Posudek oponenta bakalářské práce

Název: Geometrické řešení kvadratických diofantických rovnic
Autor: Daniela Lněničková

Shrnutí obsahu práce

Práce prezentuje metodu řešení homogenních diofantických rovnic pomocí racionálních kuželoseček předvedenou v textu J. Opršala a V. Kaly *Teorie čísel – Seriál pro Matematický korespondenční seminář*. Původní krátký učební text určený pro středoškolské studenty je tak převeden do formálnější podoby, metoda je zobecněna pro kvadriky v libovolné dimenzi a nad libovolným tělesem, a vše je ilustrováno na několika obtížnějších příkladech.

Celkové hodnocení práce

Práce se skládá se tří kapitol. První z nich řeší motivační úlohu o pythagorejských trojicích. Tím je předvedena obecná metoda spočívající v převedení diofantické rovnice na hledání všech racionálních bodů na kuželosečce. Tato úloha je následně vyřešena díky bijekci mezi body na kuželosečce a průsečíky kuželosečky s jistým svazkem přímek. Ve druhé kapitole je formálně vybudována teorie, na níž metoda stojí: Po definování kvadrik v libovolné dimenzi a nad libovolným tělesem jsou vysloveny a dokázány věty o průsečících kvadriky se svazkem přímek. Tyto věty jsou ilustrovány na dvou drobných příkladech. Jádrem práce je třetí kapitola, v níž je metoda aplikována na tři další diofantické rovnice. Z nich jedna vyžaduje práci ve vyšší dimenzi a další práci s přímkami nad tělesem $\mathbb{Q}(i)$. Oceňuji úvod a závěr práce, v nichž je srozumitelně vysvětleno, o čem text pojednává, jaká je jeho struktura a v čem spočívala úskalí jednotlivých příkladů.

Zkoumaná metoda stojí na dvou jednoduchých větách vyjadřujících souvislost mezi body na kvadrice a jejich průsečících se svazkem přímek procházejících zvoleným bodem. Věta 17 platí pouze pro definitní kvadriky a dává bijekci těchto dvou množin, zatímco obecnější věta 18 je slabší. Důležité je, že je studentka správně vyslovila a že srozumitelně definovala potřebné pojmy. Samotný důkaz věty 17 je ale špatně: O zobrazení ϕ nebylo dokázáno, že je dobře definované, a zdůvodnění prostoty i surjektivity jsou chybná. Věta 18 je dokázána správně, ale bylo by vhodné okomentovat, že platí pro každou množinu, ne jen pro kvadriky.

Stojí za zmínku, že ani motivační příklad o pythagorejských trojicích není zcela převzatý z původního textu – aby byla předvedena flexibilita metody, zvolila studentka svazek přímek procházejících jiným bodem. V prvním příkladu třetí kapitoly se pak úspěšně vypořádala s prací v Gaussových celých číslech včetně hledání největších společných dělitelů nad tímto okruhem. Druhá, poměrně snadná úloha je také spočítána správně. Je ale chybou tvrdit, že byla potřebná pro vyřešení třetího příkladu v případě $d = 0$. Třetí příklad se totiž ptá pouze na ta řešení, kde jsou proměnné po dvou nesoudělné, a to pro nulové d znamená, že zbylé proměnné nabývají jen hodnot ± 1. Stejné přehlédnutí vedlo k zahrnutí dalších řešení nesplňujících předpoklady, takže by shrnující věta 25 měla správně místo pěti typů řešení uvádět pouze dva. Nejde ale o velkou chybu a jinak je třetí příklad vyřešený dobře. V pomocné větě 24 studentka počítá hodnoty největších společných dělitelů, aby bylo řešení co nejexplicitnější. Dostala se poměrně daleko, jen exponent k_0 u dvojky mohla určit zcela explicitně: Jde o 1, pokud mají u, v stejnou paritu, a 0 jinak. Tím by se také vyhnula chybně určenému největšímu společnému děliteli v ilustračním příkladě pod větou 24; správná hodnota je 14, ne 7.

Neexistence formálně psané předlohy se na textu podepsala. Místy je psán zmateně, pokulhává návaznost a některé matematické úvahy jsou provedeny nepřesně. Čtenář si musí leccos domyslet nebo poupravit (byť to většinou není těžké), a to včetně výsledků některých příkladů a jedné či dvou definic. Jeden příklad za všechny: Nikde není vysvětleno, jak ze znalosti všech bodů na kuželosečce získáme všechna řešení původní rovnice; v textu se jen píše, že řešení už skoro máme, a pak začnou technicky náročné výpočty největších společných dělitelů čitatele a jmenovatele získaných bodů. Občas se také projeví neznalost souvislostí: Nejprve je celá stránka věnována explicitnímu a přitom mírně chaotickému důkazu tvrzení 11, že dvěma různými body prochází právě jedna přímka. Následně je uvedeno tvrzení 12, že různé přímky mohou mít nejvýše jeden společný bod, ale místo vysvětlení, že jde o okamžitý důsledek předešlého, zazní komentář, že důkaz je vynechán, protože by byl podobný.

Zvolené téma je sice elementární, ale vyžadovalo nezvykle velké množství samostatné práce: Studentka vycházela z textu o rozsahu necelých pět stran a významně jej rozpracovala. Jednak zobecnila věty o průsečících racionálních kuželoseček se svazkem přímek pro kvadriky nad libovolným tělesem, jednak vedle motivačního příkladu vyřešila tři další, o poznání obtížnější rovnice. Zadání práce tím bylo splněno; nadto byly věty o kuželosečkách vysloveny pro obecné těleso, ne jen pro tělesa charakteristiky 0, jak vyžadovalo zadání. Formální stránka práce je na přijatelné úrovni. Gramatické a stylistické nedostatky, překlepy a formulační nejasnosti jsou poměrně časté, ale snižují srozumitelnost jen mírně.

Připomínky a otázky

1. Předveďte, jak se správně dokáže věta 17. Chybné argumenty jsou v posledních dvou odstavcích. Na tvrzení 11 a větu 15 se samozřejmě smíte odvolat.

Závěr

Bakalářskou práci doporučuji k obhájení.

Jakub Krásenský
Katedra algebry MFF UK
9. června 2022