Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Václav Mácha

Použití Fredholmových vět k důkazu existence řešení soustav Stokesova typu

Katedra matematické analýzy

Doc. RNDr. Jana Stará, CSc.
Studijní program: Matematika, Matematická analýza

2008

Rád bych poděkoval všem svým blízkým za podporu i v dobách pro mě nejtěžších. Především ale chci poděkovat své vedoucí diplomové práce, docentce Janě Staré, za toleranci, ochotu a trpělivost.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne Václav Mácha

Obsah

Název práce: Použití Fredholmových vět k důkazu existence řešení soustav Stokesova typu
Autor: Václav Mácha
Katedra (ústav): Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Jana Stará, CSc.
e-mail vedoucího: stara@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme existenci a jednoznačnost řešení zobecněné Stokesovy úlohy. Studium tohoto problému je motivováno zkoumáním částečné regularity slabého řešení systému popisujícího proudění nestlačitelné kapaliny, jejíž viskozita závisí na tlaku a na rychlosti střihu. Vysvětlení souvislosti mezi těmito problémy se nachází v první kapitole, kde jsou uvedeny i nějaké modely viskozity. V dalších kapitolách jsou studovány vlastnosti řešení v závislosti na parametrech v modelech viskozity. K tomu je využito kompaktní vnoření mezi Sobolevovými prostory a následné vhodné použití Fredholmových vět. Závěrečný příklad ukazuje použití vybudované teorie.

Klíčová slova: Stokesův problém, Fredholmovy věty, kompaktní operátor.

Title: The existence of solutions to Stokes-type systems based on Fredholm's theorems
Author: Václav Mácha
Department: Department of mathematical analysis
Supervisor: Doc. RNDr. Jana Stará, CSc.
Supervisor's e-mail address: stara@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: Presented work deals with the existence and uniqueness of solution of generalized Stokes problem. The study of this problem is motivated by the research concerning partial regularity of weak solutions of systems describing the flow of incompressible fluids whose viscosity depends on the pressure and the shear rate. The explanation of the connection between presented problems is described in the first chapter, which includes also some models of viscosity. In following chapters the existence and uniqueness of solutions are studied with regard to the changing parameters in models of viscosity. For this purpose I use compact embeddings followed by appropriate application of Fredholm's theorems. At the end of the work the constructed theory is applied to one viscosity model.

Keywords: Stokes problem, Fredholm's theorems, compact operators

Kapitola 1

Úvod

Práce navazuje na článek Nguyena Duc Huye [4], zobecňuje jeho výsledky a v rámci zachování celistvosti jsou některé jeho pasáže připomenuty.

1.1 Motivace

V následující práci budeme studovat zobecněný Stokesův problém tohoto tvaru:
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí, $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^d$, $g : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $A = A_{ij}^{kl} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^{d^4}$, $B = B_{kj} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^{d^2}$, kde $i, j, k, l \in \{1, 2, \ldots, d\}$. Hledáme dvojici funkcí $(u, p) : \Omega \mapsto \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ řešící soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(A\mathcal{D}u) + B\nabla p & = & f & \text{na } \Omega \\ \mathrm{div} u & = & g & \text{na } \Omega \\ u & = & 0 & \text{na } \partial\Omega \end{array} \tag{1.1.1}$$

ve smyslu distribucí, kde $\mathcal{D}u$ značí symetrický gradient rychlosti a ∇p gradient tlaku. Detailněji (za použití Einsteinovy sumační konvence):

$$\begin{array}{rcll} -\frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij}^{kl} (\mathcal{D}u)_{lj} + B_{kj} \frac{\partial p}{\partial x_j} & = & f_k & \text{na } \Omega \qquad k = 1, 2, \ldots, d \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} & = & g & \text{na } \Omega \\ u & = & 0 & \text{na } \partial\Omega \end{array} \tag{1.1.2}$$

Nguyen Duc Huy ve své práci [4] uvažoval zobecnění Stokesova problému ve dvou bodech, jednak místo gradientu tlaku uvažoval gradient tlaku vynásoben obecnou konstantní maticí, za druhé místo Laplaceova operátoru uvažoval obecný eliptický operátor druhého řádu. V této práci půjdeme v zobecňování ještě dál a místo konstantní matice B budeme uvažovat matici funkcí. Pro úplnost připomínám, že klasickou verzi Stokesova problému dostanu, když budu v systému 1.1.1 uvažovat matici A tvaru: $A_{ij}^{kl} = 2\delta_{lk}\delta_{ij}$ a matici B tvaru $B_{kj} = \delta_{kj}$ a od pravé strany f je nutno odečíst ∇g, protože $2\mathrm{div}\mathcal{D}u = \mathrm{div}\nabla u + \mathrm{div}\nabla^T u = \Delta u + \nabla \mathrm{div} u = \Delta u + \nabla g$.

Pro demonstraci užitečnosti tohoto systému je třeba udělat kratší exkurzi do modelování proudění kapalin. Kapaliny jsou často v technologických procesech vystaveny velkým změnám tlaku. Je velice dobře zdokumentováno, že viskozita kapaliny se v takových situacích mění dramaticky s tlakem, někdy dokonce exponenciálně. Na druhou stranu změny v hustotě jsou stále zanedbatelné a tyto kapaliny mohou být stále modelovány jako nestlačitelné. Navíc viskozita může také kromě tlaku záviset i na rychlosti střihu. Ustálené proudění takových kapalin v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2,3)$ může být popsáno následujícím systémem:

$$\begin{aligned} -\mathrm{div} S(p, \mathcal{D}u) + (u.\nabla)u + \nabla p &= f \qquad \text{na } \Omega \\ \mathrm{div} u &= 0 \qquad \text{na } I \times \Omega, \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

kde $u = (u_1, \ldots, u_d)$ je rychlost, $\mathcal{D}u$ je symetrický gradient rychlosti, p je tlak, $f = (f_1, \ldots, f_d)$ jsou vnější síly a $Ip + S(p, \mathcal{D}u)$ je Cauchyho tenzor napětí.
Navíc, po zavedení $V = V(\mathcal{D}u) \stackrel{def}{=} (1 + |\mathcal{D}u|^2)^{1/2}$, požadujeme, aby existovaly kladné konstanty λ_0, λ_1, ν_0 a $m \in (1,2)$ tak, aby pro jakoukoli symetrickou $d \times d$ matici ξ platily následující odhady nezávisle na p:

$$\begin{aligned} \lambda_0 V(\mathcal{D}u)^{m-2}|\xi|^2 \leq \ & \langle \tfrac{\partial S}{\partial \mathcal{D}u}(p, \mathcal{D}u)\xi, \xi \rangle \ \leq \lambda_1 V(\mathcal{D}u)^{m-2}|\xi|^2 \\ \left| \tfrac{\partial \nu}{\partial p}(p, |\mathcal{D}u|^2)\mathcal{D}u \right| \ & \leq \ \nu_0 V(\mathcal{D}u)^{(m-2)/2} \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

Pro daná u, p uvažujme:

$$S(p, \mathcal{D}u) = \nu(p, |\mathcal{D}u|^2)\mathcal{D}u \tag{1.1.5}$$

kde předpokládáme, že ν je spojitě diferencovatelná funkce zadaná rovností $\nu(p, |\mathcal{D}u|^2) = (c + \gamma(p) + |\mathcal{D}u|^2)^{(m-2)/2}$
Z článku [6] můžeme uvažovat následující tři tvary γ, které splňují podmínku 1.1.4:

- $\gamma_1(p) = (1 + \alpha^2 p^2)^{-q/2}$
- $\gamma_2(p) = (1 + \exp(\alpha p))^{-q}$
- $\gamma_3(p) = \begin{cases} \exp(-\alpha q p) & \text{pro } p > 0 \\ 1 & \text{pro } p \leq 0 \end{cases}$

pro jakoukoli volbu kladných konstant A, α, β, q a $m \in (1,2)$. Následující výsledek byl dokázán pro systém 1.1.3 doplněný Dirichletovou hraniční podmínkou

$$v = 0 \qquad \text{na } \Omega \tag{1.1.6}$$

viz opět článek [6]

1.1.1 Věta. *Nechť Ω je otevřená omezená množina v $\mathbb{R}^d$ s lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega$, $d = 2,3$. Pro $m \in (\frac{3d}{d+2}, 2)$, $\nu_0 < \frac{\lambda_0}{\lambda_0+\lambda_1}\frac{1}{C_2}$, $p_0 \in \mathbb{R}$ a $f \in (W_0^{1,m}(\Omega))^*$ existuje slabé řešení $u \in W_0^{1,m}(\Omega)$, $p \in L^{m'}(\Omega)$ systému 1.1.3 splňující podmínku $\int_\Omega p(x)dx = p_0$.*

Jedna ze standardních metod důkazu částečné regularity slabého řešení rovnice 1.1.3 je nepřímý přístup založen na rozkladových vlastnostech průměru tlaku a rychlosti.
Zavedeme označení:

$$\langle v \rangle_R \stackrel{def}{=} \fint_{B(x,R)} v(z)\, dz = \frac{1}{|B(x,R)|} \int_{B(x,R)} v(z)\, dz$$

pro jakoukoli (ať už reálnou, vektorovou, maticovou či tenzorovou) funkci v definované na $B(x,R)$ a dále pro $\alpha \in (0,1)$:

$$
\begin{aligned}
E_1^{mv}(x,R) &\stackrel{def}{=} \left(\frac{1}{|B(x,R)|} \int\limits_{B(x,R)} |\mathcal{D}u(z) - \langle \mathcal{D}u\rangle_R|\, dz \right)^{1/m} \\
E_2^{mv}(x,R) &\stackrel{def}{=} \frac{1}{R}\left(\frac{1}{|B(x,R)|} \int\limits_{B(x,R)} |u(z) - \langle u\rangle_R - \langle \mathcal{D}u\rangle(z-x)|^m\, dz \right)^{1/m} \\
E_3^{mv}(x,R) &\stackrel{def}{=} \left(\frac{1}{|B(x,R)|} \int\limits_{B(x,R)} |p(z) - \langle p\rangle_R|^2\, dz \right)^{1/2} \\
E^{mv}(x,R) &\stackrel{def}{=} E_1^{mv}(x,R) + E_2^{mv}(x,R) + E_3^{mv}(x,R) + R^\alpha
\end{aligned}
\tag{1.1.7}
$$

1.1.2 Caccioppoliho nerovnost. *Nechť $A = A_{ij}^{kl}$ je $d^2 \times d^2$ matice, $B = B_{mk}$ je $d \times d$ matice taková, že*

$$
\begin{aligned}
\lambda_0 N|\xi|^2 &\le \langle A\xi,\xi\rangle;\ |A_{ij}^{kl}| \le \lambda_1 N,\ \forall i,j,k,l = 1,\dots,d \\
\|I - B\| &\le \nu_0 < 1
\end{aligned}
\tag{1.1.8}
$$

pro nějaká kladná λ_0, λ_1 a ν_0, všechna $\xi \in \mathbb{R}^{d^2}$ symetrická, $N \in [N_0, 1]$. Předpokládejme, že

$$
\nu_0 < \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + 4\lambda_1}
\tag{1.1.9}
$$

Pak existuje kladná konstanta $c(N_0) = c(N_0, \nu_0, \frac{\lambda_1}{\lambda_0}, d)$ tak, že pro každé $\tau \in (0,1)$, $R < R_0$, každé slabé řešení (u,p) systému

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{div}(A\mathcal{D}u) + B\nabla p &= 0 \qquad \text{na } B(0,R_0) \\
\mathrm{div} u &= 0 \qquad \text{na } B(0,R_0)
\end{aligned}
\tag{1.1.10}
$$

splňuje nerovnosti:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{B(0,\tau R)} |\mathcal{D}\nabla u|^2 dx &\le \frac{c(N_0)}{R^2(1-\tau)^2} \int\limits_{B(0,R)} |\mathcal{D}u - W|^2 dx \\
\int\limits_{B(0,\tau R)} |\nabla p|^2 dx &\le \frac{c(N_0)\lambda_1 N d^2}{R^2(1-\tau)^2} \int\limits_{B(0,R)} |\mathcal{D}u - W|^2 dx
\end{aligned}
\tag{1.1.11}
$$

pro jakoukoli volbu konstantní matice $W \in R^{d^2}$

Platí následující lemma

1.1.3 Lemma. *Pro každé $M \in (0,\infty)$ a všechna $\tau \in (0,1)$ existuje $\varepsilon > 0$ a konstanta $C^*(M)$ taková, že pro každé slabé řešení (u,p) systému 1.1.3 mající vlastnosti dané větou 1.1.1 a splňující pro každé $x \in \Omega$, $R > 0$, $B(x,R) \subset \Omega$ nerovnosti*

$$
\begin{aligned}
E^{mv}(x,R) &< \varepsilon \\
|\langle u\rangle_R| + |\langle \mathcal{D}u\rangle_R| + |\langle p\rangle_R| &\le M
\end{aligned}
\tag{1.1.12}
$$

pak

$$
E^{mv}(x,\tau R) \le 2C^*(M)\tau^\alpha E^{mv}(x,R)
\tag{1.1.13}
$$

Důkaz. Naznačím zde pouze hlavní myšlenky důkazu. Předpokládejme, že pro nějaké τ a M existují $\varepsilon_h \to 0$, x_h, v_h, p_h a $R_h \to 0$ splňující 1.1.12 a zároveň

$$E^{mv_h}(x_h, \tau R_h) > 2C^*(M)\tau^\alpha \varepsilon_h. \tag{1.1.14}$$

Tento předpoklad dovedu ke sporu více kroky. Z důvodu velké náročnosti na místo a jisté irelevance vzhledem k téhle práci, omezím se pouze na nejnutnější věcí nejvíce na souvislost se zobecněnou Stokesovou úlohou.

1. - stanovení $C^*(M)$: Díky nerovnosti 1.1.12 platí:

$$\begin{array}{rcll} \langle p_h \rangle_{R_h} & \to & a & \text{v } \mathbb{R} \\ \langle u_h \rangle_{R_h} & \to & b & \text{v } \mathbb{R}^d \\ \langle \mathcal{D} v_h \rangle_{R_h} & \to & e & \text{v } \mathbb{R}^{d^2} \end{array} \tag{1.1.15}$$

   Pak $V(\langle \mathcal{D} v_h \rangle_{R_h}) \to V(e)$ a $|a| + |b| + |e| \le M$. Označme

$$\begin{array}{rcll} A & = & A_{ij}^{kl} = \frac{\partial S_{ij}(a,e)}{\partial \mathcal{D} u_{kl}} & \in \ \mathbb{R}^{d^4} \\ B & = & I - \frac{\partial \nu}{\partial p}(a,e)e & \in \ \mathbb{R}^{d^2} \end{array} \tag{1.1.16}$$

   Pak je nerovnost 1.1.8 splněna s $N = (1+|e|^2)^{\frac{m-2}{2}}$, $N_0 = (1+|M|^2)^{\frac{m-2}{2}}$ a protože je splněno 1.1.4, platí také 1.1.9 Lemma 1.1 zajišťuje, že odhad 1.1.13 na řešení 1.1.10 platí s konstantou $C^*(M) = c(N_0)$.

2. - škálování a stejnoměrné odhady: Uvažujme nyní přeškálované funkce w_h, q_h které jsou dány na $B(0,1)$ předpisy:

$$\begin{array}{rcl} q_h(y) & = & \frac{1}{\varepsilon_h}(p_h(x_h + R_h y) - \langle p_h \rangle_{R_h}) \\ w_h(y) & = & \frac{1}{R_h \varepsilon_h}(u_h(x_h + R_h y) - \langle u_h \rangle - \langle \mathcal{D} v_h \rangle_{R_h} R_h y). \end{array} \tag{1.1.17}$$

   Z definice:

$$\mathcal{D}_y w_h(y) = \varepsilon_h^{-1}(\mathcal{D}_x u_h(x_h + R_h y) - \langle \mathcal{D} u_h \rangle_{R_h}) \tag{1.1.18}$$

   Navíc platí

$$\langle q_h \rangle_1 = 0, \ \langle w_h \rangle_1 = 0, \ \langle \mathcal{D} w_h \rangle_1 = 0 \tag{1.1.19}$$

   Pak z 1.1.12 platí, že q_h, w_h jsou stejně omezené v $L^2(B(0,1))$ a $W^{1,m}(B(0,1))$. Díky těmto odhadům můžeme najít funkce $q \in L^2(B(0,1))$ a $w \in W^{1,m}(B(0,1))$ tak, že

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{D} w_h & \to & \mathcal{D} w & \text{slabě v } L^m(B(0,1)) \\ w_h & \to & w & \text{slabě v } W^{1,m}_{div}(B(0,1)) \\ w_h & \to & w & \text{silně v } L^m(B(0,1)) \\ w_h & \to & w & \text{skoro všude v } B(0,1) \\ q_h & \to & q & \text{slabě v } L^2(B(0,1)) \end{array} \tag{1.1.20}$$

   Navíc platí

$$E^{mw_h}(0,\tau) > 2C^*(M)\tau^\alpha \tag{1.1.21}$$

3. - slabá formulace systému řešeného přeškálovanými proměnnými: Po přenásobení systému 1.1.3 libovolnou funkcí $\varphi \in C_0^\infty(B(x_h, R_h))$, vložení přeškálovaných veličin q_h, w_h, $\mathcal{D}w_h$ místo p_h, u_h, $\mathcal{D}u_h$, substituci $y = \frac{x-x_h}{R_h}$ a vydělením rovnice $R_h^{d-1}\varepsilon_h$ dostaneme

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\epsilon_h}\{\textstyle\int_{B(0,1)} S(\langle p_h\rangle_{R_h} + \epsilon_h q_h, \langle \mathcal{D}u_h\rangle_{R_h} + \epsilon_h \mathcal{D}w_h)\mathcal{D}_y\psi dy \\ + \textstyle\int_{B(0,1)}(\langle u_h\rangle_{R_h} + \langle \mathcal{D}u_h\rangle_{R_h} R_h y + \epsilon_h R_h w_h) \times (\langle u_h\rangle_{R_h} + \\ \langle \mathcal{D}u_h\rangle_{R_h} R_h y + \epsilon_h R_h w_h)\mathcal{D}_y\psi dy - \textstyle\int_{B(0,1)}(\langle p_h\rangle_{R_h} + \\ \epsilon_h q_h)\mathrm{div}_y\psi dy - R_h \textstyle\int_{B(0,1)} f\psi dy\} &= 0 \\ \mathrm{div} w_h &= 0 \text{ na } B(0,1) \end{aligned} \tag{1.1.22}$$

kde $\psi(y) = \varphi(x_h + R_h y)$.

4. - přechod k limitě: Pokud v systému 1.1.22 přejdeme k limitě, zjistíme, že q a w řeší Stokesův systém zobecněný do mnou uvažovaného tvaru. Nejdříve ale pár konvergencí. Z nerovnosti 1.1.12:

$$R_h \to 0,\ \varepsilon_h \to 0,\ R_h^\alpha \varepsilon_h^{-1} \le 1 \tag{1.1.23}$$

a dále pak:

$$\begin{array}{cl} \varepsilon_h q_h \to 0 & \text{v } L^2 \\ \varepsilon_h \mathcal{D}w_h \to 0 & \text{v } L^2 \\ \langle p_h\rangle_{R_h} + \varepsilon_h q_h \to a & \text{v } L^2 \\ \langle \mathcal{D}u_h\rangle_{R_h} + \varepsilon_h \mathcal{D}w_h \to e & \text{v } L^2 \end{array} \tag{1.1.24}$$

Přejděme nyní k limitnímu přechodu v rovnici. Označme výrazy na pravé straně rovnice 1.1.22 po řadě I_1, I_2, I_3 a I_4. Pak protože $R_h\varepsilon_h^{-1} \to 0$, také $I_4 \to 0$. Dále protože:

$$\int_{B(0,1)} \langle p_h\rangle_{R_h} \mathrm{div}\psi dy = \langle p_h\rangle_{R_h} \int_{B(0,1)} \mathrm{div}\psi dy = 0 \tag{1.1.25}$$

platí

$$I_3 \to -\int_{B(0,1)} q \mathrm{div}\psi dy \tag{1.1.26}$$

Dále:

$$\begin{aligned} I_2 &= \tfrac{1}{\epsilon_h}\textstyle\int_{B(0,1)}\langle u_h\rangle_{R_h} \times \langle u_h\rangle_{R_h} \mathcal{D}\psi dy \\ &\quad + \tfrac{R_h}{\epsilon_h}\textstyle\int_{B(0,1)}\{\langle u_h\rangle_{R_h} \times (\langle \mathcal{D}u_h\rangle_{R_h} y + \epsilon_h w_h) + (\langle \mathcal{D}u_h\rangle_{R_h} y + \\ &\quad \epsilon_h w_h) \times \langle u_h\rangle_{R_h}\}\mathcal{D}\psi dy + \tfrac{R_h^2}{\epsilon_h}\textstyle\int_{B(0,1)}(\langle \mathcal{D}u_h\rangle_{R_h} y + \epsilon_h w_h) \times \\ &\quad (\langle \mathcal{D}u_h\rangle_{R_h} y + \epsilon_h w_h)\mathcal{D}\psi dy \\ &= I_{21} + I_{22} + I_{23}. \end{aligned} \tag{1.1.27}$$

Platí:

$$I_{21} = \frac{1}{\varepsilon_h}(\langle u_h\rangle_{R_h} \times \langle u_h\rangle_{R_h}) \int_{B(0,1)} \mathcal{D}\psi dy = 0 \tag{1.1.28}$$

pro všechna $\psi \in C_0^\infty(B(0,1))$
Také $I_{22} \to 0$, protože

$$\frac{R_h}{\varepsilon_h} = \frac{R_h^\alpha}{\varepsilon_h} R_h^{1-\alpha} \to 0 \tag{1.1.29}$$

a integrály jsou stejně omezené. Podobně i I_{23} jde k nule. Takže $I_2 \to 0$ Nakonec zbyl člen I_1. Využiji rovnosti

$$\int_{B(0,1)} S(\langle p_h\rangle_{R_h}, \langle \mathcal{D}v_h\rangle_{R_h})\mathcal{D}\psi dy = 0 \tag{1.1.30}$$

pro následující výpočty:

$$\begin{aligned} I_1 &= \tfrac{1}{\epsilon_h}(\textstyle\int_{B(0,1)}[S(\langle p_h\rangle_{R_h} + \epsilon_h q_h, \langle \mathcal{D}u_h\rangle_{R_h} + \epsilon_h \mathcal{D}w_h) - \\ &\quad S(\langle p_h\rangle_{R_h}, \langle \mathcal{D}u_h\rangle_{R_h}]\mathcal{D}\psi dy) \\ &= \tfrac{1}{\epsilon_h}(\textstyle\int_{B(0,1)}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} S(\langle p_h\rangle_{R_h} + s\epsilon_h q_h, \langle \mathcal{D}u_h\rangle_{R_h} \\ &\quad + s\epsilon_h \mathcal{D}w_h) ds\mathcal{D}\psi dy) \\ &= \textstyle\int_{B(0,1)}\int_0^1 \frac{\partial S(\langle p_h\rangle_{R_h} + s\epsilon_h q_h, \langle \mathcal{D}u_h\rangle_{R_h} + s\epsilon_h \mathcal{D}w_h)}{\partial \mathcal{D}u} \mathcal{D}w_h \mathcal{D}\psi ds dy + \\ &\quad \textstyle\int_{B(0,1)}\int_0^1 \frac{\partial \nu(\langle p_h\rangle_{R_h} + s\epsilon_h q_h, \langle \mathcal{D}u_h\rangle_{R_h} + s\epsilon_h \mathcal{D}w_h)}{\partial p}(\langle \mathcal{D}u_h\rangle_{R_h} + \\ &\quad s\epsilon_h \mathcal{D}w_h) q_h \mathcal{D}\psi ds dy. \end{aligned} \tag{1.1.31}$$

a po přechodu k limitě zbyde z rovnice 1.1.22 následující slabá formulace zobecněného Stokesova problému s neznámými w a q:

$$\begin{aligned} \int_{B(0,1)} \frac{\partial S}{\partial \mathcal{D}u}(a,e)\mathcal{D}w\mathcal{D}\psi - \int_{B(0,1)} q\,\mathrm{div}\psi + \int_{B(0,1)} \frac{\partial S}{\partial p}(a,e) q\mathcal{D}\psi &= 0 \\ \mathrm{div} w &= 0 \end{aligned} \tag{1.1.32}$$

5. - silná konvergence na $B(0,\tau)$: pro tuto práci již nedůležitý krok, proto jej vynechám.

$\square$

Z důkazu je tedy patrné, že studium zobecněného Stokesova problému je motivováno určitou linearizací rovnice 1.1.3

1.2 Protipříklady

Vzhledem k úvodní motivaci problému je oprávněné, pokud budu předpokládat symetričnost a eliptičnost matice A a matici B budu uvažovat tvaru $I - K$.
Následujícími příklady chci demonstrovat nutnost jistých podmínek pro existenci a jednoznačnost problému 1.1.1.

1.2.1 Protipříklad. *Uvažujme systém 1.1.1 v dimenzi $d = 2$ zadaný následujícími maticemi $B_{kj} = \delta_{kj}$ a $A_{ij}^{kl} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i=j=k=l=1 \text{ nebo } i=k=1, j=l=2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$ na oblasti $\Omega = (0,\pi)\times(0,\pi)$ s daty $f_1 = f_2 = g = 0$*
Tedy systém:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_1} &= 0 \qquad \text{na } \Omega \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} &= 0 \qquad \text{na } \Omega \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= 0 \qquad \text{na } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{na } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Upravím levou stranu první rovnice tímto způsobem:
$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}) + \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial p}{\partial x_1}$,
a první rovnice se redukuje na tvar:

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \tag{1.2.2}$$

Řešení je například dvojice funkcí $(u,p) = ((\alpha \cos x_1, \alpha x_2 \sin x_1), 0)$ *pro jakékoli* $\alpha \in \mathbb{R}$ *a rovnice nemá řešení jednoznačně určené. Pro zaručení jednoznačnosti jsou podmínky na matici* A *nutné.*

1.2.2 Protipříklad. *Další protipříklad ukazuje nutnost nějaké podmínky na matici* B*, za oblast, na které budeme řešit úlohu, uvažujme* $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$, $f \equiv 1$, $g \equiv 0$, $B = 0$, $A_{11}^{11} = 1$. *Je jasné, že soustava rovnic:*

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & = & 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x} & = & 0 \end{array} \tag{1.2.3}$$

nemá žádné řešení. Přesné podmínky na matici B *budou specifikovány později.*

1.2.3 Protipříklad. *Pro triviálnost předchozího příkladu uvedu ještě jeden protipříklad, tentokrát v dimenzi* $d = 2$. *Matici* B *zvolím nulovou, matici* A *tak, aby první člen rovnice byl Laplaceův operátor (jak zvolit koeficienty takové matice je naznačeno výše), další data:* $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1^2 + x_2^2 < 1\}$, $f_1 \equiv 2$, $f_2 \equiv 0$, $g \equiv 0$. *V přehlednější formě:*

$$\begin{array}{rcll} \Delta u_1 & = & 2 & \quad na\ \Omega \\ \Delta u_2 & = & 0 & \quad na\ \Omega \\ \operatorname{div} u & = & 0 & \quad na\ \Omega \\ u & = & 0 & \quad na\ \partial\Omega \end{array} \tag{1.2.4}$$

Na chvíli zapomeneme na třetí rovnici a rozdělíme soustavu do dvou systému:

$$\begin{array}{rcll} \Delta u_1 & = & 2 & \quad na\ \Omega \\ u_1 & = & 0 & \quad na\ \partial\Omega \end{array} \tag{1.2.5}$$

a druhý systém obdobně:

$$\begin{array}{rcll} \Delta u_2 & = & 0 & \quad na\ \Omega \\ u_2 & = & 0 & \quad na\ \partial\Omega \end{array} \tag{1.2.6}$$

Z principu minima pro harmonické funkce platí, že řešení těchto dvou systémů jsou jednoznačně určena. Jednoduchým propočtem se dá ověřit, že funkce $u_1 = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} - \frac{1}{2}$ *je jednoznačným řešením systému 1.2.5 a* $u_2 = 0$ *je jednoznačným řešením systému 1.2.6. Ale odtud*

$$\operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = x_1 + 0 \neq 0 \qquad na\ \Omega \setminus \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^1, x_1 = 0\} \tag{1.2.7}$$

a třetí rovnice v systému 1.2.4 není splněna.

1.3 Značení

$\mathbb{N}$	...	přirozená čísla $\{1,2,3,\ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	...	přirozená čísla včetně nuly - $\{0,1,2,\ldots\}$
$\mathbb{R}$	...	těleso reálných čísel
$\mathbb{R}^d$	...	Euklidovský prostor dimenze d
$\mathbb{R}^{d^2}$	...	prostor čtvercových matic $d \times d$
$\mathbb{R}^{d^4}$	...	prostor čtvercových matic $d \times d \times d \times d$
$\mathrm{span}\{x_1,\ldots,x_n\}$	...	lineární obal vektorů $x_1,\ldots x_n$
$\mathrm{Ker}\, L$	...	jádro operátoru L
$\mathrm{Ran}\, L$	...	obor hodnot operátoru L
L'	...	operátor adjungovaný k operátoru L
I	...	identita, jednotková matice
$\langle .,. \rangle_H$	...	skalární součin v hilbertově prostoru H
$[.,.]_X$	...	dualita mezi prostory X^* a X
Ω	...	otevřená omezená oblast s lipschitzovskou hranicí
∇u	...	značení pro gradient $\nabla u \stackrel{def}{=} (\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_d})$
$\mathcal{D}u$	...	symetrický gradient u, $\mathcal{D}u \stackrel{def}{=} \frac{\nabla u + \nabla^T u}{2}$
$\mathrm{div}\, u$	...	divergence u, $\mathrm{div}\, u \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$
$L^p(\Omega)$	...	pro $p \in [1,\infty]$ značí Lebesqueovy prostory reálných funkcí
$\|.\|_p$	...	obvyklá norma v Lebesqueově prostoru L^p

1.4 Úmluvy a definice

(i) V celém následujícím textu bude použita Einsteinova sumační konvence, pokud nebude řečeno jinak.

(ii) $L^p(\Omega)^d$ je označení pro Lebesqueovy prostory vektorových funkcí (tedy funkcí $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}^d$) s normou: $\|u\|_p = \begin{cases} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^d \|u_i\|_p^p} & p \in [1,\infty) \\ \sqrt{\sum_{i=1}^d \|u_i\|_\infty^2} & p = \infty \end{cases}$. Prostory $L^p(\Omega)^{d^2}$ (resp. $L^p(\Omega)^{d^4}$) jsou prostory maticových $d \times d$ (resp. $d \times d \times d \times d$)funkcí s toutéž normou.

(iii) Pouze pro potřeby tohoto odstavce definujme multiindex $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ a diferenciální operátor $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}}$. Pro $p \in [1,\infty]$ a $k \in \mathbb{N}$ označím $W^{k,p}(\Omega)$ obvyklý Sobolevův prostor reálných funkcí s normou definovanou následujícím způsobem: $\|u\|_{k,p} = \begin{cases} \sqrt[p]{\sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_p^p} & \text{pro } p \neq \infty \\ \max_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_\infty & \text{pro } p = \infty \end{cases}$
Dále definuji $W_0^{1,p}(\Omega) \stackrel{def}{=} \overline{C_0(\Omega)}^{\|.\|_{1,p}}$, tzn. uzávěr spojitých funkcí s kompaktním nosičem v Ω v příslušné normě prostoru $W^{1,p}(\Omega)$.
Označím $W^{k,p}(\Omega)^d$ prostor vektorových funkcí $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}^d$, $u_1,\ldots,u_d \in W^{k,p}(\Omega)$ s normou $\|u\|_{k,p} = \begin{cases} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^d \|u_i\|_{k,p}^p} & \text{pro } p \neq \infty \\ \sqrt{\sum_{i=1}^d \|u_i\|_{k,\infty}^2} & \text{pro } p = \infty \end{cases}$

Podobně zavádím prostor $W_0^{1,p}(\Omega)^d$, na němž budu uvažovat ještě navíc normu $\|u\|_D = \|\mathcal{D}u\|_2$
$W_{0,div}^{1,p}(\Omega)$ je podprostor prostoru $W_0^{1,p}(\Omega)^d$ s nulovou divergencí, neboli preciznějі:
$W_{0,div}^{1,p}(\Omega) \stackrel{def}{=} \{u \in W_{0,div}^{1,p}(\Omega)^d, \operatorname{div} u = 0$ ve slabém smyslu$\}$.
A stejně jako v předchozím případě zavádím maticové varianty těchto prostorů.
Navíc označím $W^{-1,p'}(\Omega)$ duální prostor k prostoru $W_0^{1,p}(\Omega)$, případně k prostoru $W_0^{1,p}(\Omega)^d$. Vzhledem k tomu, že bude vždy jasné, o který duál jde, nebezpečí nedorozumění nehrozí.

(iv) V celém následujícím textu bude Ω značit otevřenou omezenou oblast s lipschitzovskou hranicí, pokud nebude řečeno jinak. Navíc bude Ω nosnou množinou všech Lebesqueových a Sobolevových prostorů (a právě proto budu vynechávat označení nosné množiny, pokud nedojde k nedorozumění, tzn. např. $W_0^{1,p} = W_0^{1,p}(\Omega)$)

(v) Kouli v Banachově prostoru X o poloměru r se středem v bodě x_0 budu značit $B_X(x_0, r)$. Tedy $B_X(x_0, r) \stackrel{def}{=} \{x \in X, \|x - x_0\|_X \leq r\}$. Ve speciálním případě $x_0 = 0$ budu parametr x_0 vynechávat ($B_X(r) = B_X(0, r)$), stejně tak v případě, že X bude Euklidův prostor, budu vynechávat parametr X ($B(x_0, r) = B_{\mathbb{R}^d}(X_0, r)$).

(vi) Nechť H je Hilbertův prostor a nechť $M \subset H$. Pak označíme ortogonální doplněk množiny M symbolem $M^\perp = \{x \in H, \langle x, y\rangle_H = 0,\ \forall y \in M\}$

(vii) Značením $\|.\|_D$ budu značit kromě již zavedené normy prostoru $W_0^{1,2}$ i operátorovou normu definovanou předpisem $h : W_0^{1,2} \mapsto X, \|h\|_D = \sup\{\|h(z)\|_X, \|z\|_D \leq 1\}$. Vzhledem k tomu, že bude vždy jasné, zda jde o operátor na $W_0^{1,2}$ nebo prvek tohoto prostoru, nedorozumění nehrozí i přes stejné značení.

(viii) Nechť $A \in \mathbb{R}^{d^4}$. Řekneme, že A je "symetrická", pokud $A_{ij}^{kl} = A_{kj}^{il} = A_{il}^{kj}$ pro všechna $i, j, k, l \in 1, \ldots, d$

(ix) Řekneme, že $A \in L^\infty(\Omega)^{d^4}$ je "eliptická", pokud existuje $\alpha > 0$ tak, že pro každé $u \in W_0^{1,2}(\Omega)^d$ platí $|\int_\Omega A_{ij}^{kl}(\mathcal{D}u)_{lj}(\mathcal{D}u)_{ki}| \geq \alpha\|\mathcal{D}u\|_2^2$. Největší α s touto vlastností nazveme "konstantou elipticity".

(x) Nechť X je Banachův prostor a nechť $A : X \mapsto X'$. Řekneme, že operátor A je "eliptický", pokud existuje $\alpha > 0$ tak, že pro všechna $x \in X$ platí
$|[Ax, x]_X| \geq \alpha\|x\|^2$. Největší α s touto vlastností označíme jako "konstanta elipticity".

(xi) Nechť $A \in \mathbb{R}^{d^4}$, $B \in \mathbb{R}^{d^4}$, pak definujem $C = A\!:\!B$ následujícím předpisem:

$$C_{pj}^{ml} = (A\!:\!B)_{pj}^{ml} \stackrel{def}{=} \sum_{i,k=1}^{n} A_{pi}^{mk} B_{ij}^{kl}$$

(xii) Matici $B \in L^\infty(\Omega)^{d^2}$ nazveme "esenciálně regulární", jestliže existuje matice $C \in L^\infty(\Omega)^{d^2}$ tak, že $C(x)B(x) = I = B(x)C(x)$ pro skoro všechna x v Ω. Značíme $C = B^{-1}$, říkáme, že C je "inverzní" k B

(xiii) O matici $B \in L^\infty(\Omega)^{d^2}$ řekneme, že je "odražená od nuly",pokud existuje $\lambda > 0$ tak, že $|\det B| > \lambda$ skoro všude v Ω

(xiv) Nechť $C \in L^\infty(\Omega)^{d^2}$. Definujme $\widehat{C}$, $\widehat{C} \in L^\infty(\Omega)^{d^4}$ tímto způsobem:

$$\widehat{C}_{ni}^{mk} \stackrel{def}{=} C_{mk}\delta_{ni}$$

1.4.1 Pozorování.

(i) Pro pevné Ω existují konstanty $P_1 \in (0,\infty)$, $P_2 \in \langle 1,\infty)$ tak, že pro každé $u \in W_0^{1,2}(\Omega)^d$ platí

$$\|u\|_2 \leq P_1\|u\|_D \tag{1.4.1}$$

$$\|u\|_D \leq \|\nabla u\|_2 \leq P_2\|u\|_D \tag{1.4.2}$$

Navíc pro každé $h \in W^{-1,2}(\Omega)$ platí:

$$P_2^{-1}\|h\|_D \leq \|h\|_{-1,2} \leq \|h\|_D \tag{1.4.3}$$

Důkaz. Připomeňme, že $\|u\|_D = \|\frac{\nabla u}{2} + \frac{\nabla u}{2}^T\|$ Nejdříve ukážeme platnost 1.4.2. Díky Kornově nerovnosti (viz [7], lemma 1.11) platí následující sada odhadů:

$$\|\frac{\nabla u}{2} + \frac{\nabla u}{2}^T\|_2 \leq \frac{1}{2}(\|\nabla u\|_2 + \|\nabla^T u\|_2) = \|\nabla u\|_2 \leq \|u\|_{1,2} \leq P_2\|\frac{\nabla u}{2} + \frac{\nabla u}{2}^T\|_2$$

Odhad 1.4.1 je přímý důsledek nerovnosti 1.4.2 a Poincarého nerovnosti ([2], kapitola 2, lemma 1.1.1).
Z nerovnosti$\|h\|_{-1,2} = \sup\{[h,\varphi]_{W_0^{1,2}}, \|\nabla\varphi\|_2 \leq 1\} \leq \sup\{[h,\varphi]_{W_0^{1,2}}, \|\varphi\|_D \leq 1\} =$
$= \|h\|_D$ a z nerovnosti
$P_2^{-1}\|h\|_D = P_2^{-1}\sup\{[h,\varphi]_{W_0^{1,2}}, \|\varphi\|_D \leq 1\} = \sup\{[h,\varphi]_{W_0^{1,2}}, \|\varphi\|_D \leq P_2^{-1}\} \leq$
$\leq \sup\{[h,\varphi]_{W_0^{1,2}}, \|\nabla\varphi\|_2 \leq 1\} = \|h\|_{-1,2}$, dostáváme 1.4.3 □

(ii) Nechť $C \in W^{1,\infty}(\Omega)^{d^2}$ a nechť $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)^d$. Pak $C\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)^d$ a existuje konstanta P_3 tak, že $\|C\varphi\|_{1,2} \leq P_3\|C\|_{1,\infty}\|\varphi\|_{1,2}$.

Důkaz. Počítejme:

$$\begin{aligned} \|C\varphi\|_{1,2}^2 &= \|C_{ij}\varphi_j\|_{1,2}^2 = \sum_{i=1}^d \|C_{ij}\varphi_j\|_{1,2}^2 = \sum_{i=1}^d \left(\|C_{ij}\varphi_j\|_2^2 + \sum_{k=1}^d \|\tfrac{\partial C_{ij}\varphi_j}{\partial x_k}\|_2^2\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^d \left(\|C\|_\infty^2 \sum_{j=1}^d \|\varphi_j\|_2^2 + 2\|C\|_\infty^2 \sum_{j,k=1}^d \|\tfrac{\varphi_j}{\partial x_k}\|_2^2 + 2\sum_{j=1}^d (\|\varphi_j\|_2^2 \sum_{k=1}^d \|\tfrac{\partial C_{ij}}{\partial x_k}\|_\infty^2)\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^d \left(2\|C\|_{1,\infty}^2\|\varphi\|_{1,2}^2 + 2\|C\|_{1,\infty}^2\|\varphi\|_2^2\right) \leq 4d\|C\|_{1,\infty}^2\|\varphi\|_{1,2}^2 \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

□

(iii) Pokud A, B jsou matice typu $d \times d$, pak platí:

$$\widehat{AB} = \widehat{A}:\widehat{B}$$

Důkaz. $(\widehat{A} : \widehat{B})^{ml}_{pj} = \sum_{i,k=1}^d \hat{A}^{mk}_{pi} \hat{B}^{kl}_{ij} = \sum_{i,k=1}^d A_{mk}\delta_{pi}B_{kl}\delta_{ij} = \sum_{k=1}^d A_{mk}B_{kl}\delta_{pj} = (AB)_{ml}\delta_{pj} = \widehat{AB}^{ml}_{pj}$ $\square$

(iv) *Nechť $B \in L^\infty(\Omega)^{d^2}$. Pak B je odražená od nuly právě když je B esenciálně regulární.*

Důkaz. Nechť B je odražená od nuly, pak existuje $N_1 \subset \Omega$ a $\lambda > 0$ tak, že $|\det B| > \lambda$ pro všechna $x \in \Omega \setminus N_1$ a $\mu(N_1) = 0$. Na $\Omega \setminus N_1$ definujme matici $C_{ij} = \frac{\overline{B}}{\det(B)}$ (kde $\overline{B}$ značí adjungovanou matici - viz [5] definice 8.11). Dále, protože $B \in L^\infty(\Omega)^{d^2}$, existuje množina $N_2 \subset \Omega$ a $\Lambda > 0$ tak, že $\max_{1\le i,j\le d} |B_{ij}(x)| \le \Lambda$ pro $x \in (\Omega \setminus N_2)$ a zároveň $\mu(N_2) = 0$. Z definice $\overline{B}$ je $|\overline{B}_{ij}(x)| \le (d-1)!\Lambda^{d-1}$ pro $x \in \Omega \setminus N_2$ a proto pro $x \in \Omega \setminus (N_1 \cup N_2)$ platí $|C_{ij}(x)| \le \frac{1}{\lambda}(d-1)!\Lambda^{d-1}$ a $C_{ij} \in L^\infty(\Omega)^{d^2}$. Ze známé věty z lineární algebry (viz [5] věta 8.12) platí, že $C(x)B(x) = B(x)C(x) = I$ pro $x \in \Omega \setminus (N_1 \cup N_2)$ a $\mu(N_1 \cup N_2) = 0$.
Nechť je nyní B esenciálně regulární, to znamená, že existuje B^{-1} skoro všude. Dále víme, že $1 = \det I = \det BB^{-1} = \det B \det B^{-1}$. A odtud $\det B = \frac{1}{\det B^{-1}}$ skoro všude. Protože $B^{-1} \in L^\infty(\Omega)^{d^2}$, je také $\det B^{-1} \in L^\infty(\Omega)$ tedy existuje $a \in \mathbb{R}$ tak, že $|\det B^{-1}| \le a$ skoro všude a proto $|\det B| \ge \frac{1}{a}$ skoro všude a B je odražená od nuly. $\square$

(v) *Nechť $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$ a nechť A je symetrická. Pak platí $A\mathcal{D}u\nabla v = A\mathcal{D}u\mathcal{D}v$*

Důkaz. $A\mathcal{D}u\nabla v = A^{kl}_{ij}(\mathcal{D}u)_{lj}\frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(A^{kl}_{ij}(\mathcal{D}u)_{lj}\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + A^{il}_{kj}(\mathcal{D}u)_{lj}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}) = \frac{1}{2}(A^{kl}_{ij}(\mathcal{D}u)_{lj}\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + A^{kl}_{ij}(\mathcal{D}u)_{lj}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}) = A^{kl}_{ij}(\mathcal{D}u)_{lj}\frac{1}{2}(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k}) = A\mathcal{D}u\mathcal{D}v$ $\square$

(vi) *Prostor $W^{1,2}_0(\Omega)^d$ se skalárním součinem $\langle u, v\rangle_D \stackrel{def}{=} \int_\Omega (\mathcal{D}u)_{ij}(\mathcal{D}v)_{ij}$ je Hilbertův.*

Důkaz. Prostor $W^{1,2}_0$ je z definice uzavřený v normě $\|u\|_{1,2}$ a z ekvivalence norem je uzavřen i v normě $\|u\|^2_D = \langle u, u\rangle_D = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^d ((Du)_{ij})^2$. Jde tedy opět o Banachův prostor. Nyní stačí ukázat, že $\langle u, v\rangle_D$ je skutečně skalární součin. Toto vynechávám z důvodů triviality ověření všech axiomů skalárního součinu. $\square$

(vii) *Prostor $W^{1,2}_{0,div}(\Omega)$ je uzavřený podprostor prostoru $W^{1,2}_0(\Omega)^n$ a tedy se skalárním součinem $\langle u, v\rangle_D = \int_\Omega (\mathcal{D}u)_{ij}(\mathcal{D}v)_{ij}$ je také Hilbertův.*

Důkaz. Definujme funkcionál:
$L : W^{1,2}_0(\Omega)^d \mapsto W^{-1,2}\Omega$
$L : u \mapsto [u, \nabla\varphi]_{W^{1,2}_0} \qquad \forall\varphi \in W^{1,2}_0$
L je lineární a protože :

$$\int_\Omega u_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \le \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^d u_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \|u\|_2\|\varphi\|_{1,2} \le \|u\|_{1,2}\|\varphi\|_{1,2}$$

je L také spojitý. Protože $W^{1,2}_{0,div} = \ker L$, je důkaz hotov. $\square$

Kapitola 2

Řešení Stokesova problému

2.1 Existence a jednoznačnost

Nejprve budeme formulovat existenční věty pro speciálnější případ rovnice 1.1.1:

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\, A\mathcal{D}u + B\nabla p &= f \\ \mathrm{div} u &= 0 \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

2.1.1 Definice. *Nechť $f \in W^{-1,2}(\Omega)^d$, $A \in L^\infty(\Omega)^{d^4}$, $B \in W^{1,\infty}(\Omega)^{d^2}$. Pak řekneme, že dvojice $(u,p) \in W^{1,2}_{0,div} \times L^2(\Omega)$ je slabé řešení soustavy 2.1.1, pokud splňuje rovnici:*

$$-\mathrm{div}\, A\mathcal{D}u + B\nabla p = f \tag{2.1.2}$$

ve smyslu distribucí, tzn. rovnice

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{d} \int_\Omega A^{kl}_{ij}(\mathcal{D}u)_{lj}(\mathcal{D}\varphi)_{ki} + \sum_{j,k=1}^{d} \int_\Omega p \frac{\partial}{\partial j}(B_{kj}\varphi_k) = [f,\varphi]_{W^{1,2}_0} \tag{2.1.3}$$

platí pro všechna $\varphi \in W^{1,2}_0(\Omega)^d$

2.1.2 Pozorování. *(i) Pokud je B esenciálně regulární ($C = B^{-1}$), pak (u,p) je slabým řešením 2.1.1 právě když řeší rovnici:*

$$-C\mathrm{div}\,(A\mathcal{D}u) + \nabla p = h \tag{2.1.4}$$

ve smyslu distribucí, kde h je definováno způsobem: $[h,\varphi]_{W^{1,2}_0} \stackrel{def}{=} [f, C^T\varphi]_{W^{1,2}_0}$.

(ii) Spočítejme nyní odhad na $\|h\|_{-1,2}$:

$$\begin{aligned} \|h\|_{-1,2} &= \sup\{|[h,\varphi]_{W^{1,2}_0}|; \varphi \in B_{W^{1,2}_0}(1)\} = \sup\{|[f,C^T\varphi]_{W^{1,2}_0}|; \varphi \in B_{W^{1,2}_0}(1)\} \\ &\le \sup\{|[f,\varphi]_{W^{1,2}_0}|; \varphi \in B_{W^{1,2}_0}((P_3^{-1}\|C^T\|^{-1}_{1,\infty}))\} \\ &= P_3\|C^T\|_{1,\infty}\sup\{|[f,\varphi]_{W^{1,2}_0}|; \varphi \in B_{W^{1,2}_0}(1)\} \\ &\le P_3\|C^T\|_{1,\infty}\|f\|_{-1,2} \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

(iii) *Pojďme se podívat na první člen v rovnici 2.1.4:*

$$[C\mathrm{div}\,(A\mathcal{D}u)]_m = C_{mk}\frac{\partial}{\partial x_i}(A^{kl}_{ij}(\mathcal{D}u)_{lj}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(C_{mk}A^{kl}_{ij}(\mathcal{D}u)_{lj}) - \frac{\partial C_{mk}}{\partial x_i}A^{kl}_{ij}(\mathcal{D}u)_{lj} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_n}(\hat{C}^{mk}_{ni}A^{kl}_{ij}(\mathcal{D}u)_{lj}) - \frac{\partial C^{mk}}{\partial x_i}A^{kl}_{ij}(\mathcal{D}u)_{lj} = \mathrm{div}\,(\hat{C}\!:\!A\mathcal{D}u) - (\nabla C)A\mathcal{D}u$$

(iv) *Předpokládejme, že* $A \in L^\infty(\Omega)^{d^4}$, $C \in L^\infty(\Omega)^{d^2}$. *Označme* $\mathbb{D} \overset{def}{=} \widehat{C} : A$, *zřejmě* $\mathbb{D} \in L^\infty(\Omega)^{d^4}$. *Pak platí následující sada odhadů (kvůli srozumitelnosti Hölderovy nerovnosti nebudu v následujících odhadech používat Einsteinovu sumační konvenci):*

$$\begin{aligned}
|[\mathrm{div}\,\mathbb{D}(\mathcal{D}u),\varphi]_{W^{1,2}_0}| &= \left|\int\limits_\Omega \sum_{n,m=1}^{d}\left(\sum_{j,l=1}^{d}\mathbb{D}^{ml}_{nj}(x)(\mathcal{D}u)_{lj}(x)\right)\tfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}\right| \\
&\le \int\limits_\Omega \sum_{m,n=1}^{d}\left(\sum_{j,l=1}^{d}|\mathbb{D}^{ml}_{nj}(x)||(\mathcal{D}u)_{lj}(x)|\right)|\tfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}| \\
&\le \int\limits_\Omega \sum_{m,n=1}^{d}\left(\sum_{j,l=1}^{d}|\mathbb{D}^{ml}_{nj}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j,l=1}^{d}|(\mathcal{D}u)_{lj}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}|\tfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}| \\
&= \int\limits_\Omega \left(\sum_{j,l=1}^{d}|(\mathcal{D}u)_{lj}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{m,n=1}^{d}\left(\sum_{j,l=1}^{d}|\mathbb{D}^{ml}_{nj}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}|\tfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}| \\
&\le \int\limits_\Omega \left(\sum_{j,l=1}^{d}|(\mathcal{D}u)_{lj}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j,l,m,n=1}^{d}|\mathbb{D}^{ml}_{nj}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{m,n=1}^{d}|\tfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \|\mathbb{D}\|_\infty\int\limits_\Omega \left(\sum_{j,l=1}^{d}|(\mathcal{D}u)_{lj}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{m,n=1}^{d}|\tfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \|\mathbb{D}\|_\infty\left(\int\limits_\Omega \sum_{j,l=1}^{d}|(\mathcal{D}u)_{lj}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega \sum_{m,n=1}^{d}|\tfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \|\mathbb{D}\|_\infty\|\mathcal{D}u\|_2\|\nabla\varphi\|_2 \\
&\le P_2\|\mathbb{D}\|_\infty\|u\|_D\|\varphi\|_D
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

(v) *Nechť opět* $A \in L^\infty(\Omega)^{d^4}$, $C \in L^\infty(\Omega)^{d^2}$ *a* $\mathbb{D} \overset{def}{=} \widehat{C}\!:\!A$. *Pro pevné* $u \in W^{1,2}_0$ *zaveďme:*
$L_u \in W^{-1,2}(\Omega)^d$
$L_u : \varphi \mapsto \int_\Omega \mathbb{D}^{ml}_{nj}(x)\,(\mathcal{D}u)_{lj}\,(x)\,(\mathcal{D}\varphi)_{mn}\,(x) \qquad \forall\varphi \in W^{1,2}_0(\Omega)^d$
L_u *je zřejmě lineární (plyne z linearity integrálu) a z předchozího odhadu 2.1.6 je* L_u *také spojitý. Protože* $W^{1,2}_{0,div}$ *je Hilbertův prostor, z Fréchet-Rieszovy věty (viz [3] 2.9) existuje* $w \in W^{1,2}_{0,div}$ *tak, že* $[L_u,\varphi]_{W^{1,2}_{0,div}} = \langle w,\varphi\rangle_D$.
Definujme:
$D : W^{1,2}_{0,div} \mapsto W^{1,2}_{0,div}$
$D : u \mapsto w \qquad$ *tak, že* $[L_u,\varphi]_{W^{1,2}_{0,div}} = \langle w,\varphi\rangle \qquad \forall\varphi \in W^{1,2}_{0,div}$
Navíc Fréchet-Rieszova věta dává $\|L_u\|_D = \|Du\|_D \le P_2\|\mathbb{D}\|_\infty\|u\|_D$ *a tím se dostávám k odhadu* $\|D\|_D = P_2\|\mathbb{D}\|_\infty$. *Linearita* D *opět plyne z linearity integrálu a odhad 2.1.6 nám dává i spojitost.*

(vi) *Znovu předpokládejme, že* $A \in L^\infty(\Omega)^{d^4}$ *a* $C \in W^{1,\infty}(\Omega)^{d^2}$ *a definujme matici* $\mathbb{E}_j^{ml} \stackrel{def}{=} \frac{\partial C_{mk}}{\partial x_i} A_{ij}^{kl}$. *Zřejmě* $\mathbb{E} \in L^\infty(\Omega)^{d^3}$. *Platí odhady (opět kvůli srozumitelnosti bez Einsteinovy sumační konvence):*

$$\begin{aligned}
|[\mathbb{E}\mathcal{D}u, \varphi]_{W_0^{1,2}}| &= \left| \int_\Omega \sum_{j,l,m}^{d} \mathbb{E}_j^{ml}(x)(\mathcal{D}u)_{lj}(x)\varphi_m(x) \right| \\
&\leq \int_\Omega \sum_{m=1}^{d} \left(\sum_{j,l=1}^{d} |\mathbb{E}_j^{ml}(x)||(\mathcal{D}u)_{lj}(x)| \right) |\varphi_m| \\
&\leq \int_\Omega \textstyle\sum_{m=1}^{d} \left(\displaystyle\sum_{j,l=1}^{d} |\mathbb{E}_j^{ml}(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j,l=1}^{d} |(\mathcal{D}u)_{lj}(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |\varphi_m(x)| \\
&= \int_\Omega \left(\sum_{j,l=1}^{d} |(\mathcal{D}u)_{lj}(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^{d} \left(\sum_{j,l=1}^{d} |\mathbb{E}_j^{ml}(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |\varphi_m(x)| \\
&\leq \int_\Omega \left(\sum_{j,l=1}^{d} |(\mathcal{D}u)_{lj}(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j,l,m=1}^{d} |\mathbb{E}_j^{ml}(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m=1}^{d} |\varphi_m(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|\mathbb{E}\|_\infty \int_\Omega \left(\sum_{j,l=1}^{d} |(\mathcal{D}u)_{lj}(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m=1}^{d} |\varphi_m(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|\mathbb{E}\|_\infty \left(\int_\Omega \sum_{j,l=1}^{d} |(\mathcal{D}u)_{lj}(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \sum_{m=1}^{d} |\varphi_m(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|\mathbb{E}\|_\infty \|\mathcal{D}u\|_2 \|\varphi\|_2 \\
&\leq P_1 \|\mathbb{E}\|_\infty \|u\|_D \|\varphi\|_D
\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

(vii) *V duchu předchozích definic (*$A \in L^\infty(\Omega)^{d^4}$, $C \in W^{1,\infty}(\Omega)^{d^2}$, $\mathbb{E}_j^{ml} \stackrel{def}{=} \frac{\partial C_{mk}}{\partial x_i} A_{ij}^{kl}$*) definujme pro pevné* $u \in W_0^{1,2}$ *následující operátor:*
$N_u : L^2 \mapsto \mathbb{R}$
$N_u : \psi \mapsto \int_\Omega \mathbb{E}_j^{ml}(X)(\mathcal{D}u)_{lj}(x)\psi(x) \qquad \forall \psi \in L^2(\Omega)^d$
a v návaznosti na něj ještě operátor:
$\mathcal{N} : W_0^{1,2} \mapsto (L^2)'$
$\mathcal{N} : u \mapsto N_u$
Z předchozího odhadu 2.1.7 plyne $\|\mathcal{N}\|_D \leq P_1\|\mathbb{E}\|_\infty$. *Označme nyní* Emb *vnoření* $W_0^{1,2}$ *do* L^2.*Toto vnoření je kompaktní (viz [2], kapitola 2, lemma 1.5.1) a ze Schauderovy věty (viz [3], 2.53) je i jeho adjunkce* Emb′ *kompaktní.*
Dále definujme $\mathcal{E} : W_0^{1,2} \mapsto W_0^{1,2}$ *následujícím předpisem:*
$[\mathcal{E}u, \varphi]_{W_0^{1,2}} = [\mathcal{N}u, \mathrm{Emb}\varphi]_{L^2} = [\mathrm{Emb}'\mathcal{N}u, \varphi]_{W_0^{1,2}}$, *takže* $\mathcal{E} = \mathrm{Emb}'\mathcal{N}$ *a platí, že je* $\mathcal{E}$ *kompaktní. Navíc z předchozích odhadů plyne* $\|\mathcal{E}\|_D \leq P_1\|\mathbb{E}\|_\infty$ *a stejně jako v předchozím případě definujme:*
$E : W_{0,div}^{1,2} \mapsto W_{0,div}^{1,2}$
$E : u \mapsto w \qquad$ *tak, že* $[\mathcal{E}u, \varphi]_{W_{0,div}^{1,2}} = \langle w, \varphi \rangle_D \qquad \forall \varphi \in W_{0,div}^{1,2}$
Opět z Frechét-Rieszovy věty plyne vztah: $\|Eu\|_D = \|\mathcal{E}u\|_D \leq P_1\|\mathbb{E}\|_\infty\|u\|_D$ *a odhad* $\|E\|_D \leq P_1\|\mathcal{E}\|_\infty$. *Navíc* E *je kompaktní operátor díky kompaktnosti operátoru* $\mathcal{E}$.

(viii) *Dvojice* (u, p) *splňuje rovnici 2.1.4 ve smyslu distribucí, právě když splňuje následující* *rovnici:*

$$[\mathrm{div}\mathbb{D}(\mathcal{D}u),\varphi]_{W_0^{1,2}}+[\mathbb{E}\mathcal{D}u,\varphi]_{W_0^{1,2}}+[p,\mathrm{div}\varphi]_{W_0^{1,2}}=[h,\varphi]_{W_0^{1,2}}\qquad\forall\varphi\in W_0^{1,2}\quad(2.1.8)$$

Navíc pokud (u,p) splňuje 2.1.8, splňuje u také rovnici:

$$\int_\Omega C_{mk}A_{ij}^{kl}(\mathcal{D}u)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+\int_\Omega\frac{\partial C_{mk}}{\partial x_i}A_{ij}^{kl}(\mathcal{D}u)_{lj}\varphi_m=[h,\varphi]_{W_{0,div}^{1,2}}\qquad\forall\varphi\in W_{0,div}^{1,2}\quad(2.1.9)$$

$$\langle Du,\varphi\rangle_D+\langle Eu,\varphi\rangle_D=[h,\varphi]_{W_{0,div}^{1,2}}\qquad\forall\varphi\in W_{0,div}^{1,2}\qquad(2.1.10)$$

V následujícím textu ukážeme, že existence a jednoznačnost řešení rovnice 2.1.10 zajištuje už existenci a jednoznačnost řešení rovnice 2.1.8. Záměr této práce je tedy studium rovnice 2.1.10 a použití Fredholmových vět na operátor D+E. (Připomínám, že E je kompaktní operátor a za jistých podmínek je D spojitá bijekce). Nejdříve ale ukážeme souvislost s úlohou 2.1.1.

2.1.3 Lemma. *Nechť $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ a nechť $\Omega_0\subset\Omega$ je libovolná neprázdná podoblast.*

(a) Pak existuje $K\in\mathbb{R}$ tak, že pro každé $g\in L^2(\Omega)$ pro které $\int_\Omega g=0$ existuje alespoň jedno $u\in W_0^{1,2}(\Omega)^d$ splňující

$$\mathrm{div}u=g,\qquad\|\nabla u\|_2\le K\|g\|_2$$

(b) Pak existuje $K\in\mathbb{R}$ tak, že pro všechny $f\in W^{-1,2}(\Omega)^d$ pro které platí, že $[f,\varphi]=0$ kdykoli $\varphi\in W_{0,div}^{1,2}$, existuje jednoznačně určené $p\in L^2(\Omega)$ tak, že

$$\nabla p=f,\qquad\int_{\Omega_0}p=0,\qquad\|p\|_2\le K\|f\|_{-1,2}$$

Důkaz. Viz [2] kapitola 2, lemma 2.1.1 □

2.1.4 Věta. *Nechť D a E jsou zavedeny jako v pozorování 2.1.2 a nechť je operátor $D+E$ bijektivní $W_{0,div}^{1,2}\mapsto W_{0,div}^{1,2}$. Dále nechť $\Omega_0\subset\Omega$ je neprázdná podoblast a nechť $h\in W^{-1,2}(\Omega)^d$. Pak existuje právě jedna dvojice $(u,p)\in W_{0,div}^{1,2}\times L^2$ splňující 2.1.4, pro kterou platí $\int_{\Omega_0}p=0$. Navíc existuje konstanta $k\in\mathbb{R}$ závisející pouze na Ω, Ω_0, D a E tak, že platí:*

$$\|u\|_{1,2}\le k\|h\|_{-1,2}\qquad(2.1.11)$$

$$\|p\|_2\le k\|h\|_{-1,2}\qquad(2.1.12)$$

Důkaz. Z Frechét-Rieszovy věty existuje $y\in W_{0,div}^{1,2}$ tak, že $\langle y,\varphi\rangle_D=[h,\varphi]_{W_{0,div}^{1,2}}$ pro každé $\varphi\in W_{0,div}^{1,2}$. Navíc $\|y\|_D=\|h\|_D\le\|h\|_{-1,2}$. Díky bijektivnosti operátoru $D+E$ existuje jeho spojitá inverze a tedy existuje právě jedno u takové, že $(D+E)u=y$ a tedy i rovnici $\langle Du,\varphi\rangle_D+\langle Eu,\varphi\rangle_D=[h,\varphi]_{W_{0,div}^{1,2}}$. Protože $u=(D+E)^{-1}y$, platí

$$\|u\|_{1,2}\le P\|u\|_D\le Pd\|y\|_D\le Pd\|h\|_{-1,2}\qquad(2.1.13)$$

$$\|u\|_{1,2}\le k\|h\|_{-1,2}\qquad(2.1.14)$$

a existuje jednoznačně určené řešení u rovnice 2.1.10.
Definujme nyní funkcionál

$$[\nabla p, \varphi]_{W_0^{1,2}} = [h, \varphi]_{W_0^{1,2}} - [\mathrm{div}\mathbb{D}(\mathcal{D}u)u, \varphi]_{W_0^{1,2}} - [\mathbb{E}\mathcal{D}u\varphi]_{W_0^{1,2}} \qquad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)^d \quad (2.1.15)$$

který má pro testovací funkce $\varphi \in W_{0,div}^{1,2}$ tvar

$$[\nabla p, \varphi]_{W_{0,div}^{1,2}} = [h, \varphi]_{W_{0,div}^{1,2}} - \langle D + E, \varphi \rangle_D \qquad (2.1.16)$$

Díky platnosti rovnice 2.1.10 je $[\nabla p, \varphi]_{W_0^{1,2}} = 0$ pro $\varphi \in W_{0,div}^{1,2}$, a jsou splněny předpoklady lemmatu 2.1.3, části (b). To dává jednoznačnou existenci $p \in L^2(\Omega)$ takového, že $\nabla p = h - div\mathbb{D}(\mathcal{D}u) - \mathbb{E}\mathcal{D}u$ a $\int_{\Omega_0} p = 0$. Z lemmatu ještě plyne následující odhad:

$$\|p\|_2 \leq K \|h\|_{-1,2} \qquad (2.1.17)$$

(u, p) je jediná dvojice funkcí splňující rovnici 2.1.15, která je ekvivalentní s rovnicí:

$$\langle (D + E)u, \varphi \rangle_D + [\nabla p, \varphi]_{W_0^{1,2}} = [h, \varphi]_{W_0^{1,2}} \qquad (2.1.18)$$

a ta je dále ekvivalentní s rovnici 2.1.8 a ta je ekvivalentní s 2.1.4. Tím je jednoznačné řešení rovnice 2.1.4 nalezeno. □

2.1.5 Věta. *Nechť D a E jsou zavedeny jako v pozorování 2.1.2 a nechť $D + E$ je bijektivní $W_{0,div}^{1,2} \mapsto W_{0,div}^{1,2}$, dále nechť $f \in W^{-1,2}(\Omega)$, $\Omega_0 \subset \Omega$ je neprázdná podoblast a $g \in L^2(\Omega)$. Pak existuje právě jedno slabé řešení $(u, p) \in W_0^{1,2}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ rovnice 1.1.1, pro které platí, že $\int_{\Omega_0} p = 0$. Navíc platí odhady:*

$$\|u\|_{1,2} \leq k(\|f\|_{-1,2} + \|g\|_2) \qquad (2.1.19)$$

$$\|p\|_2 \leq k(\|f\|_{-1,2} + \|g\|_2) \qquad (2.1.20)$$

Důkaz. Nejprve uvažujme speciální případ $g = 0$ (vlastně rovnici 2.1.1). Definujme nejdřív $h \in W^{-1,2}$ tak, že $[h, \varphi]_{W_0^{1,2}} = [f, C^T \varphi]_{W_0^{1,2}}$. Díky větě 2.1.4 víme, že existuje dvojice $(u, p) \in W_{0,div}^{1,2} \times L^2$ řešící rovnici 2.1.8. Máme slabé řešení rovnice 2.1.4 a tedy i slabé řešení rovnice 2.1.1. V pozorování 2.1.2 jsme ukázali, že $\|h\|_{-1,2} \leq P_3 \|C^T\|_{1,\infty} \|f\|_{-1,2}$, a proto platí následující odhady:

$$\|u\|_{1,2} \leq P_3 K \|C^T\|_{1,\infty} \|f\|_{-1,2} \qquad (2.1.21)$$

$$\|u\|_{1,2} \leq k \|f\|_{-1,2} \qquad (2.1.22)$$

Pro $g \neq 0$ budeme hledat řešení ve tvaru $u = u_0 + u_1$, kde $\mathrm{div} u_0 = 0$. Podle lemmatu 2.1.3 existuje $u_1 \in W_0^{1,2}$ řešící $\mathrm{div} u_1 = g$, splňující $\|u_1\|_D \leq K \|g\|_2$. Člen $\mathrm{div}\, A\mathcal{D}u_1$ definuje na $W_0^{1,2}$ spojitý lineární funkcionál způsobem: $[\mathrm{div}\, A\mathcal{D}u_1, \varphi]_{W_0^{1,2}} = \int_\Omega A\mathcal{D}u_1 \mathcal{D}\varphi$. Platí $\|\mathrm{div}\, A\mathcal{D}u_1\|_{-1,2} \leq K \|A\|_\infty \|u_1\|_D$. Dle již dokázané věty 2.1.4 existuje právě jedno slabé řešení (u_0, p) rovnice:

$$-\mathrm{div} A\mathcal{D}u_0 + \nabla p = f + \mathrm{div} A\mathcal{D}u_1 \qquad (2.1.23)$$

Pro důkaz jednoznačnosti uvažujme dvě řešení $(u, p), (u', p')$. Pak rozdíl $(u' - u, p' - p)$ řeší rovnici 2.1.1 s pravou stranou $f = 0$. Z první části důkazu je patrné, že existuje právě

jedno řešení této rovnice, které splňuje $\int_{\Omega_0}(p'-p)=0$ a je zřejmé, že jediné vyhovující řešení je $(u,p)=(0,0)$. A odtud nutně $u=u'$ a $p=p'$ a jednoznačnost řešení rovnice 1.1.1 je dokázána.
Zbývá dokázat platnost odhadů. Z věty 2.1.4:
$\|u_0\|_{1,2} \le Pd\|f+\mathrm{div}A\mathcal{D}u_1\|_{-1,2} \le Pd(\|f\|_{-1,2}+\|\mathrm{div}A\mathcal{D}u_1\|_{-1,2}) \le$
$\le Pd(\|f\|_{-1,2}+\|A\|_\infty\|u_1\|_D) \le Pd(\|f\|_{-1,2}+K\|A\|_\infty\|g\|_2)$
Obdobně:
$\|p\|_{1,2} \le K\|f+\mathrm{div}A\mathcal{D}u_1\|_{-1,2} \le K(\|f\|_{-1,2}+\|\mathrm{div}A\mathcal{D}u_1\|_{-1,2}) \le$
$\le K(\|f\|_{-1,2}+\|A\|_\infty\|u_1\|_D) \le K(\|f\|_{-1,2}+\|A\|_\infty\|g\|_2)$
Čímž je důkaz dokončen. □

2.2 Operátor D+E

V této kapitole se budu zabývat řešením rovnice $(D+E)x=y$, $x,y\in W^{1,2}_{0,div}$, která, jak jsem již ukázal, je zásadní pro řešení problému.
Společnými předpoklady vět v této kapitole jsou: matice $C\in W^{1,\infty}(\Omega)^{d^2}$ je tvaru $\lambda I+K$, matice $A\in L^\infty(\Omega)^{d^4}$ je symetrická a eliptická s konstantou α a operátory D, E jsou zavedeny jako v pozorování 2.1.2. Pak levá strana rovnice 2.1.9 má následující tvar:

$$\lambda\int_\Omega A^{kl}_{ij}(\mathcal{D}u)_{lj}(\mathcal{D}\varphi)_{ki}+\int_\Omega K_{mk}A^{kl}_{ij}(\mathcal{D}u)_{lj}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+\int_\Omega\frac{\partial K_{mk}}{\partial x_i}A^{kl}_{ij}(\mathcal{D}u)_{lj}\varphi_m \tag{2.2.1}$$

Proto bude užitečné rozložit operátor $D+E$ následujícím způsobem: $D+E=\lambda F+G+E$ kde F, G a E definuji následovně (již zkráceně a s automatickým použitím ztotožnění mezi Hilbertovým prostorem a jeho duálem):
$\langle Fu,\varphi\rangle_D=\int_\Omega A^{kl}_{ij}(\mathcal{D}u)_{lj}(\mathcal{D}\varphi)_{ki}$
$\langle Gu,\varphi\rangle_D=\int_\Omega K_{mk}A^{kl}_{ij}(\mathcal{D}u)_{lj}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_i}$
$\langle Eu,\varphi\rangle_D=\int_\Omega \frac{\partial K_{mk}}{\partial x_i}A^{kl}_{ij}(\mathcal{D}u)_{lj}\varphi_m$

2.2.1 Lemma. *Platí:*

1. $\|F\|_D\le\|A\|_\infty$
2. $\|G\|_D\le P_2\|K\|_\infty\|A\|_\infty$
3. $\|E\|_D\le P_1\|\nabla K\|_\infty\|A\|_\infty$
4. *Existuje* F^{-1} *a* $\|F\|_D^{-1}\le\|F^{-1}\|_D\le\frac{1}{\alpha}$.

Důkaz. Pro důkaz (1)-(3) je nutno uplatnit stejný postup odhadů jako v pozorování 2.1.2. Protože je to mechanické a dlouhé počítání, nechávám to na čtenáři. Navíc jsou ale třeba následující dva odhady (bez Einsteinovy sumační konvence):

$$\begin{aligned}\|\sum_{k=1}^d K_{mk}A^{kl}_{ij}\|^2_\infty &= \sum_{i,j,m,l=1}^d\|\sum_{k=1}^d K_{mk}A^{kl}_{ij}\|^2_\infty\le\sum_{i,j,m,l=1}^d(\sum_{k=1}^d\|K_{mk}\|_\infty\|A^{kl}_{ij}\|_\infty)^2\\ &\le \sum_{i,j,m,l=1}^d\left(\sum_{k=1}^d\|K_{mk}\|^2_\infty\right)\left(\sum_{k=1}^d\|A^{kl}_{ij}\|^2_\infty\right)\le\sum_{m,k=1}^d\|K_{mk}\|^2_\infty\sum_{i,j,k,l=1}^d\|A^{kl}_{ij}\|^2_\infty\\ &= \|K\|^2_\infty\|A\|^2_\infty\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

$$
\begin{aligned}
\| \sum_{i,k=1}^{d} \tfrac{\partial C_{mk}}{\partial x_i} A_{ij}^{kl} \|^2 &= \sum_{j,m,l=1}^{d} \| \sum_{i,k=1}^{d} \tfrac{\partial K_{mk}}{\partial x_i} A_{ij}^{kl} \|_\infty^2 \leq \sum_{j,m,l=1}^{d} (\sum_{i,k=1}^{d} \| \tfrac{\partial K_{mk}}{\partial x_i} \|_\infty \| A_{ij}^{kl} \|_\infty)^2 \\
&\leq \sum_{j,l,m=1}^{d} \left(\sum_{i,k=1}^{d} \| \tfrac{\partial K_{mk}}{\partial x_i} \|_\infty^2 \right) \left(\sum_{i,k=1}^{d} \| A_{ij}^{kl} \|_\infty^2 \right) \leq \sum_{i,m,k=1}^{d} \| \tfrac{\partial K_{mk}}{\partial x_i} \|_\infty^2 \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \| A_{ij}^{kl} \|_\infty^2 \\
&\leq \| \nabla K \|_\infty^2 \| A \|_\infty^2
\end{aligned}
\tag{2.2.3}
$$

Pro důkaz bodu čtyři definujme $a(u,v) \stackrel{def}{=} \langle Fu, v \rangle$. Díky elipticitě A platí nerovnost: $|a(u,u)| = |\int A\mathcal{D}u\mathcal{D}u| \geq \alpha \|u\|_D^2$ a bilineární forma splňuje předpoklady Lax-Milgramova lemmatu (viz [1] věta 8.2, kapitola 12). Tudíž ke každému $w \in W_{0,div}^{1,2}$ existuje jednoznačně $u \in W_{0,div}^{1,2}$ tak, že $\langle w, v \rangle = a(u,v) = \langle Fu, v \rangle$ a tedy operátor F je bijektivní. Navíc platí, že $\langle Fu, u \rangle_D \geq \alpha \|u\|_D^2$ a toho využijeme při důkazu odhadů na normu F^{-1}, protože: $\|u\|_D \|F^{-1}u\|_D \geq \langle u, F^{-1}u \rangle \geq \alpha \|F^{-1}u\|_D^2$, platí $\|F^{-1}\|_D \leq \frac{1}{\alpha}$. Druhou nerovnost dostaneme jako jednoduchý důsledek faktu $\|F\|_D \|F^{-1}\|_D \geq \|FF^{-1}\|_D = \|I\| = 1$. □

2.2.2 Lemma. *Pro $|\lambda| > \frac{1}{\alpha} (P_2 \|K\|_\infty \|A\|_\infty + P_1 \|\nabla K\|_\infty \|A\|_\infty)$ je operátor $\lambda F + G + E$ bijektivní.*

Důkaz. Díky existenci inverze F^{-1} je $\lambda F + G + E$ bijektivní, právě když je bijektivní $\lambda I + F^{-1}(G+E)$. Ze spektrální teorie víme, že pokud $|\lambda| > \|F^{-1}(G+E)\|_D$, pak je operátor $\lambda I + F^{-1}(G+E)$ prostý a na. Z lemmatu 2.2.1 platí odhad

$$
\|F^{-1}(G+E)\|_D \leq \frac{1}{\alpha} (P_2 \|K\|_\infty \|A\|_\infty + P_1 \|\nabla K\|_\infty \|A\|_\infty) < |\lambda| \tag{2.2.4}
$$

a důkaz je dokončen. □

2.2.3 Lemma - úprava Fredholmovy věty. *Nechť H je Hilbertův prostor a nechť existují tři lineární spojité operátory $F, G, E : H \mapsto H$ takové, že F je invertibilní a E je kompaktní. Na tomto místě je slušné připomenout, že F' značí adjunkci F a podobně pro G a E. Dále nechť $|\lambda| > \|G\|_H \|F^{-1}\|_H$. Pak*

1. $\mathrm{Ran}(\lambda F' + G' + E') = \mathrm{Ker}(\lambda F + G + E)^\perp$
2. $\mathrm{Ran}(\lambda F + G + E) = \mathrm{Ker}(\lambda F' + G' + E')^\perp$.
3. $\dim(\mathrm{Ker}(\lambda F + G + E)) = \dim(\mathrm{Ker}(\lambda F' + G' + E')$ *a navíc je konečná.*

Důkaz. Z invertibility F je $\lambda F + G$ bijektivní právě když je bijektivní operátor $\lambda I + F^{-1}G$ a protože dle předpokladů je $|\lambda| > \|F^{-1}G\|_H$, je operátor $\lambda F + G$ invertibilní. Odtud $\lambda F + G + E$ je bijektivní právě když jsou bijektivní operátory $I + (\lambda F + G)^{-1}E$ a $I + E(\lambda F + G)^{-1}$. Protože E je kompaktní operátor, můžeme použít druhou Fredholmovu větu (viz [3], 5.26).
Budu uvažovat následující rovnosti:
$\mathrm{Ran}(I + E(\lambda F + G)^{-1}) = \mathrm{Ran}(\lambda F + G + E) = (\lambda F + G)\mathrm{Ran}(I + (\lambda F + G)^{-1}E)$
$\mathrm{Ker}(I + (\lambda F + G)^{-1}E) = \mathrm{Ker}(\lambda F + G + E) = (\lambda F + G)^{-1}\mathrm{Ker}(I + E(\lambda F + G)^{-1})$
Pro důkaz těchto rovností uvádím následující dvě sady ekvivalencí (z důvodů jisté triviality úvah bez doprovodných komentářů):
$x \in \mathrm{Ran}(I + E(\lambda F + G)^{-1}) \Leftrightarrow \exists y \in H, x = y + E(\lambda F + G)^{-1}y, \exists z \in H, y = (\lambda F + G)z \Leftrightarrow x = (\lambda F + G)z + Ez \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ran}(\lambda F + G + E) \Leftrightarrow \exists z \in H, x = (\lambda F + G + E)z \Leftrightarrow x =$

$(\lambda F+G)(I+(\lambda F+G)^{-1}E)z \Leftrightarrow x \in (\lambda F+G)\mathrm{Ran}(I+(\lambda F+G)^{-1}E)$,
$x \in \mathrm{Ker}(I+(\lambda F+G)^{-1}E) \Leftrightarrow (I+(\lambda F+G)^{-1}E)x = 0 \Leftrightarrow (\lambda F+G)(I+(\lambda F+G)^{-1}E)x = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}(\lambda F+G+E) \Leftrightarrow (\lambda F+G+E)x = 0 \Leftrightarrow (I+E(\lambda F+G)^{-1})(\lambda F+G)x = 0 \Leftrightarrow (\lambda F+G)x \in \mathrm{Ker}(I+E(\lambda F+G)^{-1}) \Leftrightarrow x \in (\lambda F+G)^{-1}\mathrm{Ker}(I+E(\lambda F+G)^{-1})$
Důkaz prvního tvrzení už jednoduše plyne z následujícího použití druhé Fredholmovy věty:
$\mathrm{Ran}(\lambda F'+G'+E') = \mathrm{Ran}(I+(\lambda F+G)^{-1})'E') = \mathrm{Ran}(I+(E(\lambda F+G)^{-1})')$
$= \mathrm{Ker}(I+E(\lambda F+G)^{-1})^{\perp} = \mathrm{Ker}(\lambda F+G+E)^{\perp}$ důkaz první části je uzavřen.
Důkaz druhé rovnosti bude probíhat podobně:
$\mathrm{Ran}(\lambda F+G+E) = \mathrm{Ran}(I+E(\lambda F+G)^{-1}) = \mathrm{Ker}(I+(E(\lambda F+G)^{-1})')^{\perp} = \mathrm{Ker}(I+((\lambda F+G)^{-1})'E')^{\perp} = \mathrm{Ker}(\lambda F'+G'+E')^{\perp}$.
Použitím třetí Fredholmovy věty (viz [3], 5.28) rovnou dostáváme třetí část tvrzení.

□

2.2.4 Lemma. *Buď X Banachův prostor, $G : X \mapsto X$ lineární spojitý operátor a $E : X \mapsto X$ lineární kompaktní operátor. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje nejvýše konečně mnoho λ, $|\lambda| > 2\|G\| + \varepsilon$, pro která není operátor $\lambda I + G + E$ invertibilní.*

Důkaz. Protože $|\lambda| > \|G\|$, je $\lambda I - G$ bijektivní. $(\lambda I - G)^{-1}E$ je kompaktní operátor a díky Fredholmově alternativě je $I - (\lambda I - G)^{-1}E$ prostý na X právě když zobrazuje X na X. Proto je λ vlastním číslem právě když je operátor $\lambda I - (G+E)$ invertibilní. (Neboli na množině $\{\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| > \|G\|\}$ se spektrum shoduje s bodovým spektrem.)
Nyní nechť existuje nekonečně mnoho vlastních čísel operátoru $G+E$ větších než $\varepsilon + 2\|G\|$. Vybereme jakoukoli posloupnost různých vlastních čísel $\lambda_n > \varepsilon + 2\|G\|$ a k ní příslušné vlastní vektory x_n. Připomínám, že vlastní vektory k různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé. Označme X_n lineární prostor generovaný vektory $\{x_1, \dots, x_n\}$. Platí $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_n$. Z Rieszova lemmatu o skoro-kolmici (viz [3] 5.10) existuje $z_n \in X_n$, $\|z_n\| = 1$ a $\mathrm{dist}(z_n, X_{n-1}) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2\varepsilon + 4\|G\|}$. Volme $m > k$ pevně a označme $z = \lambda_{m+1}z_{m+1} - (G+E)z_{m+1}$. Protože $z = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i x_i$ a $(G+E)x_j = \lambda_j x_j$, zřejmě $z \in X_m$

$$\begin{array}{rcl} \|Ez_{m+1} - Ez_k\| & \geq & \|(G+E)z_{m+1} - (G+E)z_k\| - \|G(z_{m+1} - z_k)\| \\ & \geq & \|\lambda_{m+1}z_{m+1} - z + (G+E)z_k\| - 2\|G\| \\ & \geq & \lambda_{m+1}\mathrm{dist}(z_{m+1}, X_k) - 2\|G\| \\ & \geq & (\varepsilon + 2\|G\|)(1 - \frac{\varepsilon}{2\varepsilon+4\|G\|}) - 2\|G\| \\ & \geq & \frac{1}{2}\varepsilon \end{array} \tag{2.2.5}$$

Z posloupnosti Ez_n nelze vybrat konvergentní podposloupnost, což je spor s kompaktností operátoru E. □

Problém: jde konstanta 2 zlepšit?

2.2.5 Důsledek. *Uvažujme rovnici 2.1.4 s $A \in L^\infty(\Omega)^{d^4}$ symetrickou a eliptickou s konstantou α, $C \in W^{1,\infty}(\Omega)^{d^2}$ tvaru $\lambda I - K$, $K \in W^{1,\infty}(\Omega)^{d^2}$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje nejvýše konečně mnoho λ v intervalu $(-\infty, -2P_2\|K\|_\infty \frac{\|A\|_\infty}{\alpha} - \varepsilon) \cup (2P_2\|K\|_\infty \frac{\|A\|_\infty}{\alpha} + \varepsilon, \infty)$, pro něž neexistuje slabé řešení rovnice 2.1.4.*

Důkaz. Pokud (u,p) slabě řeší rovnici 2.1.4, pak dle pozorování 2.1.2 u řeší také rovnici:

$$\langle(\lambda F + G + E)u, \varphi\rangle_D = [h, \varphi]_{W^{1,2}_{0,div}} \qquad \forall \varphi \in W^{1,2}_{0,div} \tag{2.2.6}$$

kde operátory F, G, E jsou zavedeny jako na začátku této kapitoly. Dle lemmatu 2.2.1 je F bijektivní a platí následující odhad $\|F^{-1}G\| < P_2\|K\|_\infty \frac{\|A\|_\infty}{\alpha}$. Pak lemma 2.2.4 dává, že pro každé $\varepsilon > 0$ je operátor $\lambda I + F^{-1}G + F^{-1}E$ bijektivní pro všechna až na konečně mnoho $\lambda \in (-\infty, -2P_2\|K\|_\infty \frac{\|A\|_\infty}{\alpha} - \varepsilon) \cup (2P_2\|K\|_\infty \frac{\|A\|_\infty}{\alpha} + \varepsilon, \infty)$. Pro taková λ je bijektivní i operátor $\lambda F + G + E$ a věta 2.1.4 dává jednoznačně určené slabé řešení rovnice 2.1.4. □

2.3 Důsledky

V této kapitole uvedu důsledky poznatků kapitol 2.1 a 2.2 přímo na zobecněný Stokesův problém. Důkazy následujících vět se budou z velké části skládat pouze z odkazů na tyto dvě kapitoly. Navíc budu všude předpokládat, že matice B je různá od identity. Zájemce o případ $B = I$ odkazuji na článek [4]. Nejdříve ale musíme dokázat souvislost matice B a její inverze:

2.3.1 Lemma. *Pro matici $B \in W^{1,\infty}(\Omega)^{d^2}$ tvaru $B = I - \lambda K$, kde $K \in W^{1,\infty} \setminus \{0\}$ a kde $|\lambda| < (2\|K\|_\infty)^{-1}$, existuje inverze $B^{-1} \in W^{1,\infty}(\Omega)^{d^2}$ tvaru $B^{-1} = I + L$, kde $L = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i (K)^i$. Navíc platí:*

$$\|\nabla B^{-1}\|_\infty = \|\nabla L\|_\infty \leq \|\nabla K\|_\infty \frac{|\lambda|}{1 - 2|\lambda|\|K\|_\infty} \tag{2.3.1}$$

$$\|L\|_\infty \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \|K\|_\infty^i = \frac{|\lambda|\|K\|_\infty}{1 - |\lambda|\|K\|_\infty} \tag{2.3.2}$$

Důkaz. Protože:

$$\begin{aligned} \|AB\|_\infty^2 &= \sum_{i,j=1}^{d} \|A_{ik}B_{kj}\|_\infty^2 = \sum_{i,j=1}^{d} \text{esssup}\{|A_{ik}B_{kj}|\}^2 \\ &\leq \sum_{i,j=1}^{d} \text{esssup}\{|A_{ik}|\}^2 \text{esssup}\{|B_{kj}|\}^2 \leq \sum_{i,k=1}^{d} \|A_{ik}\|_\infty^2 \sum_{j,k=1}^{d} \|B_{kj}\|_\infty^2 \\ &\leq \|A\|_\infty^2 \|B\|_\infty^2 \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

je $L^\infty(\Omega)^{d^2}$ Banachovou algebrou s jednotkou I. Protože platí následující rovnost $\|\lambda K\|_\infty = |\lambda|\|K\|_\infty \leq 2^{-1}\|K\|_\infty^{-1}\|K\|_\infty < 1$, jsou splněny předpoklady známého von Neumannova lemmatu (viz [3] 6.8) a existuje B^{-1}. Protože $B^{-1} \in L^\infty(\Omega)^{d^2}$ je B odražená od nuly.

A z $B_{ij}^{-1} = \frac{1}{\det B}\overline{B_{ji}}$, platí $\frac{\partial B_{ij}^{-1}}{\partial x_k} = \frac{\frac{\partial \overline{B_{ji}}}{\partial x_k}\det B - \overline{B_{ji}}\frac{\partial \det B}{\partial x_k}}{(\det B)^2}$.

Pravou stranu lze odhadnout zhora z omezenosti členů matice B, z omezenosti derivací a díky tomu, že B je odražená od nuly. Tedy máme omezené první derivace a $B^{-1} \in W^{1,\infty}$. Definujme $s_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i K^i$. Uvažujme nyní na $W^{1,\infty}$ ekvivalentní normu $\|f\|_g = \|f\|_\infty + \|\nabla f\|_\infty$. Pak s_n v této normě splňuje Bolzano-Cauchyovy podmínky. Počítejme (pro odhad normy gradientu viz Dodatky)

$$\begin{aligned} \|s_n - s_m\|_g &= \|\sum_{i=m}^{n} \lambda^i K^i\|_g = \|\sum_{i=m}^{n} |\lambda|^i K^i\|_\infty + \|\sum_{i=m}^{n} |\lambda|^i \nabla K^i\|_\infty \\ &\leq \sum_{i=m}^{n} |\lambda|^i \|K\|_\infty^i + |\lambda|\|\nabla K\|_\infty \sum_{i=m-1}^{n-1} |\lambda|^i 2^i \|K\|_\infty^i \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

a protože obě řady $\sum\limits_{i=0}^{\infty}|\lambda|^i\|K\|_\infty^i$ a $|\lambda|\|\nabla K\|_\infty\sum\limits_{i=0}^{\infty}|\lambda|^i2^i\|K\|_\infty^i$ konvergují, je již splnění BC podmínky jasné. A proto $\lim_{n\to\infty}s_n = B^{-1}$ i v normě $\|.\|_{1,\infty}$. Díky tomu můžeme derivovat řadu člen po členu a dostaneme následující odhady:

$$\|\nabla B\|_\infty = \|\nabla L\|_\infty \le \|\nabla K\|_\infty \frac{|\lambda|}{1-2|\lambda|\|K\|_\infty} \tag{2.3.5}$$

$$\|L\|_\infty \le \sum_{i=1}^{n}\lambda^i\|K\|_\infty^i = \frac{|\lambda|\|K\|_\infty}{1-|\lambda|\|K\|_\infty} \tag{2.3.6}$$

□

Ve zbytku této kapitoly budu předpokládat, že matice $A \in L^\infty(\Omega)^{d^4}$ je symetrická a eliptická s konstantou α, matice $B \in W^{1,\infty}(\Omega)^{d^2}$ je ve tvaru $B = I - \lambda K$, kde $K \in W^{1,\infty}(\Omega)^{d^2}\setminus\{0\}$, funkce f je libovolná funkce z prostoru $W^{-1,2}(\Omega)^d$ a funkce g je libovolná z prostoru L^2. Pokud budu psát o operátoru D a E (popř. F a G), jde o operátory zavedené stejně, jako v pozorování 2.1.2 (resp. jako v kapitole 2.2)

2.3.2 Věta. *Nechť platí:*

$$|\lambda| < \frac{\alpha}{\|A\|_\infty}\frac{1}{4P_2\|K\|_\infty + 2P_1\|\nabla K\|_\infty} \tag{2.3.7}$$

Pak pro každé $f \in W^{-1,2}(\Omega)^d$ a $g \in L^2$ existuje právě jedno řešení rovnice 1.1.1 a platí odhady:

$$\|u\|_{1,2} \le k(\|f\|_{-1,2} + \|g\|_2) \tag{2.3.8}$$

$$\|p\|_{1,2} \le k(\|f\|_{-1,2} + \|g\|_2) \tag{2.3.9}$$

Důkaz. Výsledek lemmatu 2.2.2 a lemmatu 2.3.1. Protože $\alpha \le \|A\|_\infty$, je $|\lambda| < \frac{1}{4\|K\|_\infty}$, a proto existuje $C = B^{-1}$ tvaru $C = I + L$ dle lemmatu 2.3.1. Navíc z nerovnosti

$$\begin{aligned} 1-\lambda\|K\|_\infty \ge 1 - \tfrac{1}{4\|K\|_\infty}\|K\|_\infty \ge 1-\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \\ 1-2\lambda\|K\|_\infty \ge 1 - \tfrac{2}{4\|K\|_\infty}\|K\|_\infty \ge 1-\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

platí:

$$\begin{aligned} \|L\|_\infty \le \tfrac{\lambda\|K\|_\infty}{1-\lambda\|K\|_\infty} \le 2|\lambda|\|K\|_\infty \\ \|\nabla L\|_\infty \le \tfrac{\lambda\|\nabla K\|_\infty}{1-2\lambda\|K\|_\infty)} \le 2|\lambda|\|\nabla K\|_\infty \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

Z lemmatu 2.2.2 víme, že pokud $1 > \frac{1}{\alpha}(P_2\|L\|_\infty\|A\|_\infty + P_1\|\nabla L\|_\infty\|A\|_\infty) > -1$, pak je operátor $D+E$ bijektivní. Po dosazení odhadů na normy L dostaneme

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{\|A\|_\infty}{\alpha}(P_2\|L\|_\infty + P_1\|\nabla L\|_\infty)\right| < \tfrac{\|A\|_\infty}{\alpha}2|\lambda|(P_2\|K\|_\infty + P_1\|\nabla K\|_\infty) < \\ &< \tfrac{\|A\|_\infty}{\alpha}2\tfrac{\alpha}{\|A\|_\infty}\tfrac{1}{4P_2\|K\|_\infty+2P_1\|\nabla K\|_\infty}(P_2\|K\|_\infty + P_1\|\nabla K\|_\infty) < 1 \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

a tedy operátor $D+E$ je skutečně bijektivní. Z věty 2.1.5 dostáváme závěr tvrzení. □

Předchozí věta určuje ta λ, pro která existuje jednoznačně určené slabé řešení rovnice 2.1.1. Následující věta ukazuje, že i po oslabení omezení na λ lze něco o existenci a jednoznačnosti řešení říct.

2.3.3 Věta. *Nechť* $|\lambda| < \frac{\alpha}{2P_2\|A\|_\infty\|K\|_\infty}$. *Pak existuje* $C = B^{-1}$. *Zaveďme* D *a* E *dle pozorování 2.1.2. Dále nechť* $f \in W^{-1,2}$ *a existuje* $z \in W^{1,2}_{0,div}$ *takové, že* $[f, C^T\varphi]_{W^{1,2}_{0,div}} = \langle z, \varphi\rangle_D$ *pro všechna* $\varphi \in W^{1,2}_{0,div}$.
Pokud $\langle z, \psi\rangle_D = 0$ *pro všechna* $\psi \in \mathrm{Ker}(D' + E')$, *pak existuje slabé řešení rovnice 2.1.1. Navíc pro každá dvě slabé řešení* (u_1, p_1) *a* (u_2, p_2) *rovnice 2.1.1 platí, že* $\langle u_1 - u_2, \varphi\rangle_D = 0$ *pro všechna* $\varphi \in \mathrm{Ran}(D' + E')$.

Důkaz. Existence B^{-1} plyne z lemmatu (2.3.1), protože $|\lambda| < \frac{\alpha}{2P_2\|A\|_\infty\|K\|_\infty} \leq \frac{1}{2\|K\|_\infty}$. Z toho lemmatu taky $B^{-1} = C = I + L$ a

$$\|L\|_\infty \leq \frac{|\lambda|\|K\|_\infty}{1 - |\lambda|\|K\|_\infty} \leq |\lambda|\frac{\|K\|_\infty}{1 - \frac{\alpha}{2P_2\|A\|_\infty}} \leq 2|\lambda|\|K\|_\infty \tag{2.3.13}$$

Zavedu G a F jako v kapitole 2.2. Pak:

$$\|G\|_D\|F^{-1}\|_D \leq P_2\|L\|_\infty\|A\|_\infty\frac{1}{\alpha} \leq P_2 2|\lambda|\|K\|_\infty\|A\|_\infty\frac{1}{\alpha} < 1 \tag{2.3.14}$$

a můžu využít větu 2.2.3. Z předpokladů $z \in \mathrm{Ker}(D' + E')^\perp$. Což ovšem podle zmíněné věty znamená, že $z \in \mathrm{Ran}(D + E)$ a existuje $u \in W^{1,2}_{0,div}$ řešící 2.1.10. Dále definujme:

$$[\nabla p, \varphi]_{W^{1,2}_0} = [h - \mathrm{div}\mathbb{D}\mathcal{D}u + \mathbb{E}\mathcal{D}u, \varphi]_{W^{1,2}_0}$$

a protože jsou splněny předpoklady lemmatu 2.1.3 (tedy $[\nabla p, \varphi]_{W^{1,2}_0} = 0$ pro všechna $\varphi \in W^{1,2}_{0,div}$), existuje $p \in L^2$ splňující uvedenou rovnici a tím je dokázána existence slabého řešení rovnice 2.1.1.
Nechť nyní u_1, u_2 jsou dvě řešení rovnice 2.1.1. Pak $u_1 - u_2$ řeší 2.1.1 s nulovou pravou stranou, tedy $(D + E)(u_1 - u_2) = 0$ a opět z věty 2.2.3 je $\mathrm{Ker}(D + E) = \mathrm{Ran}(D' + E')^\perp$ a platí, že $\langle u_1 - u_2, \varphi\rangle_D = 0$ pro všechna $\varphi \in \mathrm{Ran}(D' + E')$. □

2.3.4 Důsledek. *Nechť* $|\lambda| < \frac{\alpha}{2P_2\|A\|_\infty\|K\|_\infty}$. *Pak prostor všech pravých stran, pro které existuje slabé řešení rovnice 2.1.1, má konečnou kodimenzi. Dále afinní prostor všech u, která slabě řeší 2.1.1, má konečnou dimenzi.*

Důkaz. Z lemmatu 2.2.3 víme, že $\mathrm{dimKer}(D' + E')$ je konečná. Odtud prostor všech $f \in W^{-1,2}(\Omega)^d$ takových, že $[f, \psi]_{W^{1,2}_{0,div}} = 0$ má konečnou kodimenzi. Dle věty 2.3.3 jde o prostor pravých stran, pro které má rovnice 2.1.1 slabé řešení. Dále z věty 2.3.3 je pro každé dvě slabé řešení u_1, u_2 splněno $\langle u_1 - u_2, \varphi\rangle_D = 0$ pro každé $\varphi \in \mathrm{Ran}(D' + E')$. Opět z 2.2.3 prostor všech možných rozdílů $u_1 - u_2$ má konečnou dimenzi. □

2.3.5 Lemma. *Platí:*

- $\mathrm{Ker}(D' + E')$ *je množina všech slabých řešení rovnice*

$$\begin{aligned} \mathrm{div}((\widehat{C}{:}A)^T\nabla\psi + (\nabla CA)^T\psi) &= 0 \\ \mathrm{div}\psi &= 0 \\ \psi|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

- $\mathrm{Ran}(D' + E')$ *je množina*

$$\{\varphi \in W^{1,2}_{0,div}, \exists\psi \in W^{1,2}_{0,div}, \langle\varphi, z\rangle_D = [\mathrm{div}((\widehat{C}{:}A)^T\nabla\psi + (\nabla CA)^T\psi), z] \text{ pro } \forall z \in W^{1,2}_{0,div}\} \tag{2.3.16}$$

Důkaz. Nejdříve připomeňme, že $D + E$ bylo zavedeno tak, že platí rovnost:

$$\langle(D + E)\varphi, \psi\rangle_D = \int_\Omega C_{mk}A^{kl}_{ij}(\mathcal{D}\varphi)_{lj}\frac{\partial\psi_m}{\partial x_i} + \int_\Omega \frac{\partial C_{mk}}{\partial x_i}A^{kl}_{ij}(\mathcal{D}\varphi)_{lj}\psi_m \tag{2.3.17}$$

Nyní nechť ψ je slabé řešení rovnice 2.3.15. To znamená, že

$$\int_\Omega C_{mk}A^{kl}_{ij}\frac{\partial\psi_m}{\partial x_i}(\mathcal{D}\varphi)_{lj} + \int_\Omega \frac{\partial C_{mk}}{\partial x_i}A^{kl}_{ij}\psi_m(\mathcal{D}\varphi)_{lj} = 0 \qquad \forall\varphi \in W^{1,2}_{0,div} \tag{2.3.18}$$

Pak ale:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega C_{mk}A^{kl}_{ij}(\mathcal{D}\varphi)_{lj}\tfrac{\partial\psi_m}{\partial x_i} + \int_\Omega \tfrac{\partial C_{mk}}{\partial x_i}A^{kl}_{ij}(\mathcal{D}\varphi)_{lj}\psi_m \\ &= \langle(D + E)\varphi, \psi\rangle_D = \langle\psi, (D + E)\varphi\rangle_D \\ &= \langle(D' + E')\psi, \varphi\rangle_D \end{aligned} \tag{2.3.19}$$

a ψ je v jádru operátoru $D' + E'$. Zase na druhou stranu pokud ψ je v jádru $D' + E'$, pak z uvedené rovnosti platí, že ψ řeší slabě rovnici $\mathrm{div}((\widehat{C}{:}A)^T\nabla\psi + (\nabla CA)^T\psi) = 0$.
Nyní nechť $\varphi \in \mathrm{Ran}(D' + E')$, pak existuje $\psi \in W^{1,2}_{0,div}$ tak, že $\varphi = (D' + E')\psi$ a

$$\langle\varphi, z\rangle_D = \langle(D' + E')\psi, z\rangle_D = [\mathrm{div}((\widehat{C}{:}A)^T\nabla\psi + (\nabla CA)^T\psi), z] \tag{2.3.20}$$

pro všechna $z \in W^{1,2}_{0,div}$ a φ je v množině 2.3.16. Na druhou stranu nechť φ je v množine 2.3.16. To znamená, že existuje $\psi \in W^{1,2}_{0,div}$ tak, že je pro každé $z \in W^{1,2}_{0,div}$ platí 2.3.20 a tedy $\varphi \in \mathrm{Ran}(D' + E')$. □

Jako důsledek posledních dvou vět dostávám následující větu:

2.3.6 Důsledek. *Nechť A, B, C jsou zavedeny jako ve větě 2.3.3 a $|\lambda| < \frac{\alpha}{2P_2\|A\|_\infty\|K\|_\infty}$. Pak:*

- *Pokud $[f, C^T\psi] = 0$ pro všechna slabá řešení ψ rovnice 2.3.15, pak existuje slabé řešení rovnice 2.1.1*
- *Pro každé dvě slabé řešení (u_1, p_1) a (u_2, p_2) rovnice 2.1.1 platí, že $[\mathrm{div}((\widehat{C}{:}A)^T\nabla\psi + (\nabla CA)^T\psi), (u_1 - u_2)]_{W^{1,2}_{0,div}} = 0$ pro všechna $\psi \in W^{1,2}_{0,div}$*

Důkaz. Reprezentujme funkcionál Cf prvkem $z \in W^{1,2}_{0,div}$ tak, že $[f, C^T\psi]_{W^{1,2}_{0,div}} = \langle z, \varphi\rangle_D$ platí pro všechna $\psi \in W^{1,2}_{0,div}$. Pak pokud $\langle z, \psi\rangle_D = 0$ pro všechna ψ slabě řešící rovnici 2.3.15, je z lemmatu 2.3.5 z kolmé na $\mathrm{Ker}(D' + E')$ a tedy dle věty 2.3.3 existuje řešení rovnice 2.1.1.
Nechť nyní existuje $\varphi \in \mathrm{Ran}(D' + E')$. Pak $u_1 - u_2$ kolmé na $\mathrm{Ran}(D' + E')$ dle věty 2.3.3 a lemmatu 2.3.5 platí $0 = \langle\varphi, u_1 - u_2\rangle_D = ((\widehat{C}{:}A)^T\nabla\psi + (\nabla CA)^T\psi), (u_1 - u_2)]_{W^{1,2}_{0,div}}$. □

2.4 Použití

Pro ukázku použití vybudované teorie použiji příklad z úvodu této práce, kde jsem uvažoval rovnici:

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{div} S(p, \mathcal{D}u) + (u\nabla)u + \nabla p &= f && (2.4.1)\\
\mathrm{div} u &= 0 && (2.4.2)
\end{aligned}
$$

Po postupu uvedeném v první kapitole dostaneme rovnici tvaru 2.1.1, s:

$$A_{ij}^{kl} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial \xi_{kl}}(a, b) \tag{2.4.3}$$

$$B_{kj} = \delta_{kj} - \frac{\partial S_{kj}}{\partial \tau}(a, b) \tag{2.4.4}$$

kde $a \in \mathbb{R}$ a $b \in \mathbb{R}^{d^2}$.
Zopakujme, že dle [6] budu uvažovat $S : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d^2} \mapsto \mathbb{R}^{d^2}$ tvaru: $S(\tau, \xi)_{ij} = \nu(\tau, |\xi|^2)\xi_{ij}$ a $\nu(\tau, |\xi|^2) = (c + \gamma(\tau) + |\xi|^2)^{(r-2)/2}$. Možné tvary γ jsou tyto:

1. $\gamma(\tau) = (1 + \lambda^2\tau^2)^{-q/2}$
2. $\gamma(\tau) = (1 + \exp(\lambda\tau))^{-q}$
3. $\gamma(\tau) = \begin{cases} \exp(-\lambda q\tau) & \text{pro } \tau > 0 \\ 1 & \text{pro } \tau \leq 0, \end{cases}$

kde $c \in (0, 1]$, $r \in (1, 2)$ a λ a q jsou kladné konstanty. Podotýkám, že pro takové viskozity platí podmínka 1.1.4 (viz [6]).

2.4.1 Příklad. *Pro náš příklad zvolme druhý model v dimenzi $d = 3$ a $q = 1$, tedy $\gamma(\tau) = (1 + \exp(\lambda\tau))^{-1}$. Řešíme rovnici 2.1.1 s daty A a $B = I - \lambda K$, pro které nyní nalezneme odhady. Hledané K je tvaru: $K_{kj} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial S_{kj}}{\partial \tau}(a, b) = \frac{r-2}{2}(c+(1+e^{\lambda a})^{-1}+|b|^2)^{(r-4)/2}\frac{-e^{\lambda a}}{(1+e^{\lambda a})^2}b_{kj}$ a*

$$\|K\|_\infty \leq |\frac{r-2}{2}||(c + |b|^2)^{(r-4)/2}b| \leq \frac{2-r}{2}(c + |b|^2)^{(r-4)/2}|b| \tag{2.4.5}$$

Navíc matice K je konstantní vzhledem k prostorovým souřadnicím, a proto $\|\nabla K\|_\infty = 0$. Dále platí, že $\frac{\partial S_{ij}}{\partial \xi_{kl}}(a, b) = \frac{\partial(\nu(\tau,|\xi|^2\xi_{ij}))}{\partial \xi_{kl}}(a, b) = \frac{\partial(\nu(\tau,|\xi|^2))}{\partial \xi_{kl}}(a, b)b_{ij} + \nu(a, |b|^2)\frac{\partial \xi_{ij}}{\partial \xi_{kl}} = (r - 2)(c + \gamma(a) + |b|^2)^{(r-4)/2}b_{kl}b_{ij} + \nu(a, |b|^2)\delta_{ik}\delta_{jl} = (c + \gamma(a) + |b|^2)^{(r-2)/2}\delta_{ik}\delta_{lj} + (c + \gamma(a) + |b|^2)^{(r-4)/2}(r - 2)b_{kl}b_{ij}$.
A tedy $|\frac{\partial S_{ij}}{\xi_{kl}}(a, b)| \leq (c + |b|^2)^{(r-2)/2} + (c + |b|^2)^{(r-4)/2}(2 - r)|b|^2$.
A protože $A_{ij}^{kl} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial \xi_{kl}}(a, b)$, platí

$$\|A\|_\infty \leq (c + |b|^2)^{(r-4)/2}((c + |b|^2)\sqrt{d} + (2 - r)|b|^2) \tag{2.4.6}$$

Spočítejme ještě konstantu elipticity matice A:

$$
\begin{aligned}
|\langle A\xi, \xi\rangle| &= \tfrac{\partial S_{ij}}{\partial \xi_{kl}}\xi_{ij}\xi_{kl} = (c + \gamma(a) + |b|^2)^{(r-2)/2}|\xi|^2 \\
&\quad +(r - 2)(c + \gamma(a) + |b|^2)^{(r-4)/2}(\xi_{ij}b_{ij})(\xi_{kl}b_{kl}) \\
&\geq (c + \gamma(a) + |b|^2)^{(r-4)/2}|\xi|^2(c + \gamma(a) + (r - 1)|b|^2)
\end{aligned} \tag{2.4.7}
$$

a konstanta elipticity má hodnotu $(c+\gamma(a)+|b|^2)^{(r-4)/2}(c+\gamma(a)+(r-1)|b|^2)$ *Definujme nyní* $\Lambda \in \mathbb{R}$ *rovností:*

$$\Lambda = \frac{(c+\gamma(a)+|b|^2)^{(r-4)/2}(c+\gamma(a)+(r-1)|b|^2)}{4P_2(c+|b|^2)^{(r-4)/2}(\frac{2-r}{2}|b|+\sqrt{3}(c+|b|^2)+(2-r)|b|^2)} \tag{2.4.8}$$

Pak pro λ *splňující*

$$|\lambda| < \Lambda \tag{2.4.9}$$

existuje slabé řešení rovnice 2.1.1 (dle věty 2.3.2). A pro λ *splňující*

$$|\lambda| < 2\Lambda \tag{2.4.10}$$

je prostor pravých stran f*, pro které existuje slabé řešení, konečné kodimenze. Prostor všech* u *slabě řešící rovnici má navíc konečnou dimenzi. Obojí je důsledek věty 2.3.4.*

Kapitola 3

Dodatky

3.1 Důsledek Hölderovy nerovnosti

V práci byla často použita následující nerovnost bez většího vysvětlení:

$$\left(\sum_{i=1}^{d} a_i\right)^2 \leq d\sum_{i=1}^{d}(a_i)^2 \tag{3.1.1}$$

Platnost tohoto vzorce plyne z Hölderovy nerovnosti jednoduše následujícím způsobem:

$$\left(\sum_{i=1}^{d} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{d} 1a_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{d} 1^2 \sum_{i=1}^{d} a_i^2 = d\sum_{i=1}^{d}(a_i)^2 \tag{3.1.2}$$

3.2 Odhad normy gradientu

V klíčovém momentu práce je nutno odhadnout normu $\|\nabla K^n\|_\infty$. Následující postup ukazuje, že tento odhad sice není triviální, ale ani příliš složitý.

3.2.1 Odhad. *Mějme tedy matici $K \in W^{1,\infty}(\Omega)^{d^2}$. Pak platí následující odhad:*

$$\|\nabla K^n\|_\infty \leq 2^{n-1}\|\nabla K\|_\infty \|K\|_\infty^{n-1} \tag{3.2.1}$$

Důkaz. Rovnost budu dokazovat matematickou indukcí. Předně je zřejmé, že pro $n = 1$ nerovnost platí. Před provedením indukčního kroku ještě ukážu platnost dvou nerovností:

$$\begin{aligned} \|\sum_{l=1}^{d} \frac{\partial K_{jl}^n}{\partial x_i} K_{lk}\|_\infty^2 &\leq \sum_{i,j,k=1}^{d} \|\sum_{l=1}^{d} \frac{\partial K_{jl}^n}{\partial x_i} K_{lk}\|_\infty^2 \leq \sum_{i,j,k}^{d} \sum_{l=1}^{d} \|\frac{\partial K_{jl}^n}{\partial x_i}\|_\infty^2 \sum_{l=1}^{d} \|K_{lk}\|_\infty^2 \\ &\leq \sum_{i,j,l=1}^{d} \|\frac{\partial K_{jl}^n}{\partial x_i}\|_\infty^2 \sum_{l,k=1}^{d} \|K_{lk}\|_\infty^2 = \|\nabla K^n\|_\infty^2 \|K\|_\infty^2 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

a podobně

$$\begin{aligned} \|\sum_{l=1}^{d} \frac{\partial K_{jl}}{\partial x_i} K_{lk}^n\|_\infty^2 &\leq \sum_{i,j,k=1}^{d} \|\sum_{l=1}^{d} \frac{\partial K_{jl}}{\partial x_i} K_{lk}^n\|_\infty^2 \leq \sum_{i,j,k=1}^{d} \sum_{l=1}^{d} \|\frac{\partial K_{jl}}{\partial x_i}\|_\infty^2 \sum_{l=1}^{d} \|K_{lk}^n\|_\infty^2 \\ &\leq \sum_{i,j,l=1}^{d} \|\frac{\partial K_{jl}}{\partial x_i}\|_\infty^2 \sum_{l,k=1}^{d} \|K_{lk}^n\|_\infty^2 = \|\nabla K\|_\infty^2 \|K\|_\infty^{2n} \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

a pak

$$\begin{array}{rcl} \|\frac{\partial K_{jk}^{n+1}}{\partial x_i}\|_\infty & = & \|\sum\limits_{l=1}^{d} \frac{\partial K_{jl}^n}{\partial x_i} K_{lk} + \sum\limits_{l=1}^{d} K_{jl}^n \frac{\partial K}{\partial x_i}\|_\infty \leq \|\sum\limits_{l=1}^{d} \frac{\partial K_{jl}^n}{\partial x_i} K_{lk}\|_\infty + \|\sum\limits_{l=1}^{d} K_{jl}^n \frac{\partial K}{\partial x_i}\|_\infty \\ & \leq & (\|\nabla K^n\|_\infty \|K\|_\infty + \|\nabla K\|_\infty \|K\|_\infty^n) \\ & \leq & (2^{n-1}\|\nabla K\|_\infty \|K\|_\infty^n + \|\nabla K\|_\infty \|K\|_\infty^n) \\ & \leq & 2^n \|\nabla K\|_\infty \|K\|_\infty^n \end{array} \tag{3.2.4}$$

$\square$

Poznámka: V předchozích odhadech jsem byl více než jen velkorysý. Je to z toho důvodu, že při rozhodování mezi elegancí výsledků a jejich ostrostí jsem dal přednost eleganci.

Literatura

[1] M. Schechter, *Principles of functional analysis*, Academic Press, New York 1971

[2] H. Sohr, *The Navier-Stokes equations, an elementary functional analytic approach*, Birkhäuser Verlag 2001

[3] J. Lukeš, *Zápisky z funkcionální analýzy*, Karolinum 2003

[4] N. D. Huy, *On existence and regularity of solutions to a class of generalized stationary Stokes problem*

[5] L. Bican, *Lineární algebra a geometrie*, Academia 2000

[6] M. Franta, J. Málek, K. R. Rajagopal, *On steady flows of fluids with pressure- and shear- dependent viscosities*

[7] M. Bulíček, J. Málek, K. R. Rajagopal, *Navier's Slip and Evolutionary Navier-Stokes-like Systems*