

# Oponentský posudek bakalářské práce

D. Kubíček: Základní vlastnosti  $p$ -Banachových prostorů

Práce představuje základy teorie  $p$ -normovaných lineárních prostorů. První část obsahuje základní pojmy, vztah ke kvazi-normovaným lineárním prostorům a ilustrativní příklady. Druhá část obsahuje výběr základních vět z teorie normovaných a Banachových prostorů a ukazuje, že platí (případně v případě Hahnovy-Banachovy věty neplatí) i v  $p$ -normovaných, resp.  $p$ -Banachových, prostorech. Třetí část se zabývá nelineárními zobrazeními mezi  $p$ -normovanými prostory. Obsahuje dvě tvrzení: 1) Pokud se  $q$ -normovaný lineární prostor  $X$  lipschitzovsky vnoří do  $p$ -normovaného lineárního prostoru, pak na  $X$  existuje ekvivalentní  $p$ -norma. 2) Mazurovo zobrazení z  $L_p$  do  $L_q$  je homeomorfismus pro libovolná  $p, q \in (0, +\infty)$ .

Z matematického hlediska se jedná o nepřilíši hluboký doplněk k základní teorii normovaných lineárních prostorů. Důkazy jsou většinou stejné, nebo mírně modifikované.

Práce je napsána přehledně, její formální a jazyková úroveň je velmi vyspělá a celkem dobře se čte. Po matematické stránce obsahuje nicméně drobnější chyby a má několik závažnějších nedostatků.

Přesto dle mého názoru předložená práce rozhodně splňuje požadavky, aby byla uznána jako bakalářská práce oboru Obecná matematika.

## Závažnější nedostatky.

Celá teorie je zcela nedostatečně zasazena do topologického a metrického kontextu. Autor často používá „automatická“ tvrzení z teorie metrických prostorů, ovšem neoprávněně, neboť není jasné, jak tato teorie souvisí s jeho *ad hoc* definicemi topologie (která je špatně), stejnoměrné spojitosti apod. Např. Baireova věta (str. 15), Heineova věta (str. 26)!

- 1) str. 5: Neřeší se, zda objekt definovaný v Definicí 1.8 je opravdu báze topologie. Pravděpodobně není. Neřeší se souvislost spojitosti v této „topologii“ s dále uvedenými *ad hoc* definicemi stejnoměrné spojitosti a lipschitzovskosti (viz např. str. 14). Neřeší se metrizovatelnost, takže není jasné, že prostor je sekvenciální. Zde uvedený pojem „izometrie“ je poněkud nešťastný, neboť nesouhlasí s pojmem izometrie v příslušné kanonické **metrice** (o které se ovšem v celé práci vůbec nemluví).
- 2) str. 11, ř. 11 (a mnohokrát dále): Proč platí „věta o limitě součtu“?
- 3) str. 14: Tvrdí se, že důkaz Tvrzení 2.1 je stejný, jako ve [3, Tvrzení 1.8]. Tam se ale (skrytě) používají metrické prostory! Stejně tak v důkazu Tvrzení 2.11 (odkaz na [3, Tvrzení 1.60]).
- 4) str. 15, Poznámka 2.7: Objekt  $(X, \|\cdot\|^p)$  není definován a z autorova výkladu není zřejmé, co by to mělo být! Celá poznámka tudíž nedává žádný smysl.
- 5) str. 16, důkaz Věty 2.8: Proč je  $T$  lineární? Proč platí rovnost na předposledním řádku důkazu?
- 6) str. 17: Odkazy do skript v důkazech Lemmatu 2.12 a Věty 2.14 používají spojitost vektorových operací!
- 7) str. 21: Důkaz Věty 2.24 není možno opsat beze změn – je potřeba použít Tvrzení 1.5.
- 8) str. 21, důkaz Lemmatu 2.25: Proč platí rovnost na ř. 12?
- 9) str. 22, důkaz Věty 2.26: Proč platí ta ekvivalence neprázdnosti vnitřků? Proč je  $V$  otevřená množina? Proč platí předposlední inkluze v důkazu?

## Drobné chyby a nejasnosti.

- 1) str. 5: Co je to omezená množina?
- 2) str. 6, ř. 4: Musí být  $p < 1$ .
- 3) str. 12: První dva řádky jsou matoucí; vysvětlení, proč to platí, není správně.
- 4) str. 15: V Definicí 2.3 mají být lineární zobrazení spojitá. Kromě toho se neřeší, zda je  $\|T\|$  dobře definováno.
- 5) str. 15, ř. 8: Proč platí první (a poslední) rovnost?
- 6) str. 18, poznámka za Definicí 2.15: Jak plyne (N1) z uzavřenosti  $Y$ ?
- 7) str. 18, poznámka za Definicí 2.15: Proč platí první rovnost na pátém řádku?
- 8) str. 19, důkaz Věty 2.20: Proč platí druhá nerovnost na druhém řádku? Proč platí rovnost na posledním řádku?
- 9) str. 21, důkaz Lemmatu 2.25: Začátek 10. řádku je špatně opsán ze skript.

- 10) str. 22, důkaz Věty 2.26: Proč lze nalézt takové  $r > 0$ ?
- 11) str. 24: Terminologie v Definici 3.1 je pochybná.
- 12) str. 26: Ve Tvzení 3.7 jsou prostory reálné? Je zobrazení  $\phi_{p,q}$  dobře definováno?

### Neobratnosti a překlady.

- 1) str. 6: Příklady 1.11 a 1.12 jsou uvedeny dříve než definice  $\ell_p$ .
- 2) str. 9: Prvních 8 řádků třetího odstavce by šlo vysvětlit lépe. Kromě toho je to zbytečně překombinované, celé to plyne z „monotonie“  $f$ .
- 3) str. 11, ř. 2 odspodu: Chtělo by to podotknout, že daná nerovnost platí díky vlastnostem  $p$ -normy.
- 4) str. 14: V Tvzení 2.1(ii) má být  $bB_1$  místo  $bB_2$ .
- 5) str. 14: Důkaz Tvzení 2.2 je také ve skriptech, takže je zbytečné jej opisovat.
- 6) str. 17, důkaz Věty 2.14:  $T_1$  je izomorfismus z důkazu v [3], ne z důkazu (i) $\Rightarrow$ (ii), který tam není.
- 7) str. 18: Na prvním řádku by měl být odkaz na Tvzení 1.5.
- 8) str. 19, ř. 4: **spojité** lineární funkcionály
- 9) str. 21, ř. 3 odspodu: Chtělo by to vysvětlit, proč platí první nerovnost.
- 10) str. 22, ř. 3 odspodu: Chybí odkaz na Tvzení 2.5(ii).
- 11) str. 23: Implikace  $\Rightarrow$  je jednoduchá, ale ne triviální.
- 12) str. 25: Důkaz implikace  $\Leftarrow$  je zbytečný, plyne to ze spojitosti  $\|\cdot\|_p$ .
- 13) str. 26: Lemma 3.6 je zformulováno zbytečně v  $p$ -normovaných lineárních prostorech. Je to snadný fakt z metrických prostorů.
- 14) str. 27: Shrně  $\rightarrow$  Shrňme

14.6.2022

Michal Johanis