

Posudek bakalářské práce 'Dělitelnost v okruzích', kterou v srpnu 2022 odevzdal na Katedře logiky FF UK Michal Ketner.

Posudek sepsal dne 24.8. 2022 Pavel Arazim.

Práce je matematického charakteru. Probírá různá zobecnění nebo pojetí dělitelnosti a zkoumá jejich vzájemné vztahy. Nejprve uvedu, co považuji za přednosti práce. Následují námitky, nejprve k jazykové úrovni práce, dále námitky věcného charakteru, námitky k celkové struktuře práce a poté několik zbývajících kritických poznámek. Končím celkovým hodnocením.

Silné stránky. Autor nejspíše zpracoval značné množství netriviální matematiky. S jistotou to ale tvrdit nemohu, protože práce je ve stávající podobě velmi obtížně čitelná a podané důkazy se špatně kontrolují. Ještě ale chvíli zůstanu u pozitiv. Domnívám se, že délka i matematická náročnost jsou na poměry bakalářské práce nadstandardní. Téma je navíc přitažlivé svou jednoduchou podstatou, protože jde o zobecnování dělitelnosti, tedy poměrně elementárního pojmu. Různé druhy zobecnění pojmu dělitelnosti a vztahy mezi těmito zobecněními jsou jistě nosné téma, na které by bylo možné napsat zajímavou práci. Dokonce se domnívám, že autor zajímavou práci napsat dokáže, ale musel by postupovat mnohem pečlivěji.

Námitky k jazykové úrovni práce. Tím se přesouvám ke svým výhradám. Především, že ačkoli autorovy prohršky nejsou příliš hluboké a zásadní, jejich množstvím způsobuje, že práce potřebuje zásadní revizi, aby byla obhajitelná. V první řadě zaráží celková jazyková úroveň. Nějaký překlep nebo kostrbatá formulace nemusejí mít na hodnocení vliv, ale v tomto množství a podobě činí všechny jazykové nedostatky text nečitelným a nesrozumitelným. Je příznačné, že v pořádku není už poděkování a abstrakt. Autor velmi nevhodnou hovorovou větou děkuje všem, 'kteří mě prováděli studiem a spousty mě toho naučili'. V následující větě je pak jméno školitele ve špatném pádu. V českých i anglických klíčových slovech se pak za dvojtečkou, asi vinou mylného zkopírování, objevují výrazy 'klíčová', resp. 'key'. Podobnými i horšími chybami se práce jenom hemží, takže je poměrně vzácné, když se čtenář dočká nepoškozené věty. Nemá smysl zahlcovat tento posudek dalšími příklady, autorovi mohu poskytnout poznámky, které jsem si do textu vepsal. Ovšem ani ve 152 poznámkách jsem nezachytil všechny jazykové ani věcné chyby. Některé systematicky se vyskytující chyby jsem přestal označovat, nějaké další mi nepochybně unikly. Přece jenom si ale neodpustím ještě zmínku o opakuji se chybě, která mě překvapila asi nejvíce. Vedle neúnosně dlouhých souvětí je v práci několikrát rozděleno souvětí skládající se z jedné věty hlavní a jedné věty vedlejší - typicky podmínkové - tečkou a takto vzniklé 'věty' jsou dokonce na různých řádcích. Tak se např. V důkazu lemmatu 3.2.3 na str. 41 píše:

Kdyby existovalo nějaké $r \in (a, b)$, které splňuje druhou podmínku Dedikena-Hesse normy.

Tak je to spor s výběrem našeho b .

Věcné chyby. Uvedený citát umožňuje plynule přejít k dalšímu druhu chyb, kterými autor znehodnocuje svou práci. Jde o překlepy, které jsou spíše věcné než čistě jazykové. Probíraný citát obsahuje chybu, která je trochu na pomezí mezi jazykovými a věcnými, protože jsou v něm zkomolena jména hned dvou matematiků. Zhruba ve dvou třetinách práce autor definuje pojem, který nazývá 'Dediken-Hasseho norma', někdy pak píše o 'Dediken-Hesseho normě'. Ve skutečnosti, jak lze snadno zjistit na Googlu, jde o

Dedekind-Hasseho normu. Ještě lze pochopit, že se několikrát vloudil překlep a z Hasseho se stal Hesse, ale je zvláštní, že potenciální absolvent oboru logika nenapíše ani jednou správně jméno tak významné postavy z dějin tohoto oboru jako byl Richard Dedekind. Nyní ale k překlepům a chybám, které klasifikuji jako jednoznačně více věcné než jazykové. Nejde tedy o situace, kdy autor omylem napíše nějaké slovo ve špatném tvaru, ale např. začne v průběhu důkazu označovat jako 'd' funkci, kterou předtím značil jako 'f'. V důkazu z lemmatu 2.1.1 se např. největší společný dělitel uvažované množiny naráz přejmenuje z 'e' na 'd' a 'e' se dokonce následně použije pro označení něčeho jiného.

V mnoha složitějších důkazech autor neříká, které části důkazu se právě věnuje, např. že se dokazuje základ indukce, implikace zleva doprava apod. Většinou si lze domyslet, co se děje, ale je to poněkud absurdní, zvláště v kontrastu s častým opakováním základních definic a triviálních faktů. Jen málokterý netriviální důkaz je zcela prost nejruznějších drobných chyb, což značně ztěžuje čtení. U opravdu náročnějších důkazů to pak už vede k tomu, že je v podstatě nelze zkontrolovat. Specifickou zajímavost představují záměny písmene 'O' a číslovky '0'. Věcně je tato záměna ještě relativně málo matoucí, ale přesto jde o nepochopitelnou nedbalost.

Někdy je zjevně nesprávné i znění lemmatu nebo věty. Např. V lemmatu 1.3.2 na straně 13 není uvedeno, že prvek b je prvočinitel. Přitom lemma přichází bezprostředně po definici prvočinitele a je jasné, že bez této podmínky tvrzení lemmatu nemůže platit. Podobně ve znění již probíraného lemmatu 2.1.1 není zmíněn patrně nutný předpoklad, že libovolná (nejspíše konečná) množina prvků má největšího společného dělitele. V důkazu se pak tento předpoklad používá. Definici 2.1.3 podmínky P ze strany 22 stojí za to ocitovat:

Definice 2.1.3 (Podmínka P)

Mějme obor integrity R . Pak každý ireducibilní prvek okruhu R je prvočinitel.

Kromě zajímavého kolísání mezi označováním R jako oboru integrity a jako okruhu (pro doplnění: obor integrity je zvláštní případ okruhu) zaráží, že z definice jaksi vypadlo to, co se má definovat, tedy podmínka P . V tomto případě se lze dovědět, co chtěl autor říci. Těžko ale věřit, že si po sobě práci přečetl.

V důkazech se také náhle objevují nijak neuvedené matematické objekty. Např. v důkazu 2.2.10 se začne mluvit o tom, co bude za jistých podmínek platit o 'a', které předtím nebylo nijak definováno. Celkový styl vyjadřování dobře ilustruje také první věta části 3.5: 'V lemmatu 3.1.7 jsme dokázali, že součinem je vždy podmnožinou průniku.' Z kontextu je zřejmé, že autor chtěl napsat 'součin' a že konkrétněji myslel součin a průnik ideálů. Přesto udivuje, jak může takto věcně neúplná věta začínat novou sekci. Ve znění (tedy nikoli důkazu) lemmatu 3.5.3 se před hlavním tvrzením píše 'definujeme'. Jako by autor nerozlišoval, kdy něco definuje a kdy o definovaném něco tvrdí.

Kdyby se ohromné množství těchto drobných chyb odstranilo, patrně se ukáže, že podané důkazy jsou vesměs správně. Přesto podle mě na několika místech i při veškeré interpretační vstřícnosti autor dělá i skutečné matematické chyby. Definice násobení ideálů, podaná v rámci definice 3.1.4 je podezřelá a podle následujícího používání by musela znít jinak. Pokud rozumím autorově formulaci, pak se mu ani nepodařilo definovat jednoznačnou operaci. Ve standardním pojetí tedy nedefinoval žádnou operaci. V definici hlavního ideálu chybějí množinové závorky, takže vypadá jako jeden součin libovolného prvku s generujícím prvkem, přitom zjevně musí jít o množinu obsahující všechny součiny s generujícím prvkem, aby vůbec šlo o ideál. Na předposledním řádku důkazu lemmatu 3.2.3 se autor odvolává na lemma 3.1.19. Toto lemma se týká pouze hlavních ideálů, autor ho ale aplikuje na ideál, o kterém se teprve má prokázat, že je hlavní. Přitom nepochybně platí to, co autor na daném místě tvrdí, a to už z

pouhé definice ideálu. I tyto chyby nejsou zásadní a samy o sobě by mě ještě k mému celkovému verdiktu nevedly, byť by patrně znemožňovaly ohodnotit i jinak bezchybnou práci jako výbornou. Některé důkazy by bylo možné zjednodušit, např. v důkazu 1.4.8 víme, že x dělí p , ale zároveň víme, že se tyto dva prvky nedělí vzájemně. Autor přitom zdoluhavě rozebírá, co by se stalo, kdyby přece jenom p dělilo x . O jisté pojmové zmatenosti svědčí fakt, že se autor neustále odvolává na to, že prvořádové struktury jsou uzavřené na operace sčítání a násobení a vydává to za zvláštní podmínku, kterou klade na své teorie. Ve standardní prvořádové logice ale musí mít v každém modelu libovolná operace výsledek pro libovolné vstupy.

Nejasná struktura práce. Poslední zásadní námitka se týká celkové struktury práce. Osobně jsem z textu příliš nepochopil, kam práce směřuje. Jisté jsou v práci matematického zaměření zásadní především důkazy a jejich věcná správnost, přesto má i v takto zaměřené práci svou zásadní roli také 'próza' mezi všemi definicemi, lemmaty a větami. V těchto pasážích, které mohou být formulovány trochu volněji, by autor měl alespoň částečně objasnit, proč podává jednotlivé definice a proč dokazuje právě zvolené věty. Autor se o to sice na některých místech snaží, ale jeho výkladu není příliš rozumět, což jistě souvisí i s již probíranou nevalnou jazykovou úrovní. Celkově jsem si dokázal udělat pouze ten obrázek, že práce je o různých druzích dělitelnosti. Více jsem nepochopil ani z úvodu, ani z závěru, ani z žádné jiné části práce. Společně s jazykovou revizí bych tedy doporučil, aby si autor ujasnil, co všechno v práci probírá a dokazuje a jaké jsou mezi tím souvislosti.

Související, trochu méně závažný nedostatek, pak spočívá v jisté nevyrovnanosti výkladu. Autor se především na začátku v důkazech poměrně obsírně odvolává na triviální předpoklady nebo lemmata jako je komutativita sčítání a násobení. V důkazu lemmatu 1.4.8 se dokonce píše, že x se nerovná nule, protože jinak by se nule rovnalo. Autor se do omrzení odkazuje na konkrétní čísla základních definic nebo triviálních důkazů.

Na druhou stranu v již složitějších důkazech často nechává odkazy na dříve dokázané věty nebo lemmata spíše implicitní, čímž někdy čtenáře nutí ke zbytečnému dohledávání. A to je ještě ta lepší varianta. Ta horší spočívá v tom, že autor odkazuje na jiné dříve dokázané věty, případně lemmata nebo definice (příkladů je nepřeberné množství, ale pro konkrétnost uvedu odkaz na lemma 1.1.2 místo odkazu na lemma 1.1.4 v důkazu lemmatu 2.1.1), nebo odkazuje patrně na správně zvolené lemma, ale naráz mu přidělí nový název. Např. v důkazu lemmatu 3.5.5 na straně 53 se nečesky píše, že jedno tvrzení 'máme dokázáno, díky lemmatu komaximální průnik'. Není důvod neuvést číslo lemmatu, stejně jako se to dělá v podstatě v celém textu. Podobně je čtenář maten v důkazu věty 3.5.7. Zvláštní kuriozitu představuje definice 3.1.20, která definuje totéž jako dřívější definice 2.1.2, ale dává tomu nový název. To vzbuzuje podezření, že autor nepřiliš reflektovaně přebíral definice z literatury a nedal si práci s tím, aby své inspirace z různých zdrojů sjednotil do koherentní podoby.

Zbývající výhrady. Autor mnohdy není terminologicky konsistentní. Ačkoli sám navrhuje, že bude vhodné označovat neutrální prvek vůči sčítání jako nulový a neutrální prvek vůči násobení jako jednotkový, dále v práci často hovoří nerozlišeně o neutrálním prvku, a to i na místech, kde to může být matoucí. Podobně už při zavádění pojmu inverzního prvku na několika řádcích kolísá mezi zvoleným označením a alternativním označením 'invertibilní'. Autor také nerozlišuje mezi ostrou a neostrou inkluzí mezi množinami. Většinou používá znaménko pro ostrou inkluzi, a to i případech, kdy lze konstatovat pouze inkluzi neostrou.

Méně zásadní jsou typografické nedostatky, kterých není mnoho a nejsou tolik závažné.

Přesto by se nemělo stávat, aby např. čtvereček symbolizující konec důkazu začínal novou stránku jako je tomu na straně 52. Velmi problematická je i práce s literaturou. Bakalářská práce nemusí nutně přinést nové originální výsledky, které by bylo potřeba odlišit od toho, co autor přejal z citovaných zdrojů. Nicméně je nešťastné, že většina položek ze seznamu literatury není v průběhu práce vůbec zmíněna, takže není jasné, co konkrétně si z nich autor vzal a jak se to projevilo na konečné podobě práce. Seznam literatury se navíc typograficky moc nepovedl. Bylo by vhodné více odlišit jména citovaných autorek nebo autorů od názvů jejich děl, např. název díla napsat kurzívou. Poslední položka pak má neúplný název. Jedná se o dvoustránkový, na internetu volně přístupný text, který nejspíše nebyl publikován v žádném časopise. I to by se ale mělo uvést. V seznamu literatury ovšem na místě, kde se standardně uvádí vydavatelství nebo časopis, najdeme 'Paper'.

Hodnocení. Přes četné námitky jsem přesvědčen, že práce má svůj potenciál. A nemusí být příliš obtížné ji výrazně vylepšit. Na základní úpravy, které by spočívaly v odstranění čistě jazykových nedostatků, by mohlo stačit i několik dní. Pak by již bylo možné uvažovat o hodnocení práce jako dobré. Pokud by se odstranila podstatná část drobných věcných chyb a překlepů, možná by to už stačilo na další zlepšení známky o jeden stupeň. Kdyby pak práce navíc získala jasnější celkovou strukturu, možná by mohla být hodnocena dokonce jako výborná. Vzhledem k současné podobě práce ale musím konstatovat, že autor *neprospěl*.