Posudek oponenta k disertační práci
Structural and categorical description of classes of abelian groups
Josefa Dvořáka

Předložená práce studuje pojem (relativně) kompaktního objektu v následujících kategoriích: Kategorie komutativních grup (kapitoly 2,3), abelovské kategorie s exaktními direktními limitami (kapitola 4), kategorie funktorů a přirozených transformací jednoobjektové kategorie (monoidu) do kategorie množin (kapitoly 5,6).

Členění práce do jednotlivých kapitol odpovídá těmto článkům či preprintům:

1. Dvořák, J.: *On products of self-small abelian groups*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 60 (2015), no. 1, 13 – 17.

2. Dvořák, J., Žemlička, J.: *Self-small products of abelian groups*, Comment. Math. Univ. Carolinae (doporučeno k publikaci recenzentem i editorem).

3. Dvořák, J., Žemlička, J.: *Autocompact objects of Ab5 categories*, zasláno do Theory and Applications of Categories.

4. Dvořák, J., Žemlička, J.: *Compact obects in categories of S-acts*, zasláno do Semigroup Forum.

5. Dvořák, J., Žemlička, J.: *Perfect monoids with zero and categories of S-acts*, zasláno do Communications in Algebra.

První kapitola disertace je krátké shrnutí hlavních výsledků těchto prací.

Druhá kapitola uvádí elementární příklad 'Hom-ortogonálního' systému samo-malých abelovských grup, jehož součin není samo-malý (Example 2.3). Jedná se o protipříklad k tvrzení z článku Arnolda a Murleyho z roku 1975. Chybu v tomto článku odhalil již dříve J. Žemlička, nicméně Example 2.3 představuje nový protipříklad. Dalším výsledkem druhé kapitoly je Proposition 2.4 charakterizující, kdy součin konečného systému samo-malých R-modulů není samo-malý.

Třetí kapitola představuje pojem abelovské grupy malé vzhledem k nějaké třídě grup. Komutativní grupa A je $\mathcal{N}$-malá, pokud se každý homomorfismus z A do direktního součtu grup z $\mathcal{N}$ faktorizuje přes nějakou konečnou podsumu. Pro $\mathcal{N} = \{A\}$ dostaneme koncept samo-malé grupy. Sekce 3.2 zkoumá různé aspekty relativní malosti, například Proposition 3.12 ukazuje, že třída $\mathcal{N}$-malých grup je uzavřená na extenze. Sekce 3.3 studuje samo-malost součinů systému abelovských grup, koncept relativní malosti se zde ukazuje užitečným. Konkrétně Theorem 3.18 říká, že součin $\prod \mathcal{M}$ je samo-malý právě když je $\{\oplus\mathcal{M}\}$-malý. Zajímavý je Theorem 3.27 charakterizující samo-malé součiny konečně generovaných komutativních grup.

Čtvrtá kapitola navazuje na práci Kálnaie a Žemličky o kompaktních objektech v Ab5 kategoriích (J. Algebra, 2019). Definice kompaktního objektu v Ab5 kategoriích je trochu technická (str. 29), zhruba lze říct, že pojem

($\mathcal{N}$)-kompaktního objektu zobecňuje pojem ($\mathcal{N}$)-malé komutativní grupy. Autokompaktní objekty jsou pak zobecněním samo-malých grup. Řada výsledků ve čtvrté kapitole je zobecněním výsledků třetí kapitoly (srov. např. Lemma 3.4 a Lemma 4.7, Lemma 3.10(2) a Lemma 4.10, Proposition 3.15 a Proposition 4.18, Proposition 3.12(2) a Lemma 4.27, Theorem 3.18 a Theorem 4.30). V sekci 4.5 je studována otázka, kdy je součin autokompaktních objektů autokompaktní (Theorem 4.30, Theorem 4.34).

Poslední dvě kapitoly zkoumají kompaktnost v kategoriích, které nejsou abelovské. Podstatnou částí páté kapitoly je zavedení pojmu UD-kategorie a studium koproduktů v UD-kategoriích. Hlavní motivací pro pojem UD-kategorie je zavedení společného rámce pro kategorie v práci označované jako $\mathcal{S}-\overline{\mathrm{Act}}$ a $\mathcal{S}-\mathrm{Act}_0$, kde $\mathcal{S}$ je monoid s nulou, $\mathcal{S}-\overline{\mathrm{Act}}$ je kategorie akcí $\mathcal{S}$ na množině s přidaným iniciálním objektem $\emptyset$ a $\mathcal{S}-\mathrm{Act}_0$ je kategorie akcí $\mathcal{S}$ na množině s jediným pevným bodem. Popis rozkladů objektů v UD-kategoriích je proveden v Theorem 5.17, sekce 5.3 dává popis projektivních objektů v UD-kategoriích s projektivním generátorem. Charakterizace $\mathcal{N}$-kompaktních objektů v UD-kategorii je náplní sekce 5.4. Závěr páté kapitoly je věnován kategoriím $\mathcal{S}-\overline{\mathrm{Act}}$ a $\mathcal{S}-\mathrm{Act}_0$. Mimo jiné je ukázáno, že pojem autokompaktního, kompaktního a nerozložitelného objektu pro netriviální objekty $\mathcal{S}-\overline{\mathrm{Act}}$ splývají (Theorem 5.45) zatímco v kategorii $\mathcal{S}-\mathrm{Act}_0$ tomu tak není (Example 5.47).

Závěrečná kapitola studuje problém existence projektivních pokrytí v kategoriích $\mathcal{S}-\overline{\mathrm{Act}}$ a $\mathcal{S}-\mathrm{Act}_0$ a navazuje mj. na práci J. Isbella o perfektních monoidech z roku 1970. Theorem 6.18 ukazuje, že každý objekt $\mathcal{S}-\overline{\mathrm{Act}}$ má projektivní pokrytí právě když ho má každý objekt $\mathcal{S}-\mathrm{Act}_0$. Práci uzavírá krátká sekce věnovaná monoidům, pro které kompaktní objekty kategorie $\mathcal{S}-\mathrm{Act}_0$ splývají s cyklickými objekty.

Ačkoli problematika samo-malých komutativních grup a modulů je klasické téma studované v různých kontextech, předložená práce obsahuje dle mého soudu kromě nových výsledků i určité nové přístupy ke studiu této problematiky (relativní kompaktnost, UD-kategorie). Práce je psána pečlivě a srozumitelně. Věřím, že neobsahuje žádné závažnější chyby, i když jsem na několika místech nepochopil uvedenou argumentaci (viz připomínky níže). Oceňuji, že práce obsahuje i několik netriviálních příkladů, často ukazujících, že uvedené výsledky nelze určitým způsobem vylepšit.

Je trochu škoda, že z uvedených článků prošly recenzním řízením zatím pouze dva.

Celkově si myslím, že autor dostatečně prokázal schopnost samostatné tvůrčí práce a předloženou práci proto doporučuji přijmout jako práci disertační.

V Praze, 26. 7. 2021

Pavel Příhoda

Konkrétní připomínky k práci

p. 17, l. 2: $\forall i \geq n$

p. 28, l. 7: finite products and coproducts

p. 32: V důkazu Lemmatu 4.10 bychom asi mohli rovnou definovat τ_γ jako $\tilde{\varrho_\gamma}\psi$.

p. 36, obrázek dole: ξ_n má asi být ξ_m

p. 37, Theorem 4.22: increasing $\to$ decreasing

p. 38, Proposition 4.23 (5.): Myslím, že by zde mělo být $\exists i < \omega$ such that for every $0 \neq \varphi \in \mathcal{A}(N_1, N_2)$ the morphism $\varphi\mu_i$ is nonzero.

p. 47, l. 4: $\mathrm{Mor}_\mathcal{C}(\theta, A) \to \mathrm{Mor}_\mathcal{C}(A, B)$.

p. 49, l. 5: Zápis by měl být pečlivější - není identita jako identita

p. 52, Lemma 5.13: Je trochu podezřelé, že při důkazu $U(\varphi)$ je bijekce není nikde použita podmínka $U(A_i) \cap (\cup_{j\neq i} U(A_j)) = U(\theta_A)$. Doporučuji projít si důkaz pro případ, kdy $\mathcal{A}$ je kategorie množin a U identický funktor (Example 5.6).

p. 55, Lemma 5.18: Rovnost $\pi\varphi = \alpha$ lze ověřit složením se strukturními morfismy $\nu_i, i \in I$.

p. 56, l. 1: $Pj \to P_j$

p. 56, l. 11: $\mu_{P_0} \to \mu_A$

p. 59, Theorem 5.24(5): th $\to$ the

p. 61, Proposition 5.27: Iniciální objekt je kompaktní ale není nerozložitelný

p. 61, Proposition 5.29: Myslím, že idea důkazu spočívá v porovnání vlastností $\nu g \tilde{f}$ s autokompaktností C. Trochu mě zaráží, že morfismus ν je pouze zaveden a pak se již v důkazu nevyskytuje. Dále mi není jasná implikace
$U(g)(U(C^f)) \nsubseteq U(\nu_i)(U(D_i)) \Rightarrow U(g)(U(C^f)) \cap U(\nu_i)(U(D_i)) \neq U(\theta_{D_i})$.

p. 63, Proposition 5.33: Asi by bylo dobré okomentovat, že čtverec je pullback, pokud α_i jsou strukturní zobrazení koproduktu

p. 63, Example 5.34: Zobrazení $\pi_{6\mathbb{Z}}$ by bylo vhodné popsat předpisem

p. 65, l. 21: Theorem 5.17 $\to$ Theorem 5.27

p. 67, důkaz Lemmatu 5.48: Myslím, že je třeba pečlivější zápis. Potřebujeme také $f(C) \cap \nu_i(C_i)$ a $f(C) \cap \nu_j(C_j)$ netriviální.

p. 73, l. 2: asi má být $A_2 = A_1 \coprod A_1$

p. 77, l. 3: Šipka vede v protisměru. V kategorii množin bych asi nepoužíval značení $\to 0$ pro zobrazení na.