



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Michal Molnár

Subdivision krivky a ich konvergencia

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D.

Studijní program: Matematika pro informační
technologie

Studijní obor: MITP

Praha 2022

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Subdivision krivky a ich konvergencia

Autor: Michal Molnár

Ústav: Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D., Matematický ústav UK

Abstrakt: V tejto práci zhrnieme základné pojmy subdivision sprevádzané ukázkami zaužívaných schém. Prinesieme tiež vlastné implementácie týchto schém. V ďalších častiach definujeme tzv. Exponenciálnu schému, ktorá bude predmetom nášho skúmania a ilustrujeme jej správanie na vlastných obrázkoch. Zameriame sa na vlastnosti kriviek, ktoré táto schéma produkuje. Ako sa ukáže, tieto krivky budú nutne triedy \mathcal{C}^1 . Taktiež zhrnieme pojmy potrebné pre naše skúmanie subdivision kriviek, na ktorých založíme dôkaz potvrdzujúci danú vlastnosť Exponenciálnej schémy.

Klíčová slova: subdivision krivky konvergencia Exponenciálna schéma

Title: Subdivision curves and their convergence

Author: Michal Molnár

Institute: Mathematical Institute

Supervisor: doc. RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D., Mathematical Institute

Abstract: In this thesis we summarize the basic terms of subdivision and accompany them with examples of widely used schemes. We also show our own implementations of those schemes. In further parts we define the so-called Exponential scheme, which will be a subject of our research, and we illustrate it's behavior using our own images. We focus on properties of curves this scheme produces. As we will see, those curves are \mathcal{C}^1 -continuous. We also sum up the terms necessary for our research of subdivision curves, which will form the basis of our proof justifying said property of Exponential scheme.

Keywords: subdivision curves convergence Exponential scheme

Obsah

Úvod	2
1 Základné pojmy	4
1.1 Subdivision	4
1.2 Pojmy popisujúce subdivision proces	6
2 Exponenciálna schéma	9
2.1 Definícia	9
2.2 Pojmy potrebné pre analýzu	11
3 Analýza subdivision schém	13
3.1 Konvergencia subdivision schém	13
3.2 Derivácie subdivision kriviek	15
3.3 Dôkaz konvergence Exponenciálnej schémy	16
Záver	21
Zoznam použitej literatury	22
A Príloha – Implementácie schém	23
A.1 Štvorbodová schéma	23
A.2 Exponenciálna schéma	24
A.3 Chaikinova schéma	25

Úvod

Princíp subdivision predstavuje jeden z mnohých prístupov, ako reprezentovať krivky a plochy. Hladké útvary, tvorené nekonečným počtom bodov, popisuje pomocou dvoch objektov. Prvým je vektor bodov, ktorý vizualizujeme ako lomené čiary, v prípade kriviek, respektíve kontrolná sieť vrcholov, ktorú vizualizujeme nakreslením hrán a stien tejto siete, v prípade povrchov.

Druhým objektom je tzv. subdivision schéma. Tá popisuje postup ako dané vektory, či kontrolné siete zhusťovať. Opakovaná aplikácia tohto procesu by mala viesť ku konvergencii daných objektov k limite, ktorou je potom daný útvar, ktorý chceme reprezentovať.

Subdivision schémy môžu byť rôzne komplexné. Medzi jednoduchšie schémy patria napríklad Chaikinova schéma pre krivky, či Doo-Sabinova pre povrchy. V súčasnosti sa nájdu však aj schémy, ktoré využívajú viac ako len body. Napríklad Chalmovianský a Jüttler (2007) definujú schému pre krivky, ktorá pracuje nielen s bodmi v rovine, ale aj normálovými vektormi. Takýto prístup môže umožniť bližšiu kontrolu nad výslednými krivkami.

Reprezentácia pomocou subdivision je obzvlášť výhodná v počítačovej grafike. Zabezpečuje totiž diskretizáciu spojitých útvarov a zároveň umožňuje definovať rôznorodé krivky a plochy. Skvelou ukážkou spôsobilosti subdivision je krátky animovaný film *Gerihov hra* (Geri's game) z roku 1997. Tvorcovia z Pixaru ho animovali celý použitím subdivision.

V tejto práci sa budeme zaoberať prípadom subdivision kriviek. Ich vlastnosti sú vcelku dobre chápané, no teória okolo nich je o to komplexnejšia. Nás budú zaujímať len základy potrebné na porozumenie subdivision krivkám a ich jednoduchú analýzu. Podrobnejšie poznatky a alternatívne prístupy spisuje vo svojej knihe Sabin (2010).

V prvej kapitole zozbierame základné pojmy potrebné pre formálne zavedenie subdivision. Uvedieme tiež základné spôsoby, ako matematicky reprezentovať subdivision procesy, menovite subdivision maticu a subdivision masku. Na ilustráciu týchto pojmov využijeme vlastnú implementáciu tzv. Štvorbodovej schémy. Tá patrí medzi najznámejšie príklady subdivision schém pre krivky. Správanie procesu späť so štvorbodovou schémou ilustrujeme na vlastných príkladoch.

V druhej časti sa pozrieme na tzv. Exponenciálnu schému. Tá je konkrétnym prípadom schém, ktoré definujú Warren a Weimer (2002) v kapitole 4. Exponenciálnu schému implementujeme a ilustrujeme na príkladoch. Krivky, ktoré definuje, budú triedy C^1 . Keďže sa Warren a Weimer (2002) nezaoberajú dôkazom vlastností daných schém, zostane táto práca na nás. Vo zvyšku kapitoly preto zhrnieme ďalšie pojmy potrebné na analýzu subdivision schém a zavedieme rovnomernú konvergenciu pre tieto schémy.

V tretej kapitole sa následne budeme venovať samotnému dôkazu konvergenzie Exponenciálnej schémy. Využijeme na to analýzu subdivision matic. V úvode kapitoly objasníme pojmy s ňou späté. Následne bez dôkazu preberieme vety 2 a 3 z práce Warren a Weimer (2002). Tie nám udajú postačujúce podmienky na konvergenciu subdivision schém. Zhrnieme tiež teóriu potrebnú na analýzu derivácie subdivision krivky. V samom závere využijeme nadobudnuté poznatky a aplikujeme ich na dôkaz konvergenzie Exponenciálnej schémy. V sérii vlastných lemm

ukážeme jednak existenciu subdivision kriviek, ako aj ich zaradenie do triedy \mathcal{C}^1 .

1. Základné pojmy

1.1 Subdivision

V tejto sekcii definujeme dôležité pojmy a zavedieme značenie, ktoré budeme využívať vo zvyšku práce. Subdivision pracuje s postupnosťami vektorov. Aby sme sa vyhli zmätočnému značeniu, budeme členy postupnosti indexovať dolným indexom (a_k) a entity vektoru horným indexom v zátvorkách ($a^{(i)}$).

Pri subdivision procesoch budeme tiež naše vektory predlžovať. Z tohoto dôvodu budeme pre vektor P značiť $l(P)$ počet jeho prvkov. T. j.

$$P = (P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(l(P))}),$$

kde $P^{(i)}$ je bod v \mathbb{R}^n . Vo zvyšku práce budeme pracovať s \mathbb{R}^2 .

Prejdime teda k prvej definícii.

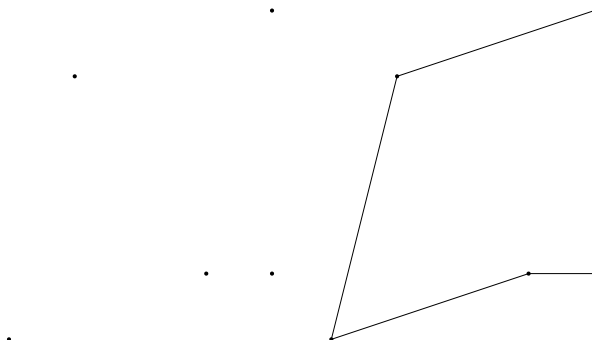
Definícia 1 (Subdivision). *Majme postupnosť $\{P_k\}_{k=0}^\infty$, kde pre každé k je P_k konečný vektor bodov \mathbb{R}^2 a navyše $l(P_{k+1}) > l(P_k)$. Proces, ktorý zo vstupu P_0 postupne počíta aproximácie P_k , sa nazýva subdivision.*

Dôležitým pojmom pre subdivision sú lomené čiary, hlavne tie určené vektormi P_k . Pre zjednodušenie analýzy budeme lomené čiary chápať ako parametrické krivky, teda funkcie z \mathbb{R} do \mathbb{R}^2 . Bodom z P_0 budú prislúchať celočíselné hodnoty parametra, a aby sme sa vyhli zmenám v definičnom obore, budeme toto rozdelenie postupne zhustovať. V tejto práci sa zameriame na tzv. *binárne* schémy, ktoré v každom kroku zdvojnásobia $l(P_k)$. Obecne, ak by sme v každom kroku dostali a -násobne viac bodov, intervaly by sme delili na a častí. Prejdime k formálnej definícii.

Definícia 2 (Lomená čiara). *Lomenou čiarou určenou vektorom P_k , kde $P_k = (P_k^{(0)}, \dots, P_k^{(l(P_k)-1)})$, rozumieme funkciu $p_k: [0, l(P_0) - 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ danú vzťahom*

$$p_k\left(\frac{i + \alpha}{2^k}\right) = (1 - \alpha) \cdot P_k^{(i)} + \alpha \cdot P_k^{(i+1)},$$

pre $i \in \{0, \dots, l(P_k) - 2\}$ a $\alpha \in [0, 1]$.



Obr. 1.1: Body vektoru P_k a lomená čiara p_k .

Na obrázku 1.1 ilustrujeme príklad bodov aj s lomenou čiarou, ktorú určujú.

V tomto momente máme všetko potrebné na definíciu subdivision krivky pomocou bodovej konvergenencie. Práve vlastnosti subdivision kriviek budú predmetom nášho záujmu.

Definícia 3. *Majme postupnosť vektorov bodov P_k , ktorá je daná subdivision procesom. Ďalej, nech p_k je postupnosť lomených čiar takých, že $\forall k \geq 0$ je p_k daná vektorom P_k . Potom subdivision krivku definujeme ako*

$$p_\infty(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} p_k(x), \forall x \in [0, l(P_0) - 1),$$

ak táto limita existuje.

Výsledná krivka p_∞ v praxi môže, ale nemusí byť uzavretá. Lomené čiary p_k dostaneme tak, že úsečkami pospájame body v poradí, v ktorom sa nachádzajú vo vektore P_k . Pre n -prvkový vektor P_k potom vieme lomenú čiaru uzavrieť spojením $P_k^{(l(P_k))}$ a $P_k^{(1)}$.

Bodová konvergenca často nezachováva vlastnosti pôvodných lomených čiar p_k . Obzvlášť dôležitá je pre nás spojitosť krivky a vlastnosti derivácií. Z tohoto hľadiska sa budeme často zaoberať *rovnoumernou konvergenciou*. Tá prenáša spojitosť pôvodných funkcií na ich limitu. Keďže lomené čiary p_k sú spojité, rovnomerná konvergenca zabezpečí, že bude spojitá aj krivka p_∞ .

Povieme, že postupnosť p_k rovnomerne konverguje k p_∞ , ak $\forall \varepsilon > 0 \exists n$, pre ktoré platí

$$\forall k \geq n \quad \forall x \in [0, l(P_0) - 1) : |p_k(x) - p_\infty(x)| < \varepsilon.$$

Konkrétny subdivision proces, ktorý počíta postupnosť P_k , bežne nazývame *subdivision schéma*. Na obrázku 1.2 ukazujeme začiatok postupnosti pre tzv. *Štvorbodovú schému* a výslednú subdivision krivku. Táto schéma, ako jej názov napovedá, počíta nové body využitím štvorice predchádzajúcich bodov. Pôvodné body zachováva a medzi ne vloží afinnú kombináciu okolitých bodov.

Algoritmus 1 Štvorbodová schéma

VSTUP: $P_k, l(P_k) \geq 4$

VÝSTUP: $P_{k+1}, l(P_{k+1}) = 2 \cdot l(P_k)$

for i = 1 to $l(P_k)$ do

$$P_{k+1}^{(2i-1)} := P_k^{(i)}$$

$$P_{k+1}^{(2i)} := -1/16 \cdot P_k^{(i-1 \bmod l(P_k))} + 9/16 \cdot P_k^{(i \bmod l(P_k))} \\ + 9/16 \cdot P_k^{(i+1 \bmod l(P_k))} - 1/16 \cdot P_k^{(i+2 \bmod l(P_k))}$$

return P_{k+1}

Vlastná implementácia v programe Mathematica sa nachádza v prílohe A.1.

Schémy zachovávajúce body z predchádzajúceho kroku nazývame *interpoláčny*. Na obrázku 1.3 porovnávame rozdiely, ktoré nastávajú v jednom kroku Štvorbodovej schémy. Čierne body sa zachovali a boli doplnené o červené.

1.2 Pojmy popisujúce subdivision proces

Existujú dva rôzne spôsoby, ako jednoducho vyjadriť dianie v kroku subdivision. Pre zjednodušenie analýzy zdefinujeme oba. Začneme pohľadom z lineárnej algebry.

Definícia 4 (Matica subdivision). Matica subdivision je (nie nutne konečná) matica S_k , ktorá splňa vzťah

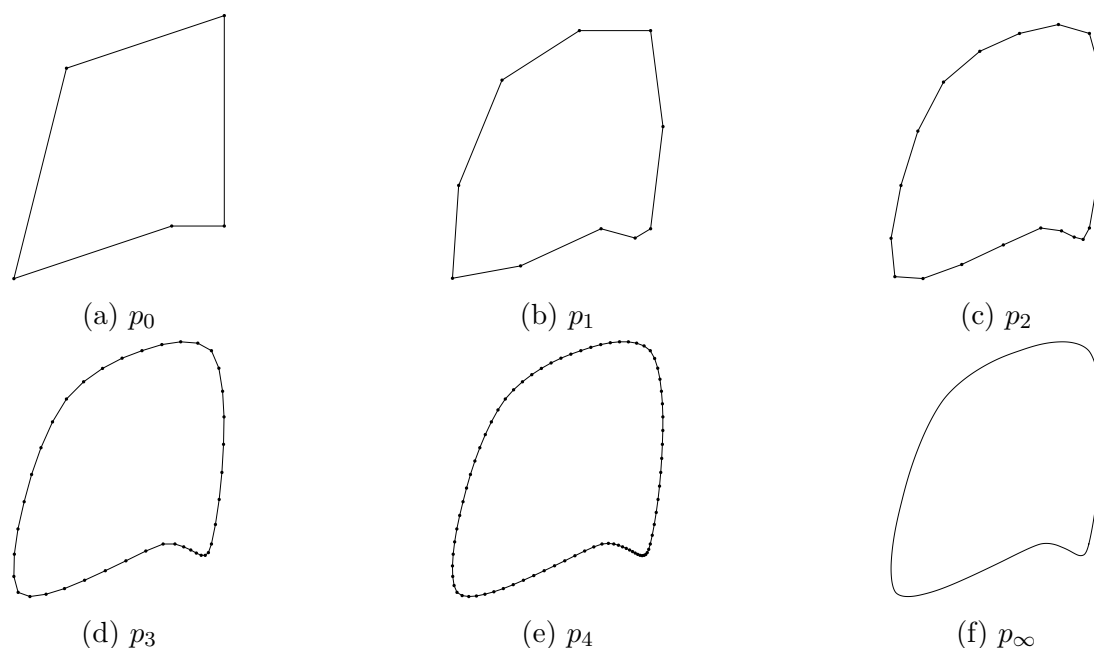
$$P_{k+1} = S_k \cdot P_k,$$

pre nejaké $k \geq 0$.

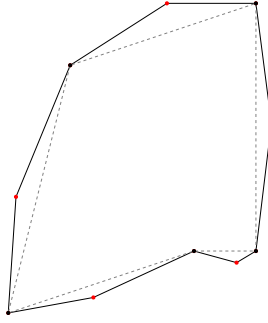
V praxi je hodnota $l(P_0)$ bežne zhora neobmedzená. Rozmery matice teda môžu závisieť na pôvodnom počte bodov. Pre všeobecnú analýzu danej schémy počítame s nekonečnou maticou. Napríklad maticu subdivision pre Štvorbodovú schému vieme napísať ako

$$S_k = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & 9/16 & 9/16 & -1/16 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & -1/16 & 9/16 & 9/16 & -1/16 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & -1/16 & 9/16 & 9/16 & -1/16 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & -1/16 & 9/16 & 9/16 & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Z matice vieme ľahko vyčítať, ako budú vyzeráť nové body. Ľahko z nej zistíme napríklad, či je daná schéma interpolačná – stačí zistiť, či obsahuje riadok



Obr. 1.2: Pôvodný útvar (a), 4 kroky subdivision (b)-(e), a výsledná krivka (f).



Obr. 1.3: Porovnanie zmien po kroku Štvorbodovej schémy. Novovzniknuté body sú zvýraznené červenou, stará lomená čiara je čiarkovane.

s jedinou 1 a samými 0. Alternatívny prístup nám naopak umožní ľahko vidieť vplyv predchádzajúcich bodov. Okrem toho nám zjednoduší prácu s nekonečnými maticami. Najskôr však pre P_k definujeme \tilde{p}_k ako formálny polynóm

$$\tilde{p}_k(x) = \sum_{i=0}^{l(P_k)-1} P_k^{(i)} \cdot x^i.$$

Môžeme si všimnúť, že koeficientami sú body roviny. Práca s týmito polynómami nás vedie k zavedeniu masky.

Definícia 5 (Maska subdivision). *Buď $\tilde{s}_k(x)$ formálny polynóm taký, že pre $k \geq 0$ platí*

$$\tilde{p}_{k+1}(x) = \tilde{s}_k(x) \cdot \tilde{p}_k(x^2).$$

Potom \tilde{s}_k nazývame maska subdivision.

Môžeme si všimnúť dosadenie x^2 do \tilde{p}_k . To vyplýva z práce s binárnymi schémami. Keďže chceme získať dvojnásobok bodov, musíme si na ne spraviť priestor. Pre a -násobné počty bodov by sme zas dosádzali x^a .

Pri našej práci budeme v maskách využívať aj záporné mocniny x . To nám, napríklad pri interpolačných maskách, umožní lepšie znázorniť, akým spôsobom sa bod prejaví v jednotlivých smeroch. Pri maske, podobne ako v prípade matice, musíme dávať pozor na $l(P_k)$. Na všeobecný popis totiž chceme, aby maska subdivision vedela pracovať s nekonečným počtom bodov. Pre konečné P_k potom môžu v \tilde{p}_{k+1} vzniknúť „zvyškové“ členy, ktoré nepredstavujú nijaký bod. Schémy, ktoré pracujú s bodmi cyklicky, sa s týmto vysporiadajú doplnením P_k a P_{k+1} na nekonečné periodické postupnosti.

Opäť si to ilustrujme na Štvorbodovej schéme. Jej subdivision maska je

$$\tilde{s}_k(x) = -1/16x^{-3} + 9/16x^{-1} + 1x^0 + 9/16x^1 - 1/16x^3.$$

Môžeme si všimnúť, že sa jedná o nenulové prvky v stĺpci matice S_k . Maska popisuje, na ktorých pozíciách sa prejaví každý bod $P^{(0)}$. Tomu vždy prislúcha stĺpec matice, ktorým ho násobíme. Keďže sa zaujímame o binárne schémy, stĺpce matice budú vždy oproti predchádzajúcemu posunuté o 2 riadky nižšie. Bod $P^{(i+1)}$ sa totiž vždy prejaví práve s posunom 2 oproti $P^{(i)}$, keďže musíme rátať s 2 novými bodmi. Práve tento poznatok sa nám ešte zíde, keď sa budeme chcieť vyhnúť počítaniu s nekonečnými maticami. Jednoducho danú operáciu prevedieme na počítanie s maskami a výsledok späť na maticu.

Aplikujme teda Štvorbodovú schému na $\tilde{p}(x) = P^{(0)}x^0 + P^{(1)}x^1 + P^{(2)}x^2 + P^{(3)}x^3$ a dostaneme

$$\begin{aligned}\tilde{s}_k(x) \cdot \tilde{p}(x) = & \left(-\frac{1}{16}P^{(0)}\right)x^{-3} + 0x^{-2} + \left(\frac{9}{16}P^{(0)} - \frac{1}{16}P^{(1)}\right)x^{-1} + P^{(0)}x^0 + \\ & + \left(\frac{9}{16}P^{(0)} + \frac{9}{16}P^{(1)} - \frac{1}{16}P^{(2)}\right)x^1 + P^{(1)}x^2 + \\ & + \left(-\frac{1}{16}P^{(0)} + \frac{9}{16}P^{(1)} + \frac{9}{16}P^{(2)} - \frac{1}{16}P^{(3)}\right)x^3 + P^{(2)}x^4 + \\ & + \left(-\frac{1}{16}P^{(1)} + \frac{9}{16}P^{(2)} + \frac{9}{16}P^{(3)}\right)x^5 + P^{(3)}x^6 + \\ & + \left(-\frac{1}{16}P^{(2)} + \frac{9}{16}P^{(3)}\right)x^7 + 0x^8 + \left(-\frac{1}{16}P^{(3)}\right)\end{aligned}$$

Môžeme si všimnúť, že body na krajných pozíciách nemali dostatočný vstup na výpočet podľa definície schémy. Vo výstupe teda môžu byť len body pri x^0, x^2, x^3, x^4 a x^6 . Aby sme nemali prázdne miesta, môžeme zobrať jedine trojicu uprostred. Zo štyroch bodov sme sa dostali k trom. Vidíme, že aby Štvorbodová schéma fungovala, potrebujeme body brať cyklicky. Tam sa ich počet bude zvyšovať ako by sme čakali.

Nakoniec zavedieme ešte jednu, na teraz poslednú, definíciu, ktorá bude rozlišovať správanie schém.

Definícia 6. *Povieme, že subdivision schéma je statická, ak výpočet P_{k+1} z P_k nezáleží na k .*

Inými slovami statické schémy spĺňajú vzťahy

$$\begin{aligned}S_{k+1} &= S_k = S, \\ \tilde{s}_{k+1}(x) &= \tilde{s}_k(x) = \tilde{s}(x),\end{aligned}$$

pre všetky $k \geq 0$. Môžeme si všimnúť, že štvorbodová schéma je statická, keďže vo vyjadrení S_k ani \tilde{s}_k nefiguruje k .

K statickým schémam sa vieme priblížiť aj od schém nestatických. Stačí, aby postupnosť ich matíc mala limitu.

Definícia 7 (Konvergencia postupnosti matíc). *Bud' $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ postupnosť matíc. Povieme, že A_k konverguje k matici A_{∞} , ak $\forall i, j \in \mathbb{Z}$ platí*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k^{(i,j)} = A_{\infty}^{(i,j)}.$$

2. Exponenciálna schéma

2.1 Definícia

Predmetom nášeho bližšieho skúmania bude tzv. Exponenciálna schéma. Tá je daná maskou

$$\tilde{s}_k = \nu_k x^{-2} + (1 - \nu_k)x^{-1} + (1 - \nu_k)x^0 + \nu_k x^1,$$

pre

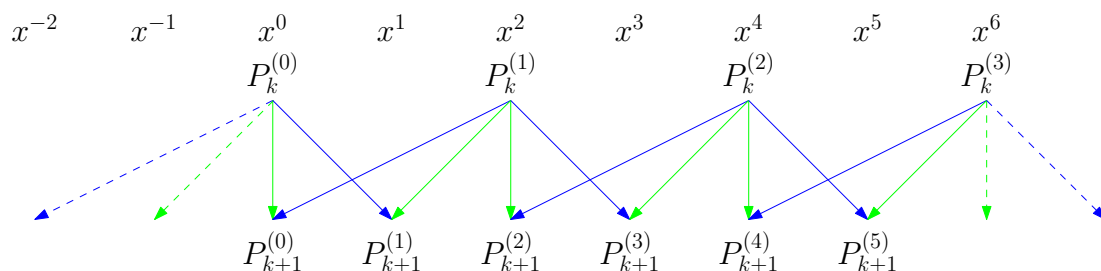
$$\nu_k = \frac{\exp(2^{-1-k})}{(1 + \exp(2^{-1-k}))^2}.$$

Voľba ν_k sa ukáže obzvlášť výhodná v kapitole 3. Tam sa ukáže, že táto postupnosť relatívne rýchlo konverguje k svojej limitnej hodnote. Tento fakt potom využijeme pri dokazovaní vlastností Exponenciálnej schémy. V nasledujúcej tabuľke môžeme vidieť prvých niekoľko hodnôt ν_k .

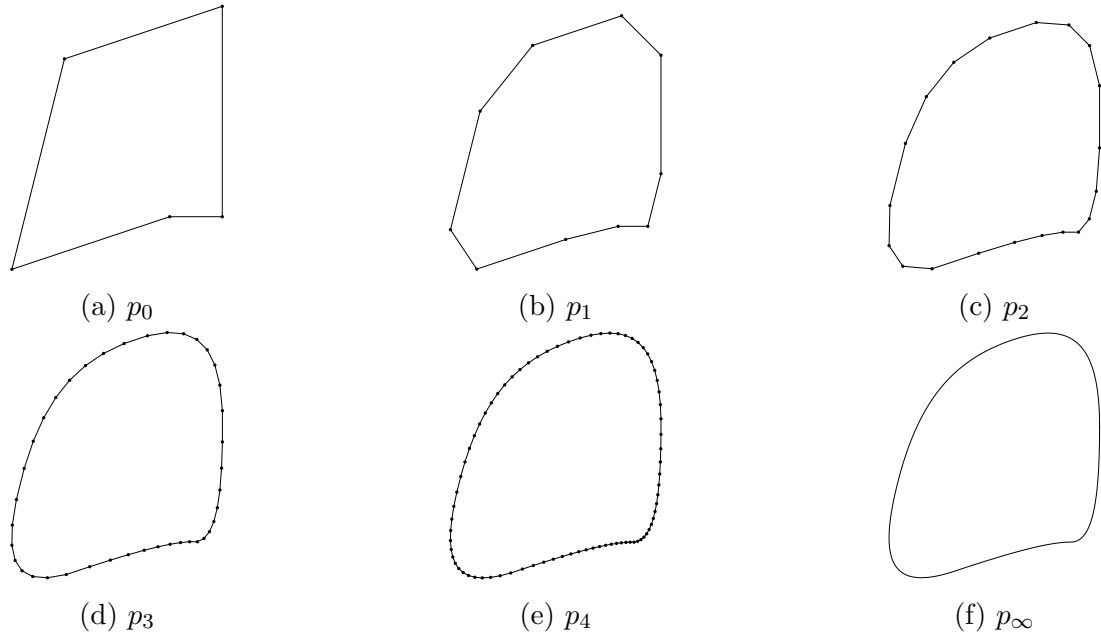
k	ν_k
0	0,2350037
1	0,2461341
2	0,2490260
3	0,2497560

Keďže hodnoty ν_k sa líšia medzi krokmi subdivision, nejedná sa o stacionárnu schému.

Na obrázku 2.1 ilustrujeme, ako sa rozširuje vplyv bodov P_k . Môžeme si všimnúť, že nové body sú afinnou kombináciou dvojice bodov z predchádzajúceho kroku. Taktiež vidíme, že pôvodné body sa nezachovávajú. Lahko odvodíme algoritmus na výpočet bodov.



Obr. 2.1: Modré šípky zodpovedajú násobeniu ν_k , zelené násobeniu $(1 - \nu_k)$.



Obr. 2.2: Pôvodný útvar (a), 4 kroky subdivision (b)-(e) a výsledná krivka (f).

Algoritmus 2 Exponenciálna schéma

VSTUP: $k, P_k, l(P_k) \geq 2$

VÝSTUP: $P_{k+1}, l(P_{k+1}) = 2 \cdot l(P_k)$

```

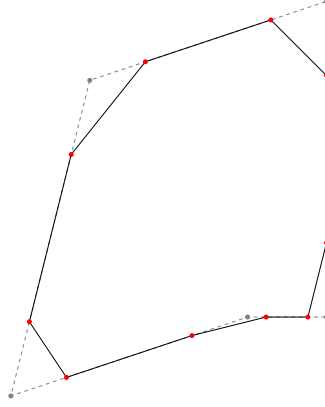
 $\nu_k := \frac{\exp(2^{-1-k})}{(1 + \exp(2^{-1-k}))^2}$ 
for  $i = 0$  to  $l(P_k) - 1$  do
     $P_{k+1}^{(2i)} := (1 - \nu_k) \cdot P_k^{(i \bmod l(P_k))} + \nu_k \cdot P_k^{(i+1 \bmod l(P_k))}$ 
     $P_{k+1}^{(2i+1)} := \nu_k \cdot P_k^{(i \bmod l(P_k))} + (1 - \nu_k) \cdot P_k^{(i+1 \bmod l(P_k))}$ 
return  $P_{k+1}$ 

```

Vlastná implementácia v programe Mathematica sa nachádza v prílohe A.2.

Na obrázku 2.2 predvedieme správanie Exponenciálnej schémy. Začneme s tým istým vstupným vektorom P_0 ako pri Štvorbodovej schéme. Jednotlivé lomené čiary sa však líšia medzi schémami a to isté platí aj pre výslednú krivku p_∞ . Kým Štvorbodová schéma pôvodné body zachovávala, Exponenciálna ich „usekáva“. Nejedná sa teda o interpolačnú schému. Na každej úsečke vznikne nová dvojica krajných bodov, ako zvýrazňujeme na obrázku 2.3.

Keď už vieme, ako počítať nové body, môžeme poľahky odvodiť maticu exponenciálnej schémy. Tá, podobne ako maska, bude závisieť od kroku k subdivision



Obr. 2.3: Porovnanie zmien po kroku Exponenciálnej schémy. Novovzniknuté body sú zvýraznené červenou, stará lomená čiara je čiarkovane.

procesu. Výsledný tvar matice je

$$S_k = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & 1 - \nu_k & \nu_k & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \nu_k & 1 - \nu_k & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 - \nu_k & \nu_k & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \nu_k & 1 - \nu_k & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1 - \nu_k & \nu_k & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \nu_k & 1 - \nu_k & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

2.2 Pojmy potrebné pre analýzu

Pre potreby skúmania konvergenie potrebujeme zdefinovať normu, ktorou budeme merať vzdialenosti funkcií. Rovnako sa nám zídu aj normy určujúce veľkosti vektorov a matic. V našom prípade sú vhodné maximové normy. Definujeme postupne vektorovú a maticovú normu ako

$$\|P\| = \max_i (|P^{(i)}|),$$

$$\|A\| = \max_{P \neq 0} \frac{\|AP\|}{\|P\|},$$

kde $|\cdot|$ je euklidovská norma, keďže pri skúmaní subdivision schém sa nachádzame v \mathbb{R}^2 . Pre túto definíciu vieme ľahko spočítať normu matice len z pohľadu na jej riadky. To bude obzvlášť výhodné pri subdivision maticiach, ktoré sú nekonečné, avšak ich riadky sa periodicky opakujú. Pre poriadok uvedieme nasledujúcu lemmu s vlastným dôkazom.

Lemma 1. *Buď A matica, ktorej každý riadok má obmedzený počet nenulových prvkov. Potom platí*

$$\|A\| = \max_i \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |A^{(i,j)}| \right). \quad (2.1)$$

Dôkaz. Buď P ľubovoľný nenulový vektor. Veľkosť každej jeho zložky vieme zhora odhadnúť $\|P\|$, čím dostaneme vektor P' taký, že $\|P'\| = \|P\|$. Dostávame

$$\|AP\| \leq \|AP'\|.$$

Označme i zložku vektoru AP' takú, že $|(AP')^{(i)}| = \|AP'\|$. Potom platí

$$\begin{aligned} \frac{\|AP\|}{\|P\|} &\leq \frac{\|AP'\|}{\|P'\|} = \frac{|(AP')^{(i)}|}{\|P'\|} \\ &\leq \frac{\sum_{j \in \mathbb{Z}} |A^{(i,j)}| \cdot \|P'\|}{\|P'\|} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} |A^{(i,j)}|. \end{aligned}$$

Stačí nám teda nájsť vektor P , pre ktorý nastane rovnosť. V prvej nerovnosti stačí, aby každá zložka spĺňala $|P^{(j)}| = \|P\|$. Ďalej určíme i také, že hodnota $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |A^{(i,j)}|$ je najväčšia možná. Následne zvolíme $P^{(j)} = (\pm\|P\|, 0)$, kde znamienka určíme tak, aby $A^{(i,j)} \cdot (\pm\|P\|)$ bolo kladné. Tým docielime rovnosť v druhej nerovnosti. □

Keďže budeme skúmať konvergenciu funkcií p_k , definujeme aj pre funkcie normu analogicky

$$\|f\| = \max_x (|f(x)|).$$

Tá nám dáva alternatívnu definíciu rovnomernej konvergenzie. Postupnosť p_k rovnomerne konverguje k p_∞ , ak $\forall \varepsilon > 0 \exists n$ také, že

$$\forall k \geq n: \|p_k - p_\infty\| < \varepsilon.$$

V pôvodnej definícii ε ohraničuje všetky hodnoty $|p_k(x) - p_\infty(x)|$, tu ohraničuje maximum z nich a teda opäť všetky.

V prípade subdivision schém budeme jednoducho hovoriť, že daná schéma rovnomerne konverguje ku krivke p_∞ . Tým budeme myslieť, že táto limitná krivka existuje, ako aj fakt, že lomené čiary p_k k nej konvergujú rovnomerne.

V prípade exponenciálnej schémy to bude krivka triedy \mathcal{C}^1 . V nasledujúcej kapitole si predstavíme prostriedky skúmajúce subdivision schémy, ktoré ďalej použijeme na dôkaz.

3. Analýza subdivision schém

3.1 Konvergenca subdivision schém

Cielom tejto sekcie je overiť rovnomernú konvergenciu subdivision schém. To sa dá mnohými spôsobmi. My budeme skúmať matice a ich vplyv na vzdialenosti bodov. Zavedieme teda pomocné pojmy.

Definícia 8. Diferenčnú masku *definujeme ako formálny polynóm* $\tilde{d}(x) = 1 - x$. Diferenčnú maticu *definujeme ako*

$$D = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Ďalej označíme T_k maticu danú vzťahom

$$DS_k = T_k D.$$

Keď diferenčnou maskou vynásobíme \tilde{p}_k , dostaneme polynóm, ktorého koeficienty sú rozdiely dvoch po sebe idúcich bodov. Diferenčná matica má rovnakú funkciu, avšak pre vektory bodov. Tieto dva pojmy nám zjednodušia zápis.

Matica T_k bude o niečo dôležitejšia. Použitím definičného vzťahu na vektor P_k dostaneme

$$T_k DP_k = DS_k P_k = DP_{k+1}.$$

Vidíme, že matica T_k je subdivision maticou pre vektory DP_k .

Než sa presunieme k vetám, ktoré nám umožnia analyzovať správanie schémy, ukážeme ešte, ako odvodiť tvar matice T_k . Využijeme masky, aby sme sa vyhli počítaniu s nekonečnými maticami. Maska \tilde{t}_k musí spĺňať vzťah

$$\tilde{d}(x)\tilde{p}_{k+1}(x) = \tilde{t}_k(x)\tilde{d}(x^2)\tilde{p}_k(x^2).$$

Dosadením priamo z definície masky subdivision dostaneme

$$\tilde{d}(x)\tilde{s}_k(x)\tilde{p}_k(x^2) = \tilde{t}_k(x)\tilde{d}(x^2)\tilde{p}_k(x^2),$$

odkiaľ vieme vykrátiť $\tilde{p}_k(x^2)$ a $\tilde{d}(x) = 1 - x$. Výsledné vyjadrenie tak bude

$$\tilde{t}_k(x) = \frac{\tilde{s}_k(x)}{1+x}.$$

Môžeme si všimnúť, že tento prístup funguje len vtedy, keď je maska $\tilde{s}(x)$ deliteľná $1+x$. V opačnom prípade sa k rozumnému vyjadreniu nedostaneme.

Na druhej strane to nie je nijak zvlášť zväzujúci predpoklad. Aby $\tilde{s}(-1) = 0$, potrebujeme, aby koeficienty na párnych pozíciách a nepárnych pozíciách mali rovnaký súčet. Zo vzťahu matice a masky vieme, že každý riadok matice S_k je tvorený buď všetkými koeficientami na párnych alebo všetkými na nepárnych pozíciách \tilde{s}_k . Požadujeme teda, aby všetky riadky matice subdivision mali rovnaký súčet svojich prvkov.

Pre náš postup budeme potrebovať najprv určiť podmienku pre rovnomernú konvergenciu stacionárnych schém. To nám umožní nasledujúca prebratá veta.

Veta 2 (Postačujúca podmienka na rovnomernú konvergenciu stacionárnych schém). *Buď T matica spĺňajúca $DS = TD$. Potom ak $\|T\| < 1$, tak stacionárna subdivision schéma daná maticou S rovnomerne konverguje pre každý vstupný vektor P_0 .*

Dôkaz. Vid Warren a Weimer (2002), sekcia 3.2, str. 73-74. □

Vetu demonštrujeme na príklade Štvorbodovej schémy. Ako vieme, tá je daná maskou $\tilde{s}(x) = -1/16x^{-3} + 9/16x^{-1} + 1x^0 + 9/16x^1 - 1/16x^3$. Odtiaľ dostaneme

$$\tilde{t}(x) = \frac{\tilde{s}(x)}{1+x} = -\frac{1}{16}x^{-3} + \frac{1}{16}x^{-2} + \frac{1}{2}x^{-1} + \frac{1}{2}x^0 + \frac{1}{16}x^1 - \frac{1}{16}x^2.$$

Matica T bude potom tvaru

$$T = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & 1/16 & 1/2 & -1/16 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & -1/16 & 1/2 & 1/16 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1/16 & 1/2 & -1/16 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & -1/16 & 1/2 & 1/16 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1/16 & 1/2 & -1/16 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & -1/16 & 1/2 & 1/16 & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Na riadkoch sú vždy tri nenulové členy: $-1/16, 1/2$ a $1/16$. Podľa Lemmy 1 dostaneme $\|T\| = 5/8 < 1$, takže Štvorbodová schéma skutočne rovnomerne konverguje.

Pre nestacionárne schémy je však postup o niečo ťažší. Keďže sa v rôznych krokoch rôznia matice subdivision, treba uvažovať inak. Jednou z vhodných vlastností je, ak matice subdivision konvergujú ku konkrétnej matici. Tá potom definuje nejakú stacionárnu subdivision schému a to vieme využiť.

Veta 3 (Postačujúce podmienky na rovnomernú konvergenciu subdivision schémy). *Majme subdivision schému s maticami $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$. Nech táto postupnosť matíc konverguje k S_{∞} a navyše spĺňa nasledovné:*

- *Existujú $0 < \alpha < 1$ a $\beta > 0$ také, že $\|S_k - S_{\infty}\| < \beta\alpha^k$, pre každé k .*
- *Stacionárna subdivision schéma daná S_{∞} rovnomerne konverguje.*

Potom rovnomerne konverguje aj schéma daná postupnosťou S_k pre ľubovoľnú voľbu počiatočných bodov P_0 .

Dôkaz. Vid Warren a Weimer (2002), sekcia 4.4, str. 116-118. □

3.2 Derivácie subdivision kriviek

Predchádzajúca sekcia nám dala prostriedky potrebné na overenie, že daná subdivision schéma rovnomerne konverguje. O vlastnostiach výslednej subdivision krivky p_∞ však nehovorí nič. Budeme preto potrebovať ďalšie nástroje na overenie, že Exponenciálna schéma skutočne rovnomerne konverguje k \mathcal{C}^1 krivke. Využijeme nasledujúcu vlastnosť rovnomernej konvergencie.

Veta 4. *Buď $f_k(x)$ postupnosť funkcií, ktorá rovnomerne konverguje k funkcií $f_\infty(x)$. Ak aj postupnosť $f'_k(x)$ rovnomerne konverguje k nejakej funkcii $g(x)$, potom je g deriváciou f_∞ .*

Dôkaz. Vid' Warren a Weimer (2002), sekcia 3.1, str. 68-69. □

To znamená, že nám stačí zamerať sa na postupnosť derivácií p'_k . Ak ukážeme, že rovnomerne konverguje, dostaneme to, čo sme potrebovali. Využijeme, že už vieme dokázať rovnomernú konvergenciu subdivision schémy.

Na začiatok uvážme definíciu derivácie. Tá je daná vzorcom

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-t)}{t}.$$

Dosadením $1/2^l$ miesto t dostaneme ekvivalentný vzťah

$$f'(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} 2^l \cdot \left(f(x) - f\left(x - \frac{1}{2^l}\right) \right).$$

Počítajme teda pre $i \in \mathbb{Z}$ a $\alpha \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} p'_k\left(\frac{i+\alpha}{2^k}\right) &= \lim_{l \rightarrow \infty} 2^l \cdot \left(p_k\left(\frac{i+\alpha}{2^k}\right) - p_k\left(\frac{i+\alpha-2^{k-l}}{2^k}\right) \right) \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} 2^l \cdot \left((1-\alpha) \cdot P_k^{(i)} + \alpha \cdot P_k^{(i+1)} - \right. \\ &\quad \left. - ((1-\alpha+2^{k-l}) \cdot P_k^{(i)} + (\alpha-2^{k-l}) \cdot P_k^{(i+1)}) \right) \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} -2^k \cdot P_k^{(i)} + 2^k \cdot P_k^{(i+1)} = 2^k \cdot (P_k^{(i+1)} - P_k^{(i)}). \end{aligned}$$

Hodnoty derivácií medzi jednotlivými bodmi vieme zapísať vektorom $P'_k = 2^k DP_k$. V miestach prislúchajúcich $\alpha = 0$ máme definované len pravé a ľavé derivácie. Rozdiel ich hodnôt bude pre i rovný $P'_k^{(i)} - P'_k^{(i+1)}$. Opäť chceme skúmať $\|DP'_k\|$.

Definujme teda maticu T_k danú vzťahom

$$2DS_k = T_k D.$$

Aplikáciou na $2^k P_k$ dostaneme

$$T_k 2^k DP_k = 2^{k+1} DS_k P_k = 2^{k+1} DP_{k+1}.$$

Matica T_k je teda maticou subdivision pre vektory $P'_k = 2^k DP_k$. Ak na takúto subdivision schému aplikujeme postup z predošlej sekcie, ukážeme jej rovnomernú konvergenciu.

Odvodíme ešte masku \tilde{t}_k , aby sme nemuseli násobiť nekonečné matice. Podobne ako v predošlej sekcii začneme vzťahom

$$2^{k+1}\tilde{d}(x)\tilde{s}_k(x)\tilde{p}_k(x^2) = \tilde{t}_k(x)2^k\tilde{d}(x^2)\tilde{p}_k(x^2),$$

odkiaľ vyjadríme

$$\tilde{t}_k(x) = \frac{2\tilde{s}_k(x)}{1+x}.$$

3.3 Dôkaz konvergencie Exponenciálnej schémy

V tejto sekcii postupne vybudujeme dôkaz vety 8 ako sériu vlastných lemm aj s ich dôkazmi. Začneme overením podmienok vety 3, ktorú použijeme na overenie, či Exponenciálna schéma vôbec rovnomerne konverguje.

Lemma 5. *Bud' S_k postupnosť matíc subdivision Exponenciálnej schémy. Potom S_k konverguje k matici*

$$S_\infty = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Navyše pre každé $k \geq 0$ platí

$$\|S_k - S_\infty\| < \frac{1}{32} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k.$$

Dôkaz. Pripomeňme si, že tvar matice subdivision pre exponenciálnu schému je

$$S_k = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & 1 - \nu_k & \nu_k & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \nu_k & 1 - \nu_k & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 - \nu_k & \nu_k & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \nu_k & 1 - \nu_k & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1 - \nu_k & \nu_k & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \nu_k & 1 - \nu_k & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Na dôkaz konvergencie nám stačí ukázať, že $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k = 1/4$. Platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 2^{-1-k} = 0.$$

Keďže exponenciála je v 0 spojitá, dostávame $\lim_{k \rightarrow \infty} \exp(2^{-1-k}) = 1$. Odtiaľ už ľahko

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\exp(2^{-1-k})}{(1 + \exp(2^{-1-k}))^2} = \frac{1}{4}.$$

Pre výpočet $\|S_k - S_\infty\|$ využijeme Lemma 1. Matica $S_k - S_\infty$ má v každom riadku dve nenulové hodnoty, konkrétne $(1 - \nu_k) - 3/4$ a $1/4 - \nu_k$. Norma teda bude

$$\|S_k - S_\infty\| = |1 - \nu_k - 3/4| + |\nu_k - 1/4| = 2 \cdot |\nu_k - 1/4|.$$

Rozpíšeme

$$\begin{aligned} \|S_k - S_\infty\| &= 2 \cdot \left| \nu_k - \frac{1}{4} \right|, \\ &= \left| \frac{4 \cdot \exp(2^{-1-k}) - (1 + \exp(2^{-1-k}))^2}{2 \cdot (1 + \exp(2^{-1-k}))^2} \right|, \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{-(1 - \exp(2^{-1-k}))^2}{(1 + \exp(2^{-1-k}))^2} \right|, \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1 - \exp(2^{-1-k})}{1 + \exp(2^{-1-k})} \right)^2. \end{aligned}$$

Ďalej budeme upravovať člen v zátvorke. Využijeme, že

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{1+x} - 1$$

a nerovnosť $\exp(x) \geq x + 1$. Upravujeme

$$\begin{aligned} \left| \frac{1 - \exp(2^{-1-k})}{1 + \exp(2^{-1-k})} \right| &= \left| \frac{2}{1 + \exp(2^{-1-k})} - 1 \right|, \\ &\leq \left| \frac{2}{2 + 2^{-1-k}} - 1 \right|, \\ &= \left| \frac{2^{-1-k}}{2 + 2^{-1-k}} \right| = \left| \frac{1}{4 \cdot 2^k + 1} \right|. \end{aligned}$$

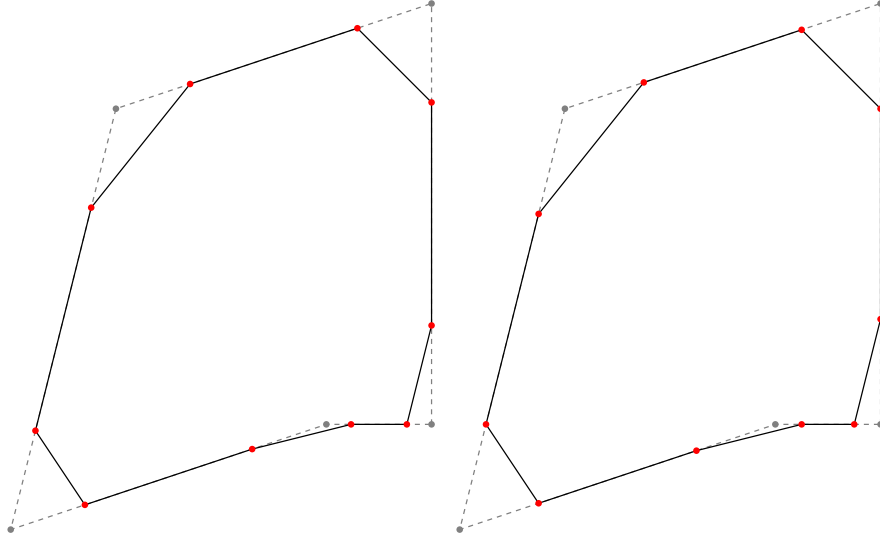
Dosadením do pôvodného dostávame

$$\begin{aligned} \|S_k - S_\infty\| &\leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot 2^k + 1} \right)^2, \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16 \cdot 2^{2k} + 8 \cdot 2^k + 1}, \\ &< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16 \cdot 2^{2k}} = \frac{1}{32} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^k \end{aligned}$$

čo sme chceli dokázať. □

Môžeme si všimnúť, že na rovnomernú konvergenciu Exponenciálnej schémy nám stačí už len ukázať, že stacionárna schéma daná maticou S_∞ rovnomerne konverguje. Následne sa budeme zaoberať už len vlastnosťami derivácií, aby sme overili, že p_∞ bude skutočne triedy \mathcal{C}^1 .

Stacionárna schéma daná našou limitnou maticiou S_∞ sa nazýva *Chaikinova schéma*. Vlastná implementácia tejto schémy v programe Mathematica sa nachádza v prílohe A.3. Obrázok 3.1 ilustruje podobnosť medzi prvým krokom Exponenciálnej a krokmi Chaikinovej schémy. O Chaikinovej schéme sa dá dokázať, že sama o sebe rovnomerne konverguje k \mathcal{C}^2 krivkám. Pre náš prípad stačí overiť, že vôbec rovnomerne konverguje.



Obr. 3.1: Porovnanie zmien v kroku Exponenciálnej schémy (vľavo) a Chaikinovej schémy (vpravo). Novovzniknuté body sú zvýraznené červenou, stará lomená čiara je čiarkovane.

Lemma 6. *Chaikinova schéma rovnomerne konverguje.*

Dôkaz. Maska Chaikinovej schémy je v tvare

$$\tilde{s}_k(x) = \frac{1}{4}x^0 + \frac{3}{4}x^1 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^3 = \frac{1}{4} \cdot (1+x)^3.$$

Odtiaľ dostaneme

$$\tilde{t}(x) = \frac{1}{4} \cdot (1+x)^2 = \frac{1}{4}x^0 + \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{4}x^2,$$

čo vedie k matici

$$T = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1/2 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1/2 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 1/2 & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Pomocou Lemma 1 vypočítame $\|T\| = 1/2 < 1$. Chaikinova schéma teda skutočne rovnoemerne konverguje podľa vety 2.

□

Na overenie, či je výsledná krivka p_∞ skutočne triedy \mathcal{C}^1 skonštruujeme matice T_k pre derivácie. Pri výslednej subdivision schéme zopakujeme postup na overenie jej rovnomernej konvergencie, opäť podľa vety 3.

Vieme teda, že

$$\tilde{t}_k(x) = \frac{2\tilde{s}_k(x)}{1+x} = 2\nu_k x^0 + (2 - 4\nu_k)x^1 + 2\nu_k x^2.$$

Výsledná matica je potom tvaru

$$T_k = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & 2\nu_k & 2\nu_k & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 2 - 4\nu_k & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 2\nu_k & 2\nu_k & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 2 - 4\nu_k & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 2\nu_k & 2\nu_k & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 2 - 4\nu_k & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Lemma 7. *Subdivision schéma daná maticami T_k rovnomerne konverguje.*

Dôkaz. Využitím $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k = 1/4$ dostaneme tvar limitnej matice

$$T_\infty = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Nás zaujíma norma matice $T_k - T_\infty$, ktorá má na riadkoch nenulové členy buď $2\nu_k - 1/2$ (dvakrát), alebo $1 - 4\nu_k$. Výsledná norma bude $|1 - 4\nu_k|$. Môžeme si všimnúť, že to je rovné dvojnásobku $\|S_k - S_\infty\|$. Platí teda

$$\|T_k - T_\infty\| = 2 \cdot \|S_k - S_\infty\| < \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k.$$

Teraz overíme, že stacionárna schéma daná T_∞ rovnomerne konverguje. Vidíme, že jej maska je $\tilde{t}_\infty(x) = 1/2 \cdot (1+x)^2$. Odtiaľ dostaneme

$$\tilde{u}(x) = 1/2x^0 + 1/2x^1.$$

Maske zodpovedá matica

$$U = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1/2 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1/2 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1/2 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1/2 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 1/2 & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

s normou triviálne $\|U\| = 1/2 < 1$. Takže schémy dané T_∞ aj T_k rovnomerne konvergujú. □

Dôsledkom je nasledujúca veta, ktorá zhrnie vlastnosti Exponenciálnej schémy.

Veta 8. *Exponenciálna schéma rovnomerne konverguje ku krivke p_∞ triedy C^1 pre každú voľbu počiatočného vektoru P_0 .*

Dôkaz. Buď S_k postupnosť subdivision matíc Exponenciálnej schémy. Podľa lemy 5 tieto matice konvergujú k matici S_∞ takej, že $\|S_k - S_\infty\| < 1/32 \cdot (1/4)^k$. Podľa lemy 6 matica S_∞ definuje stacionárnu schému, ktorá rovnomerne konverguje. Tým sú overené podmienky vety 3, podľa ktorej Exponenciálna schéma tiež rovnomerne konverguje.

Ďalej buď T_k postupnosť matíc spĺňajúcich $2DS_k = T_k D$. Z lemy 7 vyplýva, že tieto matice definujú rovnomerne konvergentnú subdivision schému. □

Záver

V práci sme zhrnuli prostriedky potrebné na prácu so subdivision schémami. Okrem základných pojmov sme usporiadali aj myšlienky potrebné na analýzu týchto schém. Myšlienky analýzy subdivision matíc sme tiež využili pri skúmaní vlastností Exponenciálnej schémy. Podarilo sa nám dokázať, že konverguje ku krivkám triedy \mathcal{C}^1 . Okrem toho sme úspešne demonštrovali vlastnú implementáciu niekoľkých dôležitých schém, vrátane Exponenciálnej.

Prirodzenou otázkou zostáva horná hranica spojitosti Exponenciálnej schémy. Náš postup nám umožnil ukázať, že ňou vieme reprezentovať krivky triedy \mathcal{C}^1 , no o potenciálnych \mathcal{C}^2 krivkách nevieme nič. Možným pokračovaním práce by bolo ukázanie ďalších spôsobov analýzy subdivision. To by mohlo zodpovedať aj ďalšie otázky, napríklad, či existujú vektory P_0 , pre ktoré Exponenciálna schéma konverguje ku krivkám \mathcal{C}^2 , či \mathcal{C}^3 , prípadne, kde je horná hranica.

Iným smerom by sa dalo pokračovať k subdivision schémam pre plochy. Zistiť, čo by sa dalo povedať o ich konvergencii, a nájsť paralely s prípadom kriviek.

Zoznam použitej literatury

CHALMOVIANSKÝ, P. a JÜTTLER, B. (2007). A non-linear circle-preserving subdivision scheme. *Advances in Computational Mathematics*, **27**, 375–400.

SABIN, M. (2010). *Analysis and Design of Univariate Subdivision Schemes*. Springer, Berlin. ISBN 978-3-642-13647-1.

WARREN, J. a WEIMER, H. (2002). *Subdivision Methods for Geometric Design*. Second Edition. Morgan Kaufmann, San Francisco. ISBN 1-55860-446-4.

A. Príloha – Implementácie schém

A.1 Štvorbodová schéma

```
FourPointSchemeStep[inPoints_] := (  
  n = Length[inPoints];  
  cyclicPoints = inPoints;  
  For[i = 0, i < 3, i++, (  
    PrependTo[cyclicPoints, inPoints[[n - i]]];  
    AppendTo[cyclicPoints, inPoints[[i + 1]]];  
  )];  
  AppendTo[cyclicPoints, inPoints[[4]]];  
  Result = {};  
  For[i = 1, i <= n, i++, (  
    AppendTo[Result, inPoints[[i]]];  
    AppendTo[Result, -1/16*cyclicPoints[[i + 2]]  
      + 9/16*cyclicPoints[[i + 3]]  
      + 9/16*cyclicPoints[[i + 4]]  
      - 1/16*cyclicPoints[[i + 5]]];  
  )];  
  Return[Result]  
);
```

A.2 Exponenciálna schéma

```
ExponentialSchemeStep[inPoints_, step_] := (  
  n = Length[inPoints];  
  Ni = E^(2^(-step - 1))/(1 + E^(2^(-step - 1)))^2;  
  cyclicPoints = inPoints;  
  AppendTo[cyclicPoints, inPoints[[1]]];  
  Result = {};  
  For[i = 1, i <= n, i++, (  
    AppendTo[Result, (1-Ni)*cyclicPoints[[i]]  
      + Ni*cyclicPoints[[i+1]]];  
    AppendTo[Result, Ni*cyclicPoints[[i]]  
      + (1-Ni)*cyclicPoints[[i+1]]];  
  )];  
  Return[Result];  
);
```

A.3 Chaikinova schéma

```
ChaikinSchemeStep[inPoints_] := (  
  n = Length[inPoints];  
  cyclicPoints = inPoints;  
  AppendTo[cyclicPoints, inPoints[[1]]];  
  Result = {};  
  For[i = 1, i <= n, i++, (  
    AppendTo[Result, 3/4*cyclicPoints[[i]]  
              + 1/4*cyclicPoints[[i + 1]]];  
    AppendTo[Result, 1/4*cyclicPoints[[i]]  
              + 3/4*cyclicPoints[[i + 1]]];  
  );  
  Return[Result];  
);
```