MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

David Kubíček

Základní vlastnosti p-Banachových prostorů

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Marek Cúth, Ph.D.
Studijní program: Obecná matematika

Praha 2022

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Rád bych poděkoval svému vedoucímu práce doc. Mgr. Marku Cúthovi, Ph.D. za jeho ochotu a trpělivost při konzultacích a skvělé vedení práce.

Název práce: Základní vlastnosti p-Banachových prostorů

Autor: David Kubíček

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Marek Cúth, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: V práci připomeneme pojem kvazi-normy a p-normy. Uvedeme Aokiho-Rolewiczovu větu, která tyto dva pojmy dává do kontextu. Zobecníme vybrané výsledky z Banachových prostorů do p-Banachových prostorů pro $0 < p \leq 1$. Studujeme $L_p(\mu)$ prostory. Konkrétně se podíváme na jejich základní vlastnosti, duální prostory a nelineární strukturu.

Klíčová slova: p-Banachovy prostory, L_p prostory

Title: Basic properties of p-Banach spaces

Author: David Kubíček

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. Mgr. Marek Cúth, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: In this thesis we recall the notion of a quasi-norm and a p-norm. We mention the Aoki-Rolewicz theorem which connects these two notions. We deal with generalizations of selected results from Banach spaces to p-Banach spaces for $0 < p \leq 1$. We study the class of $L_p(\mu)$ spaces. Namely, we explore their basic properties, their dual spaces and nonlinear structure.

Keywords: p-Banach spaces, L_p spaces

Obsah

Úvod

Uvažujme $p, q \in (0, 1]$, pokud není řečeno jinak. Tématem práce jsou p-Banachovy prostory, které zobecňují pojem Banachových prostorů. V první kapitole zavádíme stěžejní pojmy kvazi-normy a p-normy. Podíváme se na jejich základní vlastnosti a porovnáme je s normou. Snadno lze nahlédnout, že každá p-norma je také kvazi-normou. Nicméně není pravda, že by kvazi-norma musela být p-normou. Aokiho-Rolewiczova věta říká, že ke každé kvazi-normě existuje ekvivalentní p-norma. Důkaz této věty vychází z [4, Lemma 1.1] a je doplněn o podrobnosti ve Větě 1.14 a Lemmatu 1.15. Druhá část první kapitoly je vyhrazena L_p prostorům. Za užití takzvaného testu p-úplnosti ukážeme, že jsou p-Banachovými prostory a uvedeme jejich další základní vlastnosti. Zjistíme, že nekonečně dimenzionální L_p nejsou q-normovatelné pro $q > p$.

Obsahem druhé kapitoly je zobecnění vybraných tvrzení z kurzu, vyučovaném na MFF, „Úvod do funkcionální analýzy“ z normovaných lineárních prostorů do p-normovaných lineárních prostorů. Vycházíme ze skript [3]. Většinu první sekce věnujeme teorii lineárních operátorů v těchto prostorech. Podíváme se na konečně dimenzionální p-normované lineární prostory a uvedeme jejich charakterizaci. V druhé sekci této kapitoly se zaměříme na duální prostory k L_p prostorům. Na příkladu si ukážeme, že duální prostor může být triviální, což se u netriviálních normovaných prostorů nemůže stát. V třetí sekci kapitoly zobecníme větu o otevřeném zobrazení a větu o uzavřeném grafu.

Třetí kapitola je vyhrazena nelineární struktuře L_p prostorů. Zavedeme pojem lipschitzovského vnoření a lipschitzovsky izomorfních prostorů a za pomoci Aokiho-Rolewiczovy věty odvodíme, že nekonečně dimenzionální $L_p(\mu)$ nemůže být lipschitzovsky izomorfní $L_q(\mu)$. Proto tedy budeme mezi těmito prostory hledat pouze homeomorfismus. Ten se podaří nalézt, a dokonce platí, že $L_p(\mu)$ je homeomorfní $L_1(\mu)$ pro $0 < p < \infty$. Jako důsledek pak uvedeme, že separabilní nekonečně dimenzionální L_p jsou navzájem homeomorfní pro $0 < p < \infty$.

1. Kvazi-norma, p-norma a klasické příklady

1.1 Definice a Aokiho-Rolewiczova věta

Budeme pracovat s vektorovými prostory nad tělesem $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Pokud neřekneme jinak, budou tvrzení platit pro obě tělesa. Pro zkrácení zápisu budeme psát $\mathbb{K}$, čímž označíme buď reálné nebo komplexní těleso.

Definice 1.1. *Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $p \in (0,1]$. Zobrazení $\|\cdot\|\colon X \to [0,\infty)$ nazveme* p-normou na X*, pokud*

(N1) $\|x\| = 0$ *právě tehdy, když* $x = 0$,

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ *pro všechna* $x \in X, \alpha \in \mathbb{K}$,

(P) $\|x+y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$ *pro všechna* $x, y \in X$.

Dvojici $(X,\|\cdot\|)$ *nazýváme* p-normovaným lineárním prostorem. *Vlastnost (P) se nazývá* p-trojúhelníková nerovnost.

Definice 1.2. *Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $C \geq 1$. Zobrazení $\|\cdot\|\colon X \to [0,\infty)$ nazveme* kvazi-normou na X s konstantou C*, pokud splňuje axiomy (N1), (N2) a navíc*

(Q) $\|x+y\| \leq C(\|x\| + \|y\|)$ *pro všechna* $x, y \in X$.

Dvojici $(X,\|\cdot\|)$ *nazýváme* kvazi-normovaným lineárním prostorem. *Vlastnost (Q) se nazývá* kvazi-trojúhelníková nerovnost.

Poznámka 1.3. Mohli bychom v definici pouze požadovat, aby $C > 0$. Pokud vektorový prostor X má nenulový prvek x, tak nutně z axiomu *(N2)* plyne, že $C \geq 1$, neboť

$$2\|x\| = \|2x\| \leq C(\|x\| + \|x\|) = 2C\|x\|.$$

Pak bychom ale museli v důkazech několika tvrzení pracovat zvlášť s triviálními a netriviálními vektorovými prostory.

Úmluva 1.4. Kdykoliv řekneme „Nechť X je p-normovaný lineární prostor“, je implicitně míněno, že $p \in (0,1]$.

Můžeme si hned všimnout, že každý p-normovaný lineární prostor je také kvazi-normovaným lineárním prostorem. Tento fakt zachycuje následující tvrzení.

Tvrzení 1.5. *Nechť $(X,\|\cdot\|)$ je p-normovaný lineární prostor. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x_1, \ldots, x_n \in X$ platí*

$$\|x_1 + \ldots + x_n\| \leq n^{\frac{1}{p}-1} \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|.$$

Speciálně, X je kvazi-normovaný lineární prostor s konstantou $C = 2^{1/p-1}$.

Důkaz. Případ pro $p = 1$ je triviální. Ať tedy $p \in (0,1)$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$ a $x_1, \ldots, x_n \in X$ libovolná. Pak platí

$$\begin{aligned}\|x_1 + \ldots + x_n\|^p &\leq \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \|x_i\|^p \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} 1^{\frac{1}{1-p}}\right)^{1-p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (\|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}}\right)^p = n^{1-p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\right)^p,\end{aligned}$$

kde první nerovnost je p-trojúhelníková nerovnost a druhá nerovnost je Hölderova nerovnost. Umocněním na $1/p$ dostáváme požadovanou nerovnost. Položením $n = 2$ dostáváme druhou část tvrzení.

□

Také platí, že každý p-normovaný lineární prostor je q-normovaným lineárním prostorem pro $q \leq p$. K důkazu tohoto tvrzení využijeme následujícího lemmatu.

Lemma 1.6. *Nechť $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ je konkávní na $[0,\infty)$. Pak f je subaditivní na $[0,\infty)$.*

Důkaz. Z konkávnosti f pro $x, y \in [0,\infty)$ a $\lambda \in [0,1]$ libovolné dostáváme $f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$. Dosadíme nyní $x = 0$ a využijeme předpokladu, že $f(0) \geq 0$. Dostáváme $f(\lambda y) \geq \lambda f(y)$.

Mějme dále $x, y \in [0,\infty)$ taková, že $x + y > 0$. Pak z předchozích výpočtů dostáváme

$$f(x+y) = \frac{x}{x+y} f(x+y) + \frac{y}{x+y} f(x+y) \leq f(x) + f(y).$$

Pokud $x = y = 0$, tak zřejmě platí $f(0) \leq 2f(0)$. Celkově je f subaditivní na $[0,\infty)$.

□

Tvrzení 1.7. *Nechť $0 < q \leq p \leq 1$. Je-li $(X, \|\cdot\|)$ p-normovaný lineární prostor, je také q-normovaným lineárním prostorem.*

Důkaz. Ověříme platnost axiomu *(P)*. Nechť $x, y \in X$ jsou libovolná. Počítejme:

$$\|x+y\|^q = (\|x+y\|^p)^{\frac{q}{p}} \leq (\|x\|^p + \|y\|^p)^{\frac{q}{p}} \leq \|x\|^q + \|y\|^q,$$

kde poslední nerovnost plyne z Lemmatu 1.6 aplikovaném na funkci $x \mapsto x^{\frac{q}{p}}$.

□

Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je kvazi-normovaný lineární prostor, $x \in X$ a $r > 0$. Označíme

- $U_X(x,r) = \{y \in X : \|x-y\| < r\}$ otevřenou kouli o středu x a poloměru r,
- $B_X(x,r) = \{y \in X : \|x-y\| \leq r\}$ uzavřenou kouli o středu x a poloměru r,
- $S_X(x,r) = \{y \in X : \|x-y\| = r\}$ sféru o středu x a poloměru r.

Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme index X vynechávat. Zároveň budeme zkracovat $U_X(0{,}1)$ na U_X a analogicky pro uzavřenou kouli a sféru.

Definice 1.8. *Nechť* $(X,\|\cdot\|)$ *je kvazi-normovaný lineární prostor. Definujeme bázi topologie* $\mathcal{G}$ *na* X *jako* $\mathcal{B} = \{U(x,r) : x \in X, r > 0\}$.

Dále rozšíříme metrické pojmy, které budeme používat, do kontextu kvazi-normovaných lineárních prostorů.

Definice 1.9. *Nechť* $(X,\|\cdot\|_X)$ *a* $(Y,\|\cdot\|_Y)$ *jsou kvazi-normované prostory,* $f\colon X \to Y$ *je zobrazení,* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost prvků* X*,* $\|\cdot\|_1$ *a* $\|\cdot\|_2$ *jsou dvě kvazi-normy na* X.

Řekneme, že f *je*

- stejnoměrně spojité*, pokud*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, y \in X : (\|x-y\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_Y < \varepsilon),$$

- lipschitzovské s konstantou $K > 0$*, pokud*

$$\forall x, y \in X : \|f(x) - f(y)\|_Y \leq K\|x-y\|_X,$$

- izometrie*, pokud*

$$\forall x, y \in X : \|f(x) - f(y)\|_Y = \|x-y\|_X.$$

Posloupnost prvků $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ *nazveme* cauchyovskou*, pokud*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n, m \in \mathbb{N}, n > m > n_0 : \|x_n - x_m\|_X < \varepsilon.$$

Kvazi-normovaný lineární prostor $(X,\|\cdot\|)$ *nazveme* kvazi-Banachovým prostorem*, pokud je každá cauchyovská posloupnost prvků* X *konvergentní. Je-li navíc* $\|\cdot\|$ p*-normou na* X*, nazveme v takovém případě* $(X,\|\cdot\|)$ p-Banachovým prostorem.

Řekneme, že kvazi-normy $\|\cdot\|_1$ *a* $\|\cdot\|_2$ *jsou* ekvivalentní*, pokud existují kladné konstanty* K, L *splňující pro každé* $x \in X$*, že* $K\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq L\|x\|_1$.

Je dobře známo, že je-li $(X,\|\cdot\|)$ normovaný lineární prostor, pak zobrazení $\|\cdot\|$ je lipschitzovské na X. Zkusme se nyní zaobírat otázkou, zda podobné tvrzení platí pro p-normy, respektive kvazi-normy. Pro p-normy nám určitou pozitivní odpověď dává následující tvrzení.

Tvrzení 1.10. *Nechť* $(X,\|\cdot\|)$ *je* p*-normovaný lineární prostor. Pak* $\|\cdot\|$ *je stejnoměrně spojitá na omezených množinách.*

Důkaz. Pro $p = 1$ dostáváme dokonce lipschitzovskost na celém X. Ať tedy $p \in (0,1)$. Položme $f\colon X \to [0,\infty), f(x) = \|x\|^p$ a $g\colon [0,\infty) \to [0,\infty), g(x) = x^{\frac{1}{p}}$. Z p-trojúhelníkové nerovnosti dostáváme $|f(x) - f(y)| \leq \|x-y\|^p$ pro všechna $x, y \in X$. Ukážeme, že f je stejnoměrně spojitá na X. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Jako δ v definici stejnoměrné spojitosti volme $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{p}}$. Pak pro $x, y \in X$ splňující $\|x-y\| < \delta$ dostáváme $|f(x) - f(y)| \leq \|x-y\|^p < \varepsilon$. Také je ze vztahu $|f(x) - f(y)| \leq \|x-y\|^p$ vidět, že f zobrazuje omezené množiny na omezené množiny. Zobrazení g je stejnoměrně spojité na omezených množinách. To plyne z toho, že g je spojité na $[0,\infty)$ a toho, že každá omezená množina je obsažena v kompaktním intervalu $[0, R]$ pro nějaké $R > 0$. Celkem $\|\cdot\| = g \circ f$ je stejnoměrně spojitá na omezených množinách.

$\square$

Pravděpodobně nejznámějšími příklady p-Banachových prostorů, které nejsou Banachovými prostory, jsou prostory ℓ_p a $L_p([0,1])$. Zvídavý čtenář může nahlédnout do sekce 1.2, kde tyto prostory formálně definujeme a dokazujeme o nich základní tvrzení. V následujících příkladech si ukážeme, že p-norma nemusí být ani stejnoměrně spojitá na celém X, ani lipschitzovská na omezených množinách právě na p-Banachově prostoru ℓ_p.

Příklad 1.11. Ukážeme, že podmínka na omezenost množin v Tvrzení 1.10 je potřebná. Pro $p \in (0,1)$ uvažujme p-normovaný lineární prostor ℓ_p. Položme

$$x_n = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n \text{ krát}}, 0, \ldots), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dále pro $n, m \in \mathbb{N}$ položíme $x_n^m = \frac{1}{m} x_n$. Všimněme si, že $\|x_{n+1} - x_n\| = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a tedy $\|x_{n+1}^m - x_n^m\| = \frac{1}{m}$ pro $n, m \in \mathbb{N}$. Také platí, že $\|x_n\| = n^{1/p}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak pro každé $m \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\|x_{n+1}^m\| - \|x_n^m\|\right) &= \frac{1}{m} \lim_{n\to\infty} (\|x_{n+1}\| - \|x_n\|) = \frac{1}{m} \lim_{n\to\infty} \left((n+1)^{\frac{1}{p}} - n^{\frac{1}{p}}\right) \\
&= \frac{1}{m} \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{p}} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}} - 1\right) = \frac{1}{m} \lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{\frac{1}{p}} - 1}{x^{\frac{1}{p}}} \\
&= \frac{1}{m} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{p}(1+x)^{(\frac{1}{p}-1)}}{\frac{1}{p} x^{(\frac{1}{p}-1)}} = \frac{1}{m} \lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{(\frac{1}{p}-1)}}{x^{(\frac{1}{p}-1)}} = \infty.
\end{aligned}$$

Ve výpočtech jsme užili L'Hospitalova pravidla a na závěr nerovnosti $1/p - 1 > 0$. To ovšem vylučuje stejnoměrnou spojitost $\|\cdot\|$ na ℓ_p.

$\diamond$

Příklad 1.12. Ukážeme, že p-norma nemusí být lipschitzovská na omezených množinách pro $p \in (0,1)$. Uvažujme p-normovaný lineární prostor $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ jakožto podprostor ℓ_p. Položme $x = (1,0)$ a $x_n = (1, n^{-1/p})$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak $x_n \to x$, neboť $\|x_n - x\| = n^{-1/p}$. Dále platí, že $\|x\| = 1$ a $\|x_n\| = (1 + \frac{1}{n})^{1/p}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Nyní díky již spočtené limitě z předchozího příkladu snadno spočítáme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|x_n\| - \|x\|}{\|x_n - x\|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{p}} - 1}{\frac{1}{n}^{\frac{1}{p}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{\frac{1}{p}} - 1}{x^{\frac{1}{p}}} = \infty.$$

Tedy p-norma opravdu nemusí být lipschitzovská na omezených množinách.

$\diamond$

Jak ukazuje následující příklad, kvazi-norma nemusí být spojité zobrazení.

Příklad 1.13. Uvažujme dvojici $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$, kde pro $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ definujeme

$$\|(x,y)\| = \begin{cases} 2\,|x|\,, & y = 0, \\ |x| + |y|\,, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Ukážeme, že $\|\cdot\|$ je kvazi-norma na $\mathbb{R}^2$ s konstantou 2. Z předpisu ihned dostáváme platnost *(N1)* a *(N2)*. Zbývá ukázat platnost *(Q)*. Nechť $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ a $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ jsou libovolná. Pokud $x_2 + y_2 = 0$, pak platí

$$\begin{aligned}\|x + y\| &= \|(x_1 + y_1, 0)\| = 2\,|x_1 + y_1| \leq 2(|x_1| + |y_1|)\\ &\leq 2(|x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2|) \leq 2(\|(x_1, x_2)\| + \|(y_1, y_2)\|) = 2(\|x\| + \|y\|).\end{aligned}$$

Pro $x_2 + y_2 \neq 0$ máme

$$\begin{aligned}\|x + y\| &= \|(x_1 + y_1, x_2 + y_2)\| = |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2|\\ &\leq |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2| \leq \|(x_1, x_2)\| + \|(y_1, y_2)\| = \|x\| + \|y\|.\end{aligned}$$

Tedy $\|\cdot\|$ je kvazi-norma s konstantou 2 na X. Položíme nyní $x = (1, 0)$ a $x_n = (1, \frac{1}{n})$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak pro $n \in \mathbb{N}$ máme $\|x_n - x\| = \|(0, \frac{1}{n})\| = \frac{1}{n}$, a proto $x_n \to x$. Nicméně $\|x\| = 2$ a $\|x_n\| = 1 + \frac{1}{n}$, a tedy $\|x_n\|$ nekonverguje k $\|x\|$. Proto $\|\cdot\|$ není spojitá v bodě x a tedy ani na $\mathbb{R}^2$.

◇

Nyní naším cílem bude dokázat Aokiho-Rolewiczovu větu, která říká, že pro každý kvazi-normovaný prostor $(X, \|\cdot\|)$ existuje k $\|\cdot\|$ ekvivalentní p-norma na X. Věta byla dokázána roku 1942 T. Aokim a nezávisle pak roku 1957 S. Rolewiczem. Věta se často také uvádí v následující verzi, jejíž pozměněnou formulaci ospravedlní Lemma 1.15.

Věta 1.14 (Aokiho-Rolewiczova)**.** *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je kvazi-normovaný lineární prostor. Nechť dále existuje existují $p \in (0, 1]$ a $K \geq 1$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x_1, \ldots, x_n \in X$ platí*

$$\|x_1 + \ldots + x_n\|^p \leq K \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p. \tag{1.1}$$

Pak existuje p-norma na X, která je ekvivalentní kvazi-normě $\|\cdot\|$.

Důkaz. Položme

$$|x| = \inf \left\{ \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p} : \sum_{i=1}^{n} x_i = x, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad x \in X.$$

Ukážeme, že $|\cdot|$ je p-norma na X, která je ekvivalentní kvazi-normě $\|\cdot\|$. Z definice $|\cdot|$ plyne, že $|x| \leq \|x\|$ pro každé $x \in X$. Nechť $x \in X$ je libovolné. Mějme dále $n \in \mathbb{N}$ a $x_1, \ldots, x_n \in X$ splňující, že $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Pak z (1.1) máme

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\| \leq K^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

a tedy přechodem k infimu dostáváme $\|x\| \leq K^{\frac{1}{p}} |x|$. Proto pro všechna $x \in X$ platí

$$|x| \leq \|x\| \leq K^{\frac{1}{p}} |x|. \tag{1.2}$$

Zbývá ukázat, že $|x|$ je p-norma na X.

Z (1.2) plyne axiom *(N1)*. K ověření *(N2)* nechť $x \in X, \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0$ jsou libovolná. Pak

$$\begin{aligned}
|\alpha x| &= \inf \left\{ \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p} :\ \alpha x = \sum_{i=1}^{n} x_i, n \in \mathbb{N} \right\} \\
&= \inf \left\{ |\alpha| \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{x_i}{\alpha} \right\|^p} :\ x = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\alpha}, n \in \mathbb{N} \right\} \\
&= |\alpha| \inf \left\{ \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p} : x = \sum_{i=1}^{n} x_i, n \in \mathbb{N} \right\} = |\alpha|\, |x| \,.
\end{aligned}$$

K ověření *(P)* nechť $x, y \in X$ jsou dané a zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle definice $|\cdot|$ nalezneme $n, m \in \mathbb{N}$ a $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in X$ taková, že $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $y = \sum_{i=1}^{m} y_i$ a navíc

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \leq |x|^p + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^{m} \|y_i\|^p \leq |y|^p + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pak $\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{m} y_i = x + y$, a tedy

$$|x+y|^p \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p + \sum_{i=1}^{m} \|y_i\|^p < |x|^p + |y|^p + \varepsilon.$$

Protože ε bylo libovolné, dostáváme $|x+y|^p \leq |x|^p + |y|^p$. Celkově $|\cdot|$ je p-norma na X, která je ekvivalentní kvazi-normě $\|\cdot\|$.

□

Následující lemma říká, že pro každý kvazi-normovaný lineární prostor takové konstanty p a K existují. Důkaz je adaptován z [4, Lemma 1.1] a doplněn o detaily.

Lemma 1.15. *Nechť* $(X, \|\cdot\|)$ *je kvazi-normovaný lineární prostor s konstantou* C. *Položme* $p = \log_{2C} 2$ *a* $K = 4$. *Pak pro tyto hodnoty* p *a* K *platí vztah* (1.1).

Důkaz. Označme $D = 2C$. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí

$$\|x+y\| \leq C(\|x\| + \|y\|) \leq D \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Indukcí nyní dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x_1, \ldots, x_n \in X$ platí

$$\|x_1 + \ldots + x_n\| \leq \max_{1 \leq k \leq n} D^k \|x_k\|. \tag{1.3}$$

Pro $n = 1$ (1.3) jistě platí. Předpokládejme tedy, že (1.3) platí pro $n \in \mathbb{N}$. Nechť $x_1, \ldots, x_{n+1} \in X$ jsou libovolná. Pak

$$\begin{aligned}
\|x_1 + \ldots + x_{n+1}\| &\leq D \max\{\|x_1\|, \|x_2 + \ldots + x_{n+1}\|\} \\
&\leq D \max\{\|x_1\|, \max_{2 \leq k \leq n+1} D^{k-1} \|x_k\|\} \\
&= \max\{D\|x_1\|, \max_{2 \leq k \leq n+1} D^k \|x_k\|\} = \max_{1 \leq k \leq n+1} D^k \|x_k\|,
\end{aligned}$$

kde v druhé nerovnosti jsme využili indukčního předpokladu. Dostáváme tedy platnost (1.3).

Definujme zobrazení $f : X \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{p}}, & \text{pokud } 2^{\frac{n-1}{p}} < \|x\| \leq 2^{\frac{n}{p}}, n \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{pokud } x = 0. \end{cases}$$

Uvědomme si, že definice f nám říká, že pro každé $x \in X$ nenulové existuje právě jedno $r \in \mathbb{Z}$ takové, že

$$2^{-\frac{1}{p}} f(x) = 2^{\frac{r-1}{p}} < \|x\| \leq 2^{\frac{r}{p}} = f(x). \tag{1.4}$$

K důkazu (1.1) bude stačit ukázat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x_1, \ldots, x_n \in X$ platí

$$\|x_1 + \ldots + x_n\|^p \leq 2 \sum_{i=1}^{n} f(x_i)^p, \tag{1.5}$$

neboť z (1.4) pak dostáváme

$$\|x_1 + \ldots + x_n\|^p \leq 4 \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)^p}{2} \leq 4 \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p.$$

Dokážeme (1.5) indukcí. Pro $n = 1$ a $x \in X$ máme $\|x\| \leq f(x) \leq 2^{\frac{1}{p}} f(x)$, tedy platnost (1.5). Předpokládejme nyní, že (1.5) platí pro $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme platnost pro $n+1$. Nechť $x_1, \ldots, x_{n+1} \in X$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\|x_1\| \geq \|x_2\| \geq \ldots \geq \|x_{n+1}\| > 0$. Rozlišíme nyní dva případy.

Nejdříve předpokládejme, že $A = \{f(x_1), \ldots, f(x_{n+1})\}$ obsahuje $n+1$ prvků. Pak pro každé $m \in \{1, \ldots, n\}$ platí $f(x_{m+1}) < \|x_m\|$. Kdyby totiž pro nějaké $m \in \{1, \ldots, n\}$ platilo, že $f(x_{m+1}) \geq \|x_m\|$, tak z (1.4) máme

$$2^{-\frac{1}{p}} f(x_{m+1}) < \|x_{m+1}\| \leq \|x_m\| \leq f(x_{m+1}).$$

To ale znamená, že $f(x_m) = f(x_{m+1})$, z čehož plyne, že $|A| < n + 1$, což je ovšem spor s velikostí A. Proto pro každé $m \in \{1, \ldots, n\}$ platí $f(x_{m+1}) < \|x_m\|$. Z definice f pro $m \in \{1, \ldots, n\}$ dostáváme, že $f(x_{m+1}) < f(x_m)$, a tedy $f(x_{m+1}) \leq 2^{-1/p} f(x_m)$. Odtud plyne, že pro každé $m \in \{1, \ldots, n+1\}$ platí

$$f(x_m) \leq 2^{\frac{1-m}{p}} f(x_1).$$

Nyní podle (1.3) nalezneme $k \in \{1, \ldots, n+1\}$ tak, aby $\|x_1 + \ldots + x_{n+1}\| \leq D^k \|x_k\|$. Je $D = 2^{1/p}$, a tedy

$$\begin{aligned} \|x_1 + \ldots + x_{n+1}\| &\leq D^k \|x_k\| = 2^{\frac{k}{p}} \|x_k\| \leq 2^{\frac{k}{p}} f(x_k) \\ &\leq 2^{\frac{k}{p}} 2^{\frac{1-k}{p}} f(x_1) = 2^{\frac{1}{p}} \left(f(x_1)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Nyní předpokládejme, že existuje $m \in \{1, \ldots, n\}$ takové, že $f(x_m) = f(x_{m+1})$. Pak z (1.4) pro nějaké $r \in \mathbb{Z}$ máme

$$2^{\frac{r-1}{p}} < \|x_{m+1}\| \leq \|x_m\| \leq 2^{\frac{r}{p}} = f(x_m).$$

Platí

$$\|x_m + x_{m+1}\| \leq D\|x_m\| \leq 2^{\frac{1}{p}} f(x_m) = 2^{\frac{r+1}{p}},$$

a tedy $f(x_m + x_{m+1}) \leq 2^{\frac{r+1}{p}}$. Ekvivalentně máme

$$f(x_m + x_{m+1})^p \leq 2^{r+1} = f(x_m)^p + f(x_{m+1})^p.$$

Z indukčního předpokladu a právě dokázané nerovnosti dostáváme

$$\|x_1 + \ldots + x_{n+1}\|^p \leq 2 \left(\sum_{i \neq m,\, m+1} f(x_i)^p + f(x_m + x_{m+1})^p \right) \leq 2 \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)^p.$$

Dokázali jsme (1.5) a důkaz je tedy hotov. □

V práci dále budeme pracovat výhradně s p-normovanými prostory. K tomu nás vedou zejména následující dvě pozorování. V kvazi-normovaných prostorech obecně neplatí, že by kvazi-norma byla spojitá, jak jsme si ukázali v Příkladu 1.13. Proto práce s těmito prostory vyžaduje větší obezřetnost. Na druhou stranu, dle Aokiho-Rolewiczovy věty je každý kvazi-normovaný prostor izomorfní nějakému p-normovanému prostoru. Pojem izomorfismu formálně definujeme v kapitole 2, nicméně definice je stejná jako u normovaných lineárních prostorů. Proto, když se v tvrzení bude vyskytovat vlastnost, která je invariantní vůči izomorfismům, stačí dokázat příslušné tvrzení pouze pro p-normované lineární prostory.

1.2 L_p prostory

Definice 1.16. *Nechť $(X,\mathcal{A},\mu)$ je prostor s mírou. Označme $\mathcal{L}_0(X,\mathcal{A},\mu)$ vektorový prostor všech $\mathcal{A}$-měřitelných funkcí na X s hodnotami v $\mathbb{K}$. Na tomto prostoru uvažme ekvivalenci definovanou rovností μ-skoro všude. Nechť $L_0(X,\mathcal{A},\mu)$ značí vektorový prostor všech tříd této ekvivalence. Pro $[f] \in L_0(X,\mathcal{A},\mu)$ označme*

$$\|[f]\|_p = \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad \textit{pro } p \in (0,\infty),$$
$$\|[f]\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_X |f| = \inf\{\alpha > 0 : \ |f| \leq \alpha \ \mu\textit{-skoro všude}\}.$$

Pro každé $p \in (0,\infty]$ označíme $L_p(X,\mathcal{A},\mu) = \{[f] \in L_0(X,\mathcal{A},\mu) : \ \|[f]\|_p < \infty\}$.

Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme místo $L_p(X,\mathcal{A},\mu)$ psát pouze $L_p(\mu)$ nebo L_p.

Pro $p \in [1,\infty]$ jsou prostory L_p známé Banachovy prostory. Nicméně v rámci práce se budeme zabývat především případem $p \leq 1$. Než dokážeme, že pro $p \in (0,1]$ jsou $(L_p,\|\cdot\|_p)$ p-Banachovy prostory, dokážeme si pomocné lemma.

Definice 1.17. *Nechť $(X,\|\cdot\|)$ je p-normovaný lineární prostor. Řekneme, že řada $\sum_{k=1}^\infty x_k$ prvků X je* absolutně p-sčítatelná, *pokud $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\|^p < \infty$.*

Lemma 1.18 (Test p-úplnosti)**.** *Nechť $(X,\|\cdot\|)$ je p-normovaný lineární prostor. Pak $(X,\|\cdot\|)$ je p-Banachův právě tehdy, když každá absolutně p-sčítatelná řada prvků X je konvergentní.*

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť řada $\sum_{k=1}^\infty x_k$ je absolutně p-sčítatelná. Položme $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$ pro $n \in \mathbb{N}$. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Z absolutní p-sčítatelnosti nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{k=n_0}^\infty \|x_k\|^p < \varepsilon$. Pak pro $n, m \in \mathbb{N}, n > m \geq n_0$ dostáváme

$$\|s_n - s_m\|^p = \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k \right\|^p \leq \sum_{k=m+1}^n \|x_k\|^p < \varepsilon.$$

Tudíž posloupnost $\{s_n\}$ je cauchyovská v X. Jelikož X je p-Banachův, $\{s_n\}$ je konvergentní v X.

$\Leftarrow$ Nechť $\{x_k\}$ je cauchyovská posloupnost v X. Z cauchyovskosti nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}$ takovou, že $\|x_l - x_{n_k}\| < 2^{-k}$ pro všechna $l, k \in \mathbb{N}$ splňující $l \geq n_k$. Speciálně platí, že $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|^p < 2^{-pk}$.
Z toho dostáváme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} (2^{-p})^k < \infty.$$

Tudíž řada $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ je absolutně p-sčítatelná. Z předpokladu tedy existuje $z \in X$ takové, že

$$z = \sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = \lim_{j\to\infty} x_{n_{j+1}} - x_{n_1}.$$

Proto $x_{n_k} \to x := z + x_{n_1}$.

Zbývá ukázat, že $\{x_n\}$ konverguje k x. Nechť tedy $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq n_0 : \|x_m - x_n\| < \varepsilon$. Pak platí i $\|x_m - x_{n_k}\| < \varepsilon$ pro $m, k \geq n_0$. Zafixujme nyní $m \geq n_0$. Pak ze spojitosti p-normy dostáváme $\|x_m - x\| = \lim_{k\to\infty} \|x_m - x_{n_k}\| \leq \varepsilon$. Tento vztah platí pro každé $m \geq n_0$, a tudíž $x_m \to x$.

$\square$

Tvrzení 1.19. *Nechť* $(X,\mathcal{A},\mu)$ *je prostor s mírou a* $p \in (0, 1]$. *Pak* $(L_p(\mu),\|\cdot\|_p)$ *je p-Banachův prostor.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že $L_p(\mu)$ je vektorový prostor. Nechť $f, g \in L_p(\mu)$ a $\alpha \in \mathbb{K}$ jsou libovolné. Zobrazení $x \mapsto x^p$ je dle Lemmatu 1.6 subaditivní na $[0, \infty)$. Pro každé $x \in X$ tedy platí $|(f + g)(x)|^p \leq |f(x)|^p + |g(x)|^p$. Z monotonie Lebesgueova integrálu dostáváme

$$\int_X |(f + g)(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x) \leq \int_X |f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x) + \int_X |g(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x).$$

Tudíž $L_p(\mu)$ je uzavřený na operaci sčítání a navíc jsme zjistili, že zobrazení $\|\cdot\|_p$ splňuje axiom *(P)*. Z linearity Lebesgueova integrálu dostáváme

$$\left(\int_X |\alpha f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left(\int_X |f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$L_p(\mu)$ je tudíž také uzavřený na násobení skalárem a proto $L_p(\mu)$ je vektorový prostor. Z předchozí rovnosti máme i platnost *(N2)*. Platnost *(N1)* plyne z vlastností Lebesgueova integrálu. Proto $(L_p(\mu),\|\cdot\|_p)$ je p-normovaný lineární prostor.

K důkazu úplnosti uvažujme absolutně p-sčítatelnou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ prvků $L_p(\mu)$. Pak $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p^p = K$ pro nějaké $K \in \mathbb{R}$. Položme $x_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ a $y_n = \sum_{k=1}^{n} |f_k|$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Označme dále $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ jakožto bodovou limitu monotónní posloupnosti $\{y_n\}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\|y_n\|_p^p \leq \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p^p \leq K$. Zároveň $y_n \nearrow y$ a tedy podle Leviho věty je

$$\int_X y^p \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} y_n^p \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X y_n^p \mathrm{d}\mu \leq K.$$

Proto $y \in L_p(\mu)$ a $y < \infty$ μ-skoro všude. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že $|x_n| \leq y_n$. Tudíž díky úplnosti $\mathbb{K}$ můžeme položit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, opět jako bodovou limitu, která je dobře definovaná μ-skoro všude. Zároveň $|x| \leq y$ a tedy $x \in L_p(\mu)$. Zbývá ukázat, že $\{x_n\}$ konverguje k x.

Volme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{k=n_0}^{\infty} \|f_k\|_p^p < \varepsilon$. Pak pro všechna $m, n \in \mathbb{N}, m > n \geq n_0 : \|x_m - x_n\|_p^p = \| \sum_{k=n+1}^{m} f_k\|_p^p < \varepsilon$. Z Fatouova lemmatu pro $n \geq n_0$ máme

$$\|x - x_n\|_p^p = \int_X \liminf_{m\to\infty} |x_m - x_n|^p \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{m\to\infty} \int_X |x_m - x_n|^p \, \mathrm{d}\mu \leq \varepsilon.$$

Tedy $x_n \to x$. Lemma 1.18 nám nyní dává, že $(L_p(\mu),\| \cdot \|_p)$ je p-Banachův.

□

Nechť $p \in (0, \infty]$. Označíme

- $\ell_p = L_p(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu)$, kde $\mu(\{n\}) = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- $L_p([0,1]) = L_p([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$, kde $\mathcal{B}([0,1])$ značí σ-algebru Lebesgueovsky měřitelných množin a λ je Lebesgueova míra.

Tvrzení 1.20. *Nechť $(X,\mathcal{A},\mu)$ je prostor s mírou, $p \in (0,1]$ a $\| \cdot \|_p$ je p-norma z definice prostoru $L_p(\mu)$. Předpokládejme dále, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní s vlastností $0 < \mu(E_i) < \infty$ pro $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pak $\| \cdot \|_p$ není ekvivalentní žádné q-normě na $L_p(\mu)$ pro $q > p$. Speciálně, $(L_p(\mu),\| \cdot \|_p)$ není q-Banachův pro $q > p$.*

Důkaz. Z předpokladu tvrzení nalezneme pro každé $n \in \mathbb{N}$ disjunktní měřitelné množiny $E_n^1, \ldots, E_n^n$ takové, že $0 < \mu(E_n^i) < \infty$ pro $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $i \in \{1, \ldots, n\}$ položme

$$f_n^i(x) = \begin{cases} \mu(E_n^i)^{-\frac{1}{p}}, & x \in E_n^i, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nyní pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme $A \subset \{1, \ldots, n\}$ libovolnou. Díky disjunktnosti $E_n^1, \ldots, E_n^n$ spočítáme

$$\left\| \sum_{i\in A} f_n^i \right\|_p^p = \int_X \left(\sum_{i\in A} f_n^i \right)^p \mathrm{d}\mu = \sum_{i\in A} \int_{E_n^i} \mu(E_n^i)^{-1} \mathrm{d}\mu = |A| \,. \tag{1.6}$$

Speciálně dostáváme, že $f_n^i \in L_p(\mu)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nechť $\| \cdot \|$ je libovolná q-norma na $L_p(\mu)$. Předpokládejme pro spor, že $\| \cdot \|_p$ a $\| \cdot \|$ jsou ekvivalentní. Pak existují $K, L > 0$ takové, že pro každé $f \in L_p(\mu)$ platí $K\|f\|_p^q \leq \|f\|^q \leq L\|f\|_p^q$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ díky (1.6) dostáváme

$$Kn^{\frac{q}{p}} = K\left\| \sum_{i=1}^{n} f_n^i \right\|_p^q \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} f_n^i \right\|^q \leq \sum_{i=1}^{n} \|f_n^i\|^q \leq L \sum_{i=1}^{n} \|f_n^i\|_p^q = Ln.$$

Vydělením Kn dostáváme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$n^{\frac{q}{p}-1} \leq L/K.$$

Uvážíme-li nyní limitu pro $n \to \infty$, dostáváme spor, neboť $\frac{q}{p} - 1 > 0$. Tedy $\| \cdot \|_p$ není ekvivalentní žádné q-normě na $L_p(\mu)$. Tudíž $(L_p(\mu), \| \cdot \|_p)$ není q-normovaný pro $q > p$ a tím spíš není q-Banachův.

□

Předpoklad na prostor s mírou z předchozího tvrzení může na první pohled působit technicky. Není ale příliš složité si uvědomit, že onen předpoklad ve skutečnosti souvisí s dimenzí prostoru $L_p(\mu)$. Toto pozorování ponecháváme čtenáři jako zajímavé cvičení.

Cvičení 1.21. Nechť $(X,\mathcal{A},\mu)$ je prostor s mírou a $p \in (0,1]$. Pak $\dim L_p(\mu) = \infty$ právě tehdy, když pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní takové, že $0 < \mu(E_i) < \infty$ pro $i \in \{1, \ldots, n\}$.

2. Základní tvrzení z funkcionální analýzy

V této kapitole se zaobíráme tím, zda je možné zobecnit vybraná tvrzení, vyučovaná na MFF v kurzu „Úvod do funkcionální analýzy", z normovaných lineárních prostorů do p-normovaných lineárních prostorů. V některých případech je možné slovo od slova přepsat důkaz tak, jak je přednášený na MFF v již zmiňovaném kurzu, ze skript [3]. To nastane především tehdy, pokud v důkazu používáme pouze vlastnosti normy, které splňuje i libovolná p-norma – totiž axiomy *(N1)*, *(N2)* a fakt, že p-norma je spojitá funkce. V takovém případě důkazy neuvádíme a jen píšeme, že je možné slovo od slova opsat důkaz ze skript [3]. V jiných případech je potřebná drobná modifikace důkazů přednášených na MFF (viz například Lemma 2.25). Konečně, v některých případech žádané zobecnění neplatí (viz výsledky ze Sekce 2.2).

2.1 p-Banachovy prostory

Tvrzení 2.1. *Nechť X je vektorový prostor, $p, q \in (0, 1]$, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou popořadě p-norma a q-norma na X a $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\|\cdot\|_1$ *a* $\|\cdot\|_2$ *jsou ekvivalentní.*

(ii) Existují $a, b > 0$ taková, že $aB_1 \subset B_2 \subset bB_2$.

(iii) Zobrazení $\mathrm{Id}\colon (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ *je homeomorfismus.*

Důkaz. Důkaz je možné opsat slovo od slova z [3, Tvrzení 1.8] a [3, Lemma 1.12]. □

Tvrzení 2.2. *Nechť X je p-normovaný lineární prostor, Y je q-normovaný lineární prostor a $T : X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) T je spojité.

(ii) Existuje $C \geq 0$ takové, že $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ pro každé $x \in X$.

Důkaz. *(i)⇒(ii)* Zobrazení T je speciálně spojité v nule. Nalezneme tedy $\delta > 0$ takové, že pro $y \in X$ splňující $\|y\| \leq \delta$ máme $\|T(y)\| \leq 1$. Volme nyní $x \in X$, $x \neq 0$ libovolné. Pak

$$\|T(x)\| = \frac{\|x\|}{\delta} T\left(\delta \frac{x}{\|x\|}\right) \leq \frac{1}{\delta}\|x\|.$$

(ii)⇒(i) Z linearity zobrazení T dostáváme, že pro všechna $x, y \in X$ platí $\|T(x) - T(y)\| \leq C\|x - y\|$. Tedy zobrazení T je lipschitzovské, a tím spíš spojité. □

Definice 2.3. *Nechť X je p-normovaný lineární prostor a Y je q-normovaný lineární prostor. Označme $\mathcal{L}(X,Y)$ vektorový prostor všech lineárních zobrazení X do Y. Pro každé $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ položme*

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$

Přesvědčme se nyní, že $(\mathcal{L}(X,Y),\|\cdot\|)$ je q-normovaný lineární prostor. Platnost *(N1)* a *(N2)* je zřejmá z předpisu $\|\cdot\|$. K ověření *(P)* nechť $T, S \in \mathcal{L}(X,Y)$ jsou libovolné. Pak

$$\begin{aligned}\|T+S\|^q &= \sup_{x \in B_X} \|(T+S)(x)\|^q \leq \sup_{x \in B_X} (\|T(x)\|^q + \|S(x)\|^q) \\ &\leq \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|^q + \sup_{x \in B_X} \|S(x)\|^q = \|T\|^q + \|S\|^q,\end{aligned}$$

a tedy $(\mathcal{L}(X,Y),\|\cdot\|)$ je vskutku q-normovaný lineární prostor.

Definice 2.4. *Nechť X je p-normovaný lineární prostor. Prostor $\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ budeme značit X^* a nazveme jej* duálním prostorem k prostoru X.

Tvrzení 2.5. *Nechť X je p-normovaný lineární prostor, Y je q-normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak platí:*

(i) $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ *pro každé* $x \in X$.

(ii) Je-li X netriviální, pak $\|T\| = \sup_{x \in S_X} \|T(x)\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in U_X} \|T(x)\|$.

(iii) $\|T\| = \inf\{C \geq 0 : \ \|T(x)\| \leq C\|x\| \text{ pro každé } x \in X\}$.

Důkaz. Důkaz je možné opsat slovo od slova z [3, Lemma 1.45].

□

Poznámka 2.6. Uvědomme si, že k platnosti poslední rovnosti v bodu (ii) předchozího tvrzení nepotřebujeme spojitost p-normy. Vystačíme si s vlastností *(N2)*, která nám dává spojitost na přímkách procházejících počátkem.

Poznámka 2.7. Nechť $(X,\|\cdot\|)$ je p-normovaný lineární prostor. Pak jsou zobrazení $\mathrm{Id}\colon (X,\|\cdot\|) \to (X,\|\cdot\|^p)$ a $\mathrm{Id}\colon (X,\|\cdot\|^p) \to (X,\|\cdot\|)$ stejnoměrně spojitá. To plyne z toho, že zobrazení $x \mapsto x^\alpha$ je spojité v nule pro $\alpha \in (0,\infty)$. Jmenujme důsledky, které v nadcházejících důkazech využijeme:

- Je-li Y uzavřený podprostor X a $x \in X \setminus Y$, pak $\inf_{y \in Y} \|x-y\| > 0$.
- Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ je cauchyovská v $(X,\|\cdot\|)$ právě tehdy, když je cauchyovská v $(X,\|\cdot\|^p)$. Speciálně $(X,\|\cdot\|)$ je p-Banachův právě tehdy, když $(X,\|\cdot\|^p)$ je úplný.

Je-li navíc $(X,\|\cdot\|)$ p-Banachův prostor, pak:

- $(X,\|\cdot\|)$ je Baireův prostor. Důsledkem je, že pokud $\{F_n\} \subset \mathcal{P}(X)$ je posloupnost uzavřených množin v X a $X = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$, pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že F_n má neprázdný vnitřek.

- Je-li Y podprostor X, pak je Y uzavřený v X právě tehdy, když je p-Banachův.

Věta 2.8. *Nechť X je p-normovaný lineární prostor a Y je q-Banachův prostor. Pak $\mathcal{L}(X,Y)$ je q-Banachův prostor.*

Důkaz. Mějme libovolnou cauchyovskou posloupnost $\{T_n\}$ v $\mathcal{L}(X,Y)$. Pro každé pevně zvolené $x \in X$ pak platí

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\|, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Protože je Y q-Banachův prostor, můžeme položit $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$. Pak $T\colon X \to Y$ je lineární.

Ověříme spojitost. Pro každé $x \in B_X$ platí

$$\|T(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n(x)\| \leq (\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|)\|x\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|.$$

Z Poznámky 2.7 víme, že posloupnost $\{T_n\}$ je cauchyovská v $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|)$ právě tehdy, když je cauchyovská v $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|^q)$. Z q-trojúhelníkové nerovnosti máme, že $|\|T_n\|^q - \|T_m\|^q| \leq \|T_n - T_m\|^q, m, n \in \mathbb{N}$. Tedy $\{\|T_n\|^q\}$ je cauchyovská, z čehož plyne cauchyovskost posloupnosti $\{\|T_n\|\}$. Proto je posloupnost $\{\|T_n\|\}$ omezená, a tudíž

$$\sup_{x\in B_X} \|T(x)\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty.$$

Proto je T spojité.

Ukážeme, že $T_n \to T$ v $\mathcal{L}(X,Y)$. Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ pro $m, n \geq n_0$. Fixujme nyní $x \in B_X$. Pak pro $n \geq n_0$ máme

$$\|T_n(x) - T(x)\| = \lim_{m\to\infty} \|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \sup_{m\geq n_0} \|T_n - T_m\|\|x\| \leq \varepsilon.$$

Odtud máme, že $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$ pro $n \geq n_0$, pročež $T_n \to T$. $\square$

Důsledek 2.9. *Nechť X je p-normovaný lineární prostor. Pak X^* je úplný.*

Definice 2.10. *Nechť X je p-normovaný lineární prostor, Y je q-normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Řekneme, že T je*

- izomorfismus na*, pokud T je na a existují konstanty $C, D > 0$ takové, že $C\|x\| \leq \|T(x)\| \leq D\|x\|$ pro každé $x \in X$,*

- izomorfismus do*, pokud T je izomorfismus na* $\operatorname{Rng} T$.

Izomorfismus s konstantami $C = D = 1$ nazveme izometrií.

Řekneme, že X je izomorfní s Y*, pokud existuje izomorfismus X na Y.*

Řekneme, že X se izomorfně vnoří do Y*, pokud existuje izomorfismus X do Y.*

Tvrzení 2.11. *Nechť X je p-normovaný lineární prostor a Y je q-normovaný lineární prostor. Pak platí:*

(i) $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je izomorfismus do právě tehdy, když T je prosté a T^{-1} je spojité.

(ii) Je-li X izomorfní s Y a X je p-Banachův, pak je Y q-Banachův.

(iii) Je-li X p-Banachův a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je izomorfismus do, pak je $\operatorname{Rng} T$ *uzavřený v Y.*

Důkaz. Důkaz je možné opsat slovo od slova z [3, Tvrzení 1.60].

$\square$

Lemma 2.12. *Nechť X je p-normovaný lineární prostor, $Y \subset X$ je uzavřený podprostor a $Z \subset X$ je konečně rozměrný podprostor. Pak* $\operatorname{span}(Y \cup Z)$ *je uzavřený v X. Speciálně, každý konečně rozměrný podprostor X je uzavřený v X.*

Důkaz. Důkaz je možné opsat slovo od slova z [3, Věta 1.24].

$\square$

Lemma 2.13. *Nechť X je p-normovaný lineární prostor. Je-li Y vlastní uzavřený podprostor X, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x \in S_X$ takové, že*

$$\operatorname{dist}(x, Y) \coloneqq \inf_{y \in Y} \|x - y\| > 1 - \varepsilon.$$

Důkaz. Důkaz je možné opsat slovo od slova z [3, Lemma 1.63].

$\square$

Věta 2.14. *Nechť X je p-normovaný lineární prostor. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\dim X < \infty$.

(ii) Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X je izomorfní s $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.

(iii) B_X je kompaktní.

(iv) Každé lineární zobrazení z X do nějakého q-normovaného lineární prostoru je spojité.

(v) Každá lineární forma na X je spojitá.

(vi) Každé dvě p-normy na X jsou ekvivalentní.

Důkaz. Uvedeme důkaz implikací *(i)⇒(iv)* a *(vi)⇒(v)*. Zbytek důkazu je možné opsat slovo od slova z [3, Věta 1.66].

(i)⇒(iv) Nechť Y je q-normovaný lineární prostor a $T\colon X \to (Y, \|\cdot\|)$ je lineární zobrazení. Uvažujme zobrazení $T_1\colon (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2) \to X$, kde T_1 je izomorfismus z *(i)⇒(ii)*. Pak $T = T \circ T_1 \circ T_1^{-1}$. Stačí tedy ukázat, že $f = T \circ T_1$ je spojité zobrazení. Pro každé $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ máme

$$\begin{aligned}
\|f(a)\| &= \left\| \sum_{i=1}^n a_i f(e_i) \right\| \le n^{\frac{1}{q}-1} \sum_{i=1}^n \|a_i f(e_i)\| \\
&\le n^{\frac{1}{q}-1} \sum_{i=1}^n |a_i| \max_{j=1,\ldots,n} \|f(e_j)\| \le n^{\frac{1}{q}-1} n \max_{i=1,\ldots,n} |a_i| \max_{j=1,\ldots,n} \|f(e_j)\| \\
&= n^{\frac{1}{q}} \max_{i=1,\ldots,n} |a_i| \max_{j=1,\ldots,n} \|f(e_j)\| \le n^{\frac{1}{q}} \max_{j=1,\ldots,n} \|f(e_j)\| \|a\|_2,
\end{aligned}$$

kde v první nerovnosti jsme použili kvazi-trojúhelníkovou nerovnost pro q-normu. Proto je f spojité.

(vi)⇒(v) Předpokládejme pro spor, že na $(X,\|\cdot\|)$ existuje nespojitá lineární forma f. Pro každé $x \in X$ položíme $\|x\|_p = \sqrt[p]{\|x\|^p + |f(x)|^p}$. Lze snadno ověřit, že $\|\cdot\|_p$ je p-norma na X, která je ovšem neomezená na $B_{(X,\|\cdot\|)}$.

□

Definice 2.15. *Nechť X je p-normovaný prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pro $\widehat{x} \in X/Y$ položme*

$$\|\hat{x}\|_{X/Y} = \inf_{y\in\hat{x}} \|y\| = \inf_{y\in Y} \|x+y\|$$

Přesvědčme se, že $(X/Y,\|\cdot\|_{X/Y})$ je p-normovaný lineární prostor. Platnost *(N1)* plyne z uzavřenosti Y. Nechť $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak máme

$$\|\alpha\widehat{x}\|_{X/Y} = \inf_{z\in Y}\|\alpha x + z\| = \inf_{z\in Y}\|\alpha x + \alpha z\| = \inf_{z\in Y} |\alpha|\, \|x+z\| = |\alpha|\, \|\widehat{x}\|_{X/Y}$$

a

$$\begin{aligned}\|\widehat{x}+\widehat{y}\|^p_{X/Y} &= \inf_{z\in Y}\|x+y+z\|^p = \inf_{z_1,\, z_2\in Y}\|x+y+z_1+z_2\|^p \\ &\le \inf_{z_1\in Y}\|x+z_1\|^p + \inf_{z_2\in Y}\|y+z_2\|^p = \|\widehat{x}\|^p_{X/Y} + \|\widehat{y}\|^p_{X/Y},\end{aligned}$$

neboli platnost *(N2)* a *(P)*.

Tvrzení 2.16. *Nechť X je p-normovaný lineární prostor a Y je jeho uzavřený podprostor. Pak kanonické kvocientové zobrazení $q\colon X \to X/Y$ je spojitý lineární operátor, který je na a splňuje $q(U_X) = U_{X/Y}$. Je-li Y vlastní, pak $\|q\| = 1$.*

Důkaz. Důkaz je možné opsat slovo od slova z [3, Tvrzení 1.69].

□

Věta 2.17. *Nechť X je p-Banachův prostor a Y je jeho uzavřený podprostor. Pak X/Y je p-Banachův prostor.*

Důkaz. K důkazu použijeme Lemma 1.18. Nechť $\sum_{i=1}^{\infty} \widehat{x_n}$ je absolutně p-sčítatelná řada v X/Y. Z definice p-normy na faktorprostoru X/Y pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $y_n \in \widehat{x_n}$ splňující $\|y_n\|^p \le \|\widehat{x_n}\|^p + \frac{1}{2^n}$. Pak je řada $\sum_{i=1}^{\infty} y_n$ absolutně p-sčítatelná, a tedy konvergentní v X. Dostáváme

$$q\left(\sum_{i=1}^{\infty} y_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} q(y_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \widehat{x_n},$$

a řada $\sum_{i=1}^{\infty} \widehat{x_n}$ je tak konvergentní.

□

2.2 Duální prostory k p-Banachovým prostorům

Přirozeně bychom se mohli ptát, jak vypadají duální prostory p-normovaných lineárních prostorů a jaké mají vlastnosti. Konkrétně, je například možné v p-normovaných lineárních prostorech rozšiřovat lineární funkcionály z podprostorů na celý prostor? Odpověď na tuto otázku podávají následující definice a věta, jejíž důkaz lze nalézt v [4, Chapter 4, Section 2].

Definice 2.18. *Nechť X je p-normovaný lineární prostor a Y je uzavřený podprostor X. Řekneme, že Y má* Hahnovu-Banachovu rozšiřovací vlastnost*, pokud pro každé $y^* \in Y^*$ existuje $x^* \in X^*$, které rozšiřuje y^*. Řekneme, že X má Hahnovu-Banachovu rozšiřovací vlastnost, pokud každý uzavřený podprostor X má Hahnovu-Banachovu rozšiřovací vlastnost.*

Věta 2.19. *Nechť X je p-normovaný prostor. Pak X má Hahnovu-Banachovu rozšiřovací vlastnost právě tehdy, když $p = 1$.*

Demonstrujeme nyní na prostorech ℓ_p a $L_p([0,1])$, jak odlišné mohou duální prostory být. Důkaz následující věty byl převzat z [4, Theorem 2.3].

Věta 2.20. *Nechť $p \in (0,1]$. Pak ℓ_p^* je lineárně izometrický s prostorem ℓ_∞ pomocí zobrazení $I\colon \ell_\infty \to \ell_p^*$, $I(y) = f_y$, kde*

$$f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i x_i, \quad x \in \ell_p.$$

Důkaz. Nechť $y \in \ell_\infty$ je dáno. Pro každé $x \in \ell_p$ platí

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} y_i x_i\right| \le \|y\|_\infty \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = \|y\|_\infty \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|\right)^{\frac{p}{p}} \le \|y\|_\infty \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|y\|_\infty \|x\|_p.$$

Tudíž f_y je dobře definované. Zobrazení f_y je jistě lineární, $\|f_y\| \le \|y\|_\infty$, a tedy $f_y \in \ell_p^*$. Zobrazení I je jistě lineární a dle předchozího je spojité, neboť $\|I\| \le 1$. Zároveň pro každé $i \in \mathbb{N}$ máme, že $\|I(y)\| \ge |I(y)(e_i)| = |y_i|$, a tedy $\|I(y)\| \ge \|y\|_\infty$. Spolu s první nerovností dostáváme, že I je lineární izometrie do.

Nechť $f \in \ell_p^*$ je libovolné. Položme $y_i = f(e_i)$ pro $i \in \mathbb{N}$. Pak $y = (y_i)_{i=1}^\infty \in \ell_\infty$, neboť $\|y\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |f(e_i)| \le \|f\| \sup_{i\in\mathbb{N}} \|e_i\|_p = \|f\|$. Zároveň pro všechna $i \in \mathbb{N}$ je $I(y)(e_i) = y_i = f(e_i)$, a tedy se zobrazení $I(y)$ a f díky linearitě shodují na $\mathrm{span}\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$. Oba operátory jsou spojité, a tedy se rovnají na $\overline{\mathrm{span}}\{e_i : i \in \mathbb{N}\} = \ell_p$ a I je proto na.

$\square$

Než se podíváme na duální prostor $L_p([0,1])$, dokážeme si jedno pomocné lemma.

Lemma 2.21. *Nechť $(X,\mathcal{A},\mu)$ je prostor s mírou a $p \in (0,1]$. Pak $L_p(\mu) \cap L_\infty(\mu)$ je hustá množina v $L_p(\mu)$.*

Důkaz. Nechť $f \in L_p(\mu)$ je dáno. Položme $E_n = \{x \in X : \; n-1 < |f(x)| \le n\}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $F_n = \bigcup_{i=1}^n E_i$. Pak $f_n = f\chi_{F_n} \in L_p(\mu) \cap L_\infty(\mu)$ pro $n \in \mathbb{N}$ a z předchozího výpočtu máme, že

$$\int_X |f - f_n|^p \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{E_k} |f|^p \,\mathrm{d}\mu \to 0, \quad n \to \infty.$$

$\square$

Důkaz následující věty byl adaptován z [4, Theorem 2.2].

Věta 2.22. *Nechť $0 < p < q \leq 1$ a $(Y,\|\cdot\|)$ je q-normovaný lineární prostor. Pak $\mathcal{L}(L_p([0,1]),Y) = \{0\}$. Speciálně, $L_p([0,1])^* = \{0\}$.*

Důkaz. Označme $\|\cdot\|_p$ p-normu na $L_p([0,1])$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $E_1^n = [0, \frac{1}{n}]$ a $E_i^n = (\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ pro $i \in \{2, \ldots, n\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tvoří $E_1^n, \ldots, E_n^n$ disjunktní rozklad $[0,1]$ a navíc $\lambda(E_i^n) = \frac{1}{n}$ pro $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nechť nyní $T \in \mathcal{L}(L_p([0,1]),Y)$ a $f \in L_p([0,1]) \cap L_\infty([0,1])$. Nalezneme $M \in \mathbb{R}$ takové, že $|f| \leq M$ μ-skoro všude. Pišme nyní

$$f = \sum_{i=1}^n f\chi_{E_i^n}.$$

Pak

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|^q &= \left\| \sum_{i=1}^n T(f\chi_{E_i^n}) \right\|^q \leq \sum_{i=1}^n \|T(f\chi_{E_i^n})\|^q \\
&\leq \sum_{i=1}^n \|T\|^q \|f\chi_{E_i^n}\|_p^q \leq \|T\|^q M^q \sum_{i=1}^n \|\chi_{E_i^n}\|_p^q \\
&= \|T\|^q M^q \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{q}{p}} = \|T\|^q M^q n^{1-\frac{q}{p}} \to 0, \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

Tudíž je T nulový na $L_p([0,1]) \cap L_\infty([0,1])$. Dle Lemmatu 2.21 tyto funkce tvoří hustou podmnožinu $L_p([0,1])$, a tedy ze spojitosti T na $L_p([0,1])$ je T nulový na $L_p([0,1])$. $\mathbb{K}$ je normovaný prostor, což dává druhou část věty.

$\square$

Shrnmě poslední dvě věty. V případě ℓ_p^* se jedná o velice bohatý duální prostor, který například odděluje body ℓ_p. Naopak na $L_p([0,1])$ nemáme žádné nenulové lineární funkcionály. Speciálně $L_p([0,1])^*$ neodděluje body $L_p([0,1])$, což se u netriviálních normovaných lineárních prostorů stát nemůže.

Jako zajímavé cvičení pro čtenáře uvedeme zobecnění Věty 2.22 a postačující podmínku netriviality $L_p(\mu)^*$. Důkaz (i) lze nalézt v [4, Theorem 2.2]

Cvičení 2.23. Nechť $(X,\mathcal{A},\mu)$ je prostor s mírou a $p \in (0,1)$. Pak platí:

(i) Nechť μ je neatomická míra a $(Y,\|\cdot\|)$ je q-normovaný lineární prostor, kde $p < q \leq 1$. Pak $\mathcal{L}(L_p([0,1]),Y) = \{0\}$.

(ii) Má-li μ atom konečné míry, pak $L_p(\mu)^* \neq \{0\}$.

2.3 Úplnost v p-Banachových prostorech

Věta 2.24 (Princip stejnoměrné omezenosti)**.** *Nechť X je p-Banachův prostor, Y je q-normovaný lineární prostor a $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\sup\{\|T\| : T \in \mathcal{A}\} < \infty$.

(ii) Pro každé $x \in X$ je $\sup\{\|T(x)\| : T \in \mathcal{A}\} < \infty$.

Důkaz. Důkaz je možné opsat slovo od slova z [3, Věta 3.1].

□

Lemma 2.25. *Nechť X je p-Banachův prostor, Y je q-normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Jestliže $r, s > 0$ jsou taková, že $U(0,s) \subset \overline{T(U(0,r))}$, pak dokonce $U(0,s) \subset T(U(0,r))$.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $r = s = 1$. Je-li totiž tvrzení dokázané v tomto případě a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ splňuje předpoklady pro nějaká $r, s > 0$, pak stačí přejít k operátu $\frac{r}{s}T$ a dostáváme kýžený výsledek.

Nechť $z \in U_Y$. Nalezneme $\delta \in (0,1)$ takové, že $\|z\|^p < 1 - \delta^p$ a položíme

$$y = \frac{z}{(1-\delta^p)^{\frac{1}{p}}}.$$

Dále indukcí nalezneme posloupnost prvků $y_0, y_1, \ldots \in Y$ takovou, že

(i) $y_0 = 0$,

(ii) $\|y - y_n\| < \delta^n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

(iii) $y_n - y_{n-1} \in T(\delta^{n-1} U_X), n \in \mathbb{N}$.

Je $y_0 = 0$ a tedy $\|y\| < 1$. Tudíž je podmínka (ii) pro $n = 0$ splněna. Předpokládejme, že již pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ máme $y_0, \ldots, y_n$ vyhovující podmínkám. Pak

$$y - y_n \in \delta^n U_Y \subset \delta^n \overline{T(U_X)} = \overline{T(\delta^n U_X)},$$

a tedy existuje $w \in T(\delta^n U_X)$ takové, že $\|y - y_n - w\| < \delta^{n+1}$. Položíme $y_{n+1} = y_n + w$. Pak y_{n+1} z konstrukce splňuje požadované podmínky. Tím je konstrukce završena.

Z (iii) pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $x_n \in \delta^{n-1} U_X$ takové, že $T(x_n) = y_n - y_{n-1}$. Jelikož $\delta < 1$, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ absolutně p-sčítatelná a tudíž konvergentní. Položme tedy $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Dále máme

$$\|x\|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \sum_{n=1}^{\infty} (\delta^p)^{n-1} = \frac{1}{1-\delta^p},$$

což po umocnění na $1/p$ dává

$$x \in \left(\frac{1}{1-\delta^p}\right)^{\frac{1}{p}} U_X.$$

Navíc platí

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T(x_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (y_n - y_{n-1}) = \lim_{N\to\infty} y_N = y.$$

Tedy

$$y \in T\left(\left(\frac{1}{1-\delta^p}\right)^{\frac{1}{p}} U_X\right),$$

což je ekvivalentní tomu, že $z \in T(U_X)$.

□

Věta 2.26 (O otevřeném zobrazení)**.** *Nechť X je p-Banachův, Y je q-Banachův a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je na. Pak T je otevřené zobrazení.*

Důkaz. Vzhledem k linearitě T stačí ukázat, že $T(U_X)$ obsahuje kouli $U(0,\delta)$ pro nějaké $\delta > 0$. Nalezneme $r > 0$ tak, aby $U(0,r) + U(0,r) \subset U_X$. Jelikož T je na, platí

$$Y = T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T\left(nU(0,r)\right) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T\left(nU(0,r)\right)}.$$

Z Baireovy věty tudíž existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\overline{T\left(n_0 U(0,r)\right)}$ má neprázdný vnitřek. To ovšem nastane právě tehdy, když $\overline{T\left(U(0,r)\right)}$ má neprázdný vnitřek. Tedy existují $y \in Y$ a $s > 0$ taková, že $U(y,s) \subset \overline{T\left(U(0,r)\right)}$. Pak ale $V = U(y,s) - U(y,s)$ je také otevřená množina obsahující 0 a ze symetrie otevřených koulí platí

$$V \subset \overline{T\left(U(0,r)\right)} - \overline{T\left(U(0,r)\right)} \subset \overline{T(U_X)}.$$

Nyní nalezneme $\delta > 0$ takové, že $U(0,\delta) \subset V$ a aplikujeme Lemma 2.25. □

Důsledek 2.27. *Nechť X je p-Banachův prostor, Y je q-Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak T je izomorfismus na pravě tehdy, když T je bijekce.*

Důkaz. Okamžitý důsledek Tvrzení 2.11(i) a věty o otevřeném zobrazení.

□

Důsledek 2.28. *Nechť X je p-Banachův prostor, Y je q-Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je na. Pak zobrazení $\widehat{T}\colon X/\operatorname{Ker} T \to Y$ dané předpisem $\widehat{T}(\widehat{x}) = T(x)$ je izomorfismus na.*

Důkaz. Předně si uvědomme, že $\widehat{T}$ je dobře definované lineární zobrazení. $X/\operatorname{Ker} T$ je p-Banachův dle Věty 2.17. Zobrazení $\widehat{T}$ je zřejmě na. Stačí nám tedy ukázat, že $\widehat{T}$ je prosté, spojité a použít předchozí důsledek. Je-li $\widehat{T}(\widehat{x}) = 0$, pak $T(x) = 0$ a tedy $\widehat{x} = 0$ a zobrazení $\widehat{T}$ je prosté. Označíme-li $q\colon X \to X/\operatorname{Ker} T$ kanonické kvocientové zobrazení, pak díky Tvrzení 2.16 obdržíme

$$\sup_{x\in U_{X/\operatorname{Ker} T}} \|\widehat{T}(x)\| = \sup_{x\in q(U_X)} \|\widehat{T}(x)\| = \sup_{x\in U_X} \|\widehat{T}\circ q(x)\| = \sup_{x\in U_X} \|T(x)\| = \|T\|.$$

Tudíž $\widehat{T}$ je spojité.

□

Definice 2.29. *Nechť* $(X,\|\cdot\|_X)$ *je* p*-normovaný lineární prostor a* $(Y,\|\cdot\|_Y)$ *je* q*-normovaný lineární prostor. Pro každé* $(x,y) \in X \times Y$ *položme*

$$\|(x,y)\|_\infty = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}.$$

Označíme-li dále $r = \min\{p,q\}$*, pak z Tvrzení 1.7 máme, že prostory* $(X,\|\cdot\|_Y)$ *a* $(Y,\|\cdot\|_Y)$ *jsou* r*-normované lineární prostory. Není těžké ověřit, že* $\|\cdot\|_\infty$ *definuje* r*-normu na* $X \times Y$*. Označíme nyní* r*-normovaný lineární prostor* $X \oplus_\infty Y = (X \times Y,\|\cdot\|_\infty)$*.*

Věta 2.30 (O uzavřeném grafu)**.** *Nechť* X *je* p*-Banachův prostor,* Y *je* q*-Banachův prostor a* $T\colon X \to Y$ *je lineární. Pak* T *je spojité právě tehdy, když má uzavřený graf.*

Důkaz. $\Rightarrow$ je triviální.

$\Leftarrow$ Definujme $P\colon X \oplus_\infty Y \to X, P(x,y) = x$ a $Q\colon X \oplus_\infty Y \to Y, Q(x,y) = y$. Tato zobrazení jsou spojitá. Položme dále $S\colon X \to X \oplus_\infty Y, S(x) = (x, T(x))$. Pak $G = S(X)$ je podprostor $X \oplus_\infty Y$, který je dle předpokladu uzavřený. Poznámka 2.7 tedy říká, že G je r-Banachův pro $r = \min\{p,q\}$. Uvažme $\widetilde{S}\colon X \to G, \widetilde{S} = S$. Pak $\widetilde{S}$ je bijekce a $P|_G$ je inverzní k $\widetilde{S}$. $P|_G$ je ale spojitá lineární bijekce a tudíž otevřené zobrazení. Tedy $\widetilde{S}$ je spojité, v důsledku čehož je $T = Q \circ \widetilde{S}$ spojité. $\square$

3. Nelineární funkcionální analýza

Na závěr práce se krátce podíváme na nelineární funkcionální analýzu. Každý Banachův prostor X je také metrickým prostorem. Motivací za nelineární funkcionální analýzou je zjistit, nakolik metrická struktura Banachova prostoru X určuje jeho lineární strukturu. Jedním z prvních výsledků v této oblasti byla Mazurova-Ulamova věta z roku 1932, která říká, že dva Banachovy prostory jsou lineárně izometrické právě tehdy, když jsou izometrické jakožto metrické prostory. M. Kadec roku 1967 dokázal, že všechny separabilní nekonečně dimenzionální Banachovy prostory jsou navzájem homeomorfní. Přirozenou otázkou by tedy mohlo být, jestli lze tento výsledek rozšířit na p-Banachovy prostory pro $p \leq 1$. My se touto otázkou nebudeme zabývat v plné obecnosti. Ukážeme, že všechny separabilní nekonečně dimenzionální L_p prostory jsou navzájem homeomorfní pro $p \in (0, \infty)$. Poznamenejme, že otázka, zda-li je každý kvazi-Banachův prostor homeomorfní nějakému Hilbertovu prostoru, je otevřeným problémem, viz [2, Problem 268].

Definice 3.1. *Nechť X, Y jsou kvazi-normované prostory a $f\colon X \to Y$. Zobrazení f nazveme* lipschitzovským vnořením*, pokud je f prosté a lipschitzovské a $f^{-1}\colon f(X) \to X$ je lipschitzovské. V takovém případě řekneme, že X* se lipschitzovsky vnoří do Y*. Pokud je navíc f bijekce, tak říkáme, že f je* bi-lipschitzovské *a prostory X a Y jsou* lipschitzovsky izomorfní.

Následující věta je převzatá z [1, Proposition 3.1].

Věta 3.2. *Nechť $(X,\|\cdot\|_X)$ je kvazi-normovaný lineární prostor a $(Y,\|\cdot\|_Y)$ je p-normovaný lineární prostor. Pokud se X lipschitzovsky vnoří do Y, pak na X existuje p-norma $\|\cdot\|$, která je ekvivalentní $\|\cdot\|_X$.*

Důkaz. Nechť $f\colon X \to Y$ je lipschitzovské vnoření. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $f(0) = 0$, jinak přejdeme k zobrazení $g = f - f(0)$. Lze snadno ověřit, že g je lipschitzovské vnoření X do Y se stejnými konstantami lipschitzovskosti jako f. Označme K maximum lipschitzovských konstant zobrazení f a f^{-1}. Ověříme předpoklady Věty 1.14 pro $\|\cdot\|_X$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $x_1, \dots, x_n \in X$ jsou libovolná. Pro $1 \leq k \leq n$ označme $z_k = x_1 + \dots + x_k$ a položme $z_0 = 0$. Pak

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|_X^p &= \|z_n - z_0\|_X^p \leq K^p \|f(z_n) - f(z_0)\|_Y^p = K^p \left\|\sum_{i=1}^{n} (f(z_i) - f(z_{i-1}))\right\|_Y^p \\ &\leq K^p \sum_{i=1}^{n} \|f(z_i) - f(z_{i-1})\|_Y^p \leq K^{2p} \sum_{i=1}^{n} \|z_i - z_{i-1}\|_X^p = K^{2p} \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X^p.\end{aligned}$$

Jsou splněny předpoklady Věty 1.14 a tedy existuje p-norma na X, která je ekvivalentní $\|\cdot\|_X$.

□

Důsledek 3.3. *Nechť $(X,\mathcal{A},\mu)$ je prostor s mírou a $0 < p < q \leq 1$. Předpokládejme dále, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní* *s vlastností $0 < \mu(E_i) < \infty$ pro $i \in \{1, \dots, n\}$. Pak se $(L_p(\mu), \|\cdot\|_p)$ lipschitzovsky nevnoří do žádného q-normovaného prostoru. Speciálně, $L_p(\mu)$ se lipschitzovsky nevnoří do $L_q(\mu)$.*

Důkaz. Nechť Y je q-normovaný lineární prostor. Pokud by se $(L_p(\mu), \|\cdot\|_p)$ lipschitzovsky vnořil do Y, pak by dle předchozí věty na $L_p(\mu)$ existovala q-norma ekvivalentní $\|\cdot\|_p$. To je ale ve sporu s Tvrzením 1.20.

□

Nyní bychom se rádi zaobírali otázkou, zdali pro $p \in (0,1)$ může prostor $L_p(\mu)$ být homeomorfní $L_1(\mu)$. Důsledek 3.3 říká, že případný homeomorfismus těchto prostorů nemůže být lineární, neboť pak by už tyto prostory byly lipschitzovsky izomorfní. Musíme tedy hledat nelineární homeomorfismus. Ukážeme dokonce, že prostor $L_p(\mu)$ je homeomorfní $L_1(\mu)$ pro $p \in (0, \infty)$. K tomu budeme potřebovat tři technická lemmata.

Lemma 3.4. *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $p \in (0, \infty)$. Předpokládejme, že $f, f_n \in L_p(\mu)$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $f_n \to f$ μ-skoro všude. Pak $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ právě tehdy, když $\|f_n - f\|_p \to 0$.*

Důkaz. $\Leftarrow$ Pokud je $p \in (0,1]$, tak z p-trojúhelníkové nerovnosti máme

$$\left| \|f_n\|_p^p - \|f\|_p^p \right| \leq \|f_n - f\|_p^p \to 0, \quad n \to \infty.$$

Spojitost zobrazení $x \mapsto x^{\frac{1}{p}}$ v bodě $\|f\|_p^p$ pak dává, že $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$. Pro $p > 1$ stačí využít trojúhelníkové nerovnosti.

$\Rightarrow$ Pro $n \in \mathbb{N}$ odhadneme

$$|f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq 2^p \max\{|f_n|^p, |f|^p\} \leq 2^p (|f_n|^p + |f|^p),$$

a tedy funkce $g_n = 2^p (|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$ jsou nezáporné pro každé $n \in \mathbb{N}$. Z Fatouova lemmatu proto dostáváme

$$\begin{aligned} 2^{p+1} \int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu &= \int_X \liminf_{n\to\infty} (2^p |f_n|^p + 2^p |f|^p - |f_n - f|^p) \, \mathrm{d}\mu \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X 2^p |f_n|^p + 2^p |f|^p - |f_n - f|^p \, \mathrm{d}\mu \right) \\ &= 2^p \lim_{n\to\infty} \int_X (|f_n|^p + |f|^p) \, \mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|^p \, \mathrm{d}\mu \\ &= 2^{p+1} \int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|^p \, \mathrm{d}\mu, \end{aligned}$$

kde druhá rovnost plyne z předpokladu, že $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ a faktu, že pro $A \subset \mathbb{R}$ platí $\sup A = -\inf(-A)$. Dostáváme tudíž odhad $\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|^p \, \mathrm{d}\mu \leq 0$. Z tohoto již však plyne $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|^p \, \mathrm{d}\mu = 0$.

□

Lemma 3.5. *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $p \in (0, \infty)$. Nechť $f \in L_p(\mu)$ a $\{f_n\} \subset L_p(\mu)$ je posloupnost taková, že $f_n \to f$ v $L_p(\mu)$. Pak existuje podposloupnost $\{f_{n_k}\}$ taková, že $f_{n_k} \to f$ μ-skoro všude.*

Důkaz. Jelikož $f_n \to f$ v $L_p(\mu)$, nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}$ takovou, že $\|f - f_{n_k}\|_p^p < 2^{-k(p+1)}, k \in \mathbb{N}$. Označme pro $k \in \mathbb{N}$

$$A_k = \{x \in X : \ |f(x) - f_{n_k}(x)| > 2^{-k}\}.$$

Pak nutně $\mu(A_k) < 2^{-k}$, neboť

$$2^{-k(p+1)} > \|f - f_{n_k}\|_p^p = \int_X |f - f_{n_k}|^p \, \mathrm{d}\mu \geq \int_{A_k} 2^{-kp} = \mu(A_k)2^{-kp}.$$

Položme $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$. Pak

$$\mu(A) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \mu(A_n) < 2^{1-m}$$

pro každé $m \in \mathbb{N}$, a tedy $\mu(A) = 0$. Ukážeme, že $f_{n_k} \to f$ na $X \setminus A$. Nechť $x \in X \setminus A = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} (X \setminus A_k)$. Existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $x \in \bigcap_{k=m}^{\infty} (X \setminus A_k)$. To je ekvivalentní tomu, že $|f(x) - f_{n_k}(x)| \leq 2^{-k}, k \geq m$, a proto $f_{n_k}(x) \to f(x)$. □

Lemma 3.6. *Nechť X je p-normovaný lineární prostor, $(Y,\|\cdot\|)$ je q-normovaný lineární prostor a $f\colon X \to Y$ zobrazení. Pak f je spojité na X právě tehdy, když pro každé $x \in X$ a pro každou posloupnost $\{x_n\}$ prvků X splňující, že $x_n \to x$ existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ taková, že $f(x_{n_k}) \to f(x)$.*

Důkaz. $\Rightarrow$ je triviální.

$\Leftarrow$ Předpokládejme pro spor, že existuje $x \in X$ takové, že f není spojité v x. Z Heineho charakterizace spojitosti existuje $\varepsilon > 0$ a posloupnost $\{x_n\}$ prvků v X taková, že $x_n \to x$ a $\|f(x) - f(x_n)\| > \varepsilon, n \in \mathbb{N}$. Pak $\{x_n\}$ je posloupnost konvergující k x, pro kterou neexistuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ taková, že $f(x_{n_k}) \to f(x)$. To je spor s předpokladem. □

Tvrzení 3.7. *Nechť $(X,\mathcal{A},\mu)$ je prostor s mírou a $p, q \in (0, \infty)$. Pak $L_p(\mu)$ je homeomorfní $L_q(\mu)$ pomocí zobrazení $\phi_{p,q}\colon L_p(\mu) \to L_q(\mu)$, $\phi_{p,q}(f) = \operatorname{sgn} f \, |f|^{\frac{p}{q}}$.*

Důkaz. Předně ověříme, zdali je $\phi_{p,q}$ bijekce. Uvědomme si, že $\phi_{q,p} \circ \phi_{p,q} = \mathrm{Id}_{L_p(\mu)}$ a $\phi_{p,q} \circ \phi_{q,p} = \mathrm{Id}_{L_q(\mu)}$. Tudíž $\phi_{p,q}$ je bijekce a $\phi_{p,q}^{-1} = \phi_{q,p}$. Ověříme spojitost $\phi_{p,q}$. Nechť $f \in L_p(\mu)$ je dané a $\{f_n\} \subset L_p(\mu)$ je libovolná posloupnost splňující, že $f_n \to f$ v $L_p(\mu)$. Dle Lemmatu 3.5 nalezneme podposloupnost $\{f_{n_k}\}$ takovou, že $f_{n_k} \to f$ μ-skoro všude. Ukážeme, že $\phi_{p,q}(f_{n_k}) \to \phi_{p,q}(f)$ μ-skoro všude. Existuje množina N nulové míry taková, že $f_{n_k} \to f$ na $X \setminus N$. Ať $x \in X \setminus N$ je dané. Rozlišíme nyní dva případy. Pokud $f(x) = 0$, pak $|f_{n_k}(x)|^{\frac{p}{q}} \to 0$ a jelikož funkce sgn je omezená, tak $(\phi_{p,q}(f_{n_k}))(x) \to 0 = (\phi_{p,q}(f))(x)$. Pokud $f(x) = a \neq 0$, tak nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq k_0$ máme $|f_{n_k}(x) - a| < \left|\frac{a}{2}\right|$. Pak $\operatorname{sgn} f_{n_k}(x) = \operatorname{sgn} a$, a tedy $(\phi_{p,q}(f_{n_k}))(x) \to \operatorname{sgn} a \, |a|^{\frac{p}{q}} = (\phi_{p,q}(f))(x)$. Z Lemmatu 3.4 dostáváme

$$\int_X |\phi_{p,q}(f_{n_k})|^q \, \mathrm{d}\mu = \int_X |f_{n_k}|^p \, \mathrm{d}\mu \to \int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu = \int_X |\phi_{p,q}(f)|^q \, \mathrm{d}\mu,$$

neboli že $\|\phi_{p,q}(f_{n_k})\|_q \to \|\phi_{p,q}(f)\|_q$. Opětovným použitím Lemmatu 3.4 obdržíme $\phi_{p,q}(f_{n_k}) \to \phi_{p,q}(f)$ v $L_q(\mu)$. Dle Lemmatu 3.6 je zobrazení $\phi_{p,q}$ spojité. Spojitost $\phi_{p,q}^{-1}$ se dokáže stejně. Celkem je $L_p(\mu)$ homeomorfní $L_q(\mu)$. □

Důsledek 3.8. *Nechť $(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ jsou prostory s mírou a $p, q \in (0, \infty)$. Pokud jsou $L_p(\mu)$ a $L_q(\nu)$ nekonečně dimenzionální a separabilní, pak jsou homeomorfní.*

Důkaz. Nechť $L_p(\mu)$ a $L_q(\nu)$ jsou nekonečně dimenzionální separabilní prostory. Podle předchozí věty jsou $L_p(\mu)$ a $L_2(\mu)$ homeomorfní. To samé platí pro $L_q(\nu)$ a $L_2(\nu)$. Homeomorfismy zachovávají separabilitu a lokální kompaktnost. Dle Tvrzení 2.14 víme, že p-Banachovy prostory nejsou lokálně kompaktní právě tehdy, když jsou nekonečně dimenzionální. Tudíž $L_2(\mu)$ a $L_2(\nu)$ jsou nekonečně dimenzionální separabilní Hilbertovy prostory. Nutně proto jejich ortonormální báze mají mohutnost $|\mathbb{N}|$. Tedy dle [3, Věta 1.118] jsou $L_2(\mu)$ a $L_2(\nu)$ izometrické ℓ_2. □

Shrnmě poznatky této kapitoly. Víme, že prostory $L_p([0,1])$, $L_1([0,1])$, ℓ_p a ℓ_1 jsou všechny homeomorfní pro $p \in (0,1)$. Zároveň víme, že $L_p([0,1])$ se lipschitzovsky nevnoří do $L_1([0,1])$. Speciálně nemůžou být lipschitzovsky izomorfní. To samé platí pro ℓ_p a ℓ_1. Tohle nás vede k otázce, zda-li jsou tyto prostory stejnoměrně homeomorfní. Otevřenými problémy, kde první dva lze nalézt v [5] a třetí v [2, Problem 279], tedy jsou:

Problém 3.9. *Nechť $p \in (0,1)$. Existuje stejnoměrný homeomorfismus mezi $L_p([0,1])$ a $L_1([0,1])$?*

Problém 3.10. *Nechť $p \in (0,1)$. Existuje stejnoměrný homeomorfismus mezi ℓ_p a ℓ_1?*

Problém 3.11. *Může být nenormovatelný kvazi-Banachův prostor stejnoměrně homeomorfní Banachovu prostoru?*

Seznam použité literatury

[1] F. Albiac, *Nonlinear structure of some classical quasi-Banach spaces and F-spaces*, J. Math. Anal. Appl., 340 (2008), pp. 1312–1325.

[2] A. J. Guirao, V. Montesinos, a V. Zizler, *Open problems in the geometry and analysis of Banach spaces*, Springer, [Cham], 2016.

[3] M. Johanis a J. Spurný, *Funkcionální analýza.* `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/funkcionalka_skripta.pdf`.

[4] N. J. Kalton, N. T. Peck, a J. W. Roberts, *An F-space sampler*, vol. 89 of London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[5] A. Weston, *On the uniform classification of $L_p(\mu)$ spaces*, in Miniconference on probability and analysis (Sydney, 1991), vol. 29 of Proc. Centre Math. Appl. Austral. Nat. Univ., Austral. Nat. Univ., Canberra, 1992, pp. 231–237.