Posudek oponenta diplomové práce

H-compactifications of topological spaces
Tereza Tížková

Obsahem práce je zkoumání kompaktifikací tichonovských prostorů X, na které lze spojitě rozšířit všechny homeomorfizmy prostoru X, tj. tzv. H-kompaktifikací. Takovou kompaktifikací je, triviálně, vždy Čechova-Stoneova kompaktifikace $\beta(X)$ a v případě, že X je lokálně kompaktní, i jednobodová kompaktifikace $\alpha(X)$. Otázkou je, zda existují další H-kompaktifikace daného prostoru X. Autorka se zabývá klasickými metrizovatelnými separabilními prostory a jejich mocninami $(\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{Q}^\omega, \mathbb{R}^\omega)$. Jediným novým výsledkem se zdá být případ $X = \mathbb{Q}^\omega$ (viz dále).

Práce není dobře sepsaná po stránce obsahové i formální (viz seznam připomínek). Obsahuje příliš mnoho nesprávných, nejasných nebo podivných formulací (některé jsou asi způsobeny nevhodným užitím angličtiny). U některých částí práce není jasné, proč jsou uvedeny (nesouvisí s tématem práce), některé proklamované výsledky chybí. Některé důkazy tvrzení jiných autorů jsou opsány, někdy i s překlepy z originálu. Sestavení práce je mi nejasné a nevím, podle jakého klíče autorka vybírala, co uvede podrobněji, v jakém pořadí a o čem se jen zmíní. U některých důkazů je postup ze začátku podrobný a konec důkazu (někdy podstatný díl důkazu) je odkázán do jiné publikace. Příklady jsou většinou jednoduché až triviální. Kladem je zmíněný případ prostoru $\mathbb{Q}^\omega$: je tu dokázáno, že má jedinou H-kompaktifikaci. Důkaz je jednoduchý, ale šlo o to si všimnout, že ze dvou různých známých tvrzení plyne uvedený výsledek, což už triviální být nemusí.

Uvedené negativní jevy snižují úroveň práce a podle mého názoru je diplomová práce Terezy Tížkové na hraně uznání jako diplomová práce.

Miroslav Hušek
5.6.2022 KMA

Konkrétní připomínky.

Následuje podrobnější přehled mých připomínek (někdy možná subjektivních) k jednotlivým částem práce podle jejich pořadí. Neuvádím všechny připomínky, např. vynechávám tiskové chyby (není jich mnoho), neuvádím všechny nejasné nebo podivné formulace. Některé připomínky slouží k vylepšení textu, většinou však upozorňují na nedostatky. Ty, které považuji za závažné pro diplomovou práci, jsou označeny hvězdičkou, dvěma hvězdičkami jsou označeny připomínky, které by autorka mohla při obhajobě vysvětlit.

Úvod. V Definici 1 je lépe říci *...pro každé dva různé body x, y...* místo *pro každé dva body x, y....*

Ve 3. odstavci jsou jako příklad Hausdorffových prostorů uvedeny topologické grupy – ty se často definují obecně, bez požadavku Hausdorffova axiomu.

Další odstavec má podivnou formulaci: *Compact Hausdorff spaces that are compact are even more favorable to work with.*

* Tvrzení 3 (kompaktnost je topologická vlastnost) plyne ihned z definice homeomorfizmu (zachovává otevřené množiny). Ale budiž, důkaz v práci ověří, že spojitý obraz kompaktního prostoru je kompaktní prostor. To je v pořádku, ale hned o pár řádků dále je uvedeno a dokázáno několik základních vlastností kompaktních prostorů, mezi nimi i právě uvedená vlastnost a úplně stejný důkaz se opakuje.

V posledním odstavci na str. 5 je matoucí věta *...we can construct a dense embedding of a Hausdorff space into a compact space ....* Pokud daný prostor nebude úplně regulární, nebude kompaktifikace Hausdorffova, pak ale není třeba předpokládat, že daný prostor je Hausdoffův.

V důkazu Věty 9 (kterou dokázal Tichonov) jsou nesprávné historické poznámky. Tichonov nedefinoval úplně regulární prostory, ty byly popsány již dříve Urysohnem. Tichonov v citovaném článku nedokázal, že součin kompaktních Hausdorffových prostorů je kompaktní (dokázal to jen pro součin kompaktních intervalů) – to explicitně uvedl a dokázal až Čech. Nelíbí se mi ani začátek důkazu, kde autorka píše *One direction is not difficult – note that every compact space is automatically Tychonoff.* Používá ale vlastnost kompaktních Hausdorffových prostorů, která jednoduchá není. Buď se dalo odkázat na Tichonova nebo na přednášku z topologie.

* Poznámka nahoře na str.6 je podivná. Nevím, proč začíná slovy *Recall that we say...*, ale budiž (jedná se o definici vnoření X do nějakého prostory Y). Pak poznámka pokračuje: *If we take a closure of the embedding, the name of this process, or equivalently for the resulting compact Hausdorff space, is a compactification.* Výsledek uzávěru vnořeného prostoru je uzavřený podprostor Y a nikde nebylo řečené, že Y je Haudorfův a kompaktní.

* Před koncem str.6 je napsáno: *We will automatically assume that all topological spaces in this text are Tychonoff.* Správně má být napsáno *in the next* místo *in this text*, protože na začátku byly uvažovány i obecnější prostory než Tichonovovy. Podstatnější ale je, že v další části textu se tato úmluva nedodržuje. Objevují se výrazy jako *Haudorffův prostor, Tichonovovův prostor, úplně regulární prostor – dokonce v jiném významu*, což čtenáře mate.

* Na str.6 začíná část o konstrukcích kompaktifikací. Úvodní tři řádky jsou nejasné. Dále jsou uvedeny 4 triviální konstrukce (ale třetí a první jsou stejné). Navíc poslední konstrukce je špatně popsaná.

Úvodní odstavec další části na str.7 je také nejasný a neodpovídá skutečnosti. Následující Definice 10 má nehezkou a ne zcela jasnou formulaci.

* Obě věty ve 3.odstavci na str.8 mají nehezkou formulaci. Zvláště 2.věta (*if the group of automorphisms admits a natural topology, we get a topological group*) není dobře formulovaná (navíc není jasné, co je *natural topology* v tomto případě).

V prvním odstavci části o Čechově-Stoneově kompaktifikaci na str.8 autorka asi zapomněla na své ujednání, že všechny prostory budou Tichonovovy.

Větu 14 nedokázal Tichonov, ale Čech. Tichonova rozšíření spojitých zobrazení nezajímalo, ani si nevšiml, že jeho konstrukce kompaktifikace automaticky dává spojitá rozšíření spojitých funkcí do $[0, 1]$. Je s podivem, že v seznamu literatury Čechův článek chybí. V něm je i explicitně jako první uvedená věta, že součin kompaktních prostorů je kompaktní, kterou Tichonov nemá (i když snadno z jeho výsledku plyne - prostě ho to nezajímalo). Nutno dodat, že ve znění Věty by mělo být uveden *up to homeomorphism, being identity on* X.

* V důkazu Věty 14 je vynechána část o spojitých rozšířeních, což je ale podstatná část důkazu (mohl být aspoň uveden odkaz).

* V části o jednobodově kompaktifikaci začínající na str.9 je trochu zmatek. Nejdříve musí být uveden popis topologie (tj. Definice 16) a teprve pak Definice 15, protože v ní se nějaká topologie potřebuje. Pouze přidáním jednoho bodu bez popsání topologie většího prostoru nelze mluvit o kompaktifikaci (navíc se musí ukázat, že získaný prostor je kompaktní – to se ovšem vše dělá na přednášce z topologie). Myslím, že jednodušší je spojit obě definice 15 a 16 v jednu definici.

V závěrečné poznámce je nutné říci, že získaná jednobodová kompaktifikace prostorů, které nejsou lokálně kompaktní, nejsou Hausdorffovy, tedy ani ne Tichonovovy. Navíc je vhodné říci, že okolím přidaného bodu jsou v tomto případě doplňky *uzavřených* kompaktních množin.

Kapitola 1 pojednává o známých H-kompaktifikacích klasických prostorů.

* Důkaz Věty 17 je opsán z van Douwenova článku. Na jednom místě asi chtěla autorka použít vlastní popis a vyšlo z toho něco podivného: *We can define discrete family $\mathcal{A}$ in a way that each of them is a family of closed sets of* $\mathbb{H}$ – *i.e. of closed intervals ....* (navíc, uzavřené podmnožiny $\mathbb{H}$ nejsou jen intervaly, takže ,,i.e." není na místě). Pokračování *Analogously, define another discrete family $\mathcal{B}$* moc smyslu nedává. Ve van Douwenově článku se rovnou popisují konkrétní soubory $\mathcal{A}, \mathcal{B}$. Na konci důkazu je asi přehlédnutí – má být $\overline{F} \cap \overline{G} = \emptyset$ místo $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

* V důkazu Věty 18 by se mělo dodat, jak z uvedeného plyne výsledek. Poznámka za důkazem je podivná a je nejasné, proč tu je.

V Příkladu 20.1 je ve druhé části nutné zdůraznit, že $n \geq 2$.

* V následující části 1.4 je podivná formulace *It is easy to embed* $\mathbb{N}$ *into a Hausdorff space.* Možná autorka chtěla napsat *into a compact space*, nevím, ale to už bylo zmíněno dříve (lokálně kompaktní prostory). Navíc je tu zbytečné označení *Hausdorff*, všechny prostory jsou Tichonovovy. Také další věta není zcela v pořádku: *For the precise description the one-point compactification* $\alpha\mathbb{N}_\infty$... (index ∞ tu ani nemá být). Vždyť přesný popis byl dán v Definicích 15 a 16. Spíše se jedná o popis jedné z reprezentací $\alpha\mathbb{N}$. Autorka tu popisuje $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ jako množinu n-tic. Nevím, zda se má jednat o množinu $\mathbb{N}$-tic – to se však nepoužívá.

Důkaz Věty 22 je opět opsán z van Douwenova článku. Dokonce i s větou *Denote by* $^{-}$ *the closure operator in* γX, což je v pořádku u van Douwena (je to první použití v článku), kdežto v diplomce už byl tento uzávěr používán dříve např. v důkazu Věty 17 (ten je u van Douwena později).

Kapitola 2 pojednává o H-kompaktifikacích mocniny $\mathbb{Q}^\omega$.

* Nevím, proč až na tomto místě autorka definuje součiny topologických prostorů, když je používá od začátku práce (např. Tichonovova věta). Není ani nutné, aby byly součiny v práci definované. Definice 23 je zbytečná.

** Pro výsledek deklarovaný v prvním odstavci není potřeba následujících 6 stránek (části 2.1.2-2.1.4), které slouží k van Engelenově charakterizaci prostoru $\mathbb{Q}^\omega$. Jedině v závěrečné velmi stručné části jsou uvedeny dva netriviální příklady z van Engelenových článků prostorů homeomorfních $\mathbb{Q}^\omega$, ovšem bez náznaku použití předchozí charakterizace.

V Definici 42 a Větě 43 by mělo být napsáno ...($**$) *with respect to* Γ....

Na konci části 2.1.3 a ke konci str.20 je odkaz na Větu 55 – správně má být 58.

* Autorka asi přehlédla, že v článku van Endelena se předpokládá, že všechny používané prostory jsou metrizovatelné a separabilní. To je potřeba v Definici 44, jinak by se musela použít úplnost ve smyslu Čecha (pak by se nemohla použít zmíněná absolutní vlastnost).

* Na straně 20 autorka popletla dva pojmy analytické množiny, nebo analytického prostoru. Našla definici analytického prostoru, ale pojmu používaného v geometrii. Kdežto van Engelen používá tento pojem ve významu deskriptivní topologie, tj. jako spojitý obraz úplného separabilního metrického prostoru. Takže Definice 47-51 jsou tu zbytečné a matoucí a nemají žádnou souvislost s pojmem používaným v Lemmatu 52.

* V položce 2 na konci str.20 je $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ označení pro nějakou soustavu neprázdných, neúplných a absolutních $F_{\sigma\delta}$ prostorů. Nechápu, proč je toto označení tady definováno. Na jediném místě (v důkazu Věty 58) je konkrétní potřebná posloupnost takových množin sestrojena a žádný odkaz na uvedenou položku 2 není potřeba (jen čtenáře mate).

* Důkaz Věty 58 je opsán z článku van Engelena, dokonce i s jeho tiskovými chybami. V první části důkazu autorka přidala tvrzení Hurewicze, které ale vůbec nepotřebuje (množiny X_i jsou triviálně

homeomorfní s $\mathbb{Q}^\omega$).

* Věta 62 je totožná s Větou 22.

** Hlavní tvrzení práce (Důsledek 62.1) je přímým důsledkem tvrzení 61 od van Engelena a tvrzení 62 od van Douwena. Nic jiného z této kapitoly nebylo potřeba (zvláště ne složitá charakterizace prostoru $\mathbb{Q}^\omega$). Důkazy tvrzení 61 a 62 jsou opsány od jejich autorů. Bylo by vhodné, kdyby autorka práce podrobněji uvedla důkaz 62, proč se každá neprázdná otevřená podmnožina $U \subset \mathbb{Q}^\omega$ dá napsat jako disjunktní sjednocení bázových obojetných podmnožin a jak z toho plyne, že U je homeomorfní s $\mathcal{Q}^\omega$.

Na začátku 2.3 by mělo být slovo *identical* nahrazeno slovem *isomorphic.*

* **Kapitola 3** pojednává o H-kompaktifikacích prostoru ℓ_2. Alespoň tak je to řečeno na začátku, ale nenašel jsem v kapitole nic, co by se týkalo proklamovaného obsahu. Nejdříve jsou popsány různé charakterizace $\beta(X)$ z knihy Gillmana a Jerisona. Pak jsou uvedena tvrzení z článku Vejnara o H-kompaktifikacích $\mathbb{R}^n$ (zde jen pro $n = 2$) a nakonec tvrzení Keeslinga o homeomorpfizmu prostoru ℓ_2 s prostorem rostoucích homeomorfizmů na $[0, 1]$ (se supremovou metrikou) a tvrzení Kennedyové, že prostor všech homeomorfizmů na $[0, 1]$ lze vnořit do nadprostoru uzavřených podmnožin v $[0, 1]$. Nenašel jsem nic, kde by se tato tvrzení použila.

** Jak byla míněna věta z Abstraktu, že tato kapitola obsahuje nástroje, které mohou pomoci vyřešit otázku H-kompaktifikací prostoru ℓ_2?

V definici 63 je definována množina ℓ_2, ale norma definována není (je tu poznámka, že se jedná o klasickou normu, ale stejně tak je ℓ_2 klasická množina).

* V Definici 64 je položka 4 nesmyslná. Měla tam asi být definice C^*-vnoření obecně).

V Definici 65 se musí dodat, že $\mathfrak{F}$ je částí $Z(X)$.

Ve Větě 68 se musí dodat, že γX je kompaktní.

* V Definici 64 je psáno *For an arbitrary topological space ...* a v Definici 69 *Take a completely regular space ....* Čtenář je zmaten - platí úmluva, že všechny prostory jsou Tichonovovy? Pokud ne, musí se dodat další předpoklady do některých tvrzení. Navíc má Definice 69 podivnou formulaci (a s chybou: má být $\beta h : \beta X \to K$, nikoli $\beta h : X \to \beta X$).

* Autorka si zřejmě nevšimla, že Gillman a Jerison zahrnují do své definice úplné regularity i Hausdorffovu vlastnost. Tím pádem její tvrzení opsaná z knihy Gillmana a Jerisona s předpoklady úplné regularity ne vždy platí pro její úplně regulární prostory, které Hausdorffovu vlastnost obecně nemají.

* Autorka má kompaktifikaci βX popsánu v Definici 13 pomocí položky 1 ve Větě 68 (v důkazu této Věty se vyhnula podstatnějším implikacím – nicméně, důkaz uvádět není nutné). Takže Věta 70 ihned plyne z ekvivalencí ve Větě 68. Větu 70 musí Gillman a Jerison dokazovat, protože pomocí Věty 68 kompaktifikaci βX definují, kdežto v práci už je tato kompaktifikace zavedena i s příslušnými vlastnostmi. Navíc je poslední část důkazu Věty 70 dost nesrozumitelná.

* Další část 3.2 je vybrána z článku Vejnara. Jediné dva důkazy (Věty 78 a Důsledek 78.1) jsou skoro opsány z Vejnarova článku.

* Uvedený Důsledek 78.1 je identický s Větou 20.

* V části 3.3 je definován prostor $\mathcal{H}^+([0, 1])$ jako prostor všech rostoucích homeomorfizmů na $[0, 1]$ se supremovou metrikou. Pak je uveden Keeslingův výsledek, že $\mathcal{H}^+([0, 1])$ je homeomorfní s ℓ_2. Ale protože Keesling používá pro $\mathcal{H}^+([0, 1])$ značení $\mathcal{H}_0([0, 1])$, je značení $\mathcal{H}^+([0, 1])$ zapomenuto (jen v poznámce za Větou se k němu vrací). Důkaz Keeslingovy věty v práci je prakticky identický s důkazem v Keeslingově článku.

* V Definici 81 je definován nadprostor $\mathcal{K}(X)$ topologického prostoru a hned nato je popsána Haus-

dorffova metrika na $\mathcal{K}(X)$. Pro to je ovšem potřeba, aby X byl metrický prostor a byla uvedena metrika ρ na X, jinak definice a označení ρ_H nedává smysl.

Definice zobrazení ϕ v důkazu Věty 82 je trochu kostrbatá.

Úplně na konci str.30 bylo vhodné podotknout, že všechny nekonečně dimenzionální Banachovy separabilní prostory jsou homeomorpfní s $\mathbb{R}^\omega$ (tvrzení Andersona a Kadece) a problém se tedy týká spočetné mocniny prostoru reálných čísel.

* Sice se na začátku části 3.3 říká, že se tato část zabývá jiným způsobem zkoumání H-kompaktifikací prostoru ℓ_2, ale nic takového jsem tam nenašel. Jedině je pomocí vět Keeslinga a Kennedyové sestrojena jedna kompaktifikace ℓ_2, ale není o ní nic řečeno. Vlastně ani sestrojena není, jen z uvedených vět vyplývá, že ℓ_2 se dá vnořit do kompaktního nadprostoru uzavřených množin na $[0, 1]$. Ani slovo navíc.

* **Kapitola 4** má název *H-kompaktifikace z hlediska teorie kategorií.* Obsahuje známý pohled na uspořádané prostory jako na kategorii. Základním uspořádaným prostorem je tu množina kompaktifikací nebo H-kompaktifikací daného prostoru se známým uspořádáním kompaktifikací. Jedná se tedy jen o velmi známý překlad mezi vlastnostmi uspořádaných prostorů a kategorií. Z formulací v práci mi není jasné, zda si to autorka uvědomuje.

* Není mi také jasné, proč autorka zvolila opačný postup, než je běžné, pro zkoumání svazových vlastností kompaktifikací (Lubbenovy věty). Způsobila si tím komplikace. Nejdříve zvolila kompaktifikace na lokálně kompaktním prostoru (Věta 93), kde dokázala jen jednoduché tvrzení, že otevřený podprostor kompaktního prostoru je lokálně kompaktní. Pak jen stručně opíše, co by se mělo dokázat, takže hlavní část důkazu chybí. Pro X, který není lokálně kompaktní (Věta 98) uvádí standardní důkaz, že kompaktifikace prostoru X tvoří úplný horní polosvaz. Má-li tento polosvaz nejmenší prvek, je úplný svaz a tedy platí jedna implikace Věty 93, kterou nedokazuje (druhá implikace je jednoduchá). Tentýž postup platí i pro uspořádaný prostor H-kompaktifikací (je skoro triviální, že v konstrukci suprema kompaktifikací z důkazu Věty 98 se dostane H-kompaktifikace, pokud pracujeme s H-kompaktifikacemi. Autorka v příslušných Větách 94 a 99 konstrukci částečně opakuje a pak použije komplikovanější obecnější tvrzení z článku Vejnara. Informace a postupy jsou převzaty z knihy Chandlera, který má kompaktifikace svázány z algebrami spojitých reálných funkcí, což je ale komplikovanější než postupy plynoucí z prací Tichonova a Čecha, které se většinou používají.

Definice 90 by měla být jen poznámkou, uvedené termíny totiž nejsou nikde v práci použity. Vůbec mám dojem, že v práci je příliš definic, které nejsou nutné.

Odstavec po Definici 90 je nejasný, plete se tam více věcí dohromady.

* Definice 91 je skoro totožná s Definicí 64.2 (jen není opakováno, že se jedná o podokruh – ten ale nikde není použit, na rozdíl od Chandlera)

* Definice 96 je tvrzení, nikoli definice.

Věty 97 a 100 platí obecně v uspořádaných prostorech, pokud to jsou svazy, úplné svazy,...

V Poznámce na str.35 je chyba. Poslední věta platí obecně pro uspořádané množiny, ale nikoli pro speciální případ P_X, Q_X. To, že suprema jsou stejná, je dokázáno ve Větě 94.

* Definice 101 by měla být poznámkou (vyplývá z definice uspořádání na kompaktifikacích). Vůbec část 4.2.1 by bylo lépe vynechat, kromě triviálních poznámek nic jiného neobsahuje. Věta 103 a následující vlastnost βX už byly používány dříve (když už to uvést, tak s odkazem na dřívější části). Navíc je Věta 103 a její důkaz matoucí. V tvrzení se používá ne nutně Tichonovův prostor, ale i jeho H-kompaktifikace, která je definována jen pro Tichonovovy prostory. V důkazu se navíc používá jen lokálně kompaktní prostor. Jednobodová kompaktifikace obecného prostoru nebyla popsána.

Poslední část 4.2.2 se nazývá Functorial properties. Top asi značí kategorii Tichonovových prostorů.

Je tu Důsledek poznámky, což není zcela obvyklé. Navíc důsledek všeobecně známý a na to nebylo třeba definovat adjungované funktory.

* Následuje známá klasická věta, že každé ,,proper” zobrazení mezi lokálně kompaktními Hausdorffovými prostory lze spojitě rozšířit na jednobodové kompaktifikace. Tuto větu získala autorka asi z publikace Cutlera o topologických prostorech s vyznačenými body. V uvedené větě ale vyznačené body nejsou potřeba a nevím, proč jsou v práci zavedeny a rozšiřování pro ně definováno. Ve větě Cutler uvádí ,,unpointed”, což autorka zbytečně opsala. Závěrečný výsledek 108.1 samozřejmě platí bez vyznačených bodů.

Je jasné, že $\mathcal{H}$ je kategorie? Práce obsahuje různé triviální poznámky a tvrzení, které ani nejsou použity a některé závažnější a potřebné poznámky (např. proč je $\mathcal{H}$ kategorie) chybí.

Konec připomínek. Miroslav Hušek