seznamování s prostředím* jsem si od žáka vybrala a místo ní jsem mu zadala další úlohu *Nevyplněná pavučina*. Zeptala jsem se, jestli ví, jak tuto úlohu vyřešit. V tuto chvíli jsem předpokládala, že žák už bude s úlohou seznámen a zvládne ji řešit samostatně. V sestaveném scénáři jsem ale zároveň počítala s tím, že se objeví žáci, kteří si stále nebudou vědět rady. Proto jsem měla připravené otázky, které by žákovi dopomohly úlohu pochopit a objevit postup, jak ji vyřešit.

- Je v pavučině něco doplněného?
- Co víme o těch dvou zadaných číslech?
- Je mezi nimi nějaká šipka?
- Můžeme červenou šipku najít ještě někde jinde?
- Co nám červená šipka říká o těch dvou kolečkách, mezi kterými je?
- Můžeme pomocí červené šipky zjistit ještě nějaké jiné číslo?

Po vyřešení celé úlohy jsem na základě pilotního výzkumu doplnila scénář ještě o výzvu, aby si žáci pavučinu ještě jednou zkontrolovali a ujistili se, že dodrželi všechna pravidla pro doplňování čísel do úlohy.

Scénář experimentu byl sestavován tak, aby ošetřil pokud možno všechna místa, ve kterých by mohl nastat problém. Proto byla sestavena sada otázek, která se zabývala příkladem, ve kterém šipka vedla od prázdného kolečka k doplněnému kolečku. Předpoklad sice byl, že pokud by žáci udělali chybu u opačně orientované šipky (u šipky, která by směřovala od prázdného kolečka k vyplněnému kolečku), tak by si ji objevili sami během kontroly. Pro případ, že by nějaký žák nedokázal svoji chybu objevit, byl scénář doplněn příkladem, který se zaměřoval na problematiku orientace šipek. Tato situace je ilustrovaná na obrázku 14, ve kterém jsou sice obě kolečka doplněná, ale chybně. Zároveň k němu byly přidány otázky, které měly žáky vést k pochopení orientace šipek v pavučině.

- Co můžeš říct o šipce mezi čísly 4 a 5?
- Jak nám ta šipka v pavučině pomáhá?
- Je takto doplněný příklad správně?
- Změnilo by se něco, kdybychom tu šipku teď změnili a ona by směřovala od čísla čtyři k číslu pět (zleva doprava)?



Obr. 14: Příklad chybně vyplněné pavučiny

Další už následovala *Základní úloha*, během které jsem se už na nic neptala, nezadávala jsem žádné instrukce, pouze jsem pozorovala, jak ji žák řeší a podkládala jsem doplňující otázky, které zjišťovaly, jak během řešení postupoval. Žáka jsem nechala, aby úlohu samostatně bez další pomoci vyřešil. Na konci jsem ho opět vyzvala, aby si pavučinu zkontroloval.

Poslední dvě úlohy v tomto prostředí byly pouze doplňkové (*Úloha pro rychlíky* a *Úloha pro super-rychlíky*). Úlohy měly být žákům zadány bez jakýchkoliv dalších instrukcí. Při řešení bylo opět sledováno, jestli používají metodu pokus – omyl nebo jiné řešitelské strategie.

2.6.2 Výstaviště

V druhé části výzkumu byly žákovi zadány úlohy z prostředí Výstaviště (dále jen označovaná jako úloha „výstaviště“). Pro tuto část výzkumu jsem měla jednotlivé úlohy vytištěné několikrát, aby žáci po nezdařilém pokusu výstaviště odložit a vzít si nový čistý plán. Na začátku byla opět žákovi předložena úloha *Seznámení s prostředím* zabývající se tentokrát ale prostředím Výstaviště. Nechala jsem mu chvilku, aby si mohl úlohu prohlédnout, zamyslet se nad ní a popřemýšlet nad tím, jak ji vyřešit. Poté jsme si začali s žákem o úloze povídat, kde jsem kladla důraz na sémantickou složku úlohy a na prožitek žáka.

- Před pár dny jsem navštívila muzeum hraček.

- Jak jsem tím muzeem procházela, napadlo mě si nakreslit jeho plánek.
- Do plánku jsem si zakreslila také cestu, jak jsem postupně procházela jednotlivými místnostmi.

Dále jsem pokládala otázky, abych zjistila, jestli žák pravidlům prostředí rozumí.

- Dokážeš mi teď říct, jakou místnost jsem navštívila jako první?
- Co v té místnosti bylo vystaveno?
- Co jsem navštívila jako druhé? A třetí?
- A co jsem navštívila jako poslední?

Na závěr jsem žáka pouze upozornila, že sice v této i následující úloze máme vstup i výstup z výstaviště daný, ale že v dalších úlohách to tak být nemusí. Proto je důležité zmínit, že vstup i výstup musí být vždy na kraji, nemůžeme do výstaviště vstupovat uprostřed. Seznamovací úlohu jsem si od žáka vybrala a místo toho jsem mu dala *Nevyplněné výstaviště*. Zeptala jsem se, jestli úlohu chápe a ví, jak ji řešit. Pokud žák věděl, jak pracovat, nechala jsem ho samostatně řešit. Zároveň jsem ale ve scénáři měla připravené otázky, které by žákovi pomohly pochopit, jak úlohu řešit.

- Co vidíš ve výstavišti?
- Víš, jakou místnost jsem navštívila jako první?
- Dokážeš říct, jakou místnost jsem v tomto výstavišti navštívila jako druhou?
- Dokážeš říct, jakou místnost jsem v tomto výstavišti navštívila jako třetí?
- Jsou některé místnosti už označeny číslem?

Po vyřešení této úlohy, jsem si ji zase od žáka vybrala a zadala jsem mu *Základní úlohu*. V tuto chvíli jsem předpokládala, že bude znát všechna potřebná pravidla, a proto jsem se už na nic neptala a ani mu nepředkládala žádné další instrukce.

Scénář byl opět v případě rychlého zvládnutí *Základní* úlohy doplněna dvěma doplňkovými úlohami pro rychlíky, které byly zadány bez dalších instrukcí.

2.7 Průběh experimentu

Během experimentu jsem měla na obou základních školách k dispozici vždy samostatnou místnost, kde byl koberec, stůl s židlemi atd. Na začátku každého experimentu jsem nechala, aby si žák sám vybral, kde by chtěl pracovat. Chtěla jsem, aby úlohy řešil v prostředí, které pro něj bude příjemné a kde se bude cítit komfortně. V první škole, kde mi přišlo, že žáci více sedí v lavicích, protože nemají ve třídě tolik prostoru, si spíše vybírali sezení na koberci (na zemi). V druhé škole, kde paní učitelka často střídá různé organizační formy výuky, se nedalo přesně určit, jaké pracovní místo preferovali více, protože se to bylo velmi vyrovnané.

Následně jsme začali řešit jednotlivé úlohy podle připraveného scénáře, během kterého jsem se postupně doptávala na konkrétní otázky (viz kapitola 2.6). Úlohy *Seznamování s* prostředím a *Nevyplněná pavučina* probíhaly u většiny sledovaných žáků podle scénáře. Pouze v první úloze bylo potřeba scénář doplnit o otázku, která zjišťovala, jak se můžeme dostat od čísla tři (levý horní roh) k prázdnému kolečku (horní prostřední kolečko). Žáci se na základě této otázky více zaměřili na cestu a šipky a bylo pro ně pak snazší objevit, že čísla v kolečkách doplňujeme pomocí šipek. U některých specifických postupů řešení se průběh lehce odlišoval od připraveného scénáře. Těmito řešeními se ale budu zabývat až v kapitole 2.8 Výsledky. Ačkoliv jsem předpokládala, že většina žáků bude v prostředí Pavučin už samostatně řešit *Základní úlohu*, všichni sledovaní žáci v druhém ročníku potřebovali alespoň částečnou dopomoc. Během řešení jim pomáhalo, když jsem slovně komentovala, co udělali, a ptala jsem se jich, co můžeme dělat dál.

- Můžeme hned na začátku něco doplnit?
- Co bys potřeboval v té pavučině vědět, aby si ji mohl vyřešit?
- Zkusil bys tam na to místo teda něco doplnit? Cokoliv, co si myslíš, že by tam mohlo být.
- A tím, že jsi doplnil ________ (např.: horní žlutou šipku), co na základě ní můžeš doplnit dál?

Takto jsme v pavučině postupovali dál. Své otázky jsem zaměřovala na to, co doplnil a jak mu to pomůže v jeho dalším postupu. Na závěr jsem chtěla, aby si zkontroloval, jestli mu to takhle vychází. Pokud něco v pavučině nevycházelo, tak jsme se zase vraceli na začátek.

- Věděl bys teď, co změnit, aby to vycházelo?

V tuto chvíli si někteří žáci uvědomili, že udělali např.: numerickou chybu nebo si uvědomili, že správné řešení musí být jiné. U menšího počtu žáků, ale bylo potřeba znovu je navádět a řízeně experimentovat. Pokládala jsem jim opět otázky na to, co změnit, jak se to projeví v pavučině a jestli jim to po této úpravě bude vycházet. Ve druhém ročníku jsem nepracovala v prostředí Pavučin s úlohami navíc, protože bylo pro ně náročné vyřešit základní úlohu. Ve třetím ročníku se samotný průběh experimentu od připraveného scénáře v prostředí Pavučin skoro nelišil.

V prostředí Výstaviště se průběh řešení úlohy *Seznámení s prostředím* ve druhém i třetím ročníku vůbec nelišil od připraveného scénáře. Žáci reagovali tak, jak jsem předpokládala. U *Nevyplněného výstaviště* a u *Základní úlohy* bylo v obou ročnících někdy nutné dodat, že ve výstavišti nemůžeme procházet přes rohy místností a že každou místnost smíme navštívit jenom jednou. Někteří žáci to respektovali bez toho, aniž by se na to zeptali, jiní se zeptali, jestli je tento postup řešení možný a ostatní žáci takto úlohy vyřešili a já jsem je musela upozornit, že toto řešení porušuje některé z pravidel prostředí. V obou ročnících jsem zadala *Úlohu pro rychlíky*. I zde jsem musela reagovat jinak než přesně podle scénáře. Někteří žáci (z druhého i třetího ročníku) si neuvědomili, že když má výstaviště jiný tvar a větší počet místností, tak bude muset být konečné číslo větší než devět. Žákům jsem tuto skutečnost nesdělovala, ale nechala jsem je, aby úlohu řešili. Pouze když se zeptali, kolik tam bude políček nebo jestli to bude do čísla devět nebo se pozastavili nad tím, že to vyřešit nejde, tak jsem je vyzvala, aby zkusili zjistit, kolik místností bude ve výstavišti. Poté už věděli, jak úlohu dořešit.

2.8 Výsledky

Do výzkumu se zapojily dvě základní školy. Ve výzkumu převažovaly retrospektivní verbální výpovědi. Pouze malá část sledovaných žáků dokázala během řešení komentovat svůj postup, proto jsem se po vyřešení úloh doptávala, jak úlohu řešili.

Výsledky jsou nejprve shrnuty v tabulce 1 a 2, ve kterém jsou zaznamenány řešitelské strategie jednotlivých žáků nebo skupiny žáků během řešení úloh z didaktických prostředí. Výsledky výzkumu jsou rozděleny do dvou hlavních částí. První oblast popisuje řešitelské strategie u žáku v prostředí Pavučin. Druhá se zabývá řešitelskými strategiemi u žáků v prostředí Výstavišť. Každá oblast se pak blíže věnuje jednotlivým řešitelským strategiím, vztahuje výsledky k výzkumným otázkám a na závěr popisuje nejčastější chyby a netypická řešení.

Tab. 1: Žákovská řešení v prostředí Pavučiny

	prostředí Pavučiny		
žáci[17]	*Seznamování s prostředím*	*Nevyplněná pavučina*	*Základní úloha*
Vilma, Veronika, Viktorie, Věra, Vojtěch, Vítek, Vratislav, Vendelín, Vavřinec	řešení přes hodnoty šipek	řešení na základě zkušeností z předchozí úlohy	řešení na základě zkušeností z předchozí úlohy
Vilém, Vladimír	řešení přes hodnoty šipek	pokus – omyl	řešení na základě zkušeností z předchozí úlohy
Vlasta, Vladislav	řešení přes hodnoty šipek	pokus – omyl	řízený pokus – omyl
Vladan	řešení přes hodnoty šipek	řízený pokus – omyl	pokus – omyl
Vlastimil	sčítání šipek a stavů a jejich násobení	řešení na základě zkušeností z předchozí úlohy	řešení na základě zkušeností z předchozí úlohy
Viktor	doplnění číselné řady	doplnění číselné řady	řešení na základě zkušeností z předchozí úlohy
Václav	doplnění číselné řady	řešení na základě zkušeností z předchozí úlohy	řešení na základě zkušeností z předchozí úlohy
Vincent	řešení přes hodnoty šipek	pokus – omyl	pokus – omyl
Valentýn	doplnění číselné řady	doplnění číselné řady	doplnění číselné řady

[17] Skutečná jména žáků byla nahrazena pseudonymy, pohlaví byla ale zachována.

Tab. 2: Žákovská řešení v prostředí Výstaviště

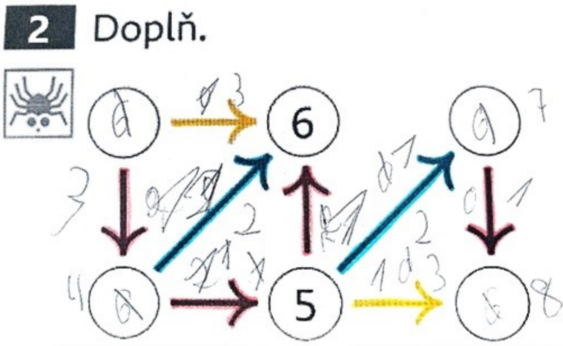
	prostředí Výstaviště			
žáci[18]	*Nevyplněná pavučina*	*Základní úloha*	*Úloha pro rychlíky*	*Úloha pro super-rychlíky*
Věra, Vladan, Vladislav, Vlastimil	pokus – omyl	pokus – omyl	pokus – omyl	pokus – omyl
Vojtěch, Vladimír, Vratislav	pokus – omyl	pokus – omyl	Ø	Ø
Vilma, Vendelín, Václav	pokus – omyl	pokus – omyl	pokus – omyl	Ø
Veronika	pokus – omyl	pokus – omyl	pokus – omyl + cesta zpět	pokus – omyl
Viktorie	pokus – omyl	pokus – omyl + cesta zpět	pokus – omyl	pokus – omyl (objevení pouze jednoho řešení)
Vilém	pokus – omyl	pokus – omyl + cesta zpět	pokus – omyl	Ø
Vendula	pokus – omyl	pokus – omyl + cesta zpět	Ø	Ø
Vlasta	pokus – omyl	pokus – omyl + cesta zpět	pokus – omyl	pokus – omyl + doplnění čísel do jednoznačné části
Vítek	pokus – omyl	pokus – omyl	pokus – omyl	pokus – omyl + doplnění čísel do jednoznačné části
Viktor	pokus – omyl	pokus – omyl + cesta zpět	pokus – omyl + doplnění čísel do jednoznačné části + cesta zpět	pokus – omyl

[18] Skutečná jména žáků byla nahrazena pseudonymy, pohlaví byla ale zachována.

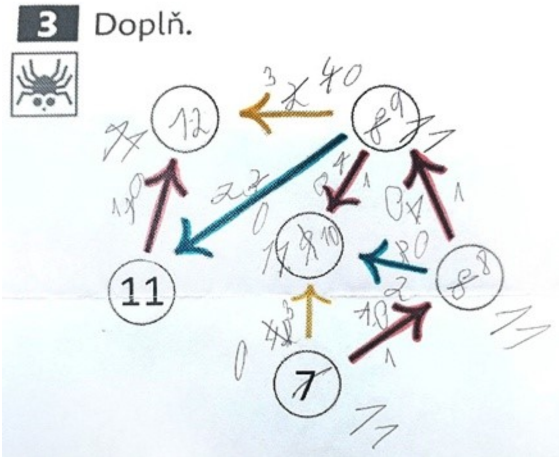
Vincent	pokus – omyl	pokus – omyl + doplnění čísel do jednoznačné části	pokus – omyl	pokus – omyl + doplnění čísel do jednoznačné části
Valentýn	pokus – omyl	pokus – omyl + doplnění čísel do jednoznačné části + cesta zpět	pokus – omyl + doplnění čísel do jednoznačné části	Ø

2.8.1 Pavučiny

Nejčastější řešitelská strategie, která se v prostředí Pavučin objevila, bylo řešení úlohy na základě zkušeností z předchozí úlohy. Žáci si úlohu prohlédli a ihned doplnili hodnoty šipek stejně jako byly v předchozí úloze. K červené šipce dopsali v celé pavučině číslo jedna, u žluté šipky doplnili číslo a tři a většinou jako naposled určili hodnotu modré šipky. Někteří žáci si hodnoty nad šipky nedopisovali, ale také si k šipkám v hlavě doplnili hodnoty jako u předchozí úlohy. Poté doplňovali do prázdných koleček čísla postupným přičítáním šipek. V *nevyplněné pavučině* žáci Vilma, Veronika, Viktorie, Vojtěch, Věra, Vlastimil, Vítek, Václav, Vratislav a Vendelín postupovali od levého horního kolečka, kam doplnili číslo tři. Následně přes červenou šipku doplnili kolečka vlevo. Dále pak buď přes modrou šipku zjistili hodnotu pravého horního kolečka nebo někdy úplně spontánně doplnili hodnotu sedm. Myslím si, že si vzpomněli, že v předchozí úloze tady taky bylo číslo sedm, a proto ho tam doplnili. V *Základní úloze* většinou postupovali od čísla sedm, které bylo dané už v zadání. Odtud postupně doplňovali čísla dopočítáním přes červenou šipku. Tento postup se častěji objevoval u žáka ve třetím ročníku než u žáků ve druhém ročníku.



Obr. 15: Řešení Vladana *Nevyplněné pavučiny* pomocí strategie pokus – omyl



Obr. 16: Řešení Vladana *Základní úlohy* pomocí strategie pokus – omyl

Druhou nejčastěji používanou řešitelskou strategií byl pokus – omyl, který je ilustrován na obrázku 15 a 16. S tím jsem se v žákovských řešeních mohla setkat ve dvou podobách. V první nejprve k šipkám doplnili náhodně vybraná čísla a poté doplňováním chybějících čísel v kolečkách kontrolovali, jestli jim pavučina vychází. S tímto postupem jsem se mohla setkat například během řešení Vladislava, Vlasty nebo Viléma. Pokud zjistili, že jim nevychází, vrátili se zpátky k šipkám a náhodně změnili jejich hodnoty. V druhé žáci nedokázali sami experimentovat. Potřebovali, abych s nimi postupnými otázkami došla od náhodného výběru čísla ke kontrole pavučiny.

Samostatně nebyli schopni nejen experimentovat, ale i vůbec úlohu vyřešit. Tento řešitelský postup jsem označila jako řízený pokus – omyl a objevil se například u Vladana nebo Vlasty. Žáci pomocí těchto dvou strategií řešili úlohy *Nevyplněná pavučina* a *Základní úloha*. V obou případech doplňovali čísla do koleček stejně jako u předchozího řešitelského postupu. Tyto strategie byly opět použity jak u žáků v druhém tak i v třetím ročníku.

Další strategií, kterou žáci používali v úloze *Seznamování s prostředím,* bylo doplnění prázdného kolečka dopočítáním přes šipky. Žáci na základě pokládaných otázek ze scénáře řešili úlohu většinou od levého horního kolečka, ve kterém bylo zadáno číslo tři. Přes červené šipky, které přičítali hodnotu jedna, došli k prázdnému kolečku a pomocí operace sčítání vyřešili a dopsali hledané číslo (číslo šest). Jednotlivé řešitelské strategie jsou přehledně shrnuty v tabulce na obrázku 19 uvedené na konci kapitoly.

Strategie pokus – omyl ať už v jakékoliv podobě byla v prostředí Pavučin využívaná spíše žáky druhého ročníku, kteří na první pohled neobjevili spojitost mezi úlohami. Většina z nich ale nedokázala experimentovat samostatně, a proto potřebovali moji slovní podporu. Velmi ojediněle se objevovalo, že by žák přešel ze strategie pokus – omyl na jinou strategii. Nejčastěji žáci přecházeli od náhodného výběru čísel k výběru čísel na základě předchozích pokusů. Žáci ale nenacházeli vztahy mezi čísly, ve kterých by si například řekli, že červená šipka musí být menší nebo větší. Pouze zkoušeli různá čísla, která se většinou pohybovala v rozmezí jedna až pět a snažili se vyvarovat těm, které už použili. Žáci nepřecházeli na složitější řešitelské strategie. Většina z nich řešila všechny úlohy v rámci jednoho prostředí stejnou strategií, kterou si na začátku vybrali. Neochota experimentovat se výrazně projevila pouze u jedné žákyně z celého výzkumného vzorku, která nedokázala vyřešit samostatně ani s dopomocí úlohy z prostředí Pavučin. Přesto, že jsem se ji několikrát snažila navést k tomu, aby začala experimentovat, tak toho nebyla schopna. Žáci ve druhém ročníku byly méně ochotni experimentovat než žáci ve třetím ročníku. Ve druhém ročníku žáci nevěděli, jak úlohu řešit, a proto začali zkoušet náhodně k šipkám dosazovat čísla. Často se ale při řešení ztratili a nevěděli co poupravit, aby jim pavučina vycházela. Žáci ve třetím ročníku zvládali lépe experimentovat a jejich jednotlivé pokusy vedly velmi rychle ke správnému výsledku.

Mezi nejčastější chyby patří nedodržení pravidla pavučiny, že stejně barevné šipky musí přičítat stejné číslo. Žáci někdy dosazovali ke každé šipce jiné číslo, přestože jsem se v úloze *Seznamování s prostředím* ptala konkrétně na tuto problematiku (viz kapitola 2.6.1). Chybné řešení si buď opravili sami, protože zjistili, že jim pavučina nevychází nebo jsem je k tomu postupnými otázkami musela dovést. Další častou chybou bylo doplnění záporného čísla k šipce nebo použití operace odčítání (záleží na vnímání žáků), která směřuje k prázdnému kolečku a která by tedy měla hodnotu šipky přičítat. Tato chyba se nejvíce objevovala v *Základní úloze* v levé části pavučiny. Žáci, kteří řešili tuto část úlohy od kolečka s číslem devět, bez problému přičetli k číslu devět hodnotu žluté šipky (tři) a vyšlo jim číslo dvanáct. Pro žáky, kteří tuto část řešili přes červenou šipku, bylo objevit správné řešení náročnější. Místo, aby k číslu jedenáct přičetli hodnotu červené šipky (jedna), tak většinou odečítali. Zároveň v tuto chvíli vědomě začali používat záporná čísla, protože uváděli, že tady bude u šipky hodnota mínus jedna. V druhém ročníku se také velmi často objevovali numerické chyby. Někteří žáci správně doplnili hodnoty šipek, ale z důvodu špatně vypočítaných příkladů na sčítání a odčítání doplnili pavučinu chybně.

Během řešení jsem se setkala převážně v třetím ročníku s neobvyklými a zajímavými řešeními, které ale nedodržovala pravidla pavučiny, a proto byla brána jako chybná. Jedním takovým řešením bylo, kdy Viktor, Václav a Valentýn získali z úlohy *Seznamování s prostředím* dojem, že v pavučině se doplňuje vždy řada po sobě jsoucích čísel.

Tazatelka: Řekneš mi, jak jsi to řešil?

Viktor: Já jsem si to promíchal v hlavě, že tam chybí jedno jediný pís…číslo.

T: Jak to myslíš?

V: Jakože jak je tři, čtyři, pět a pak je teprve šest a pak sedm a osm

T: Jasně a že tam chybí ta šestka?

V: Mhm

Proto i v *Základní úloze* určili, že nejmenší číslo je sedm a od toho doplnili do ostatních koleček čísla od osmi do jedenácti nebo dvanácti. V rámci tohoto řešení ale nastaly právě dva momenty, kdy si žáci nevěděli rady. Nejprve nevěděli, do jakých koleček v *Základní úloze* dopsat jaké číslo z číselné řady. Nakonec většinou postupovali podle toho, kam ukazují červené šipky. Druhý problém byl u levého horního kolečka. Někteří žáci si totiž mysleli, že číselná řada bude končit číslem jedenáct. Když jsem se jich ale zeptala, kam směřuje červená šipka a vyzvala jsem je, aby se podívali na ostatní šipky v pavučině, tak si uvědomili, že tam bude číslo dvanáct. V další netypické řešitelské strategii Vlastimil sčítal stavy a barevné šipky, které směřovaly právě od těchto stavů k prázdnému kolečku a jejich součet dělil počtem šipek, které sečetl.

Tazatelka: Napadlo by tě, jak by se tam mohlo doplnit to číslo?

Vlastimil: Že se musí sečíst tady to šest, šest a šest a ty tři šestky se musí vynásobit na tři, a to je dvanáct… osmnáct. Takže tady bude osmnáct.

T: Takže teď ještě jednou, jak jsi myslel to, že tady…Tři a tři je šest, dva a čtyři je šest a pět a jedna je šest, a to vynásobím těmi třemi šipkami.

V: Jo.

Například v úloze *Seznamování s prostředím* došel k hledanému číslu tak, že přičetl žlutou šipku k levému hornímu kolečku, modrou k levému spodnímu kolečku a červenou k spodnímu prostřednímu kolečku. Všechny součty se rovnaly číslu šest, které ještě vynásobil třemi (počtem sečtených šipek a stavů). Do prázdného kolečka pak chtěl doplnit číslo osmnáct, ale po výzvě, aby si zkontroloval, jestli to takto funguje v celé pavučině, si uvědomil, že toto řešení je chybné.

Na závěr bych chtěla zmínit řešitelské strategie nadaného žáka z prvního ročníku (Vavřince). Překvapilo mě, že Vavřinec dokázal velmi rychle získat vhled do úlohy a objevit pravidla prostředí. U úloh z prostředí Pavučin dokázal správně říct, jak se čísla do pavučiny doplňují, ještě před tím, než jsem se ho stihla zeptat na připravené otázky ze scénáře. Navazující úlohy pak řešil na základě zkušeností z předchozí úlohy, ze kterých si pamatoval hodnoty šipek. Ty pak úplně stejně jako žáci druhého a třetího ročníku doplnil k šipkám jak v *Nevyplněné úloze* tak i v *Základní úloze*. Následně pomocí šipek dopočítal nevyplněná kolečka. První tři úlohy z prostředí Pavučin zvládl vyřešit velmi rychle.

Tab. 3: Tabulka řešitelských strategií žáků – četnost užití dané řešitelské strategie u úloh z prostředí Pavučin

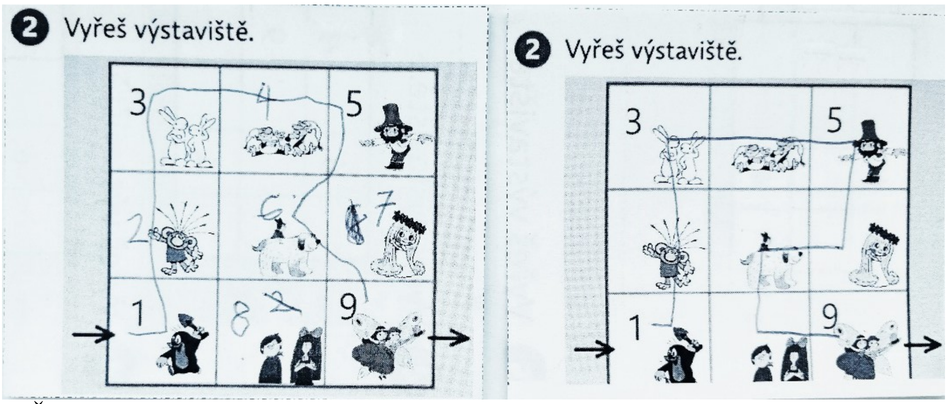
		prostředí Pavučiny		
řešitelské strategie	*ročník*	*Seznamování s prostředím*	*Nevyplněná pavučina*	*Základní úloha**
pokus – omyl	2.ročník	-	3 žáci	2 žáci
	3.ročník	-	2 žáci	1 žák
řešení přes hodnoty šipek	2.ročník	9 žáků	-	-
	3.ročník	6 žáků + 1 žák**	-	-
řešení na základě zkušeností z předchozí úlohy	2.ročník	-	4 žáci	5 žáci
	3.ročník	-	6 žáci + 1 žák	7 žáků + 1 žák
řízený pokus – omyl	2.ročník	-	2 žáci	2 žáci
	3.ročník	-	-	1 žák
doplnění číselné řady	2.ročník	-	-	-
	3.ročník	3 žáci	2 žáci	1 žák
sčítání šipek a stavů a jejich násobení	2.ročník	-	-	-
	3.ročník	1 žák	-	-

* *Úloha pro rychlíky* a *Úloha pro super-rychlíky* byla zadaná pouze jednomu žákovi z druhého ročníku, který v ní byl neúspěšný, a proto dalším žákům už předložena nebyla.

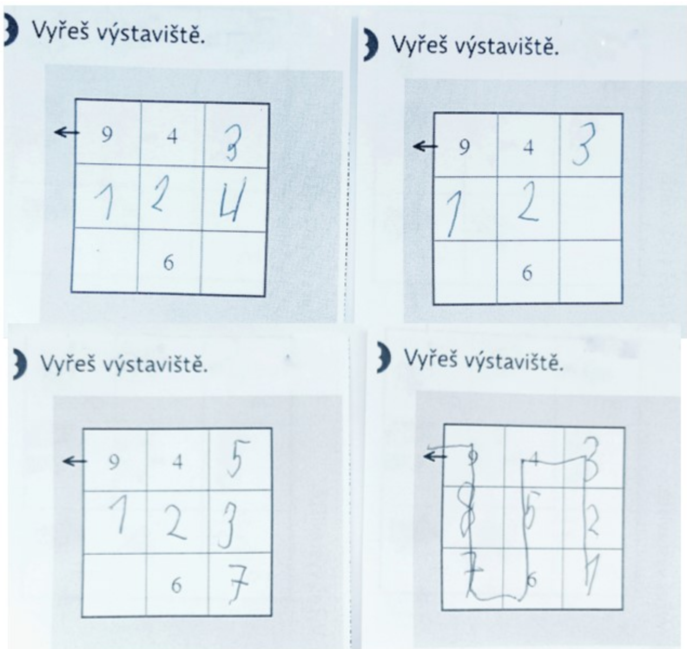
** Nadaný žák

2.8.2 Výstaviště

Základní řešitelskou strategií a zároveň nejčastěji používanou v prostředí Výstavišť byl pokus – omyl (viz obr. 17 a 18). Žáci zkoušeli postupně doplňovat vždy nějakou část číselné řady do výstaviště (např.: první tři čísla), která se objevila v řešení všech žáků. Vybraná čísla napsali do místností, kam si mysleli, že patří. Následně kontrolovali, jestli jsou takto dosazená čísla správně a jestli by mohli pokračovat dál. Pokud zjistili, že toto řešení není správné, vrátili se znovu na začátek a zkoušeli čísla dosadit do jiných místností. Pokud jejich řešení bylo správně, pokračovali v řadě čísel dál a opět se zase pomocí strategie pokus – omyl snažili doplnit další čísla do nevyplněných místností. V *Nevyplněné úloze* žáci své řešení začínali doplněním čísla dvě mezi čísla jedna a tři. Poté číslo čtyři. Největší problém jim dělalo objevit, kam mají doplnit čísla od šesti do osmi. V této části se nejčastěji objevovaly chyby, které jsou popsány v dalším odstavci. V *Základní úloze*, kde není zadán vstup, žáci úlohu řešili náhodným určením vstupu do výstaviště, na základě kterého pak doplnili první tři čísla do výstaviště. V dalším kroku pak posuzovali, jestli lze řešit úlohu dál nebo byl jejich pokus nevyhovující zadání.



Obr. 17: Řešení úlohy *Seznamování s prostředím* strategií pokus – omyl



Obr. 18: Řešení úlohy *Základní úlohy* strategií pokus – omyl

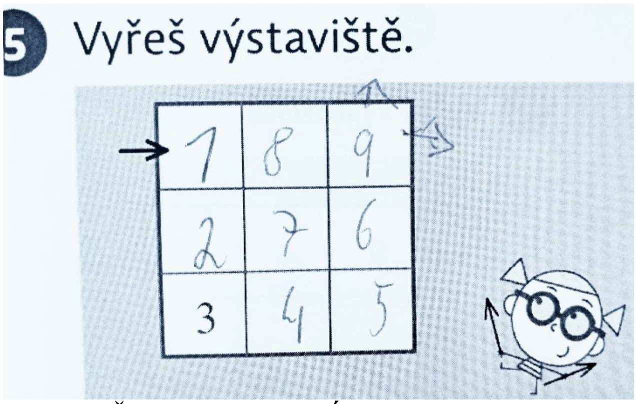
Vlasta, Vítek, Viktor, Vincent a Valentýn během řešení často střídali strategie pokus – omyl s řešitelskou strategií, ve které doplňovali čísla do jednoznačné části výstaviště. Žáci většinou začali úlohu řešit pomocí strategie pokus – omyl a když se dostali k části výstaviště, kde viděli, že tam nic jiného doplnit nejde, tak dosadili dané číslo. Myslím si, ale že tady je otázka, jestli si žák byl vědom toho, že tam nelze doplnit jiné číslo. Někteří žáci si to uvědomovali, protože i slovně okomentovali, že tam nic jiného dosadit nejde. Jiní se ale k tomu nevyjadřovali a v závěrečném popisu postupu řešení, nebylo jasné, jestli si uvědomovali, že na tuto pozici nic jiného dosadit nejde. Někteří žáci si do výstaviště doplnili čísla do jednoznačných částí a až poté ji začali řešit strategií pokus – omyl. Přechod mezi strategií pokus – omyl a doplňováním čísel do jednoznačných částí se objevilo v *Nevyplněném výstavišti*, *Základní úloze* i *Úloze pro super-rychlíky*.

Další tentokrát heuristickou strategií, která se ale v žákovských řešeních objevovala například u Veroniky, Venduly nebo Viktora byla cesta zpět. Žáci někdy ve výstavišti hledali nejnižší zadané číslo a od něho se pak snažili doplnit čísla z číselné řady, která šla ale od nejnižšího zadaného čísla ve výstavišti k nejnižšímu číslu, které se ve výstavišti může vyskytnout a které nemusí být zadané, což je číslo jedna. Stejně jako u předchozí řešitelské strategie, tak i tady žáci plynule přecházeli od tohoto postupu řešení ke strategii pokus – omyl a zpátky. Všechny strategie jsou shrnuty na konci kapitoly v tabulce 4.

Žáci v tomto prostředí mnohem častěji používali při řešení úloh strategii pokus – omyl, během které nepotřebovali žádnou dopomoc ani slovní podporu. Ochota experimentovat byla u žáků ve druhém a třetím ročníku stejná. Žáci z obou ročníků spontánně používali metodu pokus – omyl. Oproti prostředí Pavučin byli žáci v těchto úlohách schopnější přecházet od jedné řešitelské strategie ke druhé.

V úlohách z prostředí Výstavišť se neobjevovaly tak zásadní chyby jako u pavučin. Přesto ale docházelo k nedodržení některých pravidel výstaviště. Nejčastější chybou, která se objevovala převážně pouze u úloh *Nevyplněné výstaviště*, bylo, že si žáci nevšimli, že jsou některé místnosti už označeny čísly. V rámci této chyby se pak objevily dva postupy. V prvním žák zakreslil do výstaviště pouze cestu a nevšiml si, že tam jsou nějaká čísla. Následně jsem ho na to musela upozornit a vyzvat ho, aby si výstaviště podle těchto čísel poupravil. V druhém žák začal doplňovat různě čísla a během řešení si sám všiml, že už jsou tam nějaká čísla doplněná a své řešení si podle toho poupravil. Další častá chyba byla, že žáci přecházeli přes rohy místnosti. Na to jsem je musela upozornit a vysvětlit jim, že je to pravidlo, které budeme v těchto úlohách dodržovat. Méně časté chyby byly, že žáci procházeli místnostmi víckrát nebo určili vstup či výstup z výstaviště uprostřed.

Škála zajímavých a netypických řešení v prostředí Výstavišť je oproti prostředí Pavučin velmi malá. Většina žáků používala strategii pokus – omyl doplněnou o jiné řešitelské strategie. Nejzajímavějším řešením bylo řešení *Úlohy pro super-rychlíky* u Vladana z druhého ročníku, které blíže přibližuje obrázek 19 a který jako dvě odlišná řešení u úplně stejně vyplněného výstaviště viděl v tom, kde zakreslíme výstup.



Obr. 19: Řešení Vladana *Úlohy pro super-rychlíky*

Další zajímavostí v tomto prostředí bylo řešení Václava z třetího ročníku, který v každém výstavišti potřeboval spojit vchod a východ z výstaviště (obr. 20).

Obr. 20: Řešení Václava úlohy *Seznamování s prostředím*

Vždy své počínání komentoval slovy, že se musíme vrátit na začátek, abychom mohli vyjít ven. Tento žák nepočítal s možností, že by „budova“, ve které je „muzeum“ mohla mít dvoje dveře.

Na závěr této kapitoly ještě popíši řešení nadaného žáka z prvního ročníku. V prostředí Výstavišť řešil úlohy metodou pokus – omyl. Stačilo mu ale pouze pár experimentů, pomocí kterých zvládl objevit správné řešení. Žák používal metodu pokus – omyl samostatně bez jakékoliv dopomoci ale pouze u úloh z prostředí Výstavišť. Během řešení přecházel od strategie pokus – omyl k dalším řešitelským strategiím opět pouze v prostředí Výstavišť. V úlohách přecházel mezi jednotlivými strategiemi (např.: strategie doplnění čísla do jednoznačné části výstaviště) a opakovaně se vracel k strategii pokus – omyl. V prostředí Pavučin používal pouze jednu již zmíněnou strategii.

Tab. 4: Tabulka řešitelských strategií žáků – četnost užití dané řešitelské strategie u úloh z prostředí Výstavišť

		*prostředí Výstaviště**			
řešitelské strategie	*ročník*	*Nevyplněné výstaviště*	*Základní úloha*	*Úloha pro rychlíky*	*Úloha pro super-rychlíky*
pokus – omyl	2.ročník	9 žáků	9 žáků	6 žáků	5 žáků
	3.ročník	10 žáků + 1 žák**	10 žáků + 1 žák	9 žáků + 1 žák	6 žáků + 1 žák
doplnění čísel do jednoznačné části	2.ročník	-	-	-	-
	3.ročník	-	1 žák	5 žáků	3 žáci
cesta zpět	2.ročník	-	3 žáci	1 žák	-
	3.ročník	-	3 žáci	1 žák	-
dva východy z místnosti	2.ročník	-	-	-	1 žák
	3.ročník	-	-	-	-

* Někteří žáci během řešení jedné úlohy z prostředí Výstaviště použili více strategií.

**Nadaný žák

2.9 Souhrn

V praktické části byly na začátku položeny čtyři výzkumné otázky, které blíže specifikovaly zaměření výzkumu. Získaná data a zpracované výsledky reagují na výzkumný cíl praktické části diplomové práce a stanovené otázky.

První výzkumnou otázkou, kterou jsem si kladla, bylo, jak žáci budou postupovat během řešení úloh pomocí strategie pokus – omyl. Chtěla jsem zachytit a popsat jednotlivé kroky této strategie, které se budou vyskytovat v žákovských řešeních. Ze získaných výsledků jsem zjistila, že se postup při řešení strategií pokus – omyl liší podle didaktického prostředí (Pavučiny, Výstaviště). U úloh z prostředí Pavučin žáci experimentovali nejčastěji s čísly u šipek a přes ně pak dopočítávali hodnotu prázdných koleček. Při nezdařilých pokusech se opět vraceli k šipkám a měnili hodnotu jedné, dvou nebo někdy i všech šipek najednou. Používání strategie pokus omyl byl pro ně ale u tohoto typu úloh velmi náročný, a proto potřebovali během něho slovní podporu. Tento postup, který byl doplněn o částečnou dopomoc, jsem nazvala řízený pokus – omyl (viz kapitola 2.8.1). V této podobě byla strategie pokus – omyl nejvíce používaná. Postup při řešení strategií pokus – omyl úlohy z prostředí Výstavišť se lišil, protože obě prostředí mají jinou strukturu a jiná pravidla. V tomto prostředí žáci postupovali během řešení tak, že postupně dosazovali vždy část čísel do výstaviště a kontrolovali správnost výsledku. Pokud řešení bylo chybné, tak znovu hledali možnost jiného umístění vybraných čísel. Řešení strategií pokus – omyl byl u prostředí Výstavišť mnohem přirozenější a pro žáky jednodušší než v prostředí Pavučin. Jednotlivé pokusy u výstaviště vedly mnohem rychleji ke správnému řešení. Žáci během něho dělali mnohem méně chyb. Zatímco v pavučinách se často při řešení touto strategií v postupu ztratili a nevěděli, jak mají dál pokračovat. Také užití strategie pokus – omyl bylo u úloh z prostředí Výstaviště méně časově náročné než u úloh z prostředí Pavučin.

Další výzkumná otázka velmi úzce souvisí s předchozí. V této výzkumné otázce jsem chtěla zjistit, jestli jsou žáci schopni strategii pokus – omyl používat samostatně. Z jednotlivých experimentů bylo zjištěno, že žáci v druhém ročníku nejsou skoro schopni používat strategii pokus – omyl samostatně. Pouze pár jedinců použilo tuto strategii při řešení pavučin, aniž by potřebovali nějakou dopomoc. Většina žáků v druhém ročníku, kteří strategii pokus – omyl použili, následně požádali o dopomoc, bez které by úlohy nebyli schopni vyřešit. Ve třetím ročníku byli žáci schopnější a ochotnější používat strategii pokus – omyl u úloh z prostředí pavučin samostatně bez jakékoliv dopomoci. V prostředí Výstavišť už nebyly žádné rozdíly v samostatném používání strategie pokus – omyl v druhém a třetím ročníku. V obou třídách žáci řešili úlohy pomocí této strategie samostatně. Výsledky poukázaly na vhodnost prostředí pro strategii pokus – omyl. Jako podnětnější a jednodušší prostředí pro použití této strategie u žáků z druhého a třetího ročníku se ukázalo prostředí Výstaviště. Tím, že prostředí Pavučin musí žáci řešit ve dvou úrovních (úroveň koleček a šipek), tak je pro ně náročnější experimentovat v těchto dvou rovinách.

Dále jsem se zabývala výzkumnou otázkou, kdy žáci začínají přecházet od strategie pokus – omyl k jiným strategiím. Výsledky poukazují na to, že přechod žáků k jiné strategii není v tak malém časovém úseku v rámci pár úloh běžný. Žáci spíše zůstávali u své strategie, kterou poupravovali podle získaných zkušeností. V prostředí Pavučin se změna strategie v rámci jedné úlohy neobjevovala vůbec v žádném ze sledovaných ročníků. V prostředí Výstavišť byly patrné přechody mezi jednotlivými použitými strategiemi. Žáci často začínali řešit úlohu strategií pokus – omyl, a poté potupovali tak, že mezi jednotlivými strategiemi přecházeli a v průběhu řešení se vraceli zpátky k původní strategii (strategie pokus – omyl). Žádné zásadní přechody od strategie pokus – omyl k složitějším (heuristickým) strategiím vidět nebyly, ačkoliv jsem předpokládala, že se alespoň u pár žáků takovýto postup objeví.

V neposlední řadě jsem si stanovila, že bych ráda zjistila, jaké jiné řešitelské strategie bude žák při řešení používat. Zde bych uvedla pouze jejich výčet, protože bližší popis je v kapitole 2.8. Mezi jednu z nejčastěji používanou strategii v prostředí Pavučin byla strategie, kde žáci doplňovali čísla do pavučiny podle toho, jak si je pamatovali z předchozí úlohy. Další řešitelská strategie, která byla použita v pavučinách, vedla k chybnému řešení. Žáci úlohu *Seznamování s prostředím* řešili už od začátku sečtením hodnot šipek a jejím následným vydělením. Po výzvě, aby si zkontrolovali, jestli tato strategie lze aplikovat v celé pavučině, objevili, že to není vhodná strategie. Další strategie, která se v tomto prostředí objevila, bylo dosazování čísel do pavučiny na základě po sobě jdoucích čísel z číselné řady. V prostředí Výstavišť nebyla škála dalších řešitelských strategií tak pestrá. Žáci hlavně řešili úlohy pomocí strategie pokus – omyl. Pouze u pár žáků jsem zaznamenala jiný postup. Mezi další strategie, které žáci používali v prostředí Výstaviště, byla cesta zpět nebo dosazení čísel do jednoznačné části výstaviště.

Z výsledků výzkumu bylo zjištěno, že žáci ve třetím ročníku byly ochotnější samostatně používat strategii pokus – omyl. Zároveň prostředí Výstavišť bylo pro zmíněnou strategii vhodnější než prostředí Pavučin. Zároveň žáky více bavilo řešit úlohy z prostředí Výstaviště, u kterých byl velký zájem o úlohy navíc. Radost ze samostatně vyřešené úlohy a objevení zákonitostí prostředí bylo více vidět také u prostředí Výstavišť. Bohužel v prostředí Pavučin byli zvláště žáci druhého ročníku někdy při řešení úloh tak zmateni tím, že neustále znovu počítali, škrtali a přepisovali šipky i stavy, že nezjistili, že již objevili správné řešení, a proto z toho ani neměli takovou radost. V prostředí Výstavišť naopak ale pak bylo vidět nadšení žáků v druhé i třetím ročníku po každém správně vyplněném výstavišti.

2.10 Závěr

Tématem diplomové práce bylo sledovat používání strategie pokus – omyl při řešení úloh ze strukturálního prostředí Pavučiny a Výstaviště. Experiment byl zadáván žákům z druhého a třetího ročníku na prvním stupni na dvou odlišných základních školách, kteří jsou vzděláváni běžnou metodou výuky matematiky. V teoretické části jsem na začátku vymezila pojem heuristické strategie, popsala jejich zařazení v hodinách výuky matematiky a uvedla jsem jejich výčet. Vybrané heuristické strategie jsem blíže popsala. V diplomové práci jsem se hlavně zaměřila na strategii pokus – omyl, která byla klíčovou kapitolou teoretické části a na kterou navazovaly kapitoly zabývající se prací s chybou a experimentováním dítěte nejen ve škole. Dále se teoretická část zabývala vymezením didaktických prostředí a popisem dvou vybraných strukturálních prostředí. V rámci této kapitoly jsem považovala za důležité vymezit Hejného metodu výuky matematiky, v rámci které jsou didaktická prostředí používána. Na závěr jsem uvedla rozložení učiva v druhém a třetím ročníku na prvním stupni základního vzdělávání a uvedla očekávané výstupy z Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání, které byly důležité pro praktickou část diplomové práce.

V rámci praktické části byly stanoveny výzkumné cíle, otázky, metody a strategie, které byly použity během realizace experimentu. Praktická část sledovala jednotlivé řešitelské strategie žáků. V rámci jednotlivých úloh z vybraných prostředí jsem mapovala, jak postupují při jejich řešení a jaké strategie k tomu využívají. Během experimentů jsem se zaměřovala na strategii pokus – omyl a její použití u žáků na prvním stupni. Tato oblast je zatím na prvním stupni základních škol velmi málo prozkoumaná, a proto bylo těžší v praktické části navazovat na již realizované výzkumy. Díky zpracování teoretických východisek diplomové práce jsem ale měla možnost nahlédnout na dané téma z pohledu některých českých ale i zahraničních autorů, kteří se zabývali jednotlivými tématy.

Ve výzkumu byla použita výzkumná metoda nestrukturovaného pozorování a metoda verbálních výpovědí. V praktické části jsem analyzovala vyřešené úlohy. Zároveň jsem si společné rozhovory se souhlasem zaznamenávala na audionahrávku, ke které jsem se vracela při zpracování dat. Žáci během řešení používali různé strategie. Během realizace se ukázalo, jak je potřebné výuku individualizovat, protože i když každý žák dostal stejné instrukce, tak jeho reakce a řešitelské strategie se od ostatních žáků lišily. Velmi užitečné také bylo vidět, že žáci nad položenými otázkami přemýšlejí úplně jinak a že je důležité si otázky opravdu promyslet. Například na pro mě celkem jednoznačnou otázku: *„Jaké druhy šipek vidíš v pavučině?“* žáci odpovídali velmi odlišně. Někteří se zaměřili, jak jsem předpokládala, na barvu šipek, ale dále pak říkali délku šipek, pozici šipek, směr šipek atd.

Výsledky pak ukázaly, že použití strategie pokus – omyl je v úlohách z prostředí Pavučin velmi malé. Zároveň ale ukazuje širokou škálu řešitelských strategií, které jsou ale i nejsou popsány v odborných publikacích a které vedou ke správnému nebo v některých případech i chybnému řešení. Propojení teoretických východisek a výsledků výzkumu poukazuje na to, že častější používání strategie pokus – omyl docílíme tím, že budeme s žáky v hodině experimentovat, budeme do hodiny vnášet podnětné úlohy vhodné k experimentování a budeme ve třídě vytvářet bezpečné prostředí, kde se nebudou bát projevit a kde bude chyba vítána.

Během výzkumu jsem si uvědomila, jak velký rozdíl byl v ochotě experimentovat u žáků ve druhém a třetím ročníku. Ze zjištěných výsledků bohužel nelze přesně určit, čím bylo toto chování žáků způsobeno. Jedním z možných důvodů by mohl být samotný učitel, který svým přístupem může ovlivnit ochotu a chuť žáka řešit úlohy pomocí experimentu. Této problematice se velmi okrajově věnuje kapitola 1.6. Dalším možným faktorem, který by pravděpodobně mohl ovlivnit ochotu žáka experimentovat, je věk. Žáci ve třetím ročníku chodí do školy déle, a tudíž se předpokládá, že budou mít více zkušeností s řešením úloh.

Za velmi užitečné považuji v rámci výzkumu použití výzkumné metody verbálních výpovědí. Díky ní bylo možné alespoň částečně odhalit, jak nad úlohou přemýšleli a jak žáci postupovali během řešení úlohy. Ve spojení s audio záznamem a analýzou žákovských řešení bylo možné poodhalit problematiku řešitelských strategií, které žáci na prvním stupni používají při řešení úloh z prostředí, které neznají. Zároveň i tato výzkumná metoda měla některá omezení, blíže jsou specifikovaná v následující kapitole.

2.11 Omezení výzkumu

Realizovaný výzkum měl několik omezení. Jedno z nich bylo v rámci vybraných výzkumných metod. Nestrukturované pozorování a metoda retrospektivních verbálních výpovědí byla založena především na verbalizaci žáka svého postupu. Ve výzkumu jsem se snažila zjistit, jak žáci úlohu řeší, což jsem mohla částečně zjistit z jejich písemných projevů. Hlavní část tohoto procesu se ale odehrávala během myšlenkových pochodů v hlavě žáka, které jsem nemohla jako pozorovatel sledovat. V této chvíli jsem byla omezena pouze na to, jak žáci slovně vyjádřili své myšlenky a popsali postupy při řešení. Během popisu mohl žák své řešení přehodnotit a poupravit, čímž mohl sám zkreslit výsledky výzkumu. Žáci také mnohdy byli méně ochotní sdělovat své myšlenky, proto jsem se jich ptala a někdy se snažila co nejpřesněji shrnout a zopakovat to, co mi řekli. Je ale možné, že mi někdy žáci odkývali postup, který se úplně neshodoval s jejich řešitelskou strategií. Zda žáci zvládali verbalizovat své myšlenky bylo do značné míry ovlivněno přístupem paní učitelky. Vyučovací styl a osobnostní charakteristika paní učitelky svým způsobem také ovlivnila výsledky výzkumu, protože její dlouhodobé působení na žáky ovlivnilo jejich přístup k řešitelským strategiím a k používání experimentování. Tato problematika je částečně popsaná v kapitole 1.6.

Dalším omezením této diplomové práce byl sestavený scénář a zadávané úlohy, které byly vybrané a předkládané tak, aby respektovaly cíl výzkumu. Jiné výsledky by přinesl výzkum, který by použil jiná prostředí nebo jiné úlohy z daných prostředích. Výzkum byl také specifický tím, že pracoval s úlohami z Hejného metody. Použití úloh z běžné metody výuky matematiky by žáky směřovala k jiným řešitelským postupům a zaměřovala by jejich pozornost na jinou problematiku. Výzkum by měl jiné výsledky.

Určitým omezením byl i vybraný výzkumný vzorek a jeho velikost. Výzkum byl realizován na základních školách, které nebyly vybrány podle žádného kritéria. Školy se nacházely v okresním městě v Jihočeském kraji, kde se s Hejného metodou výuky matematiky pracuje pouze na jedné základní škole a kam se inovace ve vzdělávání dostávají pomaleji než například v Praze. Jiné výsledky a řešitelské postupy by se objevovaly na školách v jiných městech nebo krajích. Zároveň jsem spolupracovala s menšími školami. Odlišné výsledky by přinesly větší školy, malotřídní školy atd. Výzkum byl také omezen z hlediska počtu sledovaných žáků. Menší výzkumný vzorek poskytl méně rozmanitou škálu řešitelských strategií. Myslím si, že pokud by byl výzkum realizován na větším výzkumném vzorku, odhalil by širší pohled na danou problematiku a výsledné závěry by bylo možné více zobecnit. Zároveň by ale větší výzkumný vzorek mohl způsobit méně detailní zaměření na jednotlivé řešitelské postupy.

Zároveň ačkoliv jsem se snažila nestranně a objektivně zaznamenávat a zpracovávat výsledky, mohlo dojít k subjektivní interpretaci získaných dat. Tomu jsem se snažila předejít tím, že jsem pozorovala, jak jednotlivé úlohy vyplňují a jak zapisují výsledky. Řešitelské postupy žáků jsem si zaznamenávala ještě na audio, aby nemohlo dojít k tomu, že bych některé detaily zapomněla, vynechala nebo nevědomě poupravila. Během zpracovávání výsledků jsem se k těmto záznamům několikrát vracela a snažila jsem se přesně přepsat jednotlivé kroky při řešení tak, aby se co nejpřesněji shodovaly s popisem žáků.

V neposlední řadě vidím také jako omezení to, že jsem žáky viděla během realizace experimentu poprvé. U některých žáků totiž bylo vidět, že se během výzkumu styděli a odpovídali velmi váhavě. V důsledku toho mohlo dojít k nedorozumění během popisu postupu a zároveň bylo těžké od žáků získat odpovědi na pokládané otázky, proto jsem nevěděla, jestli úlohu pochopili. Z toho důvodu mohly být výsledky nepřesné. Výzkum, který by pracoval s žáky, kteří znají výzkumníka by mohl přinést odlišné závěry.

Na závěr bych chtěla uvést, že určitým omezením byla i pandemie Covid-19, která určitým způsobem ovlivnila nejen charakter výzkumu, ale také jeho výsledek. Z důvodu uzavření škol na jaře a na podzim v roce 2020 a 2021. Nejen že jsem neměla možnost realizovat výzkum dlouhodoběji nebo na větším výzkumném vzorku, jehož výsledky by přinesly mnohem širší a obecnější pohled na danou problematiku, zároveň to ale ovlivnilo reakce žáků. Žáci v druhém ročníku totiž většinu první třídy strávili na online výuce, kde neměla paní učitelka možnost s nimi tolik pracovat. Žáci třetího ročníku sice strávili půl roku normálně ve škole, ale poté museli přejít na online výuku. Myslím si, že pokud bych pracovala s žáky, kteří nezažili online výuku, byla by získaná data a objevené výsledky jiné. U žáků v druhém ročníku se například objevovaly časté numerické chyby, které ovlivňovaly jejich řešitelskou strategii. Paní učitelka to komentovala slovy, že během výuky hodně záleželo na tom, jak spolupracovali rodiče. V třetím ročníku nebyly sice početní chyby tak výrazné, ale opět paní učitelka sama uváděla, že distanční výuka ovlivnila žáky v různých směrech.

2.12 Přesah výzkumu

Výzkum realizovaný v rámci této diplomové práce by mohl být rozšířen o další, který by detailněji a dlouhodoběji sledoval jednotlivé žáky a paní učitelky. Cílem by bylo hlouběji prozkoumat problematiku používání nejen strategie pokus – omyl, ochotu experimentovat a zaměřit se na faktory, které ovlivňují ochotu experimentovat. Zároveň by bylo přínosné zaměřit se detailněji na jiné řešitelské strategie. Další výzkum, který by mohl navazovat na výsledky této práce, by se mohl zabývat zkoumáním různých didaktických prostředí a použití strategie pokus – omyl a dalších heuristických strategií v nich. Velmi užitečné pro práci učitele by bylo zjistit, jestli jsou nějaká prostředí více podnětná pro řešitelskou strategii pokus – omyl nebo jestli v některých prostředích tuto strategii použít nelze. Výzkum by mohl navázat nejen na tuto diplomovou práci ale také na článek Eisenmanna, Přibyla a Novotné (2017), který popisuje výzkum zabývající se použitím heuristických strategií v závislosti na věku, ale který byl realizován u žáků na druhém stupni na základních školách a na středních školách. Dalším pokračováním by mohl být výzkum, který by porovnával užití strategie pokus – omyl u žáků, kteří jsou vzděláváni běžnou metodou výuky matematiky a Hejného metodou. Zároveň by bylo zajímavé se také zaměřit na používání strategie pokus – omyl v různých ročnících na prvním stupni na základních školách, což by mohlo poukázat na to, jestli různě staří žáci jsou stejně nebo různě ochotni experimentovat v hodinách matematiky. V neposlední řadě by mohl směr dalšího výzkumu sledovat řešitelské strategie u žáků, které učí učitelé s odlišnými učitelskými styly a různou dobou praxe. Jak jsem již zmiňovala v kapitole 2.10 a poté i v kapitole 2.11, učitelé svým působením a učitelský stylem ovlivňují řešitelské přístupy žáků k úlohám a jejich ochotu experimentovat. Proto mi přijde velmi užitečné a zajímavé zmapovat, do jaké míry učitel žáka v této problematice ovlivňuje a jestli lze žáka podnětnými otázkami nebo úlohami dovést k tomu, aby začal při řešení experimentovat. Jelikož tato strategie není tolik popsaná a zmapovaná v odborných článcích a výzkumech, je mnoho možností pokračování, jejichž východiskem by mohla být tato diplomová práce.

3 Zdroje

Seznam použité literatury a internetových zdrojů

BABUŠOVÁ, Gabriela. Učitelé a konstruktivismus ve výuce českého jazyka [online]. Didaktické studie. Praha: PedF UK, 2012, roč. 4, č. 2, s. 74-82. ISNN 1804-1221. [cit.12.6.2022]. Dostupné z: https://pages.pedf.cuni.cz/didakticke-studie/files/2014/02/Didaktick%C3%A9-studie-ro%C4%8D.-4-%C4%8D.-2-monotematick%C3%A9-%C4%8D%C3%ADslo-Sou%C4%8Dasn%C3%A9-pohledy-na-kl%C3%AD%C4%8Dov%C3%A9-vzd%C4%9Bl%C3%A1vac%C3%AD-oblasti-a-proces-u%C4%8Den%C3%AD.pdf#page=74

DOSTÁL, J. Experimentování žáků při výuce – nové možnosti a perspektivy. E-Pedagogium [online]. Univerzita Palackého, 2014, s.7-19. [cit.12.6.2022]. Dostupné z: https://e-pedagogium.upol.cz/pdfs/epd/2014/01/02.pdf

DOSTÁL, J. Badatelsky orientovaná výuka: Kompetence učitelů k její realizaci v technických a přírodovědných předmětech na základních školách [online]. Olomouc: Univerzita Palackého, 2015, 254 s. ISBN 978-80-244-4515-1. [cit.12.6.2022]. Dostupné z: https://www.researchgate.net/profile/Jiri-Dostal-4/publication/280247122_Badatelsky_orientovana_vyuka_Kompetence_ucitelu_k_jeji_realizaci_v_technickych_a_prirodovednych_predmetech_na_zakladnich_skolach_Inquiry-based_learning_competence_of_teachers/links/55af788608ae6aa568b3b8fb/Badatelsky-orientovana-vyuka-Kompetence-ucitelu-k-jeji-realizaci-v-technickych-a-prirodovednych-predmetech-na-zakladnich-skolach-Inquiry-based-learning-competence-of-teachers.pdf

EISENMANN, P., PŘIBYL, J., NOVOTNÁ, J…et al. Volba řešitelských strategií v závislosti na věku [online]. Scientia in educatione. 2017, 8 (2), 21-38. ISSN 1804-7106 [cit.12.6.2022]. Dostupné z: https://ojs.cuni.cz/scied/article/view/432/464

GAVORA, Peter. Výzkumné metody v pedagogice: příručka pro studenty, učitele a výzkumné pracovníky. Brno: Paido, 1996, 130 s. : 13 příl. ISBN 80-85931-15-X.

HEJNÝ, M. Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2014, 230 s. ISBN 978-80-7290-776-2.

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., KRATOCHVÍLOVÁ, J. Práce s chybou jako strategie rozvoje klíčových kompetencí žáka. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP : Studijní materiály k projektu* [online]. Praha : JČMF, 2006, ISBN 80-7015-097-1; 80-7015-085-8. [cit.12.6.2022]. Dostupné z: https://adoc.pub/prace-s-chybou-jako-strategie-rozvoje-kliovych-kompetenci-ak.html

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J., MICHNOVÁ, J., URBÁNEK, L., RAUNEROVÁ, D. Matematika pro 2. ročník základní školy. Plzeň: Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-768-7.

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., SLEZÁKOVÁ, J. ...et al. Matematika pro 3. ročník základní školy. Plzeň: Fraus, 2009, 112 s. ISBN 978-80-7238-824-0.

HOSKOVCOVÁ, S. Psychická odolnost předškolního dítěte. Praha: Grada, 2006, 160 s. ISBN 80-247-1424-8.

HOŠPESOVÁ, A. Badatelsky orientovaná výuka matematiky na 1. stupni základního vzdělávání [online]. Orbis scholae, 2016, roč. 10, č. 2, s. 117-130. [cit.12.6.2022]. Dostupné z: https://karolinum.cz/data/clanek/3566/6_Ho%C5%A1pesov%C3%A1.pdf

HOŠPESOVÁ, A., SAMKOVÁ, L. Skládaní tvarů jako podnět k badatelským aktivitám v geometrii na ZŠ. In: VONDROVÁ, Naďa (ed.). *Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let. Sborník příspěvků celostátní konference* [online]. Plzeň: Vydavatelský servis, 2012, s. 123-130. ISBN 978-80-86843-34-6. [cit.12.6.2022]. Dostupné z: https://www.pf.jcu.cz/structure/departments/kma/wp-content/uploads/2020/10/litomysl2011.pdf

CHRÁSKA, Miroslav. Základy výzkumu v pedagogice. Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého, 1993, 257 s. : tab., obr. ISBN 80-7067-287-0

KOPKA, J. Umění řešit matematické problémy. 1. vyd. Praha: HAV, 2013. 212 s. ISBN 978-80-903625-5-0

KOŤÁTKOVÁ, S. Hry v mateřské škole v teorii a praxi. Praha: Grada, 2005, 184 s. ISBN 80-247-0852-3.

NOVÁKOVÁ, H., NOVOTNÁ, J. Jak na to? Různé způsoby řešení slovních úloh. In: VONDROVÁ, Naďa (ed.). *Dva dny s didaktikou matematiky 2018. Sborník příspěvků* [online]. 1 vyd. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2018, s. 98-105. ISBN 978-80-7603-012-1. [cit.12.6.2022]. Dostupné z: https://pages.pedf.cuni.cz/sc25/files/2020/01/Jak-na-to-r%C5%AFzn%C3%A9-zp%C5%AFsoby-%C5%99e%C5%A1en%C3%AD-slovn%C3%ADch-%C3%BAloh.pdf

PAULL, D. R. The ability to estimate in mathematics [online]. Columbia University, Ed.D., 1971. [cit.12.6.2022]. Dostupné z: https://www.proquest.com/openview/34aed0ca2207b9198a113628e9d2a55c/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750&diss=y

SAMKOVÁ, L. Badatelsky orientované vyučování matematice v přípravě budoucích prvostupňových učitelů. In: UHLÍŘOVA, Martina (ed.) EME2016 Proceedings. *Primární matematické vzdělávání v souvislostech* [online]. Olomouc: Pedagogická fakulta UP, 2016, s. 9-14. ISBN 978-80-905281-3-0. [cit.12.6.2022]. Dostupné z: https://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/samkova/eme2016.pdf

SAMKOVÁ, L. Badatelsky orientované vyučování. In: ŠIMANDL, Václav (ed.). *Badatelsky orientovaná výuka matematiky a informatiky s podporou technologií* [online]. Č. Budějovice: Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta, 2015, s. 11-20. ISBN 978-80-7394-531-2. [cit.12.6.2022]. Dostupné z: https://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/samkova/gaju_komplet.pdf

Matematická gramotnost. In: *Metodický portál RVP* [online]. [cit.12.6.2022]. Dostupné z: https://wiki.rvp.cz/Knihovna/1.Pedagogick%C3%BD_lexikon/G/Gramotnost/Matematick%C3%A1_gramotnost

Didaktická prostředí. In: *Hejného metoda* [online]. [cit.12.6.2022]. Dostupné z: http://blog.h-mat.cz/didakticka-prostredi

12 klíčových principů metody. In: *Hejného metoda* [online]. [cit.12.6.2022]. Dostupné z: https://www.h-mat.cz/principy