MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Anton Matis

Matematické duely a truely

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2022

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Ďakujem doc. RNDr. Antonínu Slavíkovi, Ph.D. za ochotu, vynaložené úsilie a poskytnutie cenných vedomostí pri písaní práce.

Název práce: Matematické duely a truely

Autor: Anton Matis

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

Abstrakt: Bakalárska práca popisuje a analyzuje hru, v ktorej proti sebe súperia dvaja alebo traja hráči s úlohou eliminovať protivníkov. Hra má rôzne varianty, ktoré sa líšia zadanými pravidlami. Cieľom práce je preskúmanie optimálnej stratégie a analytické vyrátanie pravdepodobnosti úspechu jednotlivých hráčov za daných pravidiel.

Klíčová slova: duel, truel, stratégia, pravdepodobnosť výhry

Title: Duels and truels in mathematics

Author: Anton Matis

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

Abstract: The bachelor thesis describes and analyzes a game in which two or three players compete against each other with the task of eliminating opponents. The game has several variants, which differ in the specified rules. The aim of the work is to review the optimal strategy and calculate the probabilities of success for individual players.

Keywords: duel, truel, strategy, winning probability

Obsah

Úvod

Duel je hra, v ktorej dvaja hráči mieria na seba zbraňami a ich úlohou je zasiahnuť protihráča. Truel je rozšírením duelu, vystupujú v ňom traja hráči namiesto dvoch. V priebehu práce sa zaoberáme najmä určením pravdepodobnosti výhier jednotlivých hráčov, pokiaľ poznáme, s akými pravdepodobnosťami pri výstrele zasiahnu cieľ. Dospejeme k intuitívnemu pozorovaniu. V dueli pravdepodobnosť výhry priamo úmerne súvisí s úspešnosťou streľby. V trueli sa však stretneme s prípadmi, kedy to tak nemusí byť. Vo všeobecnosti je truel omnoho rozmanitejšou hrou v porovnaní s duelom. Okrem úspešnosti streľby hrajú výraznú úlohu aj stratégie, poradie strelcov, prípadne možnosť uzavretia paktu alebo výstrelu do vzduchu. V zdrojoch použitých k tejto práci je možné nájsť rôzne varianty hier s príslušnými interpretáciami.

Téma práce je spracovaná na pomedzí teórie hier a teórie pravdepodobnosti. Popisujeme existujúcu problematiku a mierne ju rozširujeme našimi príspevkami. Využívame kombinatorické a pravdepodobnostné výpočty, vzťah pre súčet nekonečného geometrického radu, taktiež ukážeme výpočty pomocou Markovových reťazcov.

Viackrát ukazujeme alternatívny spôsob výpočtov, alebo uvádzame vlastný výpočet na základe charakteristiky uvedenej v zdroji. V oddieloch 1.1 a 1.2 zovšeobecňujeme revolverový duel z [2], uvažujeme veľkosť zásobníka n namiesto pôvodného počtu 6.

Práca je vhodná pre čitateľa na úrovni bakalárskeho štúdia, často si vystačíme s vedomosťami zo stredoškolskej matematiky, niektoré časti (napr. Markovové reťazce) však vyžadujú základný vysokoškolský kurz teórie pravdepodobnosti. Práca môže byť vhodná pre čitateľov, ktorí si chcú precvičiť teóriu pravdepodobnosti na zaujímavých netradičných úlohách.

1 Duel

Duel je hra medzi dvomi hráčmi, ktorí navzájom mieria zbraňami na seba. Snahou každého z nich je vo svojom ťahu úspešným zásahom eliminovať protihráča z hry. Hra sa končí ak nažive ostane jeden hráč. V dueli považujeme vynechanie svojho ťahu (výstrel do vzduchu) za nezmysluplný ťah. Jediná zmysluplná stratégia pre každého hráča je strieľať po druhom hráčovi. Budeme sa venovať viacerým typom duelu, pre rôzne vopred určené pravidlá, konkrétne nasledujúcim typom:

- Zovšeobecnený „revolverový“ duel
- Zovšeobecnený stupňovaný „revolverový“ duel
- Náhodný duel
- Sekvenčný duel

Označíme hráčov A, B.

1.1 Zovšeobecnený „revolverový“ duel

V tejto časti vychádzame z [3, sekcia 2]. Hráči A, B používajú jednu spoločnú zbraň s jedným nábojom a zásobníkom pre n nábojov na spôsob „ruskej rulety“, kde n je prirodzené číslo. Hráč A zatočí zásobníkom a vystrelí na hráča B. Ak netrafí, hráč B si vezme zbraň, zatočí zásobníkom a vystrelí na hráča A atď. V každom ťahu má hráč práve jeden výstrel. Hra končí úspešným výstrelom, pričom každý výstrel s nábojom je úspešný. Pravdepodobnosť úspešného výstrelu je zrejme $1/n$. Vyrátame pravdepodobnosť úspechu hráča A ako súčet nekonečného radu, túto pravdepodobnosť budeme značiť $P(A)$. Jednotlivé sčítance udávajú pravdepodobnosti, že duel skončí víťazstvom A v 1. kole, 3. kole, 5. kole atď.

$$P(A) = \frac{1}{n} + (\frac{n-1}{n})^2\frac{1}{n} + (\frac{n-1}{n})^4\frac{1}{n} + ...$$

$$P(A) = \frac{1}{n}S, \text{ pričom } S = 1 + (\frac{n-1}{n})^2 + (\frac{n-1}{n})^4 + ... = \frac{1}{1-(\frac{n-1}{n})^2}$$

$$P(A) = \frac{1}{n}\frac{1}{1-(\frac{n-1}{n})^2} = \frac{1}{n}\frac{1}{1-(\frac{n^2-2n+1}{n^2})} = \frac{1}{n}\frac{1}{\frac{2n-1}{n^2}} = \frac{n}{2n-1}$$

Pravdepodobnosť, že hráč A vyhrá, je podľa výpočtov $\frac{n}{2n-1}$, daná hodnota závisí na n (veľkosti zásobníka), avšak $P(A) > 1/2$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Teda $P(A) > P(B)$, táto nerovnosť nastáva intuitívne kvôli faktu, že hráč A má prvý ťah.

Pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{a\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^a = 0$, to znamená, že s pravdepodobnosťou 1 je hra konečná a pravdepodobnosť, že vyhrá hráč B, môžeme vyrátať ako doplnkovú pravdepodobnosť k výhre hráča A, t.j. $P(B) = 1 - P(A)$.

$$P(B) = 1 - \frac{n}{2n-1} = \frac{n-1}{2n-1}$$

Definujeme náhodnú veličinu D ako počet výstrelov v dueli. Vyrátame strednú hodnotu D. Činiteľ $(\frac{n-1}{n})^{k-1}\frac{1}{n}$ je pravdepodobnosť, že hráč v k-tom kole zasiahne súpera a všetky predošlé výstrely boli neúspešné.

$$\begin{aligned} E(D) &= \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\frac{n-1}{n})^{j-1}}{1-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n}\frac{1}{(1-\frac{n-1}{n})^2} = \frac{1}{n}n^2 = n \end{aligned}$$

Očakávaná dĺžka duelu je n.

1.2 Zovšeobecnený stupňovaný „revolverový“ duel

Taktiež vychádzame z [3, sekcia 2]. Hráči A, B používajú jednu spoločnú zbraň s jedným nábojom a zásobníkom pre n nábojov na spôsob „ruskej rulety“, kde n je prirodzené číslo. Tento princíp je zachovaný z typu predošlej časti, avšak v tomto dueli je s výmenou zbrane pridaný jeden výstrel. Teda v n-tom ťahu má daný hráč n výstrelov. Hra začína tak, že hráč A zatočí zásobníkom a vystrelí na hráča B. Ak netrafí, hráč B môže dvakrát zatočiť zásobníkom a vystreliť na hráča A. Ak minul oba výstrely, je na ťahu hráč A, ktorý má najviac 3 výstrely atď. Hra končí úspešným výstrelom, pričom každý výstrel s nábojom je úspešný.

Nech x predstavuje jav, že zbraň nevystrelí, a Y jav, keď A úspešne vystrelí. Nasledovnou ukážkou ilustrujeme prípady, v ktorých sa A stane výhercom.

Y
x xx Y
x xx xY
x xx xxY
x xx xxx xxxx Y
x xx xxx xxxx xY
x xx xxx xxxx xxY
x xx xxx xxxx xxxY
x xx xxx xxxx xxxxY

atď.

Vypočítame pravdepodobnosť výhry hráča A takým spôsobom, že sčítame pravdepodobnosť všetkých možností, kedy môže hráč A vyhrať:

$$\frac{1}{n}+\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{3}+\left(1-\frac{1}{n}\right)^{4}+\left(1-\frac{1}{n}\right)^{5}\right)\frac{1}{n}+\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{10}+\cdots+\left(1-\frac{1}{n}\right)^{14}\right)\frac{1}{n}+\cdots$$

Tvar tejto postupnosti vieme zapísať pomocou sumy. Pred sumu vytkneme $\frac{1}{n}$. Vidíme, že suma sa skladá zo skupín sčítancov, pričom v každej skupine sú mocniny zlomku $\frac{n-1}{n}$ s exponentami idúcimi po sebe. Počty sčítancov v jednotlivých skupinách sú $1, 3, 5, ...$, v m-tej skupine ich bude $2m-1$. Exponenty prvých sčítancov v jednotlivých skupinách sú postupne $0, 1+2$, $1+2+3+4, ...$, v m-tej skupine je prvý exponent $\sum_{i=1}^{2m-2} i$, to sa rovná $(2m-1)(2m-2)/2 = (2m-1)(m-1)$. Súčet sčítancov v m-tej skupine je preto $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{(2m-1)(m-1)} \sum_{j=0}^{2m-2} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{j}$.

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{(2m-1)(m-1)}\sum_{j=0}^{2m-2}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{j} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{(2m-1)(m-1)}\frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2m-1}-1}{\frac{n-1}{n}-1} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{(2m-1)(m-1)}\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2m-1}\right)
\end{aligned}$$

V tabuľke môžeme vidieť numerické hodnoty $P(A)$ vzhľadom k veľkosti zásobníka. Pravdepodobnosť sa znižuje pri zväčšovaní zásobníka.

n	$P(A)$
2	0,61032
3	0,55709
4	0,53894
5	0,52962
6	0,52392
7	0,52007
8	0,51728
9	0,51518
10	0,51353

Zdá sa, že $P(A)$ sa blíži k $1/2$ pre $n \to \infty$. Intuitívne, pre veľké n je šanca na výhru v prvom kole pre A zanedbateľná. Teda strieľať ako prvý nie je významná výhoda.

Pre zjednodušenie výrazu označme $q = 1 - 1/n$, pričom platí $q \in (0, 1)$:

$$P(q) = \sum_{m=1}^{\infty} q^{(2m-1)(m-1)} \left(1 - q^{2m-1}\right) \tag{1}$$

Prvé členy nekonečného radu (1) sú

$$q^0 - q^1 + q^3 - q^6 + q^{10} - q^{15} + \cdots ,$$

to vieme zapísať nasledovne:

$$P(q) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{\frac{1}{2}k(k+1)}. \tag{2}$$

Súčet dvoch susedných členov pre $k = 2m - 2$ a $k = 2m - 1$, $m \in \mathbb{N}$, je

$$(-1)^{2m-2} q^{\frac{1}{2}(2m-2)(2m-1)} + (-1)^{2m-1} q^{\frac{1}{2}(2m-1)2m} = q^{(m-1)(2m-1)} - q^{(2m-1)m},$$

čo odpovedá členom radu (1).

Zaujíma nás limita pre $q \to 1^-$, čo odpovedá $n \to \infty$ z predošlého značenia. Dá sa ukázať, že platí:

$$\lim_{q \to 1^-} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{\frac{1}{2}k(k+1)} \right) = \frac{1}{2}.$$

Dôkaz tejto rovnosti je postavený na tom, že namiesto abelovského súčtu radu sa dá spočítať cesàrovský súčet, ktorý naozaj vychádza 1/2.

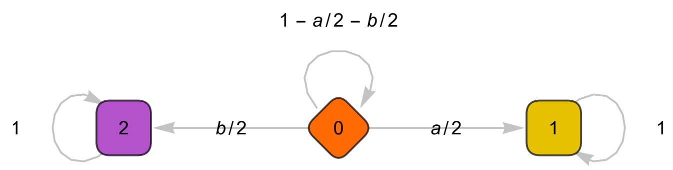
Definujeme náhodnú veličinu D ako počet výstrelov v dueli. Uvedomíme si, že očakávaný počet výstrelov nezávisí na tom, ktorý hráč strieľa. Pravdepodobnosť úspešného výstrelu je $1/n$. Výpočet strednej hodnoty sa zhoduje s výpočtom v sekcii 1.1, preto očakávaná dĺžka duelu je takisto n.

1.3 Náhodný duel

V tomto oddiele a v oddiele 1.4 vychádzame z [1, sekcie 2 a 8]. V náhodnom dueli je hráč, ktorý bude strieľať, vybraný v každom ťahu náhodne s rovnakou pravdepodobnosťou pre oboch hráčov. V každom ťahu padne jeden výstrel. Nábojov je neobmedzené množstvo. V tabuľke 1 uvažujeme 3 stavy hry. Stav 0 znamená, že obaja hráči sú nažive, to nie je konečný stav a duel pokračuje ďalej. Stav 1 odpovedá tomu, že hráč A ostal nažive, stav 2 znamená, že hráč B ostal nažive.

Stavy	Hráči nažive
0	AB
1	A
2	B

Tabuľka 1: Tabuľka stavov pre náhodný duel.



Obr. 1: Interpretácia Markovového reťazca pre náhodný duel.

Nech a je úspešnosť streľby hráča A a b je úspešnosť streľby hráča B. Úspešnosť streľby hráča je pravdepodobnosť, že pri výstrele zasiahne protihráča, preto $a, b \in [0, 1]$. Predpokladajme, že $0 < a + b$.

Určíme pravdepodobnosť u_i^j, že zo stavu i sa dostaneme do stavu j v konečnom počte krokov. Pravdepodobnosť prechodu medzi stavmi i, j v jednom kroku označíme p_i^j. Z definície p_i^j a u_i^j plynie $u_i^j = \sum_{k=0}^{2} p_i^k u_k^j$.V tomto type duelu máme $u_2^1 = 0, u_1^2 = 0$. Aby sme určili pravdepodobnosť výhry oboch hráčov, vyrátame u_0^1 a u_0^2.

$$u_0^1 = p_0^0 u_0^1 + p_0^1 u_1^1 \tag{3}$$

$$u_0^2 = p_0^0 u_0^2 + p_0^2 u_2^2 \tag{4}$$

Zo zadania poznáme nasledujúce rovnosti:

$$p_0^0 = 1 - \tfrac{a}{2} - \tfrac{b}{2}, \quad p_0^1 = \tfrac{a}{2}, \quad p_0^2 = \tfrac{b}{2}$$

Z definície platí $u_j^j = 1$, potom z (1) a (2) plynie

$$u_0^1 = \tfrac{p_0^1}{1-p_0^0}, \quad u_0^2 = \tfrac{p_0^2}{1-p_0^0}$$

Teraz dokážeme určiť $P(A), P(B)$:

$$P(A) = u_0^1 = \tfrac{a}{a+b}, \quad P(B) = u_0^2 = \tfrac{b}{b+a}$$

Ukážeme výpočet $P(A)$ bez Markovových reťazcov, pre výpočet $P(B)$ by sme postupovali analogicky. Najskôr nájdeme pravdepodobnosť, že hráč A vyhrá v k-tom kole. To nutne znamená, že v prvých $k-1$ kolách bola každá streľba neúspešná.

Nech $j \in \{0, 1, ..., k-1\}$ odpovedá počtu ťahov hráča A. Potom $\frac{(1-a)^j}{2^j}$, $\frac{(1-b)^{k-1-j}}{2^{k-1-j}}$ sú pravdepodobnosti, že hráči A resp. B minuli svoje výstrely a výraz $\binom{k-1}{j}$ reprezentuje všetky možné kombinácie poradia strelcov. Sumou cez všetky hodnoty j spočítame pravdepodobnosť, že hra dospela do k-tého kola. Sumu vynásobíme pravdepodobnosťou, že v k-tom kole hráč A úspešne vystrelí: $\frac{1}{2}a$. Súčet tejto sumy získame z binomickej vety. Došli sme k pravdepodobnosti, že hráč A vyhrá v k-tom kole:

$$\frac{1}{2^k}a\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}(1-a)^j(1-b)^{k-1-j} = \frac{1}{2^k}a(2-a-b)^{k-1}$$

.

Aby sme dostali $P(A)$, sčítame daný výraz cez všetky možné k ako sumu geometrického radu s kvocientom $\frac{2-a-b}{2}$:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}a(2-a-b)^{k-1} = \frac{a}{a+b}$$

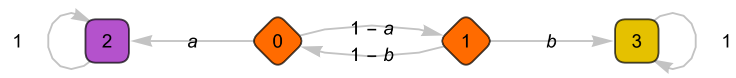
Vidíme, že pravdepodobnosť úspechu hráča A sa zvyšuje s rastúcou úspešnosťou streľby a ekvivalentne u hráča B.

1.4 Sekvenčný duel

V sekvenčnom dueli sa hráči striedajú po každom ťahu. V každom ťahu padne jeden výstrel. V tomto dueli uvažujeme 4 stavy znázornené v tabuľke 2. V porovnaní s náhodným duelom je treba rozlíšiť stav, kedy sú obaja hráči nažive. Je dôležité, ktorý hráč bude v najbližšom ťahu strieľať, čo je vyznačené v tabuľke tučným písmenom.

Stavy	Hráči nažive
0	**A**B
1	A**B**
2	A
3	B

Tabuľka 2: Tabuľka stavov pre sekvenčný duel.



Obr. 2: Interpretácia Markovového reťazca pre sekvenčný duel.

Budeme riešiť nasledujúcu sústavu rovníc vyplývajúcu z daného Markovového reťazca. a, b, u_i^j, p_i^j majú rovnaký význam ako v predchádzajúcej sekcii. Opäť používame vzťahy $u_i^j = \sum_{k=0}^{3} p_i^k u_k^j$ a pozorovanie, že niektoré sčítance sú nulové, nakoľko $u_2^3 = 0, u_3^2 = 0, p_0^0 = 0, p_0^3 = 0, p_1^1 = 0, p_1^2 = 0$.

$$u_0^2 = p_0^1 u_1^2 + p_0^2 u_2^2 \tag{5}$$
$$u_0^3 = p_0^1 u_1^3 \tag{6}$$
$$u_1^2 = p_1^0 u_0^2 \tag{7}$$
$$u_1^3 = p_1^0 u_0^3 + p_1^3 u_3^3 \tag{8}$$

Pričom vieme, že platia nasledujúce rovnosti:

$$p_0^1 = 1 - a, \quad p_0^2 = a, \quad p_1^0 = 1 - b, \quad p_1^3 = b$$

Zo zadaných rovníc dostaneme úpravami tieto vzťahy:

$$u_0^2 = \frac{p_0^2}{1 - p_0^1 p_1^0}, \quad u_0^3 = \frac{p_0^1 p_1^3}{1 - p_0^1 p_1^0}$$

Pravdepodobnosti úspechov hráčov A, B za predpokladu, že začína hráč A, sú:

$$P(A) = u_0^2 = \frac{a}{1-(1-a)(1-b)}, \quad P(B) = u_0^3 = \frac{b(1-a)}{1-(1-a)(1-b)}$$

K rovnakému výsledku dospejeme aj bez Markovových reťazcov. Pravdepodobnosť, že hráč A vyhrá duel, keď začína, je pravdepodobnosť, že bude úspešný jeho prvý výstrel, alebo jeho druhý výstrel, alebo jeho tretí výstrel atď. Odvodenie je možné nájsť v [2].

$$\begin{aligned} P(A) &= a + a(1-a)(1-b) + a[(1-a)(1-b)]^2 + a[(1-a)(1-b)]^3 + \cdots \\ &= \frac{a}{1-(1-a)(1-b)} \\ &= \frac{a}{a+b-ab} \end{aligned}$$

Pravdepodobnosť výhry hráča B vypočítame opäť ako súčet geometrického radu:

$$\begin{aligned} P(B) =&(1-a)b + (1-a)b[(1-a)(1-b)] + (1-a)b[(1-a)(1-b)]^2 + \\ &+ (1-a)b[(1-a)(1-b)]^3 + ... \\ =&\frac{(1-a)b}{1-(1-a)(1-b)} \\ =&\frac{(1-a)b}{a+b-ab} \end{aligned}$$

Uvedieme ďalší spôsob výpočtu $P(A)$ podľa [4, oddiel 24].

Nech $f(a,b)$ je pravdepodobnosť, že hráč A ostane nažive a $f(b,a)$ je pravdepodobnosť, že hráč B ostane nažive, potom:

$$\begin{aligned} f(a,b) &= a + (1-a)(1-f(b,a)) \\ &= a + (1-a)(1-(b+(1-b)(1-f(a,b)))) \\ &= a + (1-a)(1-b)f(a,b) \end{aligned}$$

Dostali sme lineárnu rovnicu, ktorá sa dá ľahko vyrátať a riešením je očakávaná rovnosť $f(a,b) = \frac{a}{a+b-ab}$.

Pokiaľ $a \neq 0$, tak v sekvenčnom dueli je výhodnejšie strieľať prvý.

Rovnosť pravdepodobností, pokiaľ $a, b \in (0,1)$ nastane, ak $\frac{a}{a+b-ab} = \frac{1}{2}$, z čoho vyplýva $b = \frac{a}{1-a}$, čo môže nastať len pre $b > a$. Rovnaká pravdepodobnosť výhry pre oboch hráčov, ak A začína, nastáva napríklad pre $a = \frac{1}{2}, b = 1$ alebo pre $a = \frac{2}{5}, b = \frac{2}{3}$.

V [2] je uvedený predpoklad, že začína hráč s nižšou úspešnosťou streľby. Tento predpoklad nie je nutný. Taktiež je nesprávne uvedené, že výsledky pre $P(A), P(B)$ dostaneme pokiaľ začína hráč B. Tieto výsledky dostaneme, ak začne hráč A.

2 Truel

Truel je rozšírením duelu. Proti sebe súperia traja hráči namiesto dvoch. Snahou každého z nich je ostať nažive. Hra sa končí, ak nažive ostane práve jeden hráč. Poradie strelcov, úspešnosť streľby hráčov a stratégie pre určenie hráča, na ktorého bude hráč na ťahu strieľať, významne ovplyvňujú šance jednotlivcov na víťazstvo. V priebehu sekcie rozlíšime dva typy truelu, konkrétne tieto:

- Náhodný truel
- Sekvenčný truel

Označíme hráčov A, B, C a úspešnosť ich streľby, teda pravdepodobnosti, že zasiahnu svoj cieľ, postupne a, b, c. Hráči majú navzájom vedomie o svojich úspešnostiach streľby.

2.1 Náhodný truel

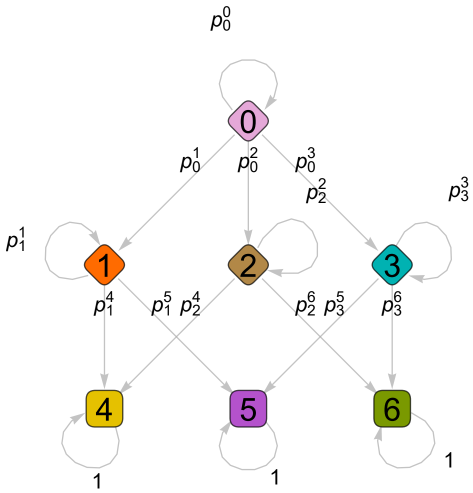
V tomto oddiele vychádzame z [1, oddiel 3 a 8]. V náhodnom trueli je hráč, ktorý bude strieľať, vybraný v každom ťahu náhodne s rovnakou pravdepodobnosťou pre všetkých troch hráčov.

Označme $P(A), P(B), P(C)$ pravdepodobnosti, že hráči A, B, C vyhrajú náhodný truel.

Pre výpočet pomocou Markovových reťazcov skonštruujeme množinu stavov: $\{ABC, AB, AC, BC, A, B, C\}$, ktorá odpovedá hráčom, ktorí sú nažive. Stavy $\{A, B, C\}$ sú absorpčné.

Stav	Hráči nažive
0	ABC
1	AB
2	AC
3	BC
4	A
5	B
6	C

Tabuľka 3: Tabuľka stavov pre náhodný truel.



Obr. 3: Interpretácia Markovového reťazca pre náhodný truel.

Rovnako ako v predošlej sekcii určíme pravdepodobnosť u_i^j, že zo stavu i sa dostaneme do stavu j v konečnom počte krokov. Pravdepodobnosť prechodu medzi stavmi i, j v jednom kroku označíme p_i^j.

Vyrátame u_0^4, u_0^5, u_0^6, čo odpovedá hodnotám $P(A), P(B), P(C)$. Využijeme vzťah $u_i^j = \sum_{k=0}^{6} p_i^k u_k^j$, z ktorého plynie:

$$u_0^4 = p_0^0 u_0^4 + p_0^1 u_1^4 + p_0^2 u_2^4 + p_0^3 u_3^4 + p_0^4 u_4^4 + p_0^5 u_5^4 + p_0^6 u_6^4$$

Z definície truelu platí: $u_3^4 = u_5^4 = u_6^4 = p_0^4 = 0$, preto sú niektoré členy nulové. Pre nenulové členy použijeme rovnaký vzťah a dostaneme:

$$u_1^4 = p_1^1 u_1^4 + p_1^4 u_4^4 \quad (u_4^4 = 1, p_1^0 = p_1^2 = p_1^3 = u_5^4 = u_6^4 = 0)$$
$$u_2^4 = p_2^2 u_2^4 + p_2^4 u_4^4 \quad (u_4^4 = 1, p_2^0 = p_2^1 = p_2^3 = u_5^4 = u_6^4 = 0)$$

Dohromady získame nasledujúcu rovnosť pre u_0^4:

$$u_0^4 = p_0^0 u_0^4 + p_0^1 \frac{p_1^4}{1 - p_1^1} + p_0^2 \frac{p_2^4}{1 - p_2^2}$$
$$u_0^4 = \frac{p_0^1 p_1^4}{(1 - p_0^0)(1 - p_1^1)} + \frac{p_0^2 p_2^4}{(1 - p_0^0)(1 - p_2^2)}$$

Podobne vyjadríme u_0^5:

$$u_0^5 = p_0^0 u_0^5 + p_0^1 u_1^5 + p_0^2 u_2^5 + p_0^3 u_3^5 + p_0^4 u_4^5 + p_0^5 u_5^5 + p_0^6 u_6^5$$

Platí $u_2^5 = u_4^5 = u_6^5 = p_0^5 = 0, u_5^5 = 1$ a nasledujúce rovnosti:

$$\begin{array}{ll} u_1^5 = p_1^1 u_1^5 + p_1^5 & (p_1^0 = p_1^2 = p_1^2 = u_4^5 = u_6^5 = 0) \\ u_3^5 = p_3^3 u_3^5 + p_3^5 & (p_3^0 = p_3^1 = p_3^2 = u_4^5 = u_6^5 = 0) \end{array}$$

Potom:

$$u_0^5 = \frac{p_0^1 p_1^5}{(1-p_0^0)(1-p_1^1)} + \frac{p_0^3 p_3^5}{(1-p_0^0)(1-p_3^3)}$$

Analogickými krokmi sa dá ukázať rovnosť pre u_0^6:

$$u_0^6 = \frac{p_0^2 p_2^6}{(1-p_0^0)(1-p_2^2)} + \frac{p_0^3 p_3^6}{(1-p_0^0)(1-p_3^3)}$$

Pre zaujímavosť naznačíme aj iný spôsob výpočtu u_0^4, u_0^5, u_0^6.

V našom prípade môžeme pre rôzne stavy i, j, pokiaľ sú spojené hranou, resp. prechod medzi nimi je možný v jednom kroku, písať:

$$u_i^j = p_i^j + p_i^i p_i^j + p_i^i p_i^i p_i^j + p_i^i p_i^i p_i^i p_i^j + \cdots$$

Všeobecne v Markovovom reťazci neplatí tento vzťah, nakoľko môže existovať stav k rôzny od i a j, cez ktorý je možné dostať sa z i do j. Z obr. 3 je však zrejmé, že v našom Markovovom reťazci to nemôže nastať.

Prechod do stavu j nastane v prípade úspešného výstrelu. Sčítaním geometrického radu vieme pre naše stavy i, j vyjadriť $u_i^j = \frac{p_i^j}{1-p_i^i}$.

Existujú 2 cesty, ako sa dostať do stavu 4, resp. ako môže A vyhrať. Buď $0 \to 1 \to 4$ alebo $0 \to 2 \to 4$.

$$u_0^4 = u_0^1 u_1^4 + u_0^2 u_2^4 = \frac{p_0^1}{1-p_0^0}\frac{p_1^4}{1-p_1^1} + \frac{p_0^2}{1-p_0^0}\frac{p_2^4}{1-p_2^2}$$

Dostali sme rovnaký výsledok pre u_0^4 ako pri predošlom postupe a obdobným postupom sa dá vyjadriť u_0^5, u_0^6.

Zavedieme značenie pre túto sekciu. Nech $P_{A\to B}, P_{A\to C}$ sú pravdepodobnosti, že A mieri v prvom prípade na B a v druhom na C, analogicky pre ostatné možnosti. Potom vieme určiť:

$$\begin{array}{lll} p_0^0 = 1 - \frac{1}{3}(a+b+c) & & \\ p_0^1 = \frac{1}{3}(aP_{A\to C} + bP_{B\to C}) & p_1^4 = p_2^4 = \frac{a}{2} & \\ p_0^2 = \frac{1}{3}(aP_{A\to B} + cP_{C\to B}) & p_1^5 = p_3^5 = \frac{b}{2} & p_2^2 = 1 - \frac{1}{2}(a+c) \\ p_0^3 = \frac{1}{3}(bP_{B\to A} + cP_{C\to A}) & p_2^6 = p_3^6 = \frac{c}{2} & p_3^3 = 1 - \frac{1}{2}(b+c) \end{array}$$

Nech je počas truelu ľubovoľný hráč na ťahu. Uvedomíme si, že v prípade jeho úspešného výstrelu nastáva duel, v ktorom je výhodnejšie stretnúť sa so slabším z dvojice. Ak daný hráč svoj výstrel minie, je jedno na koho mieril. Z tejto úvahy je zjavné, že v trueli je výhodnejšie mieriť na silnejšieho z dvojice protivníkov. Keďže hráči majú navzájom vedomie o svojich úspešnostiach streľby, tak vieme jednoznačne určiť stratégiu pre každého z nich, tú budeme nazývať stratégia najsilnejšieho protivníka.

Nech $a > b > c$ a hráči sa držia stratégie najsilnejšieho protivníka, potom hráči mieria na seba nasledovne: $A \to B, B \to A, C \to A$ a môžeme určiť $P_{A\to B} = P_{B\to A} = P_{C\to A} = 1, P_{A\to C} = P_{B\to C} = P_{C\to B} = 0$, potom platí:

$$P(A) = u_0^4 = \frac{\frac{1}{3}(aP_{A\to B}+cP_{C\to B})\frac{a}{2}}{(1-(1-\frac{1}{3}(a+b+c)))(1-(1-\frac{1}{2}(a+c)))} = \frac{a^2}{(a+b+c)(a+c)}$$

$$P(B) = u_0^5 = \frac{\frac{1}{3}(bP_{B\to A}+cP_{C\to A})\frac{b}{2}}{(1-(1-\frac{1}{3}(a+b+c)))(1-(1-\frac{1}{2}(b+c)))} = \frac{b}{a+b+c}$$

$$P(C) = u_0^6 = \frac{\frac{1}{3}(aP_{A\to B}+cP_{C\to B})\frac{c}{2}}{(1-(1-\frac{1}{3}(a+b+c)))(1-(1-\frac{1}{2}(a+c)))} + \frac{\frac{1}{3}(bP_{B\to A}+cP_{C\to A})\frac{c}{2}}{(1-(1-\frac{1}{3}(a+b+c)))(1-(1-\frac{1}{2}(b+c)))} =$$

$$= \frac{ac}{(a+b+c)(a+c)} + \frac{(b+c)c}{(a+b+c)(b+c)} = \frac{c(2a+c)}{(a+b+c)(a+c)}$$

2.2 Sekvenčný truel

V tejto sekcii vychádzame z [2, oddiel 1]. V tomto sekvenčnom trueli platia nasledovné pravidlá:

- Hráči strieľajú podľa poradia. Hráč A strieľa ako prvý, potom hráč B, potom C. Toto poradie sa počas hry nemení.
- Nie je možné vynechať svoj ťah, resp. vystreliť do vzduchu.
- Každý hráč má neobmedzené množstvo nábojov.
- Ak si hráč zvolí stratégiu, nemôže je neskôr zmeniť.
- Po vyradení jedného hráča pokračuje hra duelom.

Zavedieme nasledujúce značenie.

Predpokladáme, že všetci hráči majú pevne zvolenú stratégiu. $P_K(K, L)$ je pravdepodobnosť, že hráč K vyhrá duel s hráčom L, K má prvý ťah. $P_L(K, L)$ je pravdepodobnosť, že L vyhrá duel s K, K má prvý ťah. $P_K(K, L, M)$ je pravdepodobnosť, že hráč K vyhrá truel s hráčmi L a M, K má prvý ťah, potom je na ťahu L a potom M a pod. V zátvorkách je uvedené poradie strelcov a pred zátvorkami je uvedený víťaz.

Predpokladáme, že $a > b > c$. Ukážeme pravdepodobnosti výhier hráčov, pokiaľ si všetci osvoja stratégiu najsilnejšieho protivníka, teda každý mieri na silnejšieho z dvoch protivníkov. Chceme vyrátať $P_A(A, B, C)$. Uvedomíme si, že hráč A musí najskôr vyradiť hráča B a neskôr hráča C, aby vyhral truel.

Pravdepodobnosť, že A eliminuje B je pravdepodobnosť, že bude úspešný jeho prvý výstrel, alebo jeho druhý výstrel, alebo jeho tretí výstrel atď., pričom stále strieľa na B a je nám jasné, že pri svojej streľbe je stále nažive. To môžeme zapísať nasledujúcim výrazom:

$$a + a(1-a)(1-b)(1-c) + a[(1-a)(1-b)(1-c)]^2 + \cdots =$$
$$= \frac{a}{1-(1-a)(1-b)(1-c)}$$

Podobný výpočet sme uviedli v sekcii 1.4. Výraz reprezentuje, že A v priebehu truelu vyradí B. Teraz predpokladáme že C netrafí vo svojom ťahu, to nastane s pravdepodobnosťou $1-c$. V aktuálnom štádiu máme duel medzi A a C, A je na ťahu. Z výpočtov v sekcii 1.4 poznáme pravdepodobnosť výhry A v tomto dueli: $P_A(A, C) = \frac{a}{1-(1-a)(1-c)}$

Dostali sme teda $P_A(A, B, C)$:

$$P_A(A, B, C) = \frac{a^2(1-c)}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-a)(1-c)]}$$

Pre výpočet $P_B(A, B, C)$ uvažujeme nasledovné možnosti výhry B. Buď B v trueli vyradí A a v dueli vyradí C, alebo C vyradí v trueli A a B vyradí C. Pravdepodobnosti týchto dvoch javov tvoria dva sčítance, ktoré dostaneme podobne ako pri $P_A(A, B, C)$ sčítaním geometrického radu. Výslednú pravdepodobnosť zachováme kvôli prehľadnosti v tvare súčtu.

$$P_B(A, B, C) = \frac{(1-a)b^2(1-c)}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-b)(1-c)]} + \frac{(1-a)(1-b)bc}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-b)(1-c)]}$$

Nakoniec vyrátame $P_C(A, B, C)$. C môže vyhrať troma spôsobmi. Buď A vyradí B a C vyradí A, alebo B vyradí A a C vyradí B, alebo C vyradí najskôr A a potom B. Pravdepodobnosti týchto troch javov zapíšeme príslušnými sčítancami.

$$P_C(A, B, C) = \frac{ac}{[1-(1-a)(1-b)][1-(1-a)(1-c)]} + \frac{(1-a)bc}{[1-(1-a)(1-b)][1-(1-b)(1-c)]} +$$
$$+ \frac{(1-a)(1-b)^2c^2}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-b)(1-c)]}$$

Pre názornosť vyčíslime $P_A(A, B, C), P_B(A, B, C), P_C(A, B, C)$ pre konkrétne hodnoty parametrov. Pokiaľ napr. platí $a = 0{,}9; b = 0{,}8; c = 0{,}5$, potom $P_A(A, B, C) \approx 0{,}43; P_B(A, B, C) \approx 0{,}04; P_C(A, B, C) \approx 0{,}52$. Došli sme k neintuitívnemu poznatku. Vidíme, že C má najväčšiu šancu byť víťazom aj napriek tomu, že strieľa ako posledný a jeho úspešnosť streľby je suverénne najnižšia. V tomto prípade nemôžeme súhlasiť s pozorovaniami, ktoré platia v dueloch v časti 1.3, resp. 1.4, kde sme uviedli, že pravdepodobnosť úspechu hráča sa zvyšuje s rastúcou úspešnosťou streľby a je výhodou strieľať ako prvý.

Analyzovali sme sekvenčný truel, kde poradie strelcov začína od najsilnejšieho hráča a každý sa drží stratégie najsilnejšieho protivníka. Teraz sa pozrieme na sekvenčný truel, kde sa hráči takisto držia stratégie najsilnejšieho protivníka, no poradie strelcov začína od najslabšieho. Inak povedané, pravidlo, že hráč A strieľa prvý, potom B a potom C zachováme a uvažujeme $a < b < c$.

Chceme vyrátať $P_A(A,B,C)$. Uvedomíme si, že hráč A vyhrá vtedy, keď eliminuje oboch súperov, alebo keď B eliminuje C a následný duel vyhrá A alebo keď C eliminuje B a následný duel vyhrá A. Podľa princípov z predošlých výpočtov dostaneme:

$$P_A(A,B,C) = \frac{a^2(1-b)}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-a)(1-b)]} + \frac{a(1-a)b}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-a)(1-b)]} + \\ + \frac{ac(1-a)(1-b)}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-a)(1-c)]}$$

Pre výpočet $P_B(A,B,C)$, uvažujeme nasledovné možnosti výhry B. Buď B v trueli eliminuje C a v dueli eliminuje A, alebo A eliminuje v trueli C a B vyhrá duel nad A.

$$P_B(A,B,C) = \frac{(1-a)^2b^2}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-a)(1-b)]} + \frac{ab}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-a)(1-b)]}$$

Hráč C vyhrá len vtedy, keď eliminuje oboch súperov sám.

$$P_C(A,B,C) = \frac{(1-a)^2(1-b)c^2}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-a)(1-c)]}$$

Vyčíslime pravdepodobnosti pre rovnaké hodnoty ako v predchádzajúcej časti, máme na vedomí, že tentokrát je A najslabší. Ak $a = 0{,}5; b = 0{,}8; c = 0{,}9$, potom $P_A(A,B,C) \approx 0{,}33; P_B(A,B,C) \approx 0{,}63; P_C(A,B,C) \approx 0{,}04$. Hráč C je posledný v poradí strelcov a pre oboch protihráčov je prioritným cieľom, síce má najvyššiu úspešnosti streľby, no aj tak jeho šanca na výhru výrazne najnižšia.

2.3 Sekvenčný truel a výstrely do vzduchu

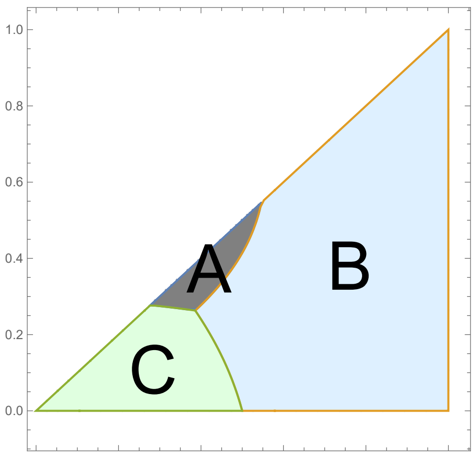
Uvažujme modifikovaný sekvenčný truel, v ktorom môžu hráči vo svojom ťahu použiť výstrelu do vzduchu. Po takom ťahu s určitosťou ostanú všetci hráči nažive a na ťahu je ďalší hráč podľa poradia.

Nech $a < b < c$ a poradie strelcov je $A \to B \to C$. Hráči B, C sa držia stratégie najsilnejšieho protivníka a hráč A počas truelu využije možnosť strieľať do vzduchu.

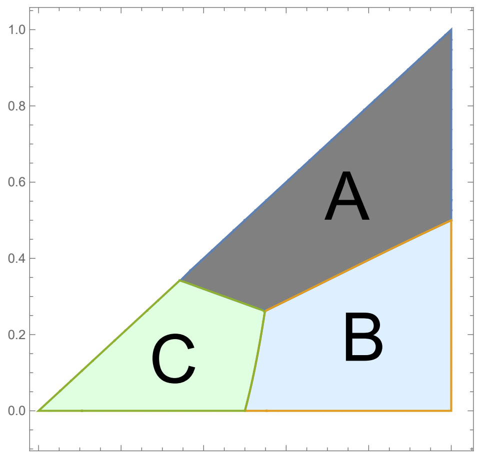
Uvedomíme si, že pokiaľ sú všetci nažive, tak ide o duel hráčov B a C, po úspešnom výstrele nasleduje duel medzi A a víťazom z dvojice B, C. Preto platia nasledujúce rovnosti.

$$P_A(A,B,C) = \frac{ab}{[1-(1-b)(1-c)][1-(1-a)(1-b)]} + \frac{a(1-b)c}{[1-(1-b)(1-c)][1-(1-a)(1-c)]}$$
$$P_B(A,B,C) = \frac{(1-a)b^2}{[1-(1-b)(1-c)][1-(1-a)(1-b)]}$$
$$P_C(A,B,C) = \frac{(1-a)(1-b)c^2}{[1-(1-b)(1-c)][1-(1-a)(1-c)]}$$

Graficky znázorníme, ktorý hráč ma najvyššiu šancu vyhrať truel v závislosti na parametroch a, b, pričom určíme hodnotu parametra c, $c = 1$ a berieme ohľad na to, že $a < b$.



Obr. 4: SNP



Obr. 5: výstrel do vzduchu

Môžeme vidieť, ako sa zmení situácia, keď hráč A namiesto stratégie najsilnejšieho protivníka (vľavo) využíva výstrel do vzduchu (vpravo). Vidíme, že s využitím výstrelu do vzduchu sa pravdepodobnosť hráča A na výhru výrazne zvýši. A s určitosťou nevypadne prvý, navyše po vyradení prvého hráča je A na ťahu, čo je v dueli výhodou.

Zaujímavý prípad truelu nastáva, ak $a = b = c = 1$. Ak hráč A vystrelí na ľubovoľného súpera, nasleduje duel. V dueli nemá zmysel vystreliť do vzduchu, a preto protivník hráča A vystrelí a vyhrá. To znamená, že A nemá šancu prežiť.

Ak A vystrelí do vzduchu a jeden z hráčov B, C vystrelí na jedného z protihráčov, hráč A môže ostať nažive.

Táto úvaha platí pre všetkých hráčov. Teda pre optimalizovanie svojej pravdepodobnosti ostať nažive, hráči vo svojom ťahu rozhodnú vystreliť do vzduchu. Takýto truel nemá konečný počet kôl.

2.4 Sekvenčný truel a pakty

V tejto časti vychádzame z [4, oddiel 3]. Berieme do úvahy sekvenčný truel s pravidlami ako v sekcii 2.2. Pripomeňme si prípad, keď $a > b > c$ a poradie strelcov je $A \to B \to C$. Pokiaľ sa všetci držia stratégie najsilnejšieho protivníka a hodnoty parametrov sú $a = 0{,}8; b = 0{,}7; c = 0{,}6$, potom $P_A(A, B, C) \approx 0{,}29; P_B(A, B, C) \approx 0{,}08; P_C(A, B, C) \approx 0{,}64$.

Povedzme, že A a B vytvoria pakt, že počas truelu budú obaja mieriť na C, teda nebudú sa držať stratégie najsilnejšieho protivníka, hráč C bude mieriť na A. Vyrátame pravdepodobnosti výhier spôsobom, ktorý sme už používali.

Jav, keď hráč X zasiahne hráča Y, budeme značiť X$\mapsto$Y.

A môže zvíťaziť 2 spôsobmi, buď A$\mapsto$C $\wedge$ A$\mapsto$B alebo B$\mapsto$C $\wedge$ A$\mapsto$B. Preto môžeme písať:

$$P_A(A, B, C) = \frac{a^2(1-b)}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-a)(1-b)]} + \frac{a(1-a)b}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-a)(1-b)]} =$$

$$= \frac{a[a(1-b)+(1-a)b]}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-a)(1-b)]}$$

C môže vyhrať len jediným spôsobom: C$\mapsto$A $\wedge$ C$\mapsto$B.

$$P_C(A, B, C) = \frac{(1-a)(1-b)^2c^2}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-b)(1-c)]}$$

Hráč B vyhrá v 3 prípadoch: A$\mapsto$C $\wedge$ B$\mapsto$A alebo B$\mapsto$C $\wedge$ B$\mapsto$A alebo C$\mapsto$A $\wedge$ B$\mapsto$C. V rámci sekcie necháme takéto pravdepodobnosti kvôli prehľadnosti v tvare súčtu.

$$P_B(A,B,C) = \frac{ab}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-a)(1-b)]} + \frac{(1-a)^2b^2}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-a)(1-b)]} +$$
$$+ \frac{(1-a)(1-b)bc}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-b)(1-c)]}$$

V trueli, kde A a B vzájomne dodržiavajú pakt, pokiaľ $a = 0{,}8; b = 0{,}7$ a $c = 0{,}6$ máme $P_A(A,B,C) \approx 0{,}33; P_B(A,B,C) \approx 0{,}66; P_C(A,B,C) \approx 0{,}01$.

Z nášho konkrétneho prípadu je vidieť, že pre hráčov A a B je výhodnejšie uzavrieť pakt, než sa držať stratégie najsilnejšieho protivníka (SNP). Pravdepodobnosť výhry hráča A sa týmto mierne zvýši. Pre hráča B je to výrazne zlepšenie na úkor hráča C.

Uvedené výpočty platia v prípade, že hráči po uzavretí paktu budú pakt dodržiavať. My pripustíme stav, kedy hráči A a B napriek uzavretiu paktu, ho môžu porušiť a namiesto toho používajú stratégiu najsilnejšieho protivníka.

Rozlíšime tichý a hlasný truel. V tichom trueli hráči nevedia rozpoznať na koho bolo namierené v prípade neúspešného výstrelu. Naopak, v hlasnom trueli je každému jasné na koho bolo namierené.

2.4.1 Tichý sekvenčný truel a pakty

Pozrieme sa na situácie, ktoré môžu nastať v tichom trueli vzhľadom na dodržiavanie paktu. Pravdepodobnosť výhry konkrétneho hráča budeme značiť P s príslušným dolným indexom (P_A, P_B, P_C).

Nech A dodržiava pakt a B dodržiava SNP, potom

- A vyhrá, ak A$\mapsto$C $\wedge$ A$\mapsto$B.
- B vyhrá, ak A$\mapsto$C $\wedge$ B$\mapsto$A alebo B$\mapsto$A $\wedge$ B$\mapsto$C alebo C$\mapsto$A $\wedge$ B$\mapsto$C.
- C vyhrá, ak C$\mapsto$A $\wedge$ C$\mapsto$B alebo B$\mapsto$A $\wedge$ C$\mapsto$B.

Na základe týchto pozorovaní podobne ako v predošlej časti vyrátame:

$$P_A = \frac{a^2(1-b)}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-a)(1-b)]}$$
$$P_B = \frac{ab}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-a)(1-b)]} + \frac{(1-a)b^2(1-c)}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-b)(1-c)]} +$$
$$+ \frac{(1-a)(1-b)bc}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-b)(1-c)]}$$
$$P_C = \frac{(1-a)b[(1-b)^2c+b]}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-b)(1-c)]}$$

Nech A dodržiava SNP a B dodržiava pakt, potom

- A vyhrá, ak A$\mapsto$B $\wedge$ A$\mapsto$C alebo B$\mapsto$C $\wedge$ A$\mapsto$B.

- B vyhrá, ak B$\mapsto$C $\wedge$ B$\mapsto$A alebo C$\mapsto$A $\wedge$ B$\mapsto$C.

- C vyhrá, ak A$\mapsto$B $\wedge$ C$\mapsto$A alebo C$\mapsto$A $\wedge$ C$\mapsto$B.

Z týchto pozorovaní vieme vyrátať:

$$P_A = \frac{a^2(1-c)}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-a)(1-c)]} + \frac{(1-a)ab}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-a)(1-b)]}$$
$$P_B = \frac{(1-a)^2b^2}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-a)(1-b)]} + \frac{(1-a)(1-b)bc}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-b)(1-c)]}$$
$$P_C = \frac{a(1-a)c}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-a)(1-c)]} + \frac{(1-a)bc}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-b)(1-c)]}$$

Prípady, kedy obaja hráči dodržiavajú pakt alebo obaja dodržiavajú SNP sme zanalyzovali už skôr. V tabuľke ukážeme, aké sú pravdepodobnosti pre zvolené parametre $a = 0{,}8; b = 0{,}7; c = 0{,}6$.

		B	
		Pakt	SNP
A	Pakt	$P_A \approx 0{,}33$ $P_B \approx 0{,}66$ $P_C \approx 0{,}01$	$P_A \approx 0{,}21$ $P_B \approx 0{,}69$ $P_C \approx 0{,}11$
	SNP	$P_A \approx 0{,}41$ $P_B \approx 0{,}05$ $P_C \approx 0{,}54$	$P_A \approx 0{,}29$ $P_B \approx 0{,}08$ $P_C \approx 0{,}64$

Tabuľka 4: Vyčíslenie pravdepodobnosti pre tichý truel.

Z pohľadu hráča A je výhodnejšie použiť SNP než dodržať pakt, bez ohľadu na správanie hráča B. Hráč B takisto navýši svoje šance, ak uprednostní SNP. Táto situácia je obdobou známeho problému z teórie hier, tzv. väzňovej dilemy, podľa ktorého vieme, že racionálnym postojom pre ľubovoľného hráča je nespolupracovať a použiť SNP.

2.4.2 Hlasný sekvenčný truel a pakty

Nech v hlasnom trueli A dodrží pakt a vystrelí na C. B poruší pakt a vystrelí na A. Nasleduje výstrel hráča C na A. Predpokladajme, že všetky 3 výstrely boli nepresné. Hráč A vie, že B porušil pakt a nemá pre neho zmysel ďalej ho dodržiavať, teda bude mieriť na B. Keďže A má prvý ťah, B pred svojím ťahom rozpozná, či A porušil pakt, v takom prípade je najlepšou voľbou pre B vystreliť na A. Preto predpokladáme, že ak A nedodrží pakt, B takisto nedodrží pakt.

Nech A poruší pakt.

Chceme určiť P_A. A vyhrá, ak A$\mapsto$B $\wedge$ A$\mapsto$C. Táto kombinácia môže nastať 2 spôsobmi. Buď A zasiahne B hneď v prvom kole a potom v dueli zvíťazí nad C alebo ani jeden z hráčov v prvom kole netrafí, potom máme klasický sekvenční truel so stratégiou najsilnejšieho protivníka.

$$P_A = \frac{a^2(1-c)}{1-(1-a)(1-c)} + \frac{(1-a)a^2(1-b)(1-c)^2}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-a)(1-c)]}$$

Ak tieto zlomky sčítame, tak dostaneme $\frac{a^2(1-c)}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-a)(1-c)]}$, to je rovnaká pravdepodobnosť ako v sekvenčnom trueli (oddiel 2.2). Skutočne, tento prípad sa od neho nijako nelíši. Rovnako, hodnoty P_B, P_C sú totožné ako v sekvenčnom trueli.

Ak nastane, že A dodrží pakt a B nedodrží pakt, potom A počas truelu od svojom druhého výstrelu bude mieriť na B, dôsledkom tohto faktu je, že pravdepodobnosti úspechov nebudú totožné ako v sekvenčnom trueli (časť 2.2).

A vyhrá, ak v prvom kole zasiahne C a následne vyhrá duel s B alebo v prvom kole nikto netrafí a hráč A vyhrá v sekvenčnom trueli. Pravdepodobnosť výhry A je:

$$P_A = \frac{a^2(1-b)}{1-(1-a)(1-b)} + (1-a)(1-b)(1-c)P_A(A,B,C)$$

Pripomeňme, že $P_A(A,B,C)$ je pravdepodobnosť výhry A v sekvenčnom trueli, ktorú sme vypočítali v sekcii 2.2, podobne v následujúcich 2 rovnostiach.

B vyhrá, ak A vyradí C v prvom kole a B vyradí v dueli A, alebo A netrafí v prvom kole, B vyradí A a v dueli vyradí C, alebo C v prvom kole vyradí A a duel vyhrá B, alebo v prvom kole nikto netrafí a B vyhrá v bežnom sekvenčnom trueli. Pravdepodobnosť jeho výhry je:

$$P_B = \frac{ab}{1-(1-a)(1-b)} + \frac{(1-a)b^2(1-c)}{[1-(1-a)(1-c)]} + \frac{(1-a)(1-b)bc}{[1-(1-b)(1-c)]} + \frac{(1-a)a^2(1-b)(1-c)^2}{[1-(1-a)(1-b)(1-c)][1-(1-a)(1-c)]} +$$
$$+(1-a)(1-b)(1-c)P_B(A,B,C)$$

C vyhrá, ak B vyradí A v prvom kole a C vyradí v dueli B, alebo C v prvom kole vyradí A a v dueli B, alebo v prvom kole nikto netrafí a C vyhrá v sekvenčnom trueli. Pravdepodobnosť jeho výhry je:

$$P_C = \frac{(1-a)bc}{1-(1-b)(1-c)} + \frac{(1-a)(1-b)^2c^2}{1-(1-b)(1-c)} + (1-a)(1-b)(1-c)P_C(A,B,C)$$

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">B</td></tr>
<tr><td>Pakt</td><td>SNP</td></tr>
<tr><td rowspan="2">A</td><td>Pakt</td><td>$P_A \approx 0{,}33$
$P_B \approx 0{,}66$
$P_C \approx 0{,}01$</td><td>$P_A \approx 0{,}21$
$P_B \approx 0{,}67$
$P_C \approx 0{,}12$</td></tr>
<tr><td>SNP</td><td>nenastane</td><td>$P_A \approx 0{,}29$
$P_B \approx 0{,}08$
$P_C \approx 0{,}64$</td></tr>
</table>

Tabuľka 5: Vyčíslenie pravdepodobnosti pre hlasný truel.

V tabuľke vidíme výsledky pre zvolené parametre $a = 0{,}8; b = 0{,}7; c = 0{,}6$. V porovnaní s tichým truelom sa mierne znížila pravdepodobnosť úspechu hráča B, čo je spôsobené zmenou v mierení u hráča A.

Záver

V úvode práce sme popísali 2 varianty „revolverového“ duelu, odvodili sme pravdepodobnosť úspechu začínajúceho hráča v závislosti na veľkosti zásobníka. V oboch prípadoch hráč, ktorý má prvý ťah, je vždy vo výhodnejšej pozícií a očakávaná dĺžka duelu je rovná veľkosti zásobníka n. Ďalej sme v tejto sekcii analyzovali náhodný a sekvenčný duel. V náhodnom dueli je výhodou vyššia úspešnosť streľby a v sekvenčnom je to kombinácia úspešnosti streľby a možnosti prvého ťahu.

V druhom oddiele sa zaoberáme truelom. Táto hra je na prvý pohľad podobná s duelom, avšak za určitých podmienok dospejeme k iným pozorovaniam. V náhodnom trueli je optimálnou stratégiou pre každého hráča mieriť na najsilnejšieho oponenta, teda vravíme, že hráči sa držia stratégie najsilnejšieho protivníka. V sekvenčnom trueli sme brali do úvahy hru, v ktorej začína poradie od najsilnejšieho hráča a hru, v ktorej začína najslabší. V prvom prípade je možné, že najslabší hráč, ktorý zároveň má posledný ťah, je favoritom na výhru. Toto pozorovanie je presným opakom pozorovania zo sekvenčného duelu. V druhom prípade sme ukázali možnosť, kde hráč s najvyššou úspešnosťou streľby má veľmi malú šancu vyhrať celý truel. Ak umožníme hráčom v sekvenčnom trueli výstrel do vzduchu, najslabší z nich to môže využiť a výrazne zvýšiť pravdepodobnosť svojej výhry. Nakoniec sme pojednávali o trueli, v ktorom dvaja hráči uzavrú spoločný pakt s cieľom zvýšiť svoje šance na výhru. Opísali sme viacero možných situácií a dospeli sme k pojmu z teórie hier známemu ako väzňova dilema.

Duely a truely môžu byť definované rôznymi spôsobmi, a preto je možné túto tému rozširovať a generalizovať. V tejto práci sme predviedli základne formy týchto hier spojené s analytickými aj numerickými výpočtami a ukázali sme kontrast, ktorý medzi danými hrami môže nastať.

Literatúra

[1] Amengual, P., Toral, R., *Distribution of winners in truel games*, AIP Conference Proceedings 779 (2005), 128–141.

[2] Lanphier, D., *Duels, truels, gruels, and survival of the unfittest.* In Beineke, J., Rosenhouse, J. (eds.), *The Mathematics of Various Entertaining Subjects*, vol. 2, Princeton University Press (2017).

[3] Nahin, P., *Duelling idiots and other probability puzzlers*, Princeton University Press, 2000.

[4] Knuth, D. E., *The Triel: A New Solution.* In Knuth, D. E.: Selected papers on fun and games, CSLI Publications, 2011, 209–218.

[5] Kilgour, D. M., Brams, S. J., *The truel*, Math. Mag. 70 (1997), 315–326.

[6] Dorraki, M., Allison, A., Abbott, D., *Truels and strategies for survival.* Scientific Reports 9 (2019), article number 8996.