**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA**
**Univerzita Karlova**


**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**


Pavel Berkman


# Sčítací metody


Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Luboš Pick, CSc., DSc.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika



Praha 2021

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ............ dne ............ ..................................

Podpis autora

# Poděkování

Na tomto místě bych rád srdečně poděkoval panu prof. RNDr. Luboši Pickovi, CSc., DSc. za odborné vedení mé bakalářské práce, za cenné rady, veškerou ochotu a čas, který mi věnoval.

Název práce: Sčítací metody

Autor: Pavel Berkman

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Luboš Pick, CSc., DSc., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: *V předložené práci se zabýváme studiem limitovacích (resp. sčítacích) metod. V práci je problematika rozložena do dvou hlavních částí, a to na poznatky zaměřené na elementárnější limitovací metody, kterými jsou například Huttonova, Cesàrova a Abelova metoda, a na metody, které předchozí zobecňují, například třída maticových limitovacích metod. Důležitým pilířem je potom Toeplitzova věta, která charakterisuje regulární maticové metody. Současně v práci zavádíme pojem nevlastní regularity, který následně zkoumáme na jednotlivých metodách. Rozšiřujeme tak své poznatky o jejich poli konvergence. Zejména se pak zabýváme Huttonovou limitovací metodou, u které předkládáme i některé vlastní výsledky. Veškeré získané poznatky jsou pro lepší pochopení ilustrovány na konkrétních příkladech.*

Klíčová slova: sčítací metody, Huttonova limitovací metoda, Cesàrova limitovací metoda, Abelova limitovací metoda, maticové limitovací metody, Toeplitzova věta.

Title: Summing methods

Author: Pavel Berkman

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: prof. RNDr. Luboš Pick, CSc., DSc., Department of Mathematical Analysis

Abstract: *In the given thesis, we study limiting (summation) methods. The problems are divided into two main groups, the first one focusing on elementary limiting methods, and the second one dealing with methods which generalise those from the first group, for instance the class of matrix limiting methods. The base of the thesis is the Toeplitz theorem, which characterises regular matrix methods. Furthermore, we invent the term improper regularity, which we subsequently apply to individual methods. By doing that we extend our knowledge of their field of convergence. We especially deal with Hutton's method, where we present some of our own results. All findings are illustrated with examples for better understanding.*

Keywords: summation methods, Hutton's summation method, Cesàro summation method, Abel summation, matrix limiting methods, Toeplitz theorem.

# Obsah

**Úvod** **2**

**1 Limitovací metody** **5**
1.1 Základní pojmy . . . 5
1.2 Tři klasické limitovací metody . . . 6
1.3 Nevlastní regularita . . . 23

**2 Limitovací metody definované pomocí lineárních transformací** **25**
2.1 Lineární transformace . . . 25
2.2 Silverman - Steinhaus - Toeplitzova věta o regularitě . . . 26
2.3 Speciální maticové limitovací metody . . . 30

**Seznam použité literatury** **39**

# Úvod

## Historie

Problémem spojeným s nekonečnem se zabývali mnozí filosofové a matematici. Myšlenka, že nekonečně mnoho čísel je možné sečíst ke konečnému součtu, byla rozporuplná.

Například Zenon z Eleje došel k neexistenci pohybu na základě domněnky, že nekonečné sčítání kladných čísel nemůže za žádné okolnosti vést ke konečné hodnotě. Zenonova myšlenka veskrze spočívala v úvaze, že pokud se chceme pohnout z jednoho bodu do druhého, musíme překonat určitou vzdálenost, než však tuto vzdálenost zdoláme, musíme se nejdříve dostat přes její polovinu. Pokud tuto myšlenku budeme opakovat, dojdeme k tomu, že abychom ušli například jeden metr, musíme nejdříve ujít půl metru, než budeme moci ujít polovinu metru, musíme ujít čtvrtinu a takto do nekonečna. Pokud ale není možné při nekonečném součtu získat jinou hodnotu než nekonečnou, není ani možné se hýbat. Při každém pohybu bychom museli překonat nekonečně dlouhou dráhu.

Jeden z úspěšných pokusů o součet nekonečné řady provedl Archimédés ve svém díle Kvadratura paraboly. Archimédés dokázal, že plochu ohraničenou parabolou a přímkou lze vyjádřit jako 4/3 násobku plochy vepsaného trojúhelníku. Následně interpretoval celý problém jako součet nekonečné řady a došel k závěru, že $1 + 1/4 + 1/16 + \cdots = 4/3$.

Úspěšných pokusů přibývalo, až se kolem roku 1350 podařilo R. Swinesheadovi sečíst první negeometrickou nekonečnou řadu. Swineshead řeší následující fyzikální úlohu:

*Jaká je průměrná rychlost $v$ hmotného bodu s počáteční rychlostí $v_0$ v časovém intervalu $t \in [0,1]$, který se pohybuje během první poloviny časového intervalu konstantní rychlostí, během další čtvrtiny intervalu rychlostí dvojnásobnou než na počátku, během dlaší osminy intervalu pak rychlostí, která je trojnásobkem počáteční a tak dále.*

A dochází k závěru, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2.$$

Ve druhé polovině 17. století vzniká teorie nekonečných řad společně s utvářením infinitezimálního počtu. V této době se nekonečnými řadami zabývají velikáni jako Newton, Leibniz, Bernoulli, Lagrange, Euler a mnoho dalších.

Problémem bylo, že pojem konvergence nebyl přesně definován. Většina dosažených výsledků na poli nekonečných řad byla odvozena na základě algebraických metod. Toto vedlo k ne zcela správným závěrům.

Příkladem je práce italského matematika Guida Grandiho (1671–1742). Jeho zájmem byla řada

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n,$$

která je dnes známá pod názvem „Grandiho řada“. Grandi dochází při sčítání této řady k dvěma odlišným výsledkům na základě různých uzávorkování.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1-1+1-1+\dots = (1-1)+(1-1)+\dots = 0.$$

A současně

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1-1+1-1+\dots = 1-(1-1)-(1-1)-\dots = 1.$$

Závěr, že by mělo platit „$1 = 0$“, Grandi považuje za znak stvoření světa Bohem z ničeho. Toto vyvolalo bouřlivou polemiku, které se mimo Grandiho zúčastnili Leibniz, Nicolaus Bernoulli a další. V těchto debatách se začaly upřesňovat pojmy divergentní, konvergentní řada a součet takovýchto řad.

Grandiho řada však opuštěná nezůstala. Grandi přichází s třetím součtem této řady. Označíme-li její součet $S$, pak platí

$$\begin{aligned} S &= 1-1+1-1+\dots \\ 1-S &= 1-(1-1+1-\dots) = 1-1+1-1+\dots = S \\ 1-S &= S \\ 2S &= 1 \\ S &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Tomuto závěru dává určitý význam Euler, který přichází s myšlenkou přiřazení určité hodnoty i divergentním řadám. Ale až koncem 19. století přichází Cesàro s metodou, která dává tomuto výsledku validitu. Dnes tento součet označujeme jako Cesàrův.

V 19. století zásluhou Abela, Gausse, Cauchyho, Bolzana a dalších matematiků dochází k důkladnému vybudování základů matematické analýzy a od divergentních řad, jako předmětu zájmu, je na určitou dobu opuštěno. Výjimku tvořily práce Fouriera a Poissona.

Koncem 19. století se k divergentním řadám vrací Cesàro a Borel. Začínají se objevovat různé sčítací metody, které jsou postupem času zobecňovány. Příkladem je metoda pojmenovaná po Cesàrovi, o jejíž zobecnění se postaral Hölder a také Nörlund. I sám Cesàro přišel s jistým zobecněním své metody.

Zásadní průlom nastal počátkem 20. století, kdy Fejér dokázal, že Fourierova řada každé spojité $2\pi-$periodické funkce je cesàrovsky sčitatelná k této funkci všude, i když v běžném smyslu může v mnoha bodech divergovat.

# Poznámka ke zdrojům

Historický úvod do problému byl čerpán především ze zdrojů Horák (2012) a Došlá a Novák (2002). Hlavním podkladem k práci jsou skripta Štěpánek (1979) a kniha Hardy (1949). Dále jsem čerpal z již zmiňované práce Horák (2012), a také z materialů Kaczor a Nowak (2000), Kovářová (2008), Robinson (2017), Zoubková (2019) a Netuka (2015). Nadále v práci nebudu zdroje explicitně uvádět.

# 1. Limitovací metody

V této kapitole začneme budovat teorii limitovacích (resp. sčítacích) metod. Neboť nekonečnou řadu můžeme vnímat jako limitu posloupnosti částečných součtů, budeme se tedy i v jejich kontextu bavit v řeči posloupností.

## 1.1 Základní pojmy

V celé práci se soustředíme pouze na posloupnosti relaných čísel. Zaveďme si proto úmluvu.

**Úmluva.** V dalším textu budeme označením posloupnost chápat jako posloupnost reálných čísel.

Na úvod připomeňme následující definici.

**Definice 1.** Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ je **konvergentní**, jestliže existuje reálné číslo $s$ s vlastností:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |x_n - s| < \varepsilon.$$

Dále řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ je **divergentní**, jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R},\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n > K \text{ (resp. } a_n < K).$$

V případě, že není splněno nic z předchozího, pak říkáme, že posloupnost **osciluje**.

**Definice 2** (třída omezených posloupností)**.** Označme $\ell^\infty$ lineární prostor všech omezených posloupností reálných čísel a **c** lineární podprostor všech konvergentních posloupností.

**Příklad.** Posloupnost $x = \{1{,}0{,}1{,}0, \dots\} \notin c$, ale zřejmě platí $x \in \ell^\infty$. Tedy $c \subsetneq \ell^\infty$.

Budeme hledat metodu, která nějakým způsobem přiřadí limitu i některým divergentním nebo oscilujícím posloupnostem (resp. přiřadí součet i některým divergentním nebo oscilujícím řadám). Zároveň pro nás bude užitečné požadovat, aby se tato limita shodovala s klasickým významem limity na množině $c$. Tyto úvahy jsou motivací pro následující definici.

**Definice 3** (limitovací resp. sčítací metoda)**.** Nechť P je funkcionál, jehož definičním oborem je nějaká množina posloupností c(P) (resp. množina řad s(P)), dvojici (c(P), P) (resp. dvojici (s(P), P)) nazveme **limitovací (resp. sčítací) metodou (P).**

**Polem konvergence** metody (P) je množina všech posloupností, které mají P-limitu (resp. množina všech řad, které mají P-součet).

Řekneme, že limitovací metoda je **konservativní**, jestliže $c \subset c(P)$. Metodu nazveme **regulární**, jestliže je konservativní a navíc platí implikace

$$\lim_{n\to\infty} a_n = s \in \mathbb{R} \implies (P) \lim_{n\to\infty} a_n = s,$$

kde symbol $(P)\lim_{n\to\infty} a_n$ značí $\lim P(a),\ a = \{a_n\} \subset \mathbb{R}$.

**Poznámka.** Uvažme regulární limitovací metodu (P) a posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R} \implies (P) \lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

Ale nemusí platit opačná implikace. Takové metody nás zajímají především. Nicméně nás budou zajímat podmínky, za kterých opačná implikce platí. Podmínky takového typu nazýváme tauberovskými.

**Definice 4** (ekvivalentní limitovací metody)**.** Nechť $(c(P),P)$ a $(c(Q),Q)$ jsou limitovací metody. Pak řekneme, že metoda $(c(P),P)$ **obsahuje** metodu $(c(Q),Q)$, jestliže $c(Q) \subset c(P)$ a navíc pro všechny posloupnosti $\{s_n\} \in c(Q)$ platí

$$(P) \lim_{n\to\infty} s_n = (Q) \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Dále řekneme, že metody $(c(P),P)$ a $(c(Q),Q)$ jsou **ekvivalentní**, jestliže se tyto metody obsahují navzájem.

## 1.2 Tři klasické limitovací metody

Začněme Huttonovou metodou, která spočívá v průměrování dvou po sobě jdoucích členů posloupnosti.

**Definice 5** (Huttonova limitovací metoda)**.** Nechť $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost, položme

$$h_0 = \frac{s_0}{2}, \quad h_n = \frac{s_{n-1} + s_n}{2}, \quad n \geq 1.$$

Označme

$$c(H) = \Big\{\sigma = \{s_n\}_{n=0}^{\infty} : \exists \lim_{n\to\infty} h_n \in \mathbb{R}\Big\},$$
$$H(\sigma) = \lim h_n, \quad H : c(H) \to \mathbb{R}.$$

Potom dvojici (c(H), H) nazveme **Huttonovou limitovací metodou** $(H)$**.**

**Příklad** (Grandiho řada)**.** Uvažujme řadu $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$. Označíme-li posloupnost částečných součtů $s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k$, potom $\{s_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1,0,1,0,\dots\}$. A Huttonova metoda přiřazuje této řadě následující součet.

$$(H) \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{s_{n-1} + s_n}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

**Poznámka.** Huttonova metoda rozšiřuje oblast konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ na $q \in [-1; 1)$, a pro tato $q$ platí $(H) \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Jeden z velice užitečných vztahů pro Huttonovu metodu plyne z následující úvahy. Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost a $s \in \mathbb{R}$ takové, že $(H) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$. Potom jest

$$s = (H) \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \frac{s_{n-1} + s_n}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1} + a_k}{2}.$$

Pokud řada napravo konverguje, pak již nutně platí $(a_{n-1} + a_n) \to 0$. Odvodili jsme nutnou podmínku pro sčítatelnost řady Huttonovou metodou. Následující věta tento poznatek shrnuje a rozšiřuje o další dvě podmínky.

**Věta 1** (nutné podmínky pro Huttonovu metodu)**.** *Buď* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *posloupnost a* $(H)\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$, *potom*

**(a)** $\lim_{n\to\infty}(a_{n-1} + a_n) = 0$;

**(b)** $a_n = O(n)$;

**(c)** *označíme-li* $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ *posloupnost částečných součtů řady* $\sum a_n$, *pak* $s_n = o(n)$, *a tím spíše* $a_n = o(n)$.

*Důkaz.* První podmínku jsme již dokázali před větou. Zbývá tedy (b),(c).

**(b)** Položme

$$a_{-1} = 0, \quad a_k = (-1)^k b_k, \quad k \geq -1, \quad c_n = a_{n-1} + a_n, \quad n \geq 0.$$

Dle podmínky (a) $\exists K \in \mathbb{R}, K > 0$, takové, že $|c_n| \leq K, n \geq 0$. Dále platí

$$b_k - b_{k-1} = (-1)^k c_k, \quad k \geq 0,$$

a tedy

$$b_n = \sum_{k=0}^{n}(b_k - b_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_k, \quad n \geq 0.$$

Odtud plyne

$$|a_n| = |b_n| \leq K(n+1).$$

**(c)** Položme $s_{-1} = 0$, $r_k = (-1)^k s_k$, pro $k \geq -1$. Potom $s_k = (-1)^k r_k$, a platí

$$h_k = \frac{s_{k-1} + s_k}{2} = \frac{(-1)^k(r_k - r_{k-1})}{2}, \quad k \geq 0.$$

Ekvivalntně můžeme psát

$$2h_k(-1)^k = r_k - r_{k-1}, \quad k \geq 0.$$

Sumací obou stran rovností přes $k$ dostaneme

$$2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k h_k = \sum_{k=0}^{n}(r_k - r_{k-1}) = r_n = (-1)^n s_n, \quad n \geq 0.$$

Nyní rozdělme členy vystupující v součtu na sudé a liché tj.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k h_k = (-1)^n h_n + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k h_k = \\ = (-1)^n h_n + \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}(h_{2k} - h_{2k+1}) + \frac{1-(-1)^n}{2}h_n = \\ = \frac{1+(-1)^n}{2}h_n + \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}(h_{2k} - h_{2k+1}).\end{aligned}$$

Dosazením do předchozího dostaneme

$$(-1)^n s_n = (1+(-1)^n)h_n + 2\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}(h_{2k}-h_{2k+1}) =$$

$$= (1+(-1)^n)h_n + 2\left(\sum_{0\le k\le\sqrt{n}}(h_{2k}-h_{2k+1}) + \sum_{\sqrt{n}<k\le\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}(h_{2k}-h_{2k+1})\right), \quad n > 6.$$

Položme dále

$$u_k = \sup_{n\ge k}|h_n - h_{n+1}|, \quad k \ge 0.$$

Pak platí

$$\lim_{k\to\infty} u_k = 0,$$

neboť předpokládáme, že $h_n$ má konečnou limitu, a tedy

$$\lim_{n\to\infty}(h_n - h_{n+1}) = 0.$$

Odtud máme pro $n \in \mathbb{N}$

$$|s_n| = |(-1)s_n| \le$$

$$\le |(1+(-1)^n)h_n| + 2\left(\sum_{0\le k\le\sqrt{n}}|(h_{2k}-h_{2k+1})| + \sum_{\sqrt{n}<k\le\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}|(h_{2k}-h_{2k+1})|\right)$$

$$\le 2|h_n| + 2u_0\sqrt{n} + 2u_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}n.$$

Tedy

$$\frac{|s_n|}{n} = \frac{2|h_n| + 2u_0\sqrt{n} + 2u_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}n}{n} = \left(\frac{2|h_n|}{n} + \frac{2u_0}{\sqrt{n}} + 2u_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Navíc

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2|h_n|}{n} + \frac{2u_0}{\sqrt{n}} + 2u_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right) = 0,$$

neboť $h_n$ má konečnou limitu a $u_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$ také koverguje do nuly. Z čehož dostáváme

$$2|h_n| + 2u_0\sqrt{n} + 2u_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}n = o(n).$$

Z předchozího odhadu pak $s_n = o(n)$, a tím spíše $a_n = o(n)$.

$\square$

Fakt, že podmínku v (b) nelze nahradit $a_n = O(n^\alpha)$ pro žádné $\alpha < 1$, demonstruje následující příklad.

**Příklad.** Určeme, pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ má řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^\alpha}$ $(H)$-součet.

K řešení využijeme dokázaný vztah

$$(H)\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}+a_k}{2}.$$

Dostáváme, že zadaná řada je huttonovsky sčítatelná právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{(k+1)^\alpha} - \frac{1}{k^\alpha}\right).$$

Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} - \frac{1}{k^\alpha} = -\alpha\int_k^{k+1} \frac{dx}{x^{\alpha+1}}.$$

Označme pro každé $k \in \mathbb{N}$

$$b_k = -\alpha\int_k^{k+1} \frac{dx}{x^{\alpha+1}}.$$

Předpokládejme nejprve, že $\alpha \in (-1,\infty)$. Potom je funkce $x \mapsto \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ klesající na $(0,\infty)$, a tedy

$$\int_{k+1}^{k+2} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^{\alpha+1}}, \quad \text{pro } k \in \mathbb{N}.$$

Odtud vyplývá, že posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je monotónní, přesněji řečeno je nerostoucí pro $\alpha \in [0,\infty)$ a neklesající pro $\alpha \in (-1,0]$. Dále platí

$$|b_k| = |\alpha|\int_k^{k+1} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} \leq \frac{|\alpha|}{k^{\alpha+1}}, \quad \text{pro } k \in \mathbb{N}.$$

Tedy

$$\lim_{k\to\infty} b_k = 0.$$

Z Leibnizova kritéria konvergence plyne, že řada $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{(k+1)^\alpha} - \frac{1}{k^\alpha}\right)$ je konvergentní, dokázali jsme, že pro $\alpha \in (-1,\infty)$ je řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^\alpha}$ huttonovsky sčítatelná.

Nyní uvažme $\alpha \in (-\infty, -1]$. Potom je funkce $x \mapsto \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ neklesající na $(0,\infty)$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ jest

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} \geq \frac{1}{k^{\alpha+1}}(k+1-k) = k^{-\alpha-1} \geq 1.$$

Odtud je vidět, že není splněna podmínka (a) ve Větě 1, neboť neplatí

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{(k+1)^\alpha} - \frac{1}{k^\alpha}\right) = 0.$$

Tedy pro $\alpha \in (-\infty, -1]$ řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^\alpha}$ nemá konečný huttonovský součet.

Zbývá ukázat, že tento příklad skutečně dokazuje, že podmínku v (b) nelze nahradit $O(n^\alpha)$ pro žádné $\alpha < 1$. To lze nahlédnout následovně. Buď $\alpha < 1$, zvolme $\beta \in (-1, -\alpha)$. Pak platí $-\alpha - \beta > 0$, a tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)^\beta}\right|}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} n^{-\alpha-\beta}\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta = \infty.$$

Odtud plyne $\frac{(-1)^n}{(n+1)^\beta} \neq O(n^\alpha)$. Současně ale $\beta > -1$, z předchozího máme, že $(H) \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^\beta}$ konverguje.

Předchozí příklad nás vede k vyslovení následující věty, která problém zobecňuje.

**Věta 2** (huttonovská sčítatelnost řady typu $\sum(-1)^n a_n$)**.** *Nechť $f : [0,\infty) \to (0,\infty)$ je konkávní funkce. Potom $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n f(n)$ je huttonovsky sčítatelná právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} (f(n+1) - f(n)) = 0$.*

*Důkaz.* Stejně jako v předchozím příkladu nahlédneme, že $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n f(n)$ je huttonovsky sčítatelná právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \left(f(n+1) - f(n)\right).$$

„ $\Rightarrow$ " Nechť $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \left(f(n+1) - f(n)\right)$ konverguje. Potom jistě platí, z nutné podmínky konvergence, že

$$\lim_{n\to\infty} \left(f(n+1) - f(n)\right) = 0.$$

„ $\Leftarrow$ " Na duhou stranu, víme-li, že limita dvou po sobě jdoucích členů je nulová, pak konvergenci dostaneme z Leibnizova kritéria, pokud je posloupnost $\{f(n+1) - f(n)\}_{n=1}^\infty$ monotónní. Ukažme, že platí

$$f(n+1) - f(n) \leq f(n) - f(n-1), \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Nerovnost můžeme zapsat takto

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} \leq \frac{f(n) - f(n-1)}{n - (n-1)}, \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Tento vztah plyne z konkavity, tedy dle předpokladu je nerovnost splněna. Celkem dostáváme, že posloupnost $\{f(n+1) - f(n)\}_{n=1}^\infty$ monotónně konverguje k nule.

$\square$

**Věta 3** (huttonovská sčítatelnost řady typu $\sum(-1)^n a_n$ podruhé)**.** *Nechť je $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ funkce a nechť $f'$ je monotónní funkce na $(0,\infty)$. Potom $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n f(n)$ je huttonovsky sčítatelná právě tehdy, když $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.*

*Důkaz.* Z předchozího víme, že řada $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n f(n)$ je huttonovsky sčítatelná právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \left(f(n+1) - f(n)\right)$. Z monotonie $f'$ plyne, že $f' \in L^1([n,n+1])$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, tedy také pro každé $n \in \mathbb{N}$ $f \in \mathcal{AC}([n,n+1])$. Navíc

$$f(n+1) - f(n) = \int_n^{n+1} f'(x)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dále z monotonie $f'$ dostáváme konvexitu (resp. konkavitu) funkce $f$. B.Ú.N.O nechť je $f$ konkávní. Z konkavity pak plyne pro $n > 1$ :

$$\frac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n} \leq \frac{f(n)-f(n-1)}{n-(n-1)}$$

$$f(n+1)-f(n) \leq f(n)-f(n-1).$$

Z čehož $\{f(n+1)-f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí.

Předpokládejme nyní, že $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Pak jest

$$|f(n+1)-f(n)| = \left|\int_n^{n+1} f'(x)\,dx\right| \leq \int_n^{n+1} |f'(x)|\,dx \leq$$

$$\leq \max\{|f'(n)|;|f'(n+1)|\} \to 0, \quad \text{pro } n \to \infty.$$

Tedy $\lim_{n\to\infty}(f(n+1)-f(n)) = 0$. Implikace plyne z Leibnizova kritéria konvergence.

Na druhou stranu, je-li $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f(n)$ huttonovsky sčítatelná, pak z Věty 1 (a) plyne

$$0 = \lim_{n\to\infty}(f(n+1)-f(n)) = \lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1} f'(x)\,dx.$$

Odtud a z monotonie $f'$ dostáváme, že

$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[n,n+1]}|f'(x)| = 0,$$

a tedy $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

□

Již víme, pro která $\alpha$ je huttonovsky sčítatelná řada $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^\alpha}$. Mohli bychom se tedy ptát, jak je to s konvergencí řad nacházejících se v pomyslné mezeře těsně před bodem $\alpha = 1$. Takové řady jsou například $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(\log(n))^\alpha}$ pro $\alpha > 0$. Následující příklad na naši otázku odpovídá.

**Příklad.** Zkoumejme huttonovskou sčítatenost řady $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(\log(n))^\alpha}$, kde $\alpha > 0$ a symbol log značí přirozený logaritmus.

Označme $f(x) = \frac{x}{(\log(x))^\alpha}$, pro $x \in [2,\infty)$. Potom $f$ je nezáporná a platí

$$f'(x) = \frac{\log^\alpha(x) - \alpha\log^{\alpha-1}(x)}{\log^{2\alpha}(x)} = \frac{\log(x)-\alpha}{\log^{\alpha+1}(x)}.$$

Současně pro každé $\alpha > 0$ máme

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\log(x)-\alpha}{\log^{\alpha+1}(x)} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\log^\alpha(x)} - \frac{\alpha}{\log^{\alpha+1}(x)}\right) = 0.$$

Zbývá monotonie $f'$. Spočtěme druhou derivaci $f$.

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x}\log^{\alpha+1}(x) - (\log(x)-\alpha)(\alpha+1)\log^\alpha(x)\frac{1}{x}}{\log^{2(\alpha+1)}(x)} =$$

$$= \frac{\log(x) - (\alpha+1)(\log(x)-\alpha)}{x\log^{\alpha+2}(x)} =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1-\log(x))}{x\log^{\alpha+2}(x)}.$$

Rozhodující člen je v tomto případě výraz v čitateli, neboť výraz ve jmenovateli na intervalu $[2,\infty)$ nemění znaménko. Zřejmě existuje $x_0 \in [2,\infty)$ takové, že pro každé $x \geq x_0$ platí, že výraz

$$\alpha(\alpha + 1 - \log(x)) < 0.$$

Tím získáváme monotonii $f'$, a z Věty 3 dostáváme, že zadaná řada je huttonovsky sčítatelná pro každé $\alpha > 0$.

Dále se nabízí otázka, jestli nějaká kombinace podmínek ve Větě 1 je postačující pro huttonovskou sčítatelnost. Odpověď na tuto otázku je však záporná. To ukazuje další příklad.

**Příklad.** Uvažme posloupnost $a_n = \frac{1}{n}$, pro $n \in \mathbb{N}$. Ověřme, že tato posloupnost splňuje všechny podmínky ve Větě 1, ale není huttnovsky sčítatelná.

**(a)** Jistě

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n-1} + a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) = 0.$$

**(b)** Dále také pro všechna $n \in \mathbb{N}$ :

$$|a_n| = \left|\frac{1}{n}\right| \leq 1 \leq n.$$

Z čehož plyne, že $a_n = O(n)$.

**(c)** Zřejmě platí, že $a_n = o(n)$. Označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Pak jest

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{n}$$

Nyní využijeme Stolzovu větu. Vidíme, že posloupnosti $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\}_{n=1}^{\infty}$ monotónně rostou k nekonečnu, a tedy platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}}{n-(n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Odtud $s_n = o(n)$.

Současně ale

$$\begin{aligned}(H)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} &= \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\,\frac{2n-1}{n(n-1)}\\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}.\end{aligned}$$

V poslední rovnosti máme rozdíl divergentní a konvergentní řady. Z toho plyne, že $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ nemá konečný (H)-součet.

**Věta 4** (tauberovská věta pro Huttonovu metodu)**.** *Nechť* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *je posloupnost a nechť* $(H)\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$, *potom*

**(a)** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \iff \lim_{n\to\infty} a_n = 0$;

**(b)** $\liminf_{n\to\infty} a_n \geq 0 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.

*Důkaz.* Označme $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $n \geq 0$.

**(a)** Jest

$$h_n = \frac{s_{n-1} + s_n}{2} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k + \sum_{k=0}^{n-1} a_k + a_n}{2} = s_{n-1} + \frac{a_n}{2}, \quad n \geq 1.$$

Odtud plyne první část tvrzení.

**(b)** Dále platí

$$h_n = \frac{s_{n-1} + s_n}{2} = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k - a_n + \sum_{k=0}^{n} a_k}{2} = s_n - \frac{a_n}{2}, \quad n \geq 0.$$

Tedy

$$\liminf s_n \geq \liminf h_n + \frac{1}{2} \liminf a_n \geq s + 0 = s.$$

Z druhé strany je

$$\limsup s_{n-1} \leq \limsup h_n + \limsup \left(-\frac{a_n}{2}\right) =$$

$$= \lim h_n - \frac{1}{2} \liminf a_n \leq s - 0 = s.$$

□

Určité rozšíření Huttonovy metody přináší metoda Cesàrova nebo též metoda aritmetických průměrů, která již neprůměruje pouze dva po sobě jdoucí členy posloupnosti, ale pracuje s aritmetickým průměrem částečných součtů.

**Definice 6** (Cesàrova limitovací metoda)**.** Buď $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost, položme

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Označme

$$c(C) = \left\{ \sigma = \{s_n\}_{n=0}^{\infty} : \exists \lim_{n\to\infty} \sigma_n \in \mathbb{R} \right\},$$
$$C(\sigma) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n, \quad C : c(C) \to \mathbb{R}.$$

Dvojici (c(C), C) nazveme **Cesàrovou limitovací metodou (C,1).**

**Příklad** (Grandiho řada)**.** Sečteme pomocí Cesàrovy metody Grandiho řadu. Označme $s_n$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$.
Pak jest

$$\sigma_{2n} = \frac{\sum_{k=0}^{2n} s_k}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1}, \quad n \geq 1.$$

Současně

$$\sigma_{2n-1} = \frac{\sum_{k=0}^{2n-1} s_k}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \quad n \geq 1.$$

Tedy zřejmě

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{2n} = \lim_{n\to\infty} \sigma_{2n-1} = \frac{1}{2}.$$

Odtud plyne, že $(C,1) \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = \frac{1}{2}$.

**Věta 5** (vztah Huttonovy a Cesàrovy metody)**.** *Buď* $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ *posloupnost a ať* $(H)\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. *Pak platí* $(C{,}1)\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

*Důkaz.* Nechť $n \geq 0$, pak

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{s_0}{2} + \frac{s_0+s_1}{2} + \cdots + \frac{s_{n-1}+s_n}{2}\right) + \frac{s_n}{2(n+1)}.$$

Z Věty 1(c) plyne, že výraz $\frac{s_n}{2(n+1)} \to 0$, pro $n \to \infty$. Dále z regularity Cesàrovy metody a z předpokladu, že $\lim_{n\to\infty} h_n = s$, dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{s_0}{2} + \frac{s_0+s_1}{2} + \cdots + \frac{s_{n-1}+s_n}{2}\right) = s.$$

$\square$

**Poznámka.** Ve Větě 5 neplatí opačná implikace.

**Příklad.** Ukažme, že posloupnost dána předpisem

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{pokud } n \equiv 0 \pmod 4 \\ 0, & \text{pokud } n \equiv 1 \pmod 4 \\ -1, & \text{pokud } n \equiv 2 \pmod 4 \\ 0, & \text{pokud } n \equiv 3 \pmod 4, \qquad n \geq 0, \end{cases}$$

je sčítatelná pomocí Cesàrovské metody, ale nikoliv pomocí Huttonovy.

Označme $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, potom $\{s_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \dots\}$.

**(H):** Pro $n \geq 1$ platí

$$h_{4n-3} = \frac{s_{4n-4} + s_{4n-3}}{2} = 1,$$
$$h_{4n-2} = \frac{s_{4n-3} + s_{4n-2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Tedy zřejmě limita $\{h_n\}$ neexistuje.

**(C,1):** Zkoumejme

$$\sigma_{4n} = \frac{1}{4n+1}\sum_{k=0}^{4n} s_k = \frac{2n}{4n+1} \to \frac{1}{2},$$
$$\sigma_{4n+1} = \frac{1}{4n+2}\sum_{k=0}^{4n+1} s_k = \frac{2n+1}{4n+2} \to \frac{1}{2},$$
$$\sigma_{4n+2} = \frac{1}{4n+3}\sum_{k=0}^{4n+2} s_k = \frac{2n+2}{4n+3} \to \frac{1}{2},$$
$$\sigma_{4n+3} = \frac{1}{4n+4}\sum_{k=0}^{4n+3} s_k = \frac{2n+2}{4n+4} \to \frac{1}{2}.$$

Dostáváme, že

$$\lim \sigma_{4n} = \lim \sigma_{4n+1} = \lim \sigma_{4n+2} = \lim \sigma_{4n+3} = \frac{1}{2},$$

a tedy platí $(C{,}1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

**Poznámka.** Ukázali jsme, že Cesàrova metoda obsahuje Huttonovu metodu a současně, že tyto metody nejsou ekvivalentní.

**Věta 6** (nutá podmínka pro Cesàrovu metodu)**.** *Nechť* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *je posloupnost a* $(C,1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$, *potom označíme-li* $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, *pro* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *platí*

**(a)** $s_n = o(n)$, $a_n = o(n)$;

**(b)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}$ *konverguje;*

**(c)** $\sum_{k=0}^{n} k a_k = o(n^2)$.

*Důkaz.*

**(a)** Ze vztahu $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s$ plyne $\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1}\sigma_{n+1} = s$, tedy $\lim_{n\to\infty}\left(\sigma_n - \frac{n+2}{n+1}\sigma_{n+1}\right) = 0$. Dále platí

$$\left|\sigma_n - \frac{n+2}{n+1}\sigma_{n+1}\right| = \left|\frac{\sum_{k=0}^{n} s_k}{n+1} - \frac{(n+2)\sum_{k=0}^{n+1} s_k}{(n+1)(n+2)}\right| =$$

$$= \left|\frac{(n+2)\sum_{k=0}^{n} s_k - (n+2)\sum_{k=0}^{n+1} s_k}{(n+1)(n+2)}\right| = \left|\frac{s_{n+1}}{n+1}\right|.$$

Tedy $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n+1} = 0$, a také $\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n+1}-s_n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n+1} = 0$.

**(b)** Označme $s_n' = \sum_{k=0}^{n} s_k$, $n \geq 0$. Nejprve pomocí matematické indukce dokážeme následující rovnost.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} = \frac{s_{n-1}'}{n(n+1)} + \frac{s_n}{n+1} + 2\sum_{k=0}^{n-2} \frac{s_k'}{(k+1)(k+2)(k+3)}, \quad n \geq 2.$$

Pro $n = 2$ dává levá strana rovnosti

$$\sum_{k=0}^{2} \frac{a_k}{k+1} = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3}.$$

Na pravé straně máme

$$\frac{s_1'}{6} + \frac{s_2}{3} + 2\frac{s_0'}{6} = \frac{s_0 + s_1}{6} + \frac{a_0 + a_1 + a_2}{3} + \frac{s_0}{3} =$$

$$= \frac{2a_0 + a_1}{6} + \frac{a_0 + a_1 + a_2}{3} + \frac{a_0}{3} = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3}.$$

Tedy rovost platí. Nyní předpokládejme pravdivost tvrzení pro $n \geq 2$ a dokažme je pro $(n+1)$. Začněme opět levou stranou rovnosti. Z indukčního předpokladu dostáváme

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{a_k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} + \frac{a_{n+1}}{n+2} =$$

$$= \frac{a_{n+1}}{n+2} + \frac{s_{n-1}'}{n(n+1)} + \frac{s_n}{n+1} + 2\sum_{k=0}^{n-2} \frac{s_k'}{(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

Pravá strana dává

$$\frac{s'_n}{(n+1)(n+2)} + \frac{s_{n+1}}{n+2} + 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{s'_k}{(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

Odečtením levé strany od pravé dostáváme

$$\frac{s'_n}{(n+1)(n+2)} + \frac{s_{n+1}}{n+2} + 2\frac{s'_{n-1}}{n(n+1)(n+2)} - \frac{a_{n+1}}{n+2} - \frac{s'_{n-1}}{n(n+1)} - \frac{s_n}{n+1} =$$

$$= \frac{s'_n}{(n+1)(n+2)} + s'_{n-1}\left(\frac{2}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)}\right) +$$

$$+ s_n\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \frac{s'_{n-1} + s_n}{(n+1)(n+2)} - \frac{s'_{n-1}}{(n+1)(n+2)} - \frac{s_n}{(n+1)(n+2)} = 0.$$

Tím jsme rovnost dokázali. Zbývá

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{s'_{n-1}}{n(n+1)} + \frac{s_n}{n+1} + 2\sum_{k=0}^{n-2} \frac{s'_k}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right).$$

Z definice cesàrovské sčítatelnosti dostáváme, že existuje $K \in \mathbb{R}, K > 0$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\left|\frac{s'_k}{k+1}\right| < K$. Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{s'_{n-1}}{n(n+1)} + \frac{s_n}{n+1} + 2\sum_{k=0}^{n-2} \frac{s'_k}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right) \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{s'_{n-1}}{n(n+1)} + \frac{s_n}{n+1} + 2K\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{(k+2)(k+3)}\right).$$

Tvrzení plyne z (a) a z konvergence řady $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$.

**(c)** Platí

$$\sigma_n - \sigma_{n-1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_k =$$

$$= \frac{s_n}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1} s_k = \frac{s_n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1} s_k.$$

Výraz $(\sigma_n - \sigma_{n-1}) \to 0$ z čehož plyne, že $\left(\frac{s_n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1} s_k\right) \to 0$. Tvrzení dostáváme z (a).

□

Opět by nás mohlo napadnout, zda nějaká kombinace těchto nutných podmínek již není postačující. Na tuto otázku odpovídá opět řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

**Příklad.** Ukažme, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ splňuje všechny podmínky ve Větě 7, avšak není cesàrovsky sčítatelná. Již víme, že podmínka (a) v této větě je splněna. Současně je zřejmá konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. To nám dává podmínku (b). Zbývá podmínka (c).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k\frac{1}{k}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=0.$$

Zkoumejme nyní

$$(C,1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{n-k+1}{k}}{n}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-1\right).$$

Z věty o aritmetice limit a růstové škály vidíme, že

$$(C,1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty.$$

**Věta 7** (regularita Cesàrovy metody)**.** *Cesàrova metoda je regulární.*

*Důkaz.* Nechť $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost a nechť $\lim_{n\to\infty}s_n=s\in\mathbb{R}$. Rozdělme důkaz na dvě části. Nejprve dokážeme tvrzení pro $s=0$. Zvolme $\varepsilon>0$, k němu nalezněme $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že pro každé $n\in\mathbb{N}:n\geq n_0$ je $|s_n|<\frac{\varepsilon}{2}$. Označme $M=\max\{s_0,\dots,s_{n_0}\}$ a položme $n_1=\max\{n_0,\frac{2Mn_0}{\varepsilon}\}$. Potom pro každé $n>n_1$ platí

$$\left|\frac{s_0+\cdots+s_{n_0}}{n}+\frac{s_{n_0+1}+\cdots+s_n}{n}\right|\leq\frac{Mn_0}{n}+\frac{(n-n_0)\varepsilon}{2n}\leq\varepsilon.$$

Tím je tvrzení dokázáno pro případ $s=0$.

Nyní předpokládejme, že $s\in\mathbb{R}$. Položme $s_n^*=s_n-s$, pro $n\in\mathbb{N}$. Potom platí $\lim_{n\to\infty}s_n^*=0$, a tedy dle předchozího dostáváme

$$0=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}s_k^*=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(s_k-s)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}s_k-s.$$

□

**Věta 8** (tauberovská podmínka pro Cesàrovu metodu)**.** *Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost a $(C,1)\sum_{n=0}^{\infty}a_n=s\in\mathbb{R}$. Nechť je splněna alespoň jedna z následujících podímínek:*

**(a)** $\sum_{k=0}^{n}ka_k=o(n)$,

**(b)** $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$.

*Potom platí $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=s$.*

*Důkaz.* Označme $s_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$, potom

$$s_n-\sigma_n=\sum_{k=0}^{n}a_k-\frac{\sum_{k=0}^{n}s_k}{n+1}=$$

$$\frac{(n+1)\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} a_i}{n+1} = \frac{\sum_{k=0}^{n} k a_k}{n+1}.$$

Je-li splněna podmínka (a), limitním přechodem $n \to \infty$ dostáváme tvrzení.
Je-li splněna podmínka (b), zvolíme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall k \in \mathbb{N} : k a_k < \varepsilon$. Potom

$$\frac{a_0 + 2a_1 + \cdots + n a_n}{n+1} = \frac{a_0 + \cdots + n_0 a_{n_0}}{n+1} + \frac{(n_0+1)a_{n_0+1} + \cdots + n a_n}{n+1} \leq$$

$$\leq \frac{\max\{|a_0|, \ldots, |a_{n_0}|\} n_0(n_0+1)}{n+1} + \frac{(n-n_0)\varepsilon}{n+1}.$$

Nalezněme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall k \in \mathbb{N}\, k \geq n_1 : \frac{\max\{|a_0|,\ldots,|a_{n_0}|\} n_0(n_0+1)}{k+1} \leq \varepsilon$.
Položme $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Potom pro $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq n_2$, jest

$$\frac{\max\{|a_0|, \ldots, |a_{n_0}|\} n_0(n_0+1)}{n+1} + \frac{(n-n_0)\varepsilon}{n+1} \leq 2\varepsilon.$$

□

**Definice 7** (Abelova limitovací metoda)**.** Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost. Označme

$$s(A) = \left\{ \alpha = \{a_n\}_{n=0}^{\infty} : \exists \lim_{x \to 1_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{R} \right\},$$

$$A(\alpha) = \lim_{x \to 1_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \alpha \in s(A).$$

Dvojici (s(A), A) nazveme **Abelovou sčítací metodou.**

**Poznámka.** Limitovací verse Abelovy metody

$$(A) \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{x \to 1_-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Vztah Abelovy a Cesàrovy metody uvádí Frobeniova věta.

**Věta 9** (Frobenius)**.** *Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost, $s \in \mathbb{R}$ a $(C,1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$. Potom platí $(A) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.*

*Důkaz.* Z Věty 6(a) plyne, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje pro všechna $x \in (0,1)$. Označme $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ a definujme funkci

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (0,1).$$

Potom platí pro $\forall x \in (0,1)$

$$f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\sigma_n x^n.$$

Dále zřejmě

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n, \quad x \in (0{,}1).$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezněme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall n \in \mathbb{N} : n > n_0$ je

$$|\sigma_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Odtud dostáváme, že pro každé $x \in (0{,}1)$ platí

$$|f(x) - s| \leq (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)|\sigma_n - s|x^n <$$

$$< (1-x)^2 \sum_{n=0}^{n_0}(n+1)|\sigma_n - s|x^n + \frac{\varepsilon}{2}.$$

K dokončení důkazu zbývá nalézt $\delta > 0$ tak, že

$$(1-x)^2 \sum_{n=0}^{n_0}(n+1)|\sigma_n - s|x^n < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in (1-\delta,1).$$

$\square$

**Poznámka.** Opačná implikace v Frobeniově větě neplatí, viz příklad.

**Příklad.** Ukážeme, že nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)$ má součet ve smyslu Abelovy metody, nikoliv však ve smyslu Cesàrovy metody.

**(C,1):** Vyšimněme si, že zadaná řada nesplňuje nutnou podmínku sčítatelnosti pro Cesàrovu metodu.

Označíme-li $a_n = (-1)^n(n+1)$, pak zřejmě neplatí $a_n = o(n)$. Dále není například splněna nutná podmínka konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}$, dokonce ani neplatí

$\sum_{k=0}^{n} ka_k = o(n^2)$. Dle Věty 7 řada $(C{,}1)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)$ není konvergentní.

**(A):** Položme pro $x \in (0{,}1)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n.$$

Potom platí

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+1}\right)' = \left(-\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^{n+1}\right)' = \\ &= \left(-\frac{-x}{1+x}\right)' = \left(\frac{x}{1+x}\right)' = \\ &= \frac{1}{(1+x)^2}.\end{aligned}$$

Zbývá

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-}\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{4}.$$

Tedy $(A)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1) = \frac{1}{4}$.

**Poznámka.** Abelova metoda obsahuje Cesàrovu metodu a tyto metody nejsou ekvivalentní. Tedy platí

$$c \subsetneq c(H) \subsetneq c(C) \subsetneq s(A).$$

**Věta 10** (Abelova)**.** *Nechť* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *je posloupnost a* $\rho \in (0,\infty)$ *je poloměr konvergence mocninné řady* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

**(a)** *Jestliže* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\rho^n$ *konverguje, potom platí*

$$\lim_{x\to(x_0+\rho)_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\rho^n.$$

**(b)** *Jestliže* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-\rho)^n$ *konverguje, potom platí*

$$\lim_{x\to(x_0-\rho)_+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-\rho)^n.$$

*Důkaz.* K důkazu využíme Abelovo kritéruim pro stejnoměrně konvergentní řady. Předpokládejme, že mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\rho^n$ konverguje. Pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [x_0,x_0+\rho]$ položme $f_n(x) = a_n\rho^n$ a $g_n(x) = \frac{(x-x_0)^n}{\rho^n}$. Potom je řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ stějnoměrně konvergentní na $[x_0, x_0+\rho]$, $\{g_n\}$ je posloupnost stejně omezených funkcí s konstantou omezenosti rovnou jedné. Dále pro každé $x \in [x_0, x_0+\rho]$ je posloupnost $\{g_n(x)\}$ nerostoucí. Dle Abelova kritéria je tedy řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ stejnoměrně konvergentní na $[x_0,x_0+\rho]$. K dokončení důkazu použíjme Mooreovu-Osgoodovu větu. Z té plyne

$$\lim_{x\to(x_0+\rho)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \lim_{x\to(x_0+\rho)} \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n(x-x_0)^n$$

$$= \lim_{k\to\infty} \lim_{x\to(x_0+\rho)} \sum_{n=0}^{k} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\rho^n.$$

Tím je Abelova věta dokázaná.

□

**Věta 11** (tauberovská podmínka pro Abelovu metodu)**.** *Buď* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *posloupnost a nechť* $(A)\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$. *Dále buď splněna alespoň jedna z následujících podmínek:*

**(a)** $\sum_{k=0}^{n} ka_k = o(n)$,

**(b)** $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

*Potom* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.

*Důkaz.* Všimeme si, že podmínka (a) bezprostředně plyne z podmínky (b). Stačí proto dokázat pouze (a). Důkaz provedeme tak, že dokážeme, že z podmínky (a) plyne sčítatelnost řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ pomocí Cesàrovy metody, tvrzení pak dostaneme z Věty 8.

Označme $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$, pro $n \geq 0$. Položme dále pro $x \in (0,1)$

$$f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

Pak platí

$$f(x) = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \sigma_n x^n.$$

Odtud potom pro tato $x$ jest

$$(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n x^{n+1} = (1-x) \int_0^x \frac{f(t)}{(1-t)^2}\, dt.$$

Z předchozích dvou rovností získáme

$$\lim_{x \to 1-} (1-x) \left( \frac{f(x)}{1-x} - \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n x^n \right) =$$

$$= \lim_{x \to 1-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - \sigma_n)\, x^n = 0.$$

Neb

$$s_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} k a_k, \quad n \geq 0,$$

plyne z předchozího a z Věty 12, že

$$(C,1) \lim_{n \to \infty} (s_n - \sigma_n) = 0.$$

Položíme-li nyní $\sigma_{-1} = 0$, potom

$$s_n - \sigma_n = n(\sigma_n - \sigma_{n-1}), \quad \text{pro } n \geq 0.$$

Z posledních dvou rovností pak máme

$$\sum_{k=0}^{n} k(\sigma_k - \sigma_{k-1}) = o(n).$$

Současně

$$\lim_{x \to 1-} \frac{1-x}{x} \int_0^x \frac{f(t)}{(1-t)^2}\, dt = \lim_{x \to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma_n - \sigma_{n-1}) x^n = s.$$

Dohromady dostáváme

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} (\sigma_k - \sigma_{k-1}) = \lim_{n \to \infty} \sigma_n = s.$$

$\square$

Následující tvrzení se vrací k Frobeniově větě a ukazuje, za jakých podmínek je možné impikaci v této větě obrátit.

**Věta 12** (postačující podmínka pro opačnou implikaci)**.** *Nechť* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *je posloupnost,* $(A)\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$*. Označíme pro* $n \geq 0 : s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$*. Nechť dále platí* $s_n = O(1)$*. Potom* $(C{,}1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$*.*

*Důkaz.* B.Ú.N.O. předopokládejme, že $a_0 = 0$, $s = 0$. Položme $w_0 = 0$,

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} k a_k, \quad v_n = \frac{w_n}{n(n+1)}, \quad n > 0.$$

Potom z $s_n = O(1)$ plyne, že

$$w_n = (n+1)s_n - \sum_{k=0}^{n} s_k = O(n),$$

$$v_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Definujme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n x^{n+1}, \quad x \in (0{,}1).$$

Tedy pro tato $x$ máme

$$\begin{aligned} g(x) + (1-x)g'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n(n+1)} x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n} x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n - w_{n-1}}{n} x^n = f(x). \end{aligned}$$

Dále platí $\lim_{x\to 1_-} f(x) = 0$, z tohoto a předchozího jest

$$g(x) + (1-x)g'(x) = o(1),\ x \to 1_-,$$

pak tedy

$$\left(\frac{g(x)}{1-x}\right)' = o\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right),\ x \to 1_-,$$

$$g(x) = o(1),\ x \to 1_-.$$

Odtud a z $v_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ a Věty 11(b) máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = 0.$$

Zvolme $m \in \mathbb{N}$, potom

$$\sum_{n=1}^{m} v_n = \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) w_n = \sum_{n=1}^{m} \frac{w_n - w_{n-1}}{n} - \frac{w_m}{m+1} =$$

$$= s_m - \frac{w_m}{m+1} = \frac{s_0 + \cdots + s_m}{m+1} = \sigma_m = o(1).$$

Celkem dostáváme

$$(C{,}1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0.$$

□

## 1.3 Nevlastní regularita

Doposud zmíněné příklady vedou k myšlence, zda uvedené metody fungují v případech posloupností, které nejsou omezené. Již jsme nahlédli, že představené metody umožňují přiřadit limitu posloupnostem, které jsou omezené a oscilují, dokonce víme, že dokážeme přiřadit limitu i některým neomezeným poslopnostem, které oscilují. Zbývá tedy případ neoscilujících neomezených posloupností. K odpovědi se nám bude hodit následující definice.

**Definice 8** (nevlastní regularita)**.** Řekneme, že limitovací metoda (P) je **nevlastně regulární,** pokud je regulární a navíc je splněna implikace:
Je-li $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost taková, že $s_n \to \infty$, pro $n \to \infty$, potom $(P)\lim s_n = \infty$.

**Věta 13** (nevlastní regularita metody (H))**.** *Huttonova metoda je nevlastně regulární.*

*Důkaz.* Buď $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost taková, že $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$. Pak jistě pro každé $K > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $s_{n-1} > K$.

Potom jest

$$\frac{s_{n-1} + s_n}{2} > \frac{K + K}{2} = \frac{2K}{2} = K, \quad n \geq n_0.$$

Tedy i posloupnost $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ je divergentní.

□

**Věta 14** (nevlastní regularita metody (C,1))**.** *Metoda (C,1) je nevlastně regulární.*

*Důkaz.* Buď $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost, taková, že $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$. Zvolme $K > 0$ a nalezněme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $s_n > K$. Označme dále $\sum_{k=0}^{n_0} s_k = M \in \mathbb{R}$.

Potom platí

$$\begin{aligned}
|\sigma_n| &= \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n} s_k\right| = \\
&= \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n_0} s_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} s_k\right| \geq \\
&\geq \frac{1}{n+1}\left(\left|\sum_{k=n_0+1}^{n} s_k\right| - \left|\sum_{k=0}^{n_0} s_k\right|\right) = \\
&= \frac{1}{n+1}\left((n-n_0)K - |M|\right).
\end{aligned}$$

Limitním přechodem dostáváme, že posloupnost $\{\sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$ je divergentní.

□

**Věta 15** (nevlastní regularita Abelovy metody)**.** *Abelova metoda je nevlastně regulární*

*Důkaz.* K prokázání pravdivosti tvrzení použijeme limitovací versi Abelovy metody. Nechť je $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost, taková, že $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$. Tato posloupnost representuje posloupnost částečných součtů nějaké posloupnosti, kterou se snažíme sečíst pomocí Abelovy metody. Nyní zvolme $K \in \mathbb{R}$. Z divergence posloupnosti $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ nalezněme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $s_n > K$. Potom pro $\forall x \in (0,1)$ platí odhad

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \sum_{n=0}^{n_0} s_n x^n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} s_n x^n \geq -\max\{|s_n|; n \leq n_0\} + K\,\frac{x^{n_0+1}}{1-x}.$$

Přenásobíme nerovnost výrazem $(1-x)$, což je pro všechna $x \in (0,1)$ kladné číslo. Dostáváme

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \geq K x^{n_0+1} - \max\{|s_n|; n \leq n_0\}.$$

Nyní nalezněme $x_0 \in (0,1)$ tak, že $x_0^{n_0+1} \geq \frac{1}{2}$ a současně, aby platilo

$$(1-x)\max\{|s_n|; n \leq n_0\} \leq \frac{K}{3}.$$

Pak tedy pro $x \in (x_0,1)$ platí

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \geq \frac{K}{2} - \frac{K}{3} = \frac{K}{6}.$$

Odtud

$$\lim_{x\to 1-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \infty.$$

□

# 2. Limitovací metody definované pomocí lineárních transformací

## 2.1 Lineární transformace

**Definice 9** (A-transformace)**.** Nechť $A = (a_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ je nekonečná realná matice, $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost. Nechť dále pro všechna $n \in \mathbb{N}$ konverguje řada

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} s_k.$$

Potom tento systém rovností nazýváme linearní transformací posloupnosti $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$. Posloupnost $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ nazýváme **A-transformací** posloupnosti $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$. Matici $A$ ztotožňujeme se zobrazením $A : \{s_n\}_{n=0}^{\infty} \to \{t_n\}_{n=0}^{\infty}$.

**Definice 10** (Maticové limitovací metody)**.** Buď $A = (a_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ a buď $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ A-transformace posloupnosti $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$. Položme

$$c(\mathcal{L}_A) = \left\{\sigma = \{s_n\}_{n=0}^{\infty} : \exists \lim_{m\to\infty} t_m \in \mathbb{R}\right\},$$

$$\mathcal{L}_A(\sigma) = \lim_{m\to\infty} t_m, \quad \sigma \in c(\mathcal{L}_A).$$

Dvojici $(c(\mathcal{L}_A), \mathcal{L}_A)$ nazveme **limitovací metodou** $\mathcal{L}_A$.

**Příklad** (Hutton)**.** Huttonova limitovací metoda je příkladem metody $\mathcal{L}_A$ dané maticí

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

**Příklad** (Cesàro)**.** Cesàrova limitovací metoda je příkladem metody $\mathcal{L}_A$ s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

**Poznámka.** Abelova metoda není typem maticové limitovací metody.

## 2.2 Silverman - Steinhaus - Toeplitzova věta o regularitě

**Věta 16** (Silverman - Steinhaus - Toeplitz). *Nechť $A = (c_{n,k})$ je nekonečná dolní trojúhelníková matice a nechť (S) je limitovací metoda dána předpisem*

$$(S)\lim a_n = \lim b_n, \quad \textit{kde } b_n = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} a_k$$

*Pak limitovací metoda (S) je regulární právě tehdy, když jsou splněny nasledující podmínky*

**(i)** $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \lim_{n\to\infty} c_{n,k} = 0$,

**(ii)** $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} = 1$,

**(iii)** $\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} |c_{n,k}| \leq C$.

*Důkaz.*

„ $\Rightarrow$ " Dokážeme, že podmínky (i), (ii), (iii) jsou nutné. Nechť tedy limitovací metoda (S) je regulární.

Zvolme $k \in \mathbb{N}$. Položme $a_k = 1, a_n = 0$ pro každé $n \neq k$. Pak tedy $a_n \to 0$ a $b_n = c_{n,k}$. Odtud plyne, že $c_{n,k} \to 0$ pro $n \to \infty$. Tedy (i) je nutná podmínka.

Nyní položme $a_n = 1$, pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom jest $a_n \to 1$. Tedy

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}.$$

Odtud $\sum_{k=0}^{n} c_{n,k} \to 1$, pro $n \to \infty$. Tím je dokázaná nutnost (ii) podmínky.

Zbývá podmínka (iii). Předpokládejme, že podmínka (iii) není splněna. Potom pro každé $C > 0$ existuje index $n_C \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takový, že $\sum_{k=0}^{n_C} |c_{n,k}| \geq C$. Zvolme $C > 0$, potom k němu existuje dokonce nekonečně mnoho takových indexů $n_c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Označme $n_1$ nejmenší index, pro který platí $\sum_{k=0}^{n_1} |c_{n_1,k}| > 10^2$. Dále definujeme prvních $n_1$ členů posloupnosti $\{a_n\}$ předpisem

$$\text{sgn } c_{n_1,k} = \text{sgn } a_k, \quad |a_k| = \frac{1}{10}.$$

Potom

$$b_{n_1} = \sum_{k=0}^{n_1} c_{n_1,k} a_k = \sum_{k=0}^{n_1} \frac{1}{10} |c_{n_1,k}| > 10.$$

Z podmínky (i) existuje $n_0$ takové, že

$$\sum_{k=0}^{n_1} |c_{n,k}| < 1, \quad \text{pro } n \geq n_0.$$

Z čehož tedy plyne

$$\left| \sum_{k=0}^{n_1} c_{n,k} a_k \right| < \frac{1}{10} \quad \text{pro } n \geq n_0.$$

Nyní zvolme nejmenší index $n_2$ takový, že $n_2 \geq \max\{n_0,n_1\}$ a $\sum_{k=0}^{n_2} |c_{n_2,k}| > 10^4 + 1 + 10$. Definujme další členy $\{a_n\}$ předpisem

$$\text{sgn } c_{n_2,k} = \text{sgn } a_k, \quad |a_k| = \frac{1}{10^2}, \quad n_1 + 1 \leq k \leq n_2.$$

Potom platí

$$\begin{aligned} b_{n_2} &= \sum_{k=0}^{n_2} c_{n_2,k} a_k = \sum_{k=0}^{n_1} c_{n_2,k} a_k \sum_{k=n_1+1}^{n_2} c_{n_2,k} a_k = \\ &= \sum_{k=0}^{n_1} c_{n_2,k} a_k + \frac{1}{10^2} \sum_{k=n_1+1}^{n_2} |c_{n_2,k}|. \end{aligned}$$

Z předchozího plyne následující odhad

$$b_{n_2} > -\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}(10^4 + 1 + 10 - 1) = 10^2.$$

Indukcí definujeme posloupnost $\{a_n\}$ tak, že její členy od indexu $n_{k-1} + 1$ jsou po index $n_k$ rovny $\frac{1}{10^k}$ nebo $-\frac{1}{10^k}$. Potom posloupnost $\{b_n\}$ splňuje

$$b_{n_k} > 10^k, \quad \text{pro } k = 1,2,3,\ldots.$$

Neboť ale platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, a současně posloupnost $\{b_n\}$ má divergentní podposloupnost $\{b_{n_k}\}$, dostáváme spor. Tedy podmínka (iii) je nutná.

„ $\Leftarrow$ " Nechť jsou podmínky splněny a nechť $\lim a_k = A \in \mathbb{R}$. Protože je posloupnost $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ konvergentní, plyne odtud i její omezenost. Nalezněme tedy $K \in \mathbb{R} : K > 0$ takové, že $\forall k \in \mathbb{N} : |a_k| < K$. Platí

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_{n,k} a_k| \leq K \sum_{k=0}^{\infty} |c_{n,k}| \leq KC.$$

Řada $\sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k} a_k$ je tedy absolutně konvergentní.

Dále zvolme $\varepsilon > 0$ a k němu nalezněme $k_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq k_1 : |a_k - A| < \frac{\varepsilon}{4C}$. Z první podmínky plyne existence indexů $n_1, n_2, \ldots, n_{k_1}$ takových, že pro $k \leq k_1$, $n > n_k$ platí

$$|c_{n,k}| < \frac{\varepsilon}{4k_1 K}.$$

Položme $n^* = \max\{n_1, \ldots, n_{k_1}\}$. Pak tedy

$$\left|\sum_{k=0}^{k_1} c_{n,k} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{k_1} |c_{n,k} a_k| < \sum_{k=0}^{k_1} \frac{|a_k|\varepsilon}{4k_1 K} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Z druhé podmínky věty plyne existence $n^{**}$ takového, že pro $n > n^{**}$ platí

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{6K}.$$

Pak tedy platí pro $n > n^*$ :

$$\left|\sum_{k=0}^{k_1} c_{n,k}\right| \leq \sum_{k=0}^{k_1} |c_{n,k}| < \frac{\varepsilon}{4K}.$$

A pro $n > \max\{n^*, n^{**}\}$ :

$$\begin{aligned}
\Big| \sum_{k=k_1+1}^{\infty} c_{n,k} - 1 \Big| &= \Big| \sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k} - 1 - \sum_{k=0}^{k_1} c_{n,k} \Big| \\
&\leq \Big| \sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k} - 1 \Big| + \Big| \sum_{k=0}^{k_1} c_{n,k} \Big| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{6K} + \frac{\varepsilon}{4K} < \frac{\varepsilon}{2K}.
\end{aligned}$$

Nakonec z třetí podmínky věty a z konvergence posloupnosti $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ plyne

$$\Big| \sum_{k=k_1+1}^{\infty} c_{n,k}(a_k - A) \Big| \leq \sum_{k=k_1+1}^{\infty} |c_{n,k}||a_k - A| < \frac{\varepsilon}{4C} \sum_{k=k_1+1}^{\infty} |c_{n,k}| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

K dokončení důkazu zbývá

$$\begin{aligned}
\Big| \sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k} a_k - A) \Big| \leq \Big| \sum_{k=0}^{k_1} c_{n,k} a_k \Big| + \Big| \sum_{k=k_1+1}^{\infty} c_{n,k}(a_k - A) \Big| + |A| \Big| \sum_{k=k_1+1}^{\infty} c_{n,k} c_{n,k} - 1 \Big| \\
< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

**Poznámka.** Budeme-li předpokládat ve Větě 16 místo (i) a (ii) podmínky

**(i*)** $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \lim_{n \to \infty} c_{n,k} \in \mathbb{R}$,

**(ii*)** $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k} \in \mathbb{R}$,

a podmínku (iii) zachováme, dostaneme, že Věta 16 charakterisuje konservativní metody.

**Věta 17** (o poli konvergence pro maticové metody)**.** *Nechť je* $(\mathcal{L}_A)$ *maticová limitovací metoda. Potom* $\ell^\infty \subset c(\mathcal{L}_A)$ *právě tehdy, když matice* $A = (a_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ *splňuje podmínky*

**(i)** *existuje* $\lim_{n \to \infty} a_{n,k}$,

**(ii)** *řady* $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}|$ *konvergují stejnoměrně v* $n$.

*Důkaz.* „ $\Rightarrow$ " Dokažme nejprve, že z podmínek (i) a (ii) plyne, že

$$\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}| = M < \infty.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$, z podmínky (ii) k němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $p, q \geq n_0$ platí

$$\sum_{k=p}^{q} |a_{n,k}| < \varepsilon.$$

Tedy jistě platí pro $n \geq 0$

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_{n,k}| \leq \varepsilon.$$

Díky podmínce (i) existuje $K > 0$ takové, že

$$\sum_{k=0}^{n_0-1} |a_{n,k}| < K, \quad n \geq 0.$$

Odtud dostáváme $\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}| = K + \varepsilon < \infty$.

Nyní zvolme posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^{\infty}$. Pro libovolné $n \geq 0$ jest

$$|t_n| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}||s_k| \leq \sup_k |s_k| \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}|,$$

tedy, vzhledem k $\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}| = M < \infty$, je $\tau = \{t_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^{\infty}$. Označíme-li

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = a_k, \quad n \in \{0,1,\dots\},$$

potom dle podmínky (ii) je dokonce

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} s_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s_k.$$

Tím dostaneme $\tau \in c$, což znamená $\ell^{\infty} \subset c(\mathcal{L}_A)$.

„$\Leftarrow$" Předpokládejme nyní naopak, že $\ell^{\infty} \subset c(\mathcal{L}_A)$. Jelikož

$$e^n = \{0,\dots,0,1,0,\dots\} \in c, \quad n \geq 0,$$

je i $\mathcal{L}_A(e^n) \in c$, pro $n \geq 0$, takže zřejmě, vzhledem k definci maticové transformace, je podmínka (i) nutně splněna. Dle poznámky nad větou dostaneme, že platí pro každé $m \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}| < \infty.$$

Zbývá nám dokázat, že nutně platí (ii). Uvažme matici $B = (b_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ takovou, že

$$b_{n,k} = a_{n,k} - a_k, \quad n,k \geq 0.$$

Pro každou posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^{\infty}$ je zřejmě

$$\left\{\sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k} s_k\right\}_{n=0}^{\infty} \in c_0.$$

Jelikož dále platí $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$, vidíme, že podmínka (ii) je splněna právě tehdy, když řady $\sum_{k=0}^{\infty} |b_{n,k}|$ konvergují stejnoměrně v $n$. Postupujme dále sporem. Nechť existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro nekonečně mnoho celých $p \geq 0$ existuje posloupnost $q_j \geq 0$, $j \in \{0,1,\dots\}$, jejíž členy závisejí na $p$, taková, že

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} |b_{q_j,k}| > 4\varepsilon, \quad j \geq 0.$$

Nyní budeme konstruovat dvě celočíselné posloupnosti $\{k_i\}$, $\{n_i\}$ tak, že nejmenší z právě zmíněných čísel $p$ označíme $k_0$. K danému $k_i$, $i \geq 0$, najdeme $n_i$ takové, že

$$\sum_{k=k_i+1}^{\infty} |b_{n_i,k}| > 4\varepsilon,$$

$$\sum_{k=0}^{k_i} |b_{n_i,k}| < \varepsilon.$$

Dále vybereme z výše zmíněných $p$ přirozené $k_{i+1} > k_i$ tak, že

$$\sum_{k=k_{i+1}+1}^{\infty} |b_{n_i,k}| < \varepsilon.$$

Tedy dohromady máme

$$\sum_{k=k_i+1}^{k_{i+1}} |b_{n_i,k}| > 3\varepsilon, \quad i \geq 0.$$

Protože nyní

$$s_k^1 = \begin{cases} (-1)^i \mathrm{sgn}\ b_{n_i,k}, & k_i + 1 \leq k \leq k_{i+1}, \quad k \in \{0,1,\dots\}, \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

Vidíme, že $\{s_k^1\}_{k=0}^{\infty} \in \ell^\infty$ a $\sup_k |s_k| \leq 1$. Dále pro sudá $i$ dostaneme, že

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{n_i,k} s_k^1 \geq -\sum_{k=0}^{k_i} |b_{n_i,k}| + \sum_{k=n_i+1}^{k_{i+1}} |b_{n_i,k}| - \sum_{k=n_{i+1}+1}^{\infty} |b_{n_i,k}| > \varepsilon.$$

Pro lichá $i$ máme pak analogicky

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{n_i,k} s_k^1 < -\varepsilon.$$

Zde získáváme kýžený spor.

$\square$

## 2.3 Speciální maticové limitovací metody

**Definice 11** (metoda Rieszových průměrů). Nechť $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou posloupnosti. Nechť dále platí $q_0 > 0$, $q_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Položme

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k, \quad r_n^{(q)}(s) = \frac{\sum_{k=0}^{n} q_k s_k}{Q_n}, \quad n \geq 0.$$

Označme

$$c(R_q) = \left\{ \sigma = \{s_n\}_{n=0}^{\infty} : \exists \lim_{n\to\infty} r_n \in \mathbb{R} \right\},$$

$$R_q(\sigma) = \lim r_n, \quad R_q : c(R_q) \to \mathbb{R}.$$

Potom dvojici $(c(R_q),\, R_q)$ nazveme metodou Rieszových průměrů.

**Příklad** (Riesz)**.** Metoda Rieszových průměrů je representována maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{q_1}{q_1+q_2} & \frac{q_2}{q_1+q_2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{q_1}{q_1+q_2+q_3} & \frac{q_2}{q_1+q_2+q_3} & \frac{q_3}{q_1+q_2+q_3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

**Definice 12** (metoda Nörlundových průměrů)**.** Nechť $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou posloupnosti. Nechť dále platí $p_0 > 0$, $p_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Položme

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k, \quad t_n^{(p)}(s) = \frac{\sum_{k=0}^{n} p_{n-k} s_k}{P_n}, \quad n \geq 0.$$

Označme

$$c(N_p) = \left\{\sigma = \{s_n\}_{n=0}^{\infty} : \exists \lim_{n\to\infty} t_n \in \mathbb{R}\right\},$$

$$N_p(\sigma) = \lim t_n, \quad N_p : c(N_p) \to \mathbb{R}.$$

Potom dvojici $(c(N_p), N_p)$ nazveme metodou Nörlundových průměrů.

**Poznámka.** Metoda Nörlundových průměrů byla prvně popsána G. T. Voronym v roce 1901 a nezávisle na něm ji publikoval N. E. Nörlund v roce 1920. Můžeme se proto setkat také s označením metoda Voroného průměrů.

**Příklad** (Nörlund)**.** Metoda Nörlundových průměrů je representována maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{p_2}{p_1+p_2} & \frac{p_1}{p_1+p_2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{p_3}{p_1+p_2+p_3} & \frac{p_2}{p_1+p_2+p_3} & \frac{p_1}{p_1+p_2+p_3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

**Poznámka.** Metody Rieszových a Nörlundových průměrů jsou zobecněním Cesàrovy metody, neboť je-li $q_n = p_n = 1$, pro $\forall n \in \mathbb{N}$, jsou tyto metody totožné.

**Definice 13** (konečná Rieszova a Nörlundova metoda)**.** Řekneme, že Rieszova resp. Nörlundova metoda je konečná, jestliže $Q = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q_n < \infty$ resp. $P = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} p_n < \infty$.

**Věta 18** (o regularitě)**.** *Rieszova resp. Nörlundova metoda je regulární právě tehdy, když platí*

$$q_n = o(Q_n), \quad \textit{resp. } p_n = o(P_n).$$

*Důkaz.* Z podoby matice Rieszovy resp. Nörlundovy metody je zřejmé, že jsou splněny podmínky (ii) a (iii) ve Větě 16. Zvolme $k \in \mathbb{N}$. Potom díky předpokladu věty platí

$$\lim_{n\to\infty} c_{n,k} = \lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{\sum_{i=0}^{n} q_i} = 0.$$

Obdobně pro Nörlundovu metodu.

□

**Poznámka.** Z předchozí věty plyne, že pokud $Q = \infty$ resp. $P = \infty$, pak je příslušná metoda regulární.

**Poznámka.** Každá konečná Rieszova resp. Nörlundova metoda je regulární.

*Důkaz.* Nechť $Q = \sum_{n=0}^{\infty} q_n$ konverguje. Potom její členy $q_n$ konvergují k nule. Odtud plyne $\frac{q_n}{Q_n} \to 0$. Ověření podmínky (iii) je v případě Nörlundovy metody stejné.

$\square$

Zaměřme se na vztah mezi dvěma Nörlundvými metodami. Nechť $(N,p)$ a $(N,q)$ jsou regulární Nörlundovy metody. Nechť dále $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{l_n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou posloupnosti splňující pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ soustavu rovnic

$$k_0 p_n + \cdots + k_n p_0 = q_n,$$

$$l_0 q_n + \cdots + l_n q_0 = p_n.$$

Potom $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{l_n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou určeny jednoznačně, neboť $p_0$ a $q_0$ jsou nenulové. Sečteme-li pro každé $n$ obě strany rovnic, dostáváme systém jehož řešením jsou $Q_n$ a $P_n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$k_0 P_n + \cdots + k_n P_0 = Q_n,$$

$$l_0 Q_n + \cdots + l_n Q_0 = P_n.$$

Pomocí takto zkonstruovaných posloupností můžeme rozhodnout o vztahu mezi $(N,p)$ a $(N,q)$.

**Věta 19** (o vztahu dvou Nörlundových metod)**.** *Nechť $(N,p)$, $(N,q)$ jsou regulární Nörlundovy metody. Potom metoda $(N,q)$ obsahuje $(N,p)$ právě tehdy, když jsou splněny následující podmínky:*

**(i)** $|k_0|P_n + \cdots + |k_n|P_0 \leq HQ_n$, *kde $H \in \mathbb{R}^+$ zavisí na $n$,*

**(ii)** $\frac{k_{n-r}}{Q_n} \to 0$, *pro každé $r \leq n$.*

*Důkaz.* Označme $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$. Potom platí pro dostatečně malé $x$

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n t_n^{(q)}(s) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (q_0 s_n + \cdots + q_n s_0) x^n = q(x)s(x),$$

kde $q(x)$ značí $\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$. Poslední rovnost plyne z Cauchyova součinu nekonečných řad. Podobně dostáváme vztah

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n t_n^{(p)}(s) x^n = p(x)s(x).$$

Odtud tedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n t_n^{(q)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} P_n t_n^{(p)}(s) x^n.$$

Rozepsáním získáme

$$Q_n t_n^{(q)}(s) = k_n P_0 t_0^{(p)}(s) + k_{n-1} P_1 t_1^{(p)}(s) + \cdots + k_0 P_n t_n^{(p)}(s).$$

Vydělením obou stran rovnosti $Q_n$ a označením $c_{n,r} = \frac{k_{n-r}P_r}{Q_n}$, pro $r \leq n$ a $c_{n,r} = 0$, pro $r > n$, dostáváme

$$t_n^{(q)}(s) = \sum_{r=0}^{\infty} c_{n,r} t_r^{(p)}(s).$$

Díky podmínce (iii) ve Větě 16 pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $C > 0$ takové, že $\sum_{r=0}^{n} |c_{n,r}| \leq C$. Tím dostáváme první podmínku položíme-li $H = C$. Z výše uvedeného je jasné, že druhá podmínka je postačující, a její nutnost pak dostáváme z Věty 18.

□

**Věta 20** (ekvivalentní Nörlundovy metody)**.** *Jsou-li* $(N,p)$ *a* $(N,q)$ *regulární Nörlundovy metody. Potom* $(N,p)$, $(N,q)$ *jsou ekvivalentní právě tehdy, když jsou řady* $\sum_{n=0}^{\infty} |k_n|$, $\sum_{n=0}^{\infty} |l_n|$ *konvergentní.*

*Důkaz.* „ $\Rightarrow$ " Z definice Nörlundovy metody máme $p_0, q_0 > 0$, a tedy i $k_0, l_0 > 0$. Z Věty 19 dostáváme, že $k_0 P_n \leq H Q_n$. Tedy posloupnost $\left\{\frac{P_n}{Q_n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ je omezená, stejně tak posloupnost $\left\{\frac{Q_n}{P_n}\right\}_{n=0}^{\infty}$. Dále z Věty 19 máme pro každé $r \leq n$

$$|k_0|P_n + |k_1|P_{n-1} + \cdots + |k_r|P_{n-r} \leq HQ_n.$$

Po vydělení rovnosti $P_n$

$$|k_0| + |k_1|\frac{P_{n-1}}{P_n} + \cdots + |k_r|\frac{P_{n-r}}{P_n} \leq H\frac{Q_n}{P_n}.$$

Nyní zvolme $r \leq n$ pevné. Limitním přechodem dostaneme

$$|k_0| + |k_1| + \cdots + |k_r| \leq H \limsup \left(\frac{Q_n}{P_n}\right).$$

Z toho plyne konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} |k_n|$. Analogicky dostaneme konvergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty} |l_n|$.

„ $\Leftarrow$ " Z konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} |k_n|$ plyne $\lim_{n\to\infty} k_n = 0$, současně také $\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{Q_n} = 0$. Pak tedy, neboť je posloupnost $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ rostoucí, platí pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : Q_0 \leq Q_2 \leq \cdots \leq Q_n$. Odtud plyne odhad

$$P_n = Q_0 l_n + Q_1 l_{n-1} + \cdots + Q_n l_0 \leq Q_n \sum_{n=0}^{\infty} |l_n| < \infty.$$

Podobně dostáváme

$$P_n|k_0| + P_{n-1}|k_1| + \cdots + P_0|k_n| \leq P_n \sum_{n=0}^{\infty} |k_n| \leq Q_n \sum_{n=0}^{\infty} |l_n| \sum_{n=0}^{\infty} |k_n| < \infty.$$

Tvrzení plyne z Věty 19 volbou $H = \sum_{n=0}^{\infty} |l_n| \sum_{n=0}^{\infty} |k_n|$.

□

Jedním z užitečných příkladu Nörlundovy metody je Cesàrova metoda řádu $k$. Tu získáme vhodnou volbou posloupnosti $\{p_n\}$. Zaveďme tuto metodu pomocí definice.

**Definice 14** (Cesàrova metoda řádu $k$)**.** Nechť $s = \{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost. Položme

$$s_n^0 = s_n, \quad \text{pro každé } n \geq 0.$$

Definujme dále posloupnosti $\{s_n^k\}_{n=0}^{\infty}$ předpisem

$$s_n^k = \sum_{i=0}^{n} s_i^{k-1}, \quad \text{pro } k \geq 1.$$

Označme pro každé $k \geq 0$

$$C_n^k(s) = \frac{s_n^k}{\binom{n+k}{k}},$$

$$c(C^k) = \left\{ s = \{s_n\}_{n=0}^{\infty} : \exists \lim_{n\to\infty} C_n^k(s) \in \mathbb{R} \right\},$$

$$C^k(s) = \lim C_n^k(s), \quad C^k : c(C^k) \to \mathbb{R}.$$

Potom dvojici $(c(C^k),C^k)$ nazveme **metoda Cesàrových průměrů řádů** $k$.

**Poznámka.** Zavednení Cesàrovy metody řádu $k$ můžeme také ekvivalentně formulovat takto

$$C_n^k(s) = \frac{\sum_{i=0}^{n} \binom{i+k-1}{k-1} s_{n-i}}{\binom{n+k}{k}}.$$

Tím získáme možnost vyjádřit matici representující tuto metodu.

**Příklad** (Cesàro řádu $k$)**.** Cesàrova metoda řádu $k$ je representována maticí

$$\begin{pmatrix}
\frac{\binom{k-1}{k-1}}{\binom{k}{k}} & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\frac{\binom{k}{k-1}}{\binom{k+1}{k}} & \frac{\binom{k-1}{k-1}}{\binom{k+1}{k}} & 0 & 0 & \dots \\
\frac{\binom{k+1}{k-1}}{\binom{k+2}{k}} & \frac{\binom{k}{k-1}}{\binom{k+2}{k}} & \frac{\binom{k-1}{k-1}}{\binom{k+2}{k}} & 0 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}.$$

Nyní definujeme Hölderovu limitovací metodu, kterou budeme studovat do větší podrobnosti. Na konci kapitoly však ukážeme, že Hölderova metoda řádu $k$ je ekvivalentní s Cesàrovu metodu téhož řádu, a tedy vše, co dokážeme pro jednu metodu, platí i pro druhou.

**Definice 15** (Hölderova metoda)**.** Nechť $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost. Položme

$$H_n^0 = s_n, \quad \text{pro každé } n \geq 0.$$

Definujme dále posloupnosti $\{H_n^k\}_{n=0}^{\infty}$ předpisem

$$H_n^k = \frac{\sum_{i=0}^{n} H_i^{k-1}}{n+1}, \quad \text{pro } k \geq 1.$$

Označme pro každé $k \geq 0$

$$c(H^k) = \left\{ s = \{s_n\}_{n=0}^{\infty} : \exists \lim_{n\to\infty} H_n^k(s) \in \mathbb{R} \right\},$$

$$H^k(s) = \lim H_n^k(s), \quad H^k : c(H^k) \to \mathbb{R}.$$

Potom dvojici $(c(H^k),H^k)$ nazveme **Hölderovou metodou řádu** $k$.

**Poznámka.** Zřejmě platí, že metoda $H^0$ je totožná s konvergencí posloupnosti $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ a metoda $H^1$ odpovídá Cesàrově limitovací metodě řádu 1. Zajímavější vlastnost je, že metoda $H^k$ je příkladem maticové limitovací metody určené maticí, která odpovídá $k-$té mocnině matice representující Cesàrovou limitovací metodu řádu 1.

**Věta 21** (vztah Hölderových metod různých řádů)**.** *Nechť* $0 \leq k < l$. *Potom platí, že* $(H^l)$ *obsahuje* $(H^k)$.

*Důkaz.* Nechť $(H^k)\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že $l = k+1$. Použijeme-li Cesàrovu metodu na posloupnost $\{H_n^k\}_{n=0}^{\infty}$, pak z regularity této metody plyne, že

$$s = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} H_i^k}{n+1} = \lim_{n\to\infty} H_n^{k+1}.$$

Z toho dostáváme $(H^{k+1})\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$. Pro $l > k+1$ postup opakujeme.

□

**Věta 22** (regularita Hölderovy metody)**.** *Hölderova metoda* $H^k$ *je regulární pro každé* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

*Důkaz.* Tvrzení plyne z Věty 21, neboť $H_n^0 = s_n$.

□

**Věta 23** (Nutná podmínka pro Hölderovu metodu)**.** *Nechť* $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ *je posloupnost a* $(H^k)\sum_{i=0}^{\infty} a_i = s \in \mathbb{R}$. *Označme* $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$. *Potom platí* $s_n = o(n^k)$ *a také* $a_n = o(n^k)$.

*Důkaz.* Z definice Hölderovy metody máme

$$\begin{aligned}
&H_n^k = s + o(1),\\
&H_n^{k-1} = nH_n^k - (n-1)H_{n-1}^k = o(n),\\
&\dots\\
&H_n^0 = nH_n^1 - (n-1)H_{n-1}^1 = s_n = o(n^k),\\
&s_n - s_{n-1} = a_n = o(n^k).
\end{aligned}$$

□

Vše, co jsme doposud dokázali pro Hölderovu metodu, platí také pro Cesàrovu metodu příslušného řádu.

**Věta 24** (vztah Hölderovy a Cesàrovy metody)**.** *Nechť* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Potom metody* $(C,k)$ *a* $H^k$ *jsou ekvivalentní.*

*Důkaz.* Rozdělme důkaz do dou kroků. Nejprve zvolme posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Ukážeme, že platí pro každé $k \geq 2$ :

$$(C,k)\lim_{n\to\infty} a_n = (C,k-1)\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + \cdots + a_n}{n+1} = a.$$

Položme
$$\{s_n^0\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\sum_{i=0}^{n} a_i\right\}_{n=0}^{\infty}.$$
Dále definujme posloupnosti pro $k \geq 1$ :
$$\{s_n^k\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\sum_{i=0}^{n} s_i^{k-1}\right\}_{n=0}^{\infty}.$$
Označme $\{\sigma_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\frac{a_0+\cdots+a_n}{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$ a definujme analogicky
$$\{m_n^0\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\sum_{i=0}^{n} \sigma_i\right\}_{n=0}^{\infty},$$
pro $k \geq 1$ :
$$\{m_n^k\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\sum_{i=0}^{n} m_i^{k-1}\right\}_{n=0}^{\infty}.$$
Využijeme Abelovu parciální sumaci. Víme, že platí
$$\sum_{i=0}^{n} a_i b_i = a_n^0 b_n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^0 (b_i - b_{i+1}), \quad \text{kde } a_n^0 = \sum_{i=0}^{n} a_i.$$
Speciálně pro volbu $b_i = i + p$, kde $p \in \mathbb{R}$, $i \geq 0$, dostaneme
$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} a_i(i+p) &= a_n^0(n+p) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^0((i+p)-(i+1+p)) = \\ &= a_n^0(n+p) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i^0 = a_n^0(n+p+1) - \sum_{i=0}^{n} a_i^0 = \\ &= a_n^0(n+p+1) - a_n^1.\end{aligned}$$
Tedy neboť zřejmě platí $s_n^0 = (n+1)\sigma_n$, máme
$$\begin{aligned}s_n^1 &= \sum_{i=0}^{n} s_i^0 = \sum_{i=0}^{n}(i+1)\sigma_i = (n+2)m_n^0 - m_n^1, \\ s_n^2 &= \sum_{i=0}^{n} s_i^1 = \sum_{i=0}^{n}(i+2)m_i^0 - m_i^1 = \sum_{i=0}^{n}(i+2)m_i^0 - \sum_{i=0}^{n} m_i^1 = (n+3)m_n^1 - 2m_n^2, \\ &\dots \\ s_n^k &= (n+k)m_n^{k-1} - (k-1)m_n^k.\end{aligned}$$
Odtud vydělením posldní rovnosti výrazem $\binom{n+k}{k}$ získáme
$$\begin{aligned}\frac{s_n^k}{\binom{n+k}{k}} &= \frac{(n+k)m_n^{k-1}}{\binom{n+k}{k}} - \frac{(k-1)m_n^k}{\binom{n+k}{k}} = \\ &= \frac{(n+k)m_n^{k-1}}{\frac{(n+k)(n+k-1)!}{n!k(k-1)!}} - \frac{(k-1)m_n^k}{\binom{n+k}{k}} = \\ &= k\frac{m_n^{k-1}}{\binom{n+k-1}{k-1}} - (k-1)\frac{m_n^k}{\binom{n+k}{k}}.\end{aligned}$$

Tím dostáváme definici Cesàrovy metody. Tedy můžeme psát

$$C_n^k(s) = kC_n^{k-1}(m) - (k-1)C_n^k(m).$$

Dále, je-li $\lim_{n\to\infty} C_n^{k-1}(m) = a$, pak i $\lim_{n\to\infty} C_n^k(m) = a$. Z předchozí rovnosti máme $\lim_{n\to\infty} C_n^k(s) = a$.

Předpokládejme nyní naopak, že $\lim_{n\to\infty} C_n^k(s) = a$. Zřejmě platí $m_n^{k-1} = m_n^k - m_{n-1}^k$. Dosazením pak do rovnosti $s_n^k = (n+k)m_n^{k-1} - (k-1)m_n^k$ získáme

$$\begin{aligned} s_n^k &= (n+k)\left(m_n^k - m_{n-1}^k\right) - (k-1)m_n^k = \\ &= (n+1)m_n^k - (n+k)m_{n-1}^k. \end{aligned}$$

Stejně jako výše odvodíme

$$C_n^k(s) = (n+1)C_n^k(m) - nC_{n-1}^k(m).$$

Vypíšeme-li si tuto rovnost pro různá $n \geq 0$, dostaneme následující rovnosti:

$$\begin{aligned} C_n^k(s) &= (n+1)C_n^k(m) - nC_{n-1}^k(m), \\ C_{n-1}^k(s) &= nC_{n-1}^k(m) - (n-1)C_{n-2}^k(m), \\ C_{n-2}^k(s) &= (n-1)C_{n-2}^k(m) - (n-2)C_{n-3}^k(m), \\ &\dots \\ C_0^k(s) &= C_0^k(m). \end{aligned}$$

Součtem těchto rovností získáme

$$C_0^k(s) + C_1^k(s) + \dots + C_n^k(s) = (n+1)C_n^k(m).$$

Vydělíme výrazem $(n+1)$ a máme

$$C_n^k(m) = \frac{C_0^k(s) + C_1^k(s) + \dots + C_n^k(s)}{n+1} = C_n^{k+1}(s).$$

Tedy již nutně $\lim_{n\to\infty} C_n^k(m) = a$. Konečně z rovnosti $C_n^k(s) = (n+1)C_n^k(m) - nC_{n-1}^k(m)$ plyne $\lim_{n\to\infty} C_{n-1}^k(m) = a$.

Dokázaný poznatek nyní použijeme $k-$krát a dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} C_n^k(a) = \lim_{n\to\infty} C_n^{k-1}\left(\frac{a_0 + \dots + a_n}{n+1}\right) &= \lim_{n\to\infty} C_n^{k-1}(H^1(a)) \\ &= \lim_{n\to\infty} C_n^{k-2}(H^2(a)) = \dots \\ &= \lim_{n\to\infty} C_n^1(H^{k-1}(a)) = \lim_{n\to\infty} H^k(a). \end{aligned}$$

Tím je tvrzení dokázané.

□

**Příklad.** Pomocí $H^2$ metody sečteme řadu $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)$. Současně ukážeme, že tato řada není sčítatelná metodami $H^k$ pro $k < 2$.

Položme $H_n^0 = \sum_{i=0}^{n}(-1)^n(n+1)$. Potom $\{H_n^0\}_{n=0}^{\infty} = \{1, -1{,}2, -2, \dots\}$. Zkoumejme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$H_{2n}^1 = \frac{\sum_{i=0}^{2n} H_i^0}{2n+1} = \frac{H_{n+1}^0}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1},$$
$$H_{2n+1}^1 = \frac{\sum_{i=0}^{2n+1} H_i^0}{2n+2} = 0.$$

Zřejmě $\lim H_n^1$ neexistuje. Na posloupnost $\{H_n^1\}_{n=0}^{\infty}$ použijeme Hölderovu metodu znovu. Již máme $\{H_n^1\}_{n=0}^{\infty} = \{1{,}0{,}\frac{2}{3}{,}0{,}\frac{3}{5}, \dots\}$. Tedy pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$H_{2n}^2 = \frac{\sum_{i=0}^{2n} H_i^1}{2n+1} = \frac{1 + 0 + \frac{2}{3} + 0 + \frac{3}{5} + \dots + 0 + \frac{n+1}{2n+1}}{2n+1},$$
$$H_{2n+1}^2 = \frac{\sum_{i=0}^{2n} H_i^1}{2n+2} = \frac{1 + 0 + \frac{2}{3} + 0 + \frac{3}{5} + \dots + 0 + \frac{n+1}{2n+1} + 0}{2n+2}.$$

Zbývá určit $\lim H_n^2$. K tomu využijeme Stolzovu větu, neboť posloupnosti $\{2n+1\}_{n=0}^{\infty}$, $\{2n+2\}_{n=0}^{\infty}$ monotónně divergují k nekonečnu. Tedy

$$\lim_{n\to\infty} H_{2n}^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{2n} H_i^1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{2n} H_i^1 - \sum_{i=0}^{2n-2} H_i^1}{2n+1-(2n-1)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2n+1}}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{4},$$
$$\lim_{n\to\infty} H_{2n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{2n+1} H_i^1}{2n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{2n+1} H_i^1 - \sum_{i=0}^{2n-1} H_i^1}{2n+2-(2n)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2n+1}}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{4}.$$

Celkem dostáváme, že $\lim H_n^2 = \frac{1}{4}$.

# Seznam použité literatury

DOŠLÁ a NOVÁK (2002). *Nekonečné řady.* Masarykova univerzita, Brno. ISBN 80-210-1949-2.

HARDY, G. H. (1949). *Divergent Series.* Clarendon Press, Oxford. ISBN 978-0821826492.

HORÁK, L. (2012). *Sčítací metody pro nekonečné řady.* Bakalářská práce. Západočeská univerzita v Plzni.

KACZOR, W. J. a NOWAK, M. T. (2000). *Problems in mathematical analysis I: real numbers, sequences and series.* American Mathematical Society. ISBN 0-8218-2050-8.

KOVÁŘOVÁ, A. (2008). *Divergentní řady.* Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Brno.

NETUKA, I. (2015). *36. Mezinárodní konverence historie matematiky, (str. 163-182).* Matfyzpress, Praha. ISBN 978-80-7378-297-9.

ROBINSON, P. L. (2017). *Finite Nörlund Summation Methods.* arXiv:1712.06744.

ŠTĚPÁNEK, F. (1979). *Teorie Aproximací I. (Základy teorie limitovacích metod).* Univerzita Karlova, Praha. ISBN 17-3330-798.

ZOUBKOVÁ, M. (2019). *Divergentní nekonečné řady a jejich součty.* Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Brno.