



V Praze 21.2.2022

Posudek vedoucího na doktorskou disertační práci RNDr. Zdeňka Mihuly

Disertační práce Zdeňka Mihuly obsahuje výsledky autorova výzkumu chování klasických operátorů harmonické analýzy a sobolevovských vnoření na prostorech funkcí s normou invariantní vůči nerostoucímu. Hlavním autorovým záměrem je přesnost, neboli optimalita, prostorů funkcí, které se vyskytují buď na „levé“ straně (tedy zdrojové prostory, neboli definiční obory), nebo na „pravé straně“ (tedy prostory cílové, neboli obory hodnot) příslušných zobrazení. Informace o optimalitě (lidově řečeno: „v nic lepšího nelze v dané situaci doufat“) je z pochopitelných důvodů nesmírně cenná zejména pro aplikace zmíněných výsledků.

Důležitým vstupním prvkem pro zkoumání optimality je „obsazení turnaje“, tedy specifikace kategorie prostorů funkcí, které jsou připuštěny do soutěže. V historii se takových kategorií objevuje několik, jmenujme například Lebesgueovy prostory, Lorentzovy prostory, Orliczovy prostory, Banachovy prostory, Banachovy prostory funkcí a další. V práci je touto množinou kategorie prostorů s normou invariantní vůči nerostoucímu přerovnáni, která zastřešuje první jmenované tři.

V rámci funkcionální analýzy se otázky týkající se optimality prostorů funkcí z uvedené kategorie objevily přibližně před dvaceti lety a od té doby stále probíhá jejich intenzivní výzkum. Byly úspěšně vyvinuty účinné metody vhodné pro určité specifické situace, například metoda redukčních principů, metoda iterací, interpolační metoda, metoda využívající isoperimetrické nerovnosti, metoda založená na Frostmanových mírách a další. Výsledky vyrůstaly víceméně na zelené louce, a jsou tedy pochopitelně poněkud roztržštěny po literatuře. Práce Zdeňka Mihuly v podstatě představuje první vskutku ucelený přístup k této problematice. Je třeba ovšem dodat, že uvedené metody

nedávají odpovědi na všechny myslitelné a že Zdeněk Mihula významně rozšířil odpovídající portfolio znalostí.

Práce není jen pouhým seznamem článků s krátkým úvodem, jak tomu často u doktorských disertací bývá, nýbrž je sepsána jako samostatný vyčerpávající text. To je při čtení velká výhoda, protože autor pečlivě promyslel, jak pyramidu znalostí uspořádat a zpřístupnit čtenáři, sjednotil značení a sestavil výsledky do systematické posloupnosti, takže na sebe přirozeně navazují. Tím je nejen usnadněno čtení takto uceleného matematického textu, ale, a to zejména, takto vyniknou i souvislosti mezi jednotlivými otázkami.

Práce je rozčleněna do pěti kapitol, z nichž první je přípravná. Kapitolám předchází krátký úvod, v němž nalezneme motivační příklady, stručnou historii problematiky a hlavně osnovu následného textu.

Druhá kapitola je věnována výzkumu vlastností operátorů definovaných na funkcích jedné proměnné (s jistou licencí jsou tyto operátory v práci označovány jako „jednorozměrné“). Autor se zde soustřeďuje na klíčové technické zázemí pro pozdější „vznešenější“ výsledky. Tato kapitola tak, jak je sepsána, se čtenáři nejspíše nebude jevit jako ta nejpřitažlivější matematika, jakou kdy viděl, jde však o velmi cennou zásobárnu nevyhnutelného arsenálu, který nám v budoucnosti mnohokrát usnadní život. Nejcenějším parametrem materiálu obsaženého v této kapitole je jeho univerzálnost a šíře.

Třetí kapitola je věnována klasickým operátorům harmonické analýzy. Asi by se dala vésti polemika o tom, které operátory patří pod tuto nálepku, každopádně v práci se jedná o maximální operátor Hardyho a Littlewooda, dále jeho zlomkovou variantu, Hilbertovu, Rieszovu a Stieltjesovu transformaci a konečně Rieszův potenciál. Tyto operátory, jakkoli jsou zcela rozdílných povah, mají společného jmenovatele, jímž je to, že při odhadech jejich nerostoucího přerovnění příslušnými Caledrónovými operátory (které jsou ve všech případech explicitně vypočitatelné) nedochází ke ztrátám informace (na rozdíl od například notoricky zlobivé Fourierovy transformace). Autor pro každý z uvedených operátorů dokazuje redukční princip, charakterizuje optimální partnerské prostory na obou stranách a výsledky ilustruje na značně netriviálních příkladech zobecněných Lorentzových-Zygmundových a Lorentzových-Karamatových prostorů.

Čtvrtá kapitola obsahuje Zdeňkovy výsledky z oblasti optimálních Sobolevových vnoření pro funkce definované na celém eukleidovském prostoru. Na rozdíl od obdobných vnoření pro množiny konečné míry s regulární hranicí, které byly dostupné dříve, představovala tato otázka notoricky známý těžký otevřený problém, jenž byl předtím řešen pouze s částečnými úspěchy (například v pracích J. Vybírala, J. Malého či P. Rabiera). Zdeněk uvádí dva typy výsledků odlišné povahy. Rozhodujícím faktorem zde je jistá normalisující podmínka na chování funkcí v nekonečnu.

Konečně pátá kapitola je věnována kompaktním vnořením sobolevovských prostorů do prostorů opatřených Ahlforsovou mírou. Tyto míry jsou definovány pomocí odhadů na úbytek měr posloupnosti koulí s mizejícím poloměrem a jsou známy jejich zásadní aplikace například pro charakterisaci stop sobolevovských funkcí či pro výzkum regularity řešení Neumannova problému. Problematika je pojata vyčerpávajícím způsobem, autor nejprve obecně charakterizuje prostory, pro které kompaktní vnoření

nastává, poté uvádí řadu netriviálních příkladů a nakonec přidává několik protipříkladů ilustrujících nezbytnost předpokladů obecných vět.

Kapitoly 2-5 obsahují v podstatě výhradně autorovy vlastní výsledky. Bez nadsázky lze konstatovat, že Zdeněk Mihula v této oblasti významně posunul úroveň vědeckého poznání. Celkově práce představuje neobvykle rozsáhlé obsažné dílo plné hlubokých nových výsledků. Podle mého názoru jde o obdivuhodný výkon, který zaslouží odpovídající ocenění.

Zdeněk Mihula dosáhl během doktorského studia i během předcházejících nižších stupňů studia úctyhodných výsledků, z nichž v disertaci nejsou uvedeny zdaleka všechny. O kvalitě autorovy práce si lze udělat obrázek podle několika dostupných faktů. V daném okamžiku má autor na kontě sedm vyšších článků a další dva přijaté k publikaci. Mezi časopisy, v nichž publikuje své výsledky, nalézáme *Journal of Functional Analysis*, *Journal of Approximation Theory*, *Mathematische Zeitschrift* a několik dalších srovnatelné kvality. Nyní pracuje na několika dalších projektech.

Důkazové metody a techniky, které se v práci využívají, vyvinul Zdeněk Mihula z velké části sám, případně se spoluautory. Vyšel samozřejmě z dostupných výsledků, tyto ale významnou měrou rozšířil a vnesl do problematiky několik originálních vlastních myšlenek. Je pravděpodobné, že na jeho výsledky budou navazovat další autoři v budoucnosti.

Zdeněk patří k studentům, kteří pracují spolehlivě a samostatně. K zadanému problému je schopen sám nastudovat potřebnou látku a tuto pak tvůrčím způsobem rozvíjet. V pozdějších fázích doktorského studia byl již schopen si klást smysluplné výzkumné otázky sám. Prokázal, že je schopen úspěšné a plodné mezinárodní spolupráce, například s Paolou Cavaliere (Salerno), Davidem Edmundsem (Sussex) či Janem Langem (Ohio State).

Kromě toho, že je Zdeněk Mihula mimořádně vědecky nadaný mladý matematik, je také skvělý přednášející a pedagog (získal nedávno místo v proslulém velmi silném týmu Jana Hamhaltera na katedře matematiky FEL ČVUT a dokonce již vede jednu diplomovou práci) a vynikající administrátor (podílel se na organizaci několika mezinárodních konferencí a pro rok 2022 mu byla svěřena pozice hlavního organizátora legendární jarní školy NAFSA 12, jejíž historie sahá do roku 1978 a která po mnoho let funguje jako jakási výkladní skříň pražské školy prostorů funkcí).

Úspěchy provázejí celou zatím poměrně krátkou Zdeňkovu kariéru, jmenujme například vítězství v soutěži SVOČ v roce 2017, druhé místo tamtéž v roce 2015, cenu děkana pro nejlepší pedagogy v roce 2019, prestižní Fulbrightovo stipendium k dlouhodobému pobytu v USA v letech 2019-2020, účast na šesti grantových projektech, či přednášky na sedmnácti mezinárodních konferencích včetně 8ECM v roce 2021 v Portoroži. Navíc je Zdeněk oblíbený pohodový společník a vítaný člen jakéhokoli týmu či spoluautor.

Závěrem: výsledky doktorské disertační práce Zdeňka Mihuly považuji za kromobyčejně silné a vřele doporučuji, aby mu byl udělen titul PhD.

Luboš Pick