MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Michal Hevessy

Rozšiřování funkcí z podprostorů metrických prostorů

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Miroslav Hušek, DrSc.
Studijní program: Obecná matematika

Praha 2022

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Rád bych poděkoval svému vedoucímu prof. RNDr. Miroslavu Huškovi, DrSc, za věcné a cenné připomínky. Dále bych chtěl poděkovat rodině a blízkým za podporu při studiu.

Název práce: Rozšiřování funkcí z podprostorů metrických prostorů

Autor: Michal Hevessy

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Miroslav Hušek, DrSc., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Rozšiřování funkcí je v matematice klasická úloha. V této práci se budeme věnovat rozšiřování reálných funkcí, které jsou definované na metrických prostorech. V první kapitole zadefinujeme rozšíření funkcí pro metrické prostory. Ve druhé kapitole uvedeme známou metodu rozšíření speciální třídy stejnoměrně spojitých funkcí a zobecníme ji pro funkce spojité. Ve třetí kapitole prodiskutujeme metodu rozšiřování spojitých funkcí navrženou Whitneym. V poslední kapitole se pak budeme věnovat charakterizaci stejnoměrně spojitě rozšiřitelných funkcí, i v této kapitole zobecníme některá známá tvrzení.

Klíčová slova: různé spojitosti, rozšíření funkcí, rozšíření metrik

Title: Extensions of functions from subspaces of metric spaces

Author: Michal Hevessy

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: prof. RNDr. Miroslav Hušek, DrSc., Department of Mathematical Analysis

Abstract: Function extension is a classical problem in mathematics. In this thesis we look into an extesion of realvalued functions defined on metric spaces. The first chapter is introductory and describes extension problem. In the second one we discuss a known method for extension of special family of uniformly continuous functions and show that the method can be modified for continuous functions. The third chapter examines a method for extension of continuous functions described by Whitney. Finally, in the last chapter we show a characterisation of uniformly continuous function, having uniformly continuous extensions.

Keywords: various continuity, extension of functions, extension of metrics

Obsah

Úvod

Rozšiřováním funkcí se zabývají matematici již mnoho let. Již v roce 1908 se jako první zabýval rozšiřováním spojitých funkcí Henri Lebesgue, který byl motivován řešením Dirichletova problému. Mezi nejznámější výsledky týkající se rozšiřování funkcí patří Tietzeho věta dokázána v roce 1915, která hovoří o existenci rozšíření spojitých funkcí na metrických prostorech, a Uryshonovo lemma, které hovoří o rozšiřováni spojitých funkcí na normálních topologických prostorech. Důležitým výsledkem v této problematice je i Whitneyho věta o rozšiřování diferencovatelných reálných funkcí.

V této práci se budeme věnovat rozšiřování reálných funkcí definovaných na metrických prostorech. Hlavním zdrojem této práce je McShanův článek z roku 1934 [1], který se věnuje rozšiřování stejnoměrně spojitých, lipschitzovských a α-hölderovských reálných funkcí. V této práci nejen shrneme základní poznatky z tohoto článku ale doplníme některé důkazy a zobecníme některá tvrzení. Částečně se budeme zabývat i Whitneyho článkem z roku 1934 [2]. Ke konci této práce se pak zaměříme na charakterizaci funkcí, které mají stejnoměrně spojité rozšíření. K této problematice uvedeme a dokážeme několik nových výsledků.

1. Rozšiřování funkcí

Definice 1. *Nechť* (X, d) *a* (Y, e) *jsou metrické prostory a* $A \subset X$. *Nechť* $f : A \to Y$. *Řekneme, že funkce* $F : X \to Y$ *rozšiřuje funkci (je rozšířením funkce)* f, *pokud platí* $F|_A = f$ *neboli* $F(a) = f(a)$ *pro každé* $a \in A$.

Pro rozšiřování funkcí lze uvažovat i jinou volbu struktur definičního oboru a oboru hodnot například různé topologické prostory a podobně. My se však omezíme na metrické prostory. Navíc budeme uvažovat pouze $Y = \mathbb{R}$ se standardní metrikou, což nám umožní využívat speciální vlastnosti reálné přímky, především lineární uspořádání, úplnost a kompaktnost uzavřených a omezených množin.

Pokud nebudeme klást žádné další požadavky na funkci F, je úloha rozšíření libovolné funkce f triviální. Z volby metrického prostoru, jakožto definičního oboru a oboru hodnot, vyplývají určité přirozené vlastnosti funkcí, které budeme uvažovat (spojitost, stejnoměrná spojitost, lipschitzovskost, α-hölderovskost). Naším cílem je uvažovat funkci f s určitou vlastností a nalézt rozšiřující funkci F se stejnou vlastností. O funkci f pak mluvíme jako o spojitě rozšiřitelné, stejnoměrně spojitě rozšiřitelné a podobně. O funkci F mluvíme například jako o spojitém rozšíření nebo stejnoměrně spojitém rozšíření.

Úloha rozšiřování funkcí s určitými vlastnosti však nemá vždy řešení a musíme klást určité další požadavky, ať už na funkci f (omezenost, ...), na prostor (X, d) (úplnost, souvislost, ...) nebo na podmnožinu A (uzavřenost, kompaktnost, ...). Často se nám funkci F se stejně silnými vlastnostmi, jaké má funkce f, nepodaří nalézt, ale dokážeme nalézt rozšiřující funkci F se slabšími vlastnostmi. Například lze spojitě rozšiřovat libovolné stejnoměrně spojité funkce nebo spojité funkce definované na uzavřených množinách.

2. Rozšiřování funkcí pomocí modulů spojitosti

V následující kapitole budeme vždy uvažovat metrický prostor (X, d).

2.1 Rozšiřování stejnoměrně spojitých funkcí

Definice 2. *Nechť* $f\colon X \to \mathbb{R}$.

Zobrazení $\omega_0^f(t) = \sup(|f(x) - f(y)|\,;\ x, y \in X\ d(x, y) \le t)$ *nazveme nejmenší modul spojitosti funkce* f.

Řekneme, že zobrazení $\omega\colon [0, \infty) \to [0, \infty]$ *je modul spojitosti funkce* f, *pokud platí* $\omega(t) \ge \omega_0(t)$ *pro každé* $t \in [0, \infty)$.

Poznámka. Supremum v definici bereme vzhledem k množině $[0, \infty]$. Z definice okamžitě plyne, že nejmenší modul spojitosti je neklesající a splňuje $\omega_0^f(0) = 0$. Snadným důsledkem definice je, že každý modul spojitosti ω funkce f splňuje $|f(x) - f(y)| \le \omega(d(x, y))$.

Modulů spojitosti využívá McShane ve svém článku [1] k rozšiřování lipschitzovských, hölderovských a stejnoměrně spojitých funkcí. McShane na straně 873 zmiňuje použití této metody, jak na zmíněné třídy funkcí, tak i na spojité funkce na obecném metrickém prostoru. V článku však neuvádí důkaz rozšiřování spojitých funkcí na obecném metrickém prostoru, uvádí pouze důkaz pro funkce spojité na Eukleidovském prostoru.

Pokud f je stejnoměrně spojitá funkce, je ω_0^f spojitý v 0 zprava, jak ve svém článku [1] McShane bez důkazu zmiňuje.

Lemma 1. *Nechť* $f\colon X \to \mathbb{R}$, *pak* f *je stejnoměrně spojitá, právě když* ω_0^f *je spojitý v* 0 *zprava.*

Důkaz. Dokážeme dvě implikace.

„$\Longrightarrow$“: Nechť f je stejnoměrně spojitá. Zvolme $\varepsilon > 0$, k němu, ze stejnoměrné spojitosti, nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $x, y \in X$ splňující $d(x, y) < \delta$ platí $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Pro $r \in [0, \delta)$ pak dostáváme $\omega_0^f(r) \le \varepsilon$ z definice nejmenšího modulu spojitosti. A tedy ω_0^f je spojitý v 0 zprava.

„$\Longleftarrow$“: Nechť ω_0^f je zprava spojitý v 0. Zvolme $\varepsilon > 0$, k němu ze spojitosti ω_0^f v 0 nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $r \in [0, \delta)$ platí, $\omega_0^f(r) < \varepsilon$. Pak ale pro všechny $x, y \in X$ splňující $d(x, y) < \delta/2$ máme $|f(x) - f(y)| \le \omega_0^f(\delta/2) < \varepsilon$, a tedy funkce f je stejnoměrně spojitá.

□

Důležitou roli při rozšiřování stejnoměrně spojitých funkcí hrají konkávní moduly spojitosti.

Poznámka. Konkávní funkcí rozumíme konkávní funkci nabývající jen konečných hodnot.

Příklad. Existují stejnoměrně spojité funkce, které nemají konkávní modul spojitosti. Volme například $X = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ se standardní metrikou a $f(n) = -1^n \cdot n$ pro $n \in X$. Funkce f je stejnoměrně spojitá, protože X je diskrétní prostor. Máme ale, $\omega_0^f(1) = \infty$, a tedy každý modul spojitosti ω funkce f splňuje $\omega(1) = \infty$, z toho plyne, že žádný z modulů spojitosti funkce f není konkávní.

McShane ve svém článku [1, Lemma] zmiňuje způsob, který umožňuje lépe identifikovat funkce s konkávním modulem spojitosti. Lemma doplníme o implikaci „$\Longleftarrow$“, kterou McShane neuvádí. Důkaz uvádíme, protože budeme později využívat konstrukci v něm uvedenou.

Lemma 2. *Nechť $\omega_0 : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Pak existují $a, b \in \mathbb{R}$ splňující $\omega_0(t) \le a \cdot t + b$ pro každé $t \ge 0$, právě když existuje spojitá konkávní funkce $\omega : (0, \infty) \to [0, \infty)$, která splňuje $\omega \ge \omega_0$. Pokud navíc $\omega_0(0) = 0$ a ω_0 je spojitá v 0 zprava, můžeme to samé požadovat po funkci ω.*

Důkaz. „$\Longrightarrow$“: Nechť existují $a, b \in \mathbb{R}$ splňující $\omega_0(t) \le a \cdot t + b$ pro každé $t \ge 0$. V rovině $\mathbb{R}^2$ uvažujme množinu všech přímek $y = c \cdot t + d$, pro nějaké $c, d \in \mathbb{R}$, které splňují $\omega_0(t) \le c \cdot t + d$. Protože ω_0 je nezáporná funkce, mají všechny tyto přímky nezápornou směrnici. Pro každou přímku $y = c \cdot t + d$ z této množiny je množina $M_{(c,d)} = \{(t, y); t \ge 0,\, y \le c \cdot t + d\}$ konvexní. Nechť A je průnik všech takových množin M. Množina A je konvexní a její horní hranice je konkávní funkce ω. Formálně můžeme funkci ω v bodě $t \ge 0$ definovat jako průsečík hranice množiny A a přímky procházející bodem $(t,0)$, která je kolmá na vodorovnou osu. Tento průsečík je jednobodový, protože množina A je zdola neomezená. To, že se skutečně jedná o konkávní funkci, pak plyne z konvexity množiny A.

Protože funkce ω_0 leží v množině A, máme $\omega_0(t) \le \omega(t)$ pro každé $t \ge 0$. Pro každé $t_0 \ge 0$ je funkce ω omezená na intervalu $[0, t_0]$, a protože je navíc konkávní, je spojitá na intervalu $(0, \infty)$.

Nyní předpokládejme, že platí $\lim_{t\to0^+} \omega_0(t) = 0$. Pro každé $\varepsilon > 0$ tedy existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $t \in [0, \delta)$ je $\omega_0(t) < \varepsilon$. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné a k němu nalezneme příslušné δ. Nalezneme lineární funkci $y = c \cdot t + \varepsilon$, splňující $c \cdot t + \varepsilon \ge a \cdot t + b \ge \omega_0(t)$, pro $t \in [\delta, \infty)$. Volíme $c \ge a + (b - \varepsilon)/\delta$, pokud $b \ge \varepsilon$ a $c = a$, pokud $b < \varepsilon$.

Pak máme $\omega_0(t) < c \cdot t + \varepsilon$ pro $t \ge 0$ a tedy i $\omega(t) \le c \cdot t + \varepsilon$, z konstrukce ω. Z toho plyne, že $0 \le \lim_{t\to0^+} \omega(t) \le \varepsilon$. Protože ε bylo libovolné dostáváme $\lim_{t\to0^+} \omega(t) = 0$.

„$\Longleftarrow$“: Nechť existuje konkávní spojitá funkce $\omega : (0, \infty) \to [0, \infty)$ splňující $\omega \ge \omega_0$. Z konkávity má funkce ω v každém bodě jednostranné derivace. Z toho a konkávity funkce dostáváme

$$\omega(t) \le \omega'_+(1) \cdot t - \omega'_+(1) + \omega(1),$$

protože na pravé straně nerovnosti je tečna k funkci ω v bodě 1. Z toho máme pro funkci ω_0

$$\omega_0(t) \le \omega'_+(1) \cdot t - \omega'_+(1) + \omega(1) + \omega_0(0).$$

□

Použití konkávních modulů spojitosti demonstruje McShane [1, Theorem 2] v následující větě. Nejprve však zformulujeme lemma popisující jisté vlastnosti konkávních funkcí spojitých v 0 zprava. Ty jsou dále v důkazu použity a McShane jejich důkaz neuvádí.

Lemma 3. *Nechť $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ je konkávní, spojitá a $\omega(0) = 0$. Pak je ω neklesající a subaditivní.*

Důkaz. Zvolme libovolně $x, y \in [0, \infty)$. Z konkávnosti ω pak dostáváme

$$\begin{aligned}\omega(x) + \omega(y) &= \omega\left(\frac{x}{x+y}\cdot(x+y) + \frac{y}{x+y}\cdot 0\right) + \omega\left(\frac{y}{x+y}\cdot(x+y) + \frac{x}{x+y}\cdot 0\right)\\ &\geq \frac{x}{x+y}\omega(x+y) + \frac{y}{x+y}\omega(x+y) + \frac{y}{x+y}\omega(0) + \frac{x}{x+y}\omega(0)\\ &= \omega(x+y),\end{aligned}$$

a tedy ω je subaditivní.

Nyní pro spor předpokládejme, že existují
$x, y \in [0, \infty)$, $x < y$ splňující $\omega(x) > \omega(y) \geq 0$. Z konkávnosti ω máme pro každé $r \geq y$

$$\omega(r) \leq \frac{\omega(y) - \omega(x)}{y - x}\cdot r + \frac{y\cdot\omega(x) - x\cdot\omega(y)}{y-x}.$$

Na pravé straně nerovnosti je přímka procházející body $(x, \omega(x))$ a $(y, \omega(y))$, z konkávnosti ω tedy musí být hodnoty $\omega(r)$ pro $r \geq y$ omezeny touto přímkou. Protože ale přímka na pravé straně nerovnosti má zápornou směrnici, je pro dostatečně velké $r \geq y$ hodnota na pravé straně záporná. Což je spor s nezáporností funkce ω, a funkce ω je tedy neklesající.

$\square$

Věta 4. *Nechť $A \subset X$ a $f \colon A \to \mathbb{R}$. Nechť existuje modul spojitosti ω funkce f, který je konkávní, $\omega(0) = 0$ a je spojitý v 0 zprava. Potom existuje rozšíření funkce f, které má stejný modul spojitosti.*

Důkaz. Definujeme funkci $F(x) = \sup_{a\in A}(f(a) - \omega(d(a, x))$. Pro $x \in A$ máme $f(a) - \omega(d(a, x)) \leq f(x)$ pro každé $a \in A$, což plyne z vlastností modulu spojitosti, navíc pro $a = x$ nastává rovnost. Z toho tedy dostáváme $f(x) = F(x)$ pro každé $x \in A$. Nyní zvolme $x, y \in X$, bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $F(x) \geq F(y)$ a předpokládejme, že alespoň jedna z hodnot $F(x)$ a $F(y)$ je konečná. Pak máme

$$\begin{aligned}0 \leq F(x) - F(y) &= \sup_{a\in A}(f(a) - \omega(d(a,x)) - \sup_{a\in A}(f(a) - \omega(d(a,y))\\ &\leq \sup_{a\in A}(\omega(d(a,x)) - \omega(d(a,y))\\ &\leq \sup_{a\in A}\omega(d(a,y) + d(y,x)) - \omega(d(a,y))\\ &\leq \sup_{a\in A}\omega(d(a,y)) + \omega(d(x,y)) - \omega(d(a,y)) \leq \omega(d(x,y))\end{aligned}$$

Druhá a třetí nerovnost plynou po řadě z monotonie a subaditivity funkce ω, které plynou z lemmatu 3. Tedy dostáváme, že pokud alespoň jedna z hodnot $F(x)$ a $F(y)$ je konečná tak platí

$$|F(x) - F(y)| \leq \omega(d(x, y)). \tag{2.1}$$

Volbou $x \in A$ dostáváme konečnost $F(x)$ tedy nerovnost (2.1) platí pro každé $y \in X$. Z toho plyne, že $F(y)$ je konečné pro každé $y \in X$ a tedy nerovnost (2.1) platí pro každé $x, y \in X$.

$\square$

Podle definice lipschitzovské, respektive α-hölderovské podmínky existuje pro lipschitzovské, respektive α-hölderovské funkce pro $\alpha \in (0, 1]$ modul spojitosti splňující podmínky věty 4 ($\omega_0^f(t) = K \cdot t^\alpha$ pro nějaké $K > 0$, což je konkávní funkce pro $\alpha \in [0, 1]$). Pro omezené stejnoměrně spojité funkce je ω_0^f omezený lineární funkcí. Z toho, lemmatu 10 a věty 4 lze tyto funkce rozšířit a zachovat lipschitzovskost, respektive α-hölderovskost, respektive omezenost.

McShane se ve svém článku [1] zmiňuje i o rozšiřování neomezených stejnoměrně spojitých funkcí na funkce spojité. Je důležité zmínit, že v článku uvedené tvrzení [1, Corollary 3], které se rozšiřování neomezených stejnoměrně spojitých funkcí týká, úzce souvisí s větou o rozšiřování spojitých funkcí, která není v článku uvedena. Přestože námi uvedená věta hovoří o rozšiřování spojitých funkcí, její důkaz je prakticky stejný jako důkaz tvrzení uvedený v článku. Protože se jedná o známou větu předvedeme pouze náznak důkazu.

Věta 5 (Corollary 3)**.** *Nechť $A \subset X$ a $f : A \to X$ je stejnoměrně spojitá. Pak existuje spojité rozšíření f na X.*

Věta 6. *Nechť $A \subset X$ je uzavřená, $a, b \in \mathbb{R}$. Pokud každou spojitou funkci $f : A \to [a, b]$ lze rozšířit na spojitou funkci $F : X \to [a, b]$, pak lze na X spojitě rozšířit i každou neomezenou spojitou funkci na A.*

Náznak důkazu. Nechť $f : A \to \mathbb{R}$ neomezená. Existuje homeomorfismus $h : (-\infty, \infty) \to (a, b)$. Podle předpokladu můžeme funkci $h \circ f : A \to (a, b)$ rozšířit na funkci $F : A \to [a, b]$. Existuje spojitá funkce $g : X \to [0, 1]$ taková, že g nabývá 1 na uzavřené množině A a 0 na uzavřené množině $F^{-1}(\{a\}) \bigcup F^{-1}(\{b\})$. Funkce $h^{-1} \circ (F \cdot g)$ je pak hledané rozšíření funkce f.

$\square$

Za zmínku také stojí chyba v McShanovu článku [1]. Na straně 841 McShane uvádí, že pro každé $x \in X$ a $r > 0$ platí „$\overline{B}(x, r) = B(x, r) \bigcup \{y \in X; d(x, y) = r\}$“. To ale například v žádném alespoň dvouprvkovém diskrétním metrickém prostoru neplatí.

2.2 Rozšiřování spojitých funkcí

Přestože to McShane neuvádí, lze obdobnou metodu jako pro stejnoměrně spojité funkce využít i na spojité funkce. Metodu na rozšiřování spojitých funkcí pomocí modulů spojitosti navrhuje ve svém článku i Whitney [2]. Jeho metoda však nefunguje pro obecné spojité funkce, podrobněji se jí budeme věnovat v následující kapitole.

Než přejdeme k samotné metodě, je nutné zformulovat několik vět, které jsou důležité pro rozšiřování spojitých funkcí. Protože tato tvrzení jsou známá a jejich důkazy nejsou obtížné, předvedeme zde pouze jejich náznaky.

Věta 7. *Nechť $A \subset X$ není uzavřená. Pak existuje $f : A \to \mathbb{R}$ spojitá, kterou nelze spojitě rozšířit.*

Náznak důkazu. Pokud A není uzavřená množina, pak existuje posloupnost $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ prvků z A, která konverguje k prvku z $X \setminus A$. Můžeme předpokládat, že prvky posloupnosti $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ jsou po dvou různé. Definujme

$$S = \{x_{2n}, n \in \mathbb{N}\},$$
$$L = \{x_{2n-1}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Což jsou disjunktní uzavřené množiny v A. Funkci f spojitou na A, která splňuje $f(x) = 1$ pro $x \in S$ a $f(x) = 0$ pro $x \in L$, pak nelze spojitě rozšířit na X.

□

Tato věta ukazuje, že pro rozšiřování všech spojitých funkcí na (X,d) má smysl uvažovat jen funkce definované na uzavřených podmnožinách. Z věty 6 víme, že stačí uvažovat jen omezené spojité funkce. Následující věta ukazuje, že stačí dokázat existenci rozšíření pouze pro funkce do zvoleného intervalu.

Věta 8. *Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a $A \subset X$. Jestliže každou spojitou funkci $f : A \to [a, b]$ lze rozšířit, pak lze rozšířit i každou spojitou funkci $g : A \to [c, d]$.*

Náznak důkazu. Existuje homeomorfismus $h : [c, d] \to [a, b]$. Je-li $g : A \to [c, d]$ spojitá, pak je $h \circ g : A \to [a, b]$ spojitá funkce, kterou můžeme, podle předpokladu, rozšířit na funkci $F : X \to [a, b]$. Funkce $h^{-1} \circ F : X \to [c, d]$ je hledané rozšíření funkce g.

□

Nyní můžeme zformulovat větu, jejíž důsledkem podle předchozího je, že lze rozšířit libovolnou spojitou. Pro následující větu je známo mnoho důkazů, my předvedeme metodu podobnou metodě použité výše pro stejnoměrně spojité funkce.

Věta 9. *Nechť $A \subset$ je uzavřená podmnožina X a $f : A \to [0, 1]$ je spojitá. Pak existuje spojitá funkce $F : A \to [0, 1]$, která rozšiřuje funkci f.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že A je neprázdná. Pro každé $a \in A$ definujme funkci $h_a^0 : [0, \infty) \to [0, 1]$ předpisem: $h_a^0(t) = \sup(|f(a) - f(x)|\,; x \in A,\ d(a, x) \leq t)$.

Funkce h_a^0 jsou omezené, splňují $h_a^0(0) = 0$ a jsou spojité v 0 zprava pro každé $a \in A$, protože funkce f je spojitá. Splňují tedy předpoklady lemmatu 2, a proto pro každé $a \in A$ existuje konkávní funkce $h_a : [0, \infty) \to [0, 1]$, která pro každé $t \in [0, \infty)$ splňuje $h_a^0(t) \leq h_a(t)$. Funkce h_a tedy splňují $|f(a) - f(b)| \leq h_a(t)$ kdykoliv $d(a, b) \leq t$. Navíc platí $h_a(0) = 0$, funkce h_a jsou spojité v 0 zprava pro každé $a \in A$ a existují-li $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ splňující $h_a^0(t) \leq c_1 \cdot t + c_2$, pak platí i $h_a(t) \leq c_1 \cdot t + c_2$. Z lemmatu 3 také víme, že funkce h_a jsou neklesající a subaditivní pro každé $a \in A$.

Definujme funkci $G : X \to [-1, 1]$. Pro každé $x \in X$ položme

$$G(x) = \sup(f(a) - h_a(d(a, x)); a \in A).$$

Pro každé $x \in X$ je $G(x) \in [-1, 1]$, protože pro každé $a \in A$ je $f(a) \in [0, 1]$ a $h_a(t) \in [0, 1]$ pro každé $t \in [0, \infty)$.

Nejprve ukážeme, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ a pro každé $t \geq \varepsilon$, a $r \geq 0, r \neq t$ platí

$$0 \leq \frac{h_a(t) - h_a(r)}{t - r} \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

pro každé $a \in A$. Máme-li tedy $\varepsilon > 0$, zvolme libovolné t, r splňující $t \geq \varepsilon$ a $r \geq 0, r \neq t$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $t > r$, pokud $r > t$ pak je $r \geq \varepsilon$ a můžeme zaměnit r a t. Nalezneme $\lambda \in [0, 1]$ splňující $r = \lambda \cdot t$ z konkávnosti, stejné omezenosti, monotonie a nezápornosti funkcí h_a pak dostáváme

$$0 \leq \frac{h_a(t) - h_a(r)}{t - r} \leq \frac{h_a(t) - \lambda \cdot h_a(t)}{t - \lambda \cdot t} \leq \frac{h_a(t)}{t} \leq \frac{1}{\varepsilon}, \tag{2.2}$$

pro každé $a \in A$.

Nyní ukážeme, že funkce G je spojitá a pro každé $a \in A$ splňuje $G(a) = f(a)$. Pro $a \in A$ máme $f(b) - h_b(d(b, a)) \leq f(a)$ pro každé $b \in A$, pro $b = a$ nastává rovnost, a tedy $G(a) = f(a)$. Nyní ukážeme, že G je spojitá. Zvolme $x \in X$ a $\varepsilon > 0$. Rozlišíme dva případy.

1. Nejprve předpokládejme, že $x \in X \setminus A$. Protože A je uzavřená máme, že $X \setminus A$ je otevřená. Existuje tedy $\eta > 0$ takové, že $d(x, A) > \eta$. Položme $\delta = \min\{\eta/2, \eta/2 \cdot \varepsilon/2\}$.

   Zvolme libovolné $t \geq \eta/2$ a $r > 0, r \neq t$ splňující $|t - r| < \delta$. Z nerovnosti 2.2 a monotonie funkcí h_c dostáváme

   $$\left|\frac{h_c(t) - h_c(r)}{t - r}\right| < \frac{1}{\eta/2},$$

   pro každé $c \in A$. Protože $0 < t - r < \delta \leq \eta/2 \cdot \varepsilon/2$ dostáváme, že $|h_c(t) - h_c(r)| < \varepsilon/2$ pro každé $c \in A$.

   Nyní zvolme $y \in B(x, \delta)$ libovolné. Z definice suprema nalezneme $a, b \in A$ splňující

   $$G(x) - \varepsilon/2 \leq f(a) - h_a(d(a, x))$$

   a

   $$G(y) - \varepsilon/2 \leq f(b) - h_b(d(b, y)).$$

   Máme $d(a, x) > \eta$ a také $d(b, x) > \eta$, tedy z trojúhelníkové nerovnosti platí $d(b, y) > \eta - \delta \geq \eta/2$. Protože $d(x, y) < \delta$, podle předchozího dostáváme

   $$\begin{aligned} G(x) - G(y) &\leq f(a) - h_a(d(a, x)) + \varepsilon/2 - f(a) + h_a(d(a, y)) \\ &\leq \varepsilon/2 + h_a(d(a, x) + d(x, y)) - h_a(d(a, x)) < \varepsilon \end{aligned}$$

   a také

   $$\begin{aligned} G(y) - G(x) &\leq f(b) - h_b(d(b, y)) + \varepsilon/2 - f(b) + h_b(d(b, x)) \\ &\leq \varepsilon/2 + h_b(d(b, y) + d(x, y)) - h_b(d(b, y)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

   Dohromady máme $|G(x) - G(y)| < \varepsilon$. Funkce G je tedy spojitá v x.

2. Nyní předpokládejme, že $x \in A$. Ze spojitosti funkce f v x nalezneme $\nu > 0$ takové, že pro každé $b \in A$ splňující $d(b,x) < \nu$ platí $|f(x) - f(b)| < \varepsilon/4$. Podobně jako v důkazu lemmatu 2 nalezneme $c_1 \in (0,\infty)$ splňující $h_x(t) \leq c_1 \cdot t + \varepsilon/4$ pro každé $t \in [0,\infty)$. Položme $\eta = \min\{\nu, 1/c_1 \cdot \varepsilon/4\}$ a $\delta = \min\{\eta/2, \eta/2 \cdot \varepsilon/2\}$.

   Zvolme $y \in B(x,\delta)$ libovolné. Z definice suprema nalezneme $b \in A$ takové, že $G(y) - \varepsilon/2 \leq f(b) - h_b(d(b,y))$. Protože $\delta < \eta$, máme $h_x(t) < \varepsilon/2$ pro $t \in [0,\delta)$. Z toho dostáváme

   $$G(x) - G(y) \leq f(x) - f(x) + h_x(d(x,y)) < \varepsilon/2.$$

   Pokud $d(b,y) \geq \eta/2$ pak z nerovnosti 2.2 dostaneme obdobně jako výše

   $$G(y) - G(x) < \varepsilon.$$

   Dále tedy předpokládejme, že $d(b,y) < \eta/2$. Z trojúhelníkové nerovnosti dostaneme $d(b,x) < \eta \leq \nu$. Z toho máme

   $$\begin{aligned} h_b^0(t) &= \sup(|f(b) - f(c)|\,; c \in A,\, d(b,c) \leq t) \\ &\leq \sup(|f(b) - f(x)| + |f(x) - f(c)|\,; c \in A,\, d(x,c) \leq t + \eta) \\ &< \varepsilon/4 + h_x^0(t+\eta) \leq \varepsilon/4 + c_1 \cdot (t+\eta) + \varepsilon/4 \\ &\leq 3\varepsilon/4 + c_1 \cdot t. \end{aligned}$$

   Z toho dostáváme, že i $h_b(t) < 3\varepsilon/4 + c_1 \cdot t$ pro $t > 0$. Tedy $h_b(d(x,y)) < \varepsilon$, protože $d(x,y) < \delta < \eta$. Z toho plyne

   $$\begin{aligned} G(y) - G(x) &\leq f(b) - h_b(d(b,y)) + \varepsilon/2 - f(b) + h_b(d(b,x)) \\ &\leq h_b(d(b,y) + d(x,y)) - h_b(d(b,y)) + \varepsilon/2 \\ &\leq h_b(d(b,y)) + h_b(d(x,y)) - h_b(d(b,y)) + \varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon. \end{aligned}$$

   Dohromady máme $|G(x) - G(y)| < \varepsilon + \varepsilon/2$.

Z toho dostáváme, že G je spojitá v každém bodě $x \in X$ a rozšiřuje funkci f. Nyní položme $F(x) = \max\{G(x), 0\}$. Funkce F rozšiřuje f, je spojitá a $F(x) \in [0,1]$ pro každé $x \in X$. F je tedy hledaná funkce.

$\square$

3. Whitneyho návrh na rozšiřování

Whitney ve svém článku [2] na straně 63 v poznámce pod čarou bez důkazu zmiňuje následující možnost rozšiřování spojitých funkcí definovaných na uzavřené podmnožině Eukleidovského prostoru E s metrikou d. „Nechť f je spojitá funkce na uzavřené množině A, pro jednoduchost uvažujme A omezenou. Nechť h je spojitá, neklesající funkce definovaná na uzavřeném intervalu $[0, \infty)$, $h(0) = 0$, a navíc pro každé dva body $x, y \in A$ splňuje $|f(x) - f(y)| \leq h(d(x, y))$. Pro libovolný bod $x \in E$ a $y \in A$ definujme funkci $H(x, y) = f(y) - h(d(x, y))$, pro $x \in A$ platí $H(x, y) \leq f(x)$. Spojité rozšíření F funkce f definujeme jako $F(x) = \max_{y \in A}(H(x, y))$." Nevíme, jaký důkaz měl Whitney na mysli, ale jeden z možných důkazů je tento.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že pro $x \in A$ je $F(x) = f(x)$. Zvolíme-li $x \in A$ libovolně platí $F(x) \leq f(x)$, protože $H(x, y) \leq f(x)$ pro libovolné $y \in A$, pro $y = x$ navíc platí $H(x, x) = f(x) - h(d(x, x)) = f(x)$, a protože funkce F je definována jako maximum funkce H, platí $F(x) = f(x)$.

Nyní ukážeme, že funkce F je spojitá v každém bodě množiny E. Zvolme $x \in E$ a $\varepsilon > 0$. Položme $k = \sup_{a \in A}(d(x, a)) + 1$. Číslo k je konečné z omezenosti A a nenulové. Platí $B(x, k) \supseteq A$, navíc interval $[0, 2k]$ je kompaktní množina, a tedy funkce h je na tomto intervalu stejnoměrně spojitá. Nalezneme tedy $\delta' > 0$ takové, že pro každé $r, r' \in [0, 2k]$ splňující $|r - r'| < \delta'$ platí $|h(r) - h(r')| < \varepsilon$. Položme $\delta = \min(k, \delta')$, pro libovolné $y \in B(x, \delta)$ a $a \in A$ máme $d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < \delta + k \leq 2k$, navíc z trojúhelníkové nerovnosti $|d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y) < \delta'$. Pro $y \in B(x, \delta)$ tedy dostáváme

$$\begin{aligned}|F(x) - F(y)| &= \left| \max_{a \in A}(f(a) - h(d(x, a))) - \max_{a \in A}(f(a) - h(d(y, a)) \right| \\ &\leq \max_{a \in A} |h(d(x, a)) - h(d(y, a))| \leq \varepsilon,\end{aligned}$$

a tedy F je spojitá.

□

Je důležité zmínit, že kvůli požadavkům na funkci h se jedná o rozšíření stejnoměrně spojité funkce. Stejnoměrná spojitost funkce f ale plyne i z uzavřenosti a omezenosti množiny A (A je jakožto uzavřená a omezená podmnožina Eukleidovského prostoru kompaktní). V McShanově článku [1] uvedené „pro jednoduchost" je tedy značné omezení a nedává to, co proklamuje.

Příklad. Pokud nebudeme požadovat omezenost množiny A, pak nemusí existovat funkce h s požadovanými vlastnosti. Můžeme volit $A = [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ se standardní metrikou a $f(x) = \sin(x^2)$ pro $x \in A$. Každá funkce $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ splňující $|f(x) - f(y)| \leq h(d(x, y))$ pro každé dva body $x, y \in A$ musí splňovat $h(0) = 2$, a tedy nemá požadované vlastnosti.

Tato metoda však bude fungovat i na jiných metrických prostorech pro spojité funkce, které budou definované na kompaktní množině, a tedy budou omezené a stejnoměrně spojité. Důkaz správnosti metody pro obecný metrický prostor a kompaktní množinu by se provedl stejně.

Protože se jedná o rozšiřování stejnoměrně spojitých funkcí, můžeme tuto metodu porovnat s metodou z McShanova článku [1] rozebíranou výše. Přestože funkce f je ve Whitneyho metodě omezená, protože je definována na kompaktní množině, její rozšíření nemusí, na rozdíl od McSahnovy metody, být obecně stejnoměrně spojité.

Příklad. Protipříkladem ke stejnoměrné spojitosti rozšíření je například funkce f definována na $A = \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ se standardní metrikou jako $f(x) = -1$ a funkce h definována pro $t \in [0, \infty)$ jako $h(t) = e^t - 1$. Pro $x, y \in A$ platí $|f(x) - f(y)| = 0 \leq h(|x - y|) = h(0) = 0$, pro funkci F máme $F(x) = \max_{y \in A}(f(y) - h(|x - y|)) = \max_{y \in A}(-e^{|x-y|}) = -e^{|x|})$, což ale není stejnoměrně spojitá funkce, přestože funkce f je stejnoměrně spojitá a omezená. Je však důležité poznamenat, že zvolíme-li funkci h vhodněji, například jako konstantní nulovou funkci, pak bude F stejnoměrně spojitá.

4. Charakterizace stejnoměrně spojitě rozšiřitelných funkcí

Velmi důležitou a přirozenou otázkou je, které stejnoměrně spojité funkce lze stejnoměrně spojitě rozšířit. Ve druhé kapitole jsme viděli, že dostatečnou podmínkou pro stejnoměrně spojité rozšíření je omezenost původní funkce. Tato podmínka však není nutná, viděli jsme, že pomocí modulů spojitosti lze rozšířit i některé neomezené stejnoměrně spojité funkce. Poněkud slabší postačující podmínkou pro existenci stejnoměrně spojitého rozšíření, jak jsme viděli ve druhé kapitole, je existence konkávního modulu spojitosti. Je však velmi komplikované ověřit, které funkce mají konkávní modul spojitosti.

Nejprve uvedeme definici speciální třídy zobrazení na metrických prostorech, které poté použijeme k charakterizaci stejnoměrně spojitých funkcí, které mají konkávní modul spojitosti.

Definice 3. *Nechť (X, d) a (Y, e) jsou metrické prostory a $f : X \to Y$. Řekneme, že funkce f je lipschitzovská pro velké vzdálenosti, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $C_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tak, že*

$$\sup\left(\frac{e(f(x), f(y))}{d(x, y)};\ x, y \in X\, d(x, y) \geq \varepsilon\right) \leq C_\varepsilon.$$

Těmito a podobnými třídami funkcí se ve svém článku zabývají Garrido a Jaramillo [3].

Následující věta charakterizuje stejnoměrně spojité funkce, které mají konkávní modul spojitosti.

Věta 10. *Nechť (X, d) je metrický prostor. Stejnoměrně spojitá funkce $f : X \to \mathbb{R}$ má konkávní modul spojitosti ω, který je spojitý v 0 zprava a splňuje $\omega(0) = 0$, právě když je f lipschitzovská pro velké vzdálenosti.*

Důkaz. Dokážeme dvě implikace.

„$\Longrightarrow$“: Nechť f má konkávní modul spojitosti ω, který je spojitý v 0 zprava, a navíc $\omega(0) = 0$. Zvolme $\eta > 0$. K němu, ze spojitosti ω v 0 zprava, nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro $r \in [0, \delta)$ platí $\omega(r) < \eta$.

Pro $t \in [\delta, \infty)$ pak z konkávnosti máme

$$\frac{\omega(t)}{t} = \frac{\frac{\delta}{t} \cdot \omega(t)}{\frac{\delta}{t} \cdot t} = \frac{\frac{\delta}{t} \cdot \omega(t) + (1 - \frac{\delta}{t}) \cdot \omega(0)}{\frac{\delta}{t} \cdot t + (1 - \frac{\delta}{t}) \cdot 0} \leq \frac{\omega(\delta)}{\delta}.$$

Z toho tedy dostáváme, že $\omega(t) \leq t/\delta \cdot \omega(\delta)$ pro $t \in [\delta, \infty)$. A tedy pro $t \in [0, \infty)$ máme $\omega(t) < \eta + t/\delta \cdot \omega(\delta)$.

Nyní zvolme $\varepsilon > 0$. Pro každé $x, y \in X$ máme

$$|f(x) - f(y)| < \eta + \frac{d(x, y)}{\delta} \cdot \omega(\delta).$$

A tedy pro každé $x, y \in X$ splňující $d(x, y) \geq \varepsilon$ dostáváme

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} < \frac{\eta}{\varepsilon} + \frac{\omega(\delta)}{\delta}.$$

„$\Longleftarrow$“: Zvolme $\varepsilon > 0$. Ze stejnoměrné spojitosti f nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $x, y \in X$ splňující $d(x, y) < \delta$ platí $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. K tomuto δ navíc nalezneme $C_\delta \in \mathbb{R}$ splňující podmínku lipschitzovskosti pro velké vzdálenosti pro δ. Pak máme

$$\sup(|f(x) - f(y)|, x, y \in X) \leq C_\delta \cdot d(x, y) + \varepsilon.$$

Z toho dostáváme, že nejmenší modul spojitosti je omezený nějakou lineární funkcí, a ze stejnoměrné spojitosti f je navíc spojitý v 0 zprava. Z lemmatu 2 tedy dostáváme existenci konkávního modulu spojitosti, který splňuje požadované podmínky.

$\square$

Ani podmínka existence konkávního modulu spojitosti není v obecném metrickém prostoru nutná. Existují prostory a na nich definované stejnoměrně spojité funkce, které nemají konkávní modul spojitosti, a přesto je lze stejnoměrně spojitě rozšířit.

Příklad. Příkladem takové funkce a prostoru je $\mathbb{R}$ uvažovaný s diskrétní metrikou, $A = (0, \infty)$ a funkce $f(x) = 1/x$ pro $x \in (0, \infty)$. Funkci můžeme rozšířit libovolně, protože každá funkce definovaná na diskrétním metrickém prostoru je stejnoměrně spojitá. Nejmenší modul spojitosti ale nabývá nekonečna pro konečné hodnoty, a tedy nelze shora omezit konkávní funkcí.

Příznivější je situace pro normované lineární prostory, jak ve svém článku zmiňuje bez důkazu McShane [1]. Nejprve uvedeme důležité známé vlastnosti indukované metriky na normovaném lineárním prostoru, které budeme v důkazu používat.

Poznámka. Je-li X normovaný lineární prostor nad $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) a d indukovaná metrika, pak platí následující:

- pro každé $x, y, z \in X$ je $d(x, y) = d(x + z, y + z)$,
- pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) a $x, y \in X$ je $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, d(x, y)$.

Věta 11. *Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) a d indukovaná metrika. Nechť $A \subset X$ a $f : X \to \mathbb{R}$ je stejnoměrně spojitá. Pak f lze stejnoměrně spojitě rozšířit, právě když existuje modul spojitosti ω funkce f, který je konkávní, $\omega(0) = 0$ a spojitý v 0 zprava.*

Důkaz. Implikace „$\Longleftarrow$“ plyne podle věty 4. Dokážeme opačnou implikaci.

„$\Longrightarrow$“: Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že A je neprázdná. Nechť $F : X \to \mathbb{R}$ je stejnoměrně spojitá funkce rozšiřující f. Ukážeme, že F má konkávní modul spojitosti, který je nulový v 0 a spojitý v 0 zprava, z toho dostaneme, že i pro funkci f existuje modul spojitosti se stejnými vlastnosti.

Pro funkci F ověříme lipschitzovskost pro velké vzdálenosti, podle věty 10 pak F má modul spojitosti splňující požadované vlastnosti. Ze stejnoměrné spojitosti nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro $x, y \in X$ splňující $d(x, y) < \delta$ platí $|F(x) - F(y)| < 1$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a libovolné $x, y \in X$ splňující $d(x, y) \geq \varepsilon$. Pokud $d(x, y) < \delta$, pak máme

$$\frac{|F(x) - F(y)|}{d(x, y)} < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dále tedy předpokládejme, že $d(x, y) \geq \delta$. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ splňující

$$\frac{1}{n+1} d(x, y) < \delta \leq \frac{1}{n} d(x, y).$$

Pak platí $n \leq 1/\delta \cdot d(x, y)$ a navíc pro každé $k \in \{1, \ldots, n+1\}$ máme

$$d\left(x + \frac{k-1}{n+1}(y-x), x + \frac{k}{n+1}(y-x)\right) = d\left(\frac{-1}{n+1}(y-x), 0\right) < \delta.$$

Z toho a protože navíc $d(x, y) \geq \varepsilon$, dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{|F(x) - F(y)|}{d(x,y)} &= \frac{\left|\sum_{k=1}^{n+1} F\left(x + \frac{k-1}{n+1}(y-x)\right) - F\left(x + \frac{k}{n+1}(y-x)\right)\right|}{d(x,y)} \\ &\leq \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \left|F\left(x + \frac{k-1}{n+1}(y-x)\right) - F\left(x + \frac{k}{n+1}(y-x)\right)\right|}{d(x,y)} \\ &< \frac{1 \cdot (n+1)}{d(x,y)} \leq \frac{n}{d(x,y)} + \frac{1}{d(x,y)} \leq \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Protože x, y bylo voleno libovolně, dostáváme

$$\sup\left(\frac{|F(x) - F(y)|}{d(x,y)};\ x, y \in X\ d(x,y) \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\varepsilon}.$$

Funkce F má tedy modul spojitosti, který má požadované vlastnosti.

□

Větu 10 a větu 11 ve svém článku uvádějí i Levy a Rice [4, Theorem 2.6].

Poznámka. Z důkazu můžeme vidět, že je postačující, aby X byla konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru, a navíc, že každá stejnoměrně spojitá funkce na této množině má konkávní modul spojitosti. Z toho pak dostáváme zajímavý důsledek. Tento důsledek můžeme nalézt také v článku od autorů Klopfsteina a Telsteho [5].

Důsledek. Nechť $A \subset X$ je konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru nad $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Pak každou stejnoměrně spojitou funkci $f : A \to \mathbb{R}$ lze stejnoměrně spojitě rozšířit na X.

Větu 11 lze zobecnit na speciální třídu metrických prostorů.

Definice 4. *Řekneme, že metrický prostor (X, d) je řetězitelný, pokud pro každé dva body $x, y \in X$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$ a konečná posloupnost $(x_i)_{i=1}^n$ splňující,*

- $x_1 = x, x_n = y$,
- $d(x_i, x_{i+1}) \leq \varepsilon$ *pro každé* $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Poznámka. Konečné posloupnosti z definice se v literatuře často označují jako ε-řetízky.

Řetězitelné metrické prostory můžeme charakterizovat pomocí stejnoměrně spojitých zobrazení do prostorů s diskrétní metrikou.

Tvrzení 12. *Nechť (X, d) je metrický prostor, pak X je řetězitelný, právě když každá stejnoměrně spojitá funkce $f : X \to \{0, 1\}$ je konstantní, kde $\{0, 1\}$ uvažujeme s diskrétní metrikou.*

Důkaz. Dokážeme dvě implikace.

„$\Longrightarrow$“: Nechť (X,d) je řetězitelný a nechť $f : X \to \{0,1\}$ je stejnoměrně spojitá. Předpokládejme, že existuje $a \in X$ splňující $f(a) = 0$, pokud ne, pak je f konstantní. Ze stejnoměrné spojitosti f nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro $x, y \in X$ splňující $d(x,y) \leq \delta$ platí $|f(x) - f(y)| < 1/2$.

Zvolme libovolné $x \in X$. Protože X je řetězitelný ,nalezneme $n \in \mathbb{N}$ a konečnou posloupnost $(x_i)_{i=1}^n$, která splňuje $x_1 = a, x_n = x$ a $d(x_i, x_{i+1}) \leq \delta$ pro každé $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Označme $m = \max(k, f(x_k) = 0)$. Pro spor předpokládejme, že $m < n$. Máme $d(x_m, x_{m+1}) \leq \delta$, a tedy dostáváme $0 = f(x_m) = f(x_{m+1})$, což je spor s volbou m. Tedy máme $m = n$ a $f(x) = 0$. Protože $x \in X$ bylo voleno libovolně, dostáváme, že f je konstantní.

„$\Longleftarrow$“: Předpokládejme, že každá stejnoměrně spojitá funkce $f : X \to \{0,1\}$ je konstantní. Zvolme libovolné $a \in X$ a pro každé $\delta > 0$ definujme funkci f_δ předpisem

$$f_\delta(x) = \begin{cases} 1, & \begin{array}{l}\text{existuje } n \in N \text{ a konečná posloupnost } (x_i)_{i=1}^n \text{ splňující} \\ x_1 = a,\ x_n = x,\ d(x_i, x_{i+1}) \leq \delta,\ i \in \{1, \ldots, n-1\},\end{array} \\ 0, & \begin{array}{l}\text{pro žádné } n \in N \text{neexistuje konečná posloupnost } (x_i)_{i=1}^n \\ \text{splňující } \ x_1 = a,\ x_n = x,\ d(x_i, x_{i+1}) \leq \delta,\ i \in \{1, \ldots, n-1\},\end{array} \end{cases}$$

pro $x \in X$. Ukážeme, že f_δ je stejnoměrně spojitá pro každé $\delta > 0$.

Zvolme tedy $\delta > 0$ a $\varepsilon > 0$. Pro libovolné $x, y \in X$ splňující $d(x,y) < \delta$ máme, že existuje $n \in \mathbb{N}$ a konečná posloupnost $(x_i)_{i=1}^n$ splňující $x_1 = a, x_n = x$ a $d(x_i, x_{i+1}) \leq \delta$ pro každé $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, právě když existuje $k \in \mathbb{N}$ a konečná posloupnost $(x_i)_{i=1}^k$ splňující $x_1 = a, x_k = y$ a $d(x_i, x_{i+1}) \leq \delta$ pro každé $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Z toho máme, že pro $x, y \in X$ splňující $d(x,y) < \delta$ je $f_\delta(x) = f_\delta(y)$ a tedy $|f(x) - f(y)| = 0 < \varepsilon$. Z toho dostáváme, že f_δ je stejnoměrně spojitá pro každé $\delta > 0$. Máme, že $f_\delta(a) = 1$, a tedy $f(x) = 1$ pro každé $x \in X$, protože podle předpokladu je f_δ konstantní. Z toho plyne, že prostor X je řetězitelný.

□

Tuto charakterizaci můžeme použít k tomu, abychom ukázali, že každý souvislý metrický prostor je řetězitelný.

Tvrzení 13. *Každý souvislý metrický prostor je řetězitelný.*

Důkaz. Nechť (X,d) je souvislý metrický prostor. Pro spor předpokládejme, že není řetězitelný. Pak podle tvrzení 12 existuje stejnoměrně spojitá funkce $f : X \to \{0,1\}$, která není konstantní. Pak ale máme, že $f^{-1}(\{0\})$ i $f^{-1}(\{1\})$ jsou obojetné a neprázdné množiny, což je spor se souvislostí prostoru X. Dostáváme tedy, že každý souvislý prostor je řetězitelný.

□

Poznámka. Opačná implikace v předchozí větě obecně neplatí. Platí ale, pokud budeme dále předpokládat, že X je kompaktní.

Na prostorech, které jsou řetězitelné, můžeme definovat speciální metriku. Definici uvedeme i pro obecné metrické prostory. V následující větě ukážeme, že se jedná o metriku na prostorech, které jsou řetězitelné. Definici této metriky můžeme nalézt ve Wilsnově článku [6].

Definice 5. *Nechť (X,d) je metrický prostor. Pak pro každé $\delta > 0$ a pro $x, y \in X$ definujme*

$$L_\delta(x,y) = \inf\Big(\sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_i+1);\, (x_i)_{i=1}^n \text{ je konečná posloupnost splňující}$$
$$x_1 = x, x_n = y,\ d(x_i, x_{i+1}) \le \delta,\ i \in \{1, \dots, n-1\}\Big).$$

Tvrzení 14. *Nechť (X,d) je řetězitelný metrický prostor. Pak pro každé $\delta > 0$ je L_δ metrika.*

Důkaz. Zvolme $\delta > 0$. Pro každé $x, y \in X$ je $L_\delta(x,y) < \infty$, protože (X,d) je řetězitelný metrický prostor. Nyní ověříme tři vlastnosti metriky.

1. $L_\delta(x,y) = 0 \iff x = y$: Máme-li $x = y$, pak posloupnost $x_1 = x, x_2 = x$ splňuje $d(x_1, x_2) = 0$. A tedy $L_\delta(x,x) = 0$.

   Nechť $L_\delta(x,y) = 0$. Z trojúhelníkové nerovnosti pro metriku d dostáváme $d(x,y) \le L_\delta(x,y)$. Z toho tedy máme $d(x,y) = 0$ a, protože d je metrika, dostáváme $x = y$.

2. Symetrie: Nechť $x, y \in X$. Máme-li pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ konečnou posloupnost $(x_i)_{i=1}^n$ splňující $x_1 = x, x_n = y$ a $d(x_i, x_{i+1}) \le \delta$ pro každé $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Pak posloupnost $(y_i)_{i=1}^n$ kde $y_i = x_{n-i+1}$ pro $i \in \{1, \dots, n\}$ splňuje, $y_1 = y, y_n = x$ a $d(y_i, y_{i+1}) \le \delta$ pro každé $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Stejnou konstrukci můžeme provést i pro posloupnost s počátečním bodem y a koncovým bodem x. Z toho dostáváme, že $L_\delta(x,y)$ i $L_\delta(y,x)$ jsou definovány jako infima přes stejnou množinu, a tedy platí $L_\delta(x,y) = L_\delta(y,x)$.

3. Trojúhelníková nerovnost: Nechť $x, y, z \in X$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Z definice infima nalezneme konečné posloupnosti $(y_i)_{i=1}^n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ a $(z_i)_{i=1}^k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ splňující, $y_1 = y, y_n = z$, $d(y_i, y_{i+1}) \le \delta$ pro každé $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $z_1 = z, z_k = x$, $d(z_j, z_{j+1}) \le \delta$ pro každé $j \in \{1, \dots k-1\}$, které navíc splňují $L_\delta(y,z) + \varepsilon/2 \ge \sum_{i=1}^{n-1} d(y_i, y_{i+1})$ a $L_\delta(z,x) + \varepsilon/2 \ge \sum_{j=1}^{k-1} d(z_j, z_{j+1})$. Nyní definujme $x_i = y_i$ pro $i \in \{1, \dots n\}$ a $x_{n+i} = z_i$ pro $i \in \{1, \dots, k\}$. Pro konečnou posloupnost $(x_i)_{i=1}^{n+k}$ máme, $x_1 = y, x_{n+k} = x$ a $d(x_i, x_{i+1}) \le \delta$ pro každé $i \in \{1, \dots, n+k-1\}$. Z toho dostáváme,

$$\begin{aligned} L_\delta(y,x) &\le \sum_{i=1}^{n+k-1} d(x_i, x_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n-1} d(y_i, y_{i+1}) + d(x_n, x_{n+1}) + \sum_{j=1}^{k-1} d(z_j, z_{j+1}) \\ &\le L_\delta(y,z) + \frac{\varepsilon}{2} + d(z,z) + L_\delta(z,x) + \frac{\varepsilon}{2} \le L_\delta(y,z) + L_\delta(z,x) + \varepsilon. \end{aligned}$$

   Protože ε bylo voleno libovolně, dostáváme $L_\delta(y,x) \le L_\delta(y,z) + L_\delta(z,y)$

Dohromady tedy dostáváme, že L_δ je metrika pro každé $\delta > 0$.

□

Poznámka. Na obecném metrickém prostoru splňují zobrazení L_δ všechny tři podmínky metriky. Můžou ale nabývat nekonečných hodnot a o metriky se obecně nejedná. Můžeme je ale uvažovat jako zobecněné metriky, které můžou nabývat nekonečných hodnot.

Následující věta popisuje vlastnosti metrik L_δ pro $\delta > 0$ na řetězitelném metrickém prostoru. Později využijeme především třetí vlastnost.

Věta 15. *Nechť (X,d) je řetězitelný metrický prostor, (Y,e) je metrický prostor a $\nu > 0$. Pak platí následující:*

1. *$d(x,y) \leq L_\nu(x,y)$ pro každé $x,y \in X$,*
2. *jsou-li $x,y \in X$ takové, že platí $d(x,y) \leq \nu$, pak $d(x,y) = L_\nu(x,y)$,*
3. *je-li $f : X \to Y$, pak f je stejnoměrně spojitá vzhledem k metrice d, právě když je stejnoměrně spojitá vzhledem k metrice L_ν.*

Důkaz.

1. Plyne z trojúhelníkové nerovnosti pro metriku d.
2. Nechť $x,y \in X$ splňují $d(x,y) \leq \nu$. Podle předchozího máme $d(x,y) \leq L_\nu(x,y)$. Navíc pro posloupnost $x_1 = x, x_2 = y$ máme $d(x,y) = d(x_1,x_2) \leq \nu$. Z toho tedy plyne $L_\nu(x,y) = d(x,y)$.
3. Nechť $f : X \to \mathbb{R}$. Dokážeme dvě implikace.

   „$\Longrightarrow$“: Nechť f je stejnoměrně spojitá vzhledem k metrice d. Zvolme $\varepsilon > 0$, k němu, ze stejnoměrné spojitosti, nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $x,y \in X$ splňující $d(x,y) < \delta$, platí $e(f(x),f(y)) < \varepsilon$. Pro každé $x,y \in X$ splňující $L_\nu(x,y) < \delta$, pak, podle první vlastnosti, máme $d(x,y) \leq L_\nu(x,y) < \delta$, a tedy $e(f(x),f(y)) < \varepsilon$. Funkce f je tedy stejnoměrně spojitá vzhledem k metrice L_ν.

   „$\Longleftarrow$“: Nechť f je stejnoměrně spojitá vzhledem k L_ν. Zvolme $\varepsilon > 0$ k němu, ze stejnoměrné spojitosti, nalezneme $\eta > 0$ takové, že pro každé $x,y \in X$ splňující $L_\nu(x,y) < \eta$ platí $e(f(x),f(y)) < \varepsilon$. Položme $\delta = \min\{\nu,\eta\}$. Pro každé $x,y \in X$ splňující $d(x,y) < \delta \leq \nu$ máme podle předchozího $L_\nu(x,y) = d(x,y) < \delta \leq \eta$, a tedy $e(f(x),f(y)) < \varepsilon$. Funkce f je tedy stejnoměrně spojitá vzhledem k metrice d.

□

Poznámka. Na obecném metrickém prostoru splňují zobrazení L_δ podmínky 1 a 2. Pokud budeme L_δ chápat jako zobecněné metriky, pak splňují i podmínku 3.

Následující věta dává úplnou charakterizaci stejnoměrně spojitých funkcích na řetězitelných metrických prostorech, které lze stejnoměrně spojitě rozšířit.

Věta 16. *Nechť (X,d) je řetězitelný metrický prostor, $A \subset X$ a $f : A \to \mathbb{R}$ je stejnoměrně spojitá. Pak f lze stejnoměrně spojitě rozšířit, právě když existuje $\delta > 0$ takové, že f je lipschitzovská pro velké vzdálenosti vzhledem k metrice L_δ.*

Důkaz. „$\Longleftarrow$“: Pokud existuje $\delta > 0$ takové, že f je lipschitzovská pro velké vzdálenosti vzhledem k metrice L_δ, pak podle věty 10 existuje konkávní modul spojitosti ω funkce f vzhledem k metrice L_δ, který splňuje $\omega(0) = 0$ a je spojitý v 0 zprava. Podle věty 4 pak existuje funkce F, která rozšiřuje f a je stejnoměrně spojitá vzhledem k metrice L_δ. Podle věty 15 je pak F stejnoměrně spojitá vzhledem k metrice d.

„$\Longrightarrow$“: Nechť existuje funkce F stejnoměrně spojitá vzhledem k metrice d, která rozšiřuje funkci f. Ze stejnoměrné spojitosti nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $x, y \in X$ splňující $d(x,y) \le \delta$ platí $|F(x) - F(y)| < 1$. Ukážeme, že F je lipschitzovská pro velké vzdálenosti vzhledem k metrice L_δ. Z toho pak plyne, že i funkce f je lipschitzovská pro velké vzdálenosti vzhledem k metrice L_δ.

Zvolme $\varepsilon > 0$ a $x, y \in X$ splňující $L_\delta(x,y) \ge \varepsilon$ libovolné. Je-li $L_\delta(x,y) \le \delta$, pak máme podle věty 15 $d(x,y) \le L_\delta(x,y) \le \delta$, a tedy dostáváme

$$\frac{|F(x) - F(y)|}{L_\delta(x,y)} \le \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dále tedy předpokládejme, že $L_\delta(x,y) > \delta$.

Z definice infima nalezneme konečnou posloupnost $(x_i)_{i=1}^n$ minimální délky splňující, $x_1 = x, x_n = y$, $d(x_i, x_{i+1}) < \delta$ pro každé $i \in \{1, \dots, n-1\}$ a $L_\delta(x,y) + \delta/4 \ge \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$. Protože $L_\delta(x,y) > \delta$ máme $n \ge 3$. Protože posloupnost $(x_i)_{i=1}^n$ má nejmenší délku, neexistuje $i \in \{1, \dots n-2\}$ takové, že $d(x_i, x_{i+2}) \le \delta$. Pokud by takové i existovalo pak vynecháním prvku x_{i+1} z posloupnosti $(x_i)_{i=1}^n$, vznikne kratší posloupnost $(y)_{i=1}^{n-1}$, která splňuje, $y_1 = x, y_{n-1} = y$, $d(y_i, y_{i+1}) \le \delta$ pro každé $i \in \{1, \dots, n-2\}$ a $L_\delta(x,y) + \delta/4 \ge \sum_{i=1}^{n-2} d(y_i, y_{i+1})$, což je ve sporu s volbou posloupnosti $(x_i)_{i=1}^n$.

Máme tedy $d(x_i, x_{i+2}) > \delta$ pro každé $i \in \{1, \dots, n-2\}$, z toho a z trojúhelníkové nerovnosti tedy máme $\sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) > \lfloor (n-1)/2 \rfloor \cdot \delta$. Z toho, a protože $n \ge 3$, dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{|F(x) - F(y)|}{L_\delta(x,y)} &\le \frac{\left|\sum_{i=1}^{n-1} F(x_i) - F(x_{i+1})\right|}{\sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) - \frac{\delta}{4}} \\
&\le \frac{\sum_{i=1}^{n-1} |F(x_i) - F(x_{i+1})|}{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \cdot \delta - \frac{\delta}{4}} \\
&\le \frac{\sum_{i=1}^{n-1} |F(x_i) - F(x_{i+1})|}{\frac{n-2}{2} \cdot \delta - \frac{\delta}{4}} \\
&\le \frac{n-1}{2n-5} \cdot \frac{1}{\frac{\delta}{4}} \le 2 \cdot \frac{4}{\delta}.
\end{aligned}$$

Dohromady tedy máme

$$\sup\left(\frac{|F(x) - F(y)|}{L_\delta(x,y)};\ x, y \in X\ L_\delta(x,y) \ge \varepsilon\right) \le 2 \cdot \frac{4}{\delta} + \frac{1}{\varepsilon},$$

a funkce F je tedy lipschitzovská pro velké vzdálenosti vzhledem k metrice L_δ. □

Zobrazení L_δ a konkávní funkce podobné modulům spojitosti hrají zásadní roli pro charakterizaci stejnoměrně spojitě rozšiřitelných funkcí i na obecném metrickém prostoru. Charakterizacemi stejnoměrně spojitě rozšiřitelných funkcí pro uniformní prostory se ve svém článku zabývají Preiss a Vilímovský [7]. Ve svém článku k důkazu využívají „in-between theorem“, náš důkaz je přímý ale týká se jen metrických prostorů. Následující dvě věty udávají různé úplné charakterizace stejnoměrně spojitě rozšiřitelných funkcí na obecném metrickém prostoru. Nejprve však dokážeme lemma, díky kterému můžeme omezit délku konečných posloupností odhadujících L_δ vzdálenost pro body jejichž L_δ vzdálenost je omezená násobkem δ.

Lemma 17. *Nechť (X, d) je metrický prostor, $\delta > 0$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak pro každé $x, y \in X$ splňující $L_\delta(x, y) < n \cdot \delta$ existuje konečná posloupnost $(x_i)_{i=1}^k$ délky nejvýše $2n$ splňující $x_1 = x, x_k = y$, $d(x_i, x_{i+1}) \leq \delta$ pro každé $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ a $\sum_{i=1}^{k-1} d(x_i, x_{i+1}) < n \cdot \delta$.*

Důkaz. Zvolme $x, y \in X$ splňující $L_\delta(x, y) < n \cdot \delta$. Z definice L_δ a infima nalezneme konečnou posloupnost $(x_i)_{i=1}^k$ minimální délky splňující $x_1 = x, x_k = y$, $d(x_i, x_{i+1}) \leq \delta$ pro každé $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ a navíc $\sum_{i=1}^{k-1} d(x_i, x_{i+1}) < n \cdot \delta$. Protože posloupnost má minimální délku, máme $d(x_i, x_{i+2}) > \delta$ pro každé $i \in \{1, \ldots, k-2\}$.

Z toho a trojúhelníkové nerovnosti dostáváme

$$n \cdot \delta > \sum_{i=1}^{k-1} d(x_i, x_{i+1}) \geq \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor \cdot \delta.$$

Z toho dostáváme, že $k \leq 2n$.

□

Definice 6. *Nechť (X, d) je metrický prostor, $A \subset X$ neprázdná, $x \in X$ a $\delta > 0$. Definujme*

$$L_\delta(x, A) = \inf(L_\delta(x, a),\ a \in A).$$

Jedná se o velmi podobnou definici jako vzdálenosti bodu od množiny, s tím rozdílem, že námi definované zobrazení může nabývat nekonečných hodnot.

Věta 18. *Nechť (X, d) je metrický prostor, $A \subset X$ a $f : A \to \mathbb{R}$ stejnoměrně spojitá. Pak f lze stejnoměrně spojitě rozšířit, právě když existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $(x, y \in A, L_\delta(x, y) < n \cdot \delta \implies |f(x) - f(y)| < 2n - 1)$.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že A je neprázdná. Dokážeme dvě implikace.

„$\Longrightarrow$“: Nechť existuje stejnoměrně spojitá funkce F, která rozšiřuje f. Ukážeme, že podmínka z věty platí pro funkci F na celé množině X, z toho pak plyne, že platí i pro funkci f na množině A.

Ze stejnoměrné spojitosti F nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $x, y \in X$ splňující $d(x, y) \leq \delta$ platí $|F(x) - F(y)| < 1$. Pro $x, y \in X$ splňující $L_\delta(x, y) < n \cdot \delta$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ pak z lemmatu 17 nalezneme konečnou posloupnost $(x_i)_{i=1}^{2n}$ splňující $x_1 = x, x_n = y$, $d(x_i, x_{i+1}) \leq \delta$ pro každé $i \in \{1, \ldots 2n-1\}$ a navíc $\sum_{i=1}^{2n-1} d(x_i, x_{i+1}) < n \cdot \delta$. Pak dostáváme

$$|F(x) - F(y)| = \left| \sum_{i=1}^{2n-1} F(x_i) - F(x_{i+1}) \right| \leq \sum_{i=1}^{2n-1} |F(x_i) - F(x_{i+1})| < 2n - 1.$$

„$\Longleftarrow$“: Nalezneme δ splňující podmínku ze znění věty. Definujme

$$h_0(t) = \sup(|f(x) - f(y)|\,,\ x, y \in A, L_\delta(x, y) \le t),$$

pro $t \ge 0$. Funkce h_0 splňuje $h_0(0) = 0$ z vlastností zobrazení L_δ. Ukážeme, že je navíc spojitá v 0 zprava a lze ji omezit lineární funkcí.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Ze stejnoměrné spojitosti funkce f k němu nalezneme $\nu > 0$ takové, že pro $x, y \in A$ splňující $d(x, y) < \nu$ platí $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Pro $x, y \in A$ splňující $L_\delta(x, y) < \nu$ pak máme z věty 15 a poznámky za větou, že i $d(x, y) < \nu$, a tedy $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Z toho tedy dostáváme, že $h_0(t) \le \varepsilon$ pro $t \in [0, \nu)$ a funkce h_0 je spojitá v 0 zprava.

Pro $x, y \in A$ splňující $L_\delta(x, y) < n \cdot \delta$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ máme $|f(x) - f(y)| < 2n - 1$. Z toho, a navíc protože $t < \lfloor t \rfloor + 1$ pro každé $t \in \mathbb{R}$, dostáváme, že

$$h_0(t) \le 2\left(\left\lfloor \frac{t}{\delta} \right\rfloor + 1\right) - 1 \le \frac{2t}{\delta} + 1.$$

Funkce h_0 je tedy omezená lineární funkcí.

Podle lemmatu 2 můžeme nalézt funkci h, která je konkávní, $h(0) = 0$, je spojitá v 0 zprava a $h \ge h_0$. Pro libovolné $a, b \in A$ splňující $L_\delta(a, b) < \infty$ tedy máme $|f(a) - f(b)| \le h(L_\delta(a, b))$. Z lemmatu 3 máme, že funkce h je neklesající a subaditivní.

Nyní definujme

$$F(x) = \begin{cases} \sup(f(a) - h(L_\delta(a, x)), a \in A, L_\delta(a, x) < \infty), & L_\delta(x, A) < \infty, \\ 0, & L_\delta(x, A) = \infty. \end{cases}$$

Pokud $L_\delta(x, A) < \infty$, pak existuje $a \in A$ splňující $L_\delta(a, x) < \infty$, a tedy supremum v prvním případě je přes neprázdnou množinu.

Ukážeme, že F je stejnoměrně spojitá a rozšiřuje funkci f. Nejprve ukážeme, že F rozšiřuje f. Pro $a \in A$ a libovolné $b \in A$ splňující $L_\delta(a, b) < \infty$ máme

$$f(b) - h(L_\delta(a, b)) \le f(a),$$

navíc pro $b = a$ nastává rovnost. Z toho dostáváme, že $F(a) = f(a)$.

Nyní ukážeme, že $-\infty < F(x) < \infty$ pro $x \in X$. Zvolme tedy libovolné $x \in X$. Pokud $L_\delta(A, x) = \infty$, pak máme $F(x) = 0$, a tedy $-\infty < F(x) < \infty$. Pokud $L_\delta(x, A) < \infty$, pak existuje $a \in A$ splňující $L_\delta(a, x) < \infty$, pro toto a máme $-\infty < F(a) < \infty$, protože $f(a) = F(a)$. Navíc pro libovolné $b \in A$ máme $L_\delta(x, b) < \infty$, právě když $L_\delta(a, b) < \infty$, z vlastností L_δ a toho, že $L_\delta(x, a) < \infty$. Z toho a vlastností h dostáváme

$$\begin{aligned} |F(x) - F(a)| &\le \sup(|h(L_\delta(a, b)) - h(L_\delta(x, b))|\,, b \in A, L_\delta(b, a) < \infty) \\ &\le h(L_\delta(x, a)) < \infty. \end{aligned}$$

Z toho máme, že

$$|F(x)| < h(L_\delta(x, a)) + |F(a)| < \infty.$$

A tedy $-\infty < F(x) < \infty$ pro každé $x \in X$.

Zbývá ukázat, že F je stejnoměrně spojitá. Zvolme $\varepsilon > 0$. Ze spojitosti h v 0 zprava nalezneme $\nu \in (0, \delta]$ takové, že $h(t) < \varepsilon$ pro $t \in [0, \nu)$. Zvolme libovolné $x, y \in X$ splňující $d(x, y) < \nu$, pak máme $L_\delta(x, y) < \infty$ z toho, že $\nu \le \delta$ a vlastností L_δ. Rozlišíme dva případy.

1. $L_\delta(x, A) = \infty$: Z toho máme, že i $L_\delta(y, A) = \infty$, protože $d(x, y) < \nu \leq \delta$. Tedy máme $F(x) = F(y) = 0$ a $|F(x) - F(y)| = 0 < \varepsilon$

2. $L_\delta(x, A) < \infty$: Z toho dostáváme, že i $L_\delta(y, A) < \infty$, protože $d(x, y) < \nu \leq \delta$. Pro $b \in A$ navíc máme $L_\delta(x, b) < \infty$, právě když $L_\delta(y, b) < \infty$ z vlastností L_δ a toho, že $L_\delta(y, x) < \infty$. Z toho a vlastností funkce h tedy dostáváme,

$$\begin{aligned}|F(x) - F(y)| &\leq \sup(|h(L_\delta(b, y)) - h(L_\delta(b, x))|, b \in A, L_\delta(b, x) < \infty) \\ &\leq h_\delta(L_\delta(x, y)) < \varepsilon\end{aligned}$$

Dohromady pro $x, y \in X$ splňující $d(x, y) < \nu$ máme $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$. Funkce F je tedy stejnoměrně spojité rozšíření funkce f.

□

Poznámka. Ve znění věty můžeme ekvivalentně nahradit $2n - 1$ libovolným kladným násobkem $2n - 1$.

Tuto větu můžeme přeformulovat obdobně jako pro řetězitelné prostory a normované lineární prostory. Dokážeme pouze implikaci „$\Longrightarrow$“, druhá implikace se dokáže obdobně jako v předchozí větě.

Věta 19. *Nechť (X, d) je metrický prostor, $A \subset X$ a $f : A \to \mathbb{R}$ stejnoměrně spojitá. Pak f lze stejnoměrně spojitě rozšířit, právě když existuje $\delta > 0$ takové, že platí*

$$|f(x) - f(y)| < \frac{L_\delta(x, y) \cdot 2}{\delta} + 1,$$

pro každé $x, y \in A$

Důkaz. „$\Longrightarrow$“: Nechť existuje stejnoměrně spojitá funkce F, která rozšiřuje f. Ukážeme, že podmínka platí pro funkci F na celém X. Ze stejnoměrné spojitosti F nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro $x, y \in X$ splňující $d(x, y) < \delta$ platí $|F(x) - F(y)| < 1$. Nyní zvolme $x, y \in X$ libovolné. Rozlišíme 3 případy.

1. $L_\delta(x, y) = \infty$: Nerovnost

$$|F(x) - F(y)| < \frac{L_\delta(x, y) \cdot 2}{\delta} + 1,$$

pak platí triviálně.

2. $L_\delta(x, y) < \delta$: Z věty 15 a poznámky za větou pak máme i $d(x, y) < \delta$. Z toho máme

$$|F(x) - F(y)| < 1 \leq \frac{L_\delta(x, y) \cdot 2}{\delta} + 1.$$

3. $\infty > L_\delta(x, y) \geq \delta$: Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ splňující $n \cdot \delta > L_\delta(x, y) \geq (n - 1) \cdot \delta$. Z lemmatu 17 nalezneme konečnou posloupnost $(x_i)_{i=1}^{2n}$ takovou, že $x_1 = x, x_{2n} = y$, $d(x_i, x_{i+1}) \leq \delta$ pro každé $i \in \{1, \ldots, 2n - 1\}$ a navíc $\sum_{i=1}^{2n-1} d(x_i, x_{i+1}) < n \cdot \delta$. Z toho pak máme

$$|F(x) - F(y)| \leq \sum_{i=1}^{2n-1} |F(x_i) - F(x_{i+1})| < 2n - 1 \leq \frac{L_\delta(x, y) \cdot 2}{\delta} + 1.$$

□

Můžeme vidět, že přestože na obecném metrickém prostoru nemusejí být zobrazení L_δ metriky, mají ke stejnoměrně spojitým funkcím velmi podobný vztah jako na řetězitelných metrických prostorech.

Seznam použité literatury

[1] E. J. McShane. Extension of range of functions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 40(12):837–842, 1934.

[2] Hassler Whitney. Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 36(1):63–89, 1934.

[3] M. Isabel Garrido and Jesús A. Jaramillo. Lipschitz-type functions on metric spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 340(1):282–290, 2008.

[4] Ronnie Levy and M. D. Rice. Techniques and examples in U-embedding. *Topology Appl.*, 22(2):157–174, 1986.

[5] K. F. Klopfenstein and John Telste. Visualizing uniform continuity of functions of several variables. *Amer. Math. Monthly*, 81:623–625, 1974.

[6] W. A. Wilson. On rectifiability in metric spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 38(6):419–426, 1932.

[7] D. Preiss and J. Vilímovský. In-between theorems in uniform spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 261(2):483–501, 1980.