

# Posudek diplomové práce

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy

**Autor práce** Vít Fojtík  
**Název práce** Aproximace funkcí spojitých na kompaktní množině vrstevnatými neuronovými sítěmi  
**Rok odevzdání** 2022  
**Studijní program** Informatika    **Studijní obor** Umělá inteligence

**Autor posudku** Ing. František Hakl, CSc.    **Role** vedoucí diplomové práce  
**Pracoviště** Oddělení strojového učení, Ústav informatiky AV ČR, Praha

## Text posudku:

Práce je zaměřena na konstruktivní důkazy universálních schopností vrstevnatých neuronových sítí libovolně přesně aproximovat spojité funkce na kompaktní množině Eukleidovského prostoru. Pro studium těchto vlastností neuronových sítí je používáno více přístupů, které autor stručně nastínil v první rešeršní části práce. Tyto přístupy využívají vybrané poznatky z matematické analýzy a z funkcionální analýzy, ale nemají konstruktivní charakter, kterým by bylo možno odhadnout velikost sítí pro předem danou požadovanou přesnost aproximace.

Odborné těžiště diplomové práce je obsaženo ve druhé části, která je věnována explicitnímu odhadu horní hranice počtu neuronů ve skryté vrstvě neuronové sítě s jednou skrytou vrstvou. Východiskem pro tuto analýzu je důkaz univerzálnosti aproximace přes Stone-Weierstrašovu větu, která umožňuje přenést aproximační vlastnosti z prostoru jedné dimenze do vícerozměrného prostoru pro funkce v jejichž argumentu je skalární součin vstupního vektoru s vektory parametrů - vahami v terminologii neuronových sítí. Ve známých podobách důkazu SW věty není prostor pro stanovení horního odhadu počtu výpočetních jednotek sítě. Na doporučení vedoucího práce byly analyzovány možnosti využití méně známého postupu důkazu SW věty navrženého dvojicí autorů Brosowski a Deutch (BD 1981) s vícenásobným využitím Bernoulliho nerovnosti. Nekonstruktivní metodu použitou v Brosowski-Deutsch důkazu SW věty rozvinul autor do přímé konstrukce, ve které je lokálně hodnota funkce v okolí daného bodu aproximována funkcí konstantní na polytopu. Dále autor vytvořil postup pro celkový odhad počtu výpočetních jednotek neuronové sítě využívající teorii geometrických mřížek. Na závěr naznačil možnost alternativní metody založené na Vitaliho tvrzení o pokrytí.

V závěru práce diskutovaný odvozený odhad potřebného počtu neuronů v neuronové síti (výraz 2.12) platí pro aproximaci obecné spojité funkce na kompaktu a je blízký nejrelevantnějšímu

dosud známému odhadu (výraz 2.13) odvozeného Mhaskarem pro užší třídu funkcí se spojitými derivacemi až do řádu  $k$ , oproti kterému se liší v exponentu u převrácené hodnoty parametru  $\epsilon$ . Tento dosažený výsledek je prvním výsledkem použité metody pro získání odhadu velikosti počtu neuronů sítě s jednou vrstvou a jak je dále diskutováno v závěru práce, ukazují se možnosti dalšího vylepšení odhadu 2.12 a to v různých fázích jeho důkazu, což je slibným impulzem pro rozvíjení aproximační teorie umělých neuronových sítí v naznačených směrech.

Jsem přesvědčen, že předkládaná práce má dva prokazatelné aspekty.

První aspekt autorský ukazuje vysokou odbornou autonomii autora práce, jeho schopnost širokého náhledu na řešení zadaného tématu. Na základě této schopnosti autor dohledal a pospojoval vybrané teoretické poznatky kombinatorické geometrie a vhodně je uplatnil v netriviálních důkazech odhadu velikosti sítě. Autor v práci prokázal také své schopnosti pro detailní exaktní rozpracování daných témat. Z vyše zmíněných důvodů odborný přístup a přínos autora považuji za velmi nadstandardní.

Druhým aspektem, který zmíním, je velký potenciál odborného impaktu práce na rozvoj teoretických poznatků týkajících se složitosti mělkých neuronových sítí. Témata řešená v práci a jednotlivé důkazní postupy jsou inspirativní pro další teoretické úvahy směřované jak na zpřesnění odhadů pro obecný případ aproximovaných funkcí, tak i pro odvození specifických odhadů pro zúžené třídy funkcí.

Z těchto důvodů

**práci doporučuji k obhajobě.**

**Práci navrhuji na zvláštní ocenění,**

z důvodu toho, že předkládaná práce získala první cenu v sekci I2 Mezinárodní soutěže studentů vysokých škol v matematice a informatice (SVOČ) v Bratislavě ve dnech 22.–24. května 2022, což naznačuje vysokou kvalitu a přínos této diplomové práce.

V Praze dne 31. 5. 2022

Podpis: