

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Jiří Haman

Aplikace náhodných procesů ve financích

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Viktor Beneš, DrSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Teorie pravděpodobnosti a náhodné procesy

2008

Poděkování

Cenné rady a připomínky, které byly přínosem pro vytváření a úpravu teoretické části tohoto textu, mi poskytl prof. RNDr. Viktor Beneš, DrSc., vedoucí mé diplomové práce.

Mgr. Andrea Karlová, konzultantka, mi předala data z finanční praxe. Tato data spolu s jejími připomínkami a informacemi přispěla k sepsání praktické části textu.

Proto oběma upřímně děkuji za věnovaný čas a trpělivost.

Rovněž děkuji svým rodičům a všem, kteří mě v průběhu dosavadního života podporovali a ovliňovali.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 30. července 2008

Jiří Haman

Obsah

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Teoretické základy | 1 |
| 1.1 | Lévyho procesy | 1 |
| 1.1.1 | Lévyho procesy a neomezeně dělitelná rozdělení | 1 |
| 1.1.2 | Reprezentace Lévyho procesu | 2 |
| 1.1.3 | Složený Poissonův proces | 5 |
| 1.2 | Bodové procesy | 9 |
| 1.2.1 | Základy | 9 |
| 1.2.2 | Poissonova náhodná míra | 11 |
| 1.3 | Obecné Ornsteinovy-Uhlenbeckovy procesy | 14 |
| 1.4 | Markov chain Monte Carlo algoritmy | 16 |
| 1.4.1 | Bayesovská statistika a konjugovaná rozdělení | 16 |
| 1.4.2 | Markovská jádra | 17 |
| 1.4.3 | Přehled některých algoritmů | 21 |
| 1.5 | Itôův stochastický integrál | 25 |
| 2 | Barndorff-Nielsenův a Shephardův model stochastické volatility | 29 |
| 2.1 | Motivace | 29 |
| 2.1.1 | Finanční data a jejich logaritmické přírůstky | 29 |
| 2.1.2 | Stylizovaná empirická fakta | 30 |
| 2.2 | Model (Gamma-OU proces) | 30 |
| 2.2.1 | Popis | 30 |
| 2.2.2 | Bayesovská konstrukce | 37 |
| 2.2.3 | Metoda augmentace dat | 39 |
| 2.2.4 | MCMC algoritmus | 39 |
| 3 | Vyhodnocení modelu | 43 |
| 3.1 | Parametry modelu a data | 43 |
| 3.2 | Diagnostika MCMC simulace | 47 |
| 3.3 | Proces volatility | 53 |
| 3.4 | Závěr | 59 |

Název práce: Aplikace náhodných procesů ve financích

Autor: Jiří Haman

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Viktor Beneš, DrSc.

E-mail vedoucího diplomové práce: benesv@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V této práci uvažujeme model stochastické volatility založené na negaussovském Ornsteinově-Uhlenbeckově procesu (viz též Barndorff-Nielsen a Shephard [1]). Předpokládáme, že logaritmus ceny aktiva je řešení stochastické diferenciální rovnice bez driftu, kde složka volatility je modelována jako skrytý stacionární Ornsteinův-Uhlenbeckův proces řízený negaussovským Lévyho procesem. Pro parametry modelu provádíme bayesovské závěry prostřednictvím Markov chain Monte Carlo algoritmu založeném na augmentaci dat. Tento algoritmus odpovídá standardní hierarchické parametrizaci modelu. Cílem je vyjádřit nepozorovaný proces stochastické volatility pro pozorovanou cenu aktiva. Algoritmus aplikujeme na simulovanou a reálnou cenu aktiva. Za reálnou cenu aktiva volíme směnný kurz amerického dolaru vůči britské libře.

Klíčová slova: augmentace dat, bayesovská statistika, Lévyho procesy, Markov chain Monte Carlo metody, stochastická volatilita

Title: Applications of stochastic processes in finance

Author: Jiří Haman

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Prof. RNDr. Viktor Beneš, DrSc.

Supervisor's e-mail address: benesv@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In this thesis we consider a stochastic volatility model based on non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck process (see also Barndorff-Nielsen and Shephard [1]) where the logarithm of an asset price is the solution of a stochastic differential equation without drift. The volatility component is modelled as a stationary, latent Ornstein-Uhlenbeck process, driven by a non-Gaussian Lévy process. We perform Bayesian inference for model parameters by means of Markov chain Monte Carlo algorithm based on data augmentation. The algorithm corresponds to a standard hierarchical parametrization of the model. The aim of this thesis is to express the unobserved stochastic volatility process for observed asset price. The algorithm is applied to the simulated and real asset price where real asset price is US dollar (USD) - Pound sterling (GBP) exchange rate.

Keywords: data augmentation, Bayesian statistics, Lévy processes, Markov chain Monte Carlo methods, stochastic volatility

Úvod

Mezi hlavní náhodné procesy, které se užívají ve finančních aplikacích, patří bezesporu *Brownův pohyb*. Jedná se o spojitý náhodný proces, který má stacionární nezávislé a normálně rozdělené přírůstky, což z něj dělá vhodný nástroj pro modelování cenových fluktuací na finančních trzích. Základní model pro cenu aktiva S_t v čase t je *Bacheliérov model*

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma B_t, \quad (1)$$

kde $S_0 > 0$ je počáteční cena aktiva, $\mu \geq 0$ je očekávaný výnos aktiva, $\sigma > 0$ je volatilita aktiva (míra rozptýlenosti kolem očekávaného výnosu) a B_t je hodnota Brownova pohybu v čase t . Tento model byl navržen Louisem Bacheliérem (1900) pro modelování cen akcií na pařížské burze. Nevýhodou (1) je, že může být $S_t < 0$ díky Brownovu pohybu. Modelem, který odstraňuje tento nedostatek, je tzv. *Samuelsonův model* (1965)

$$S_t = S_0 \exp\{\mu t + \sigma B_t\}, \quad (2)$$

kde $S_0 > 0$, $\mu \geq 0$ a $\sigma > 0$. Jde vlastně o multiplikativní verzi (1), která vyhovuje stochastické diferenciální rovnici (dále jen *SDR*)

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma dB_t + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) dt$$

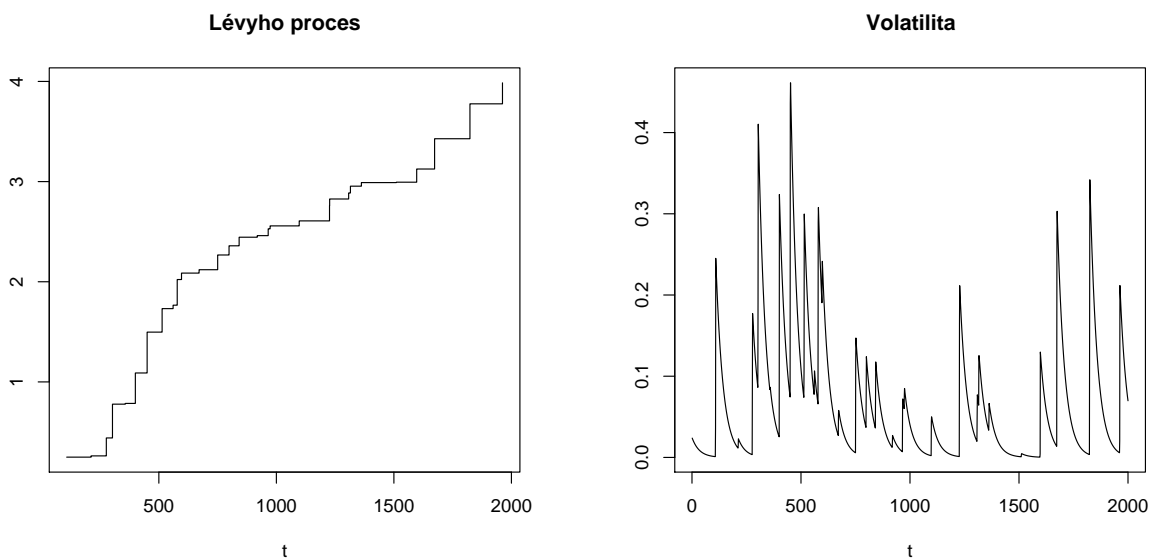
a nazývá se *geometrický Brownův pohyb*. Model (2) se ale neumí vyrovnat s následujícím problémem. Pokud z aktiv, běžně pozorovaných na finančních trzích, utvoříme logaritmické přírůstky, jejich empirické rozdělení vykazuje těžké chvosty a asymetrii.

Možností, jak zachytit empirické chování logaritmických přírůstků, je uvažovat, že volatilita σ aktiva S_t není v čase konstantní, ale že se s ním mění náhodně. Zavádíme proto pojem *stochastická volatilita*. Mezi modely stochastické volatility patří např. GARCH model, skokově-difúzní model, Hestonův model či Variance-Gamma model¹. Většinou se jedná o model, kde logaritmické přírůstky mají normální rozdělení s dynamicky se měnícím rozptylem, který je založen na tzv. *Lévyho procesu*. Lévyho proces má většinou skokovitý charakter, neboť empirické trajektorie cen aktiva obsahují skoky.

Jednou z hlavních potíží při práci s těmito modely je to, že skutečnou okamžitou volatilitu nelze na trhu pozorovat (lze pozorovat pouze logaritmické přírůstky), a proto musí být modelována jako skrytý stav. Jednou z možností, jak ji modelovat, je použít bayesovské závěry založené na Markov chain Monte Carlo (dále jen *MCMC*) metodách.

¹ čtenáře odkazujeme např. na Cont a Tankov [3]

Model pro tuto práci vychází z článku Dellaportas, Papaspiliopoulos a Roberts [4]. Uvažujeme model stochastické volatility, kde předpokládáme, že logaritmus ceny aktiva je řešením SDR bez driftové složky. Složku volatility přitom modelujeme jako stacionární, skrytý Ornsteinův-Uhlenbeckův (dále jen *OU*) proces, který je řízen negaussovským Lévyho procesem. Za této specifikace má volatilita skokové přírůstky a klesá exponenciálně, kde časy skoků a jim odpovídající velikosti jsou řízeny rozdělením přírůstků negaussovského Lévyho procesu. Za *řídící Lévyho proces* volíme složený Poissonův proces, kde časy událostí tvoří Poissonův proces s konečnou intenzitou a odpovídající velikosti skoků jsou nezávislé stejně rozdělené kladné náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením. Důležitým faktorem je, že kladnost skoků složeného Poissonova procesu implikuje nejenom kladnost celé jeho trajektorie, ale i kladnost celé stochastické volatility (viz obrázek 1). Výsledný OU proces má navíc gamma rozdělení jako své marginální rozdělení. Závěry o parametrech modelu provádíme metodami bayesovské analýzy s použitím MCMC algoritmu, který je založen na standardní hierarchické parametrizaci a augmentaci dat. Cílem je vyjádřit nepozorovaný proces stochastické volatility pro pozorovanou cenu finančního aktiva.



Obrázek 1: *Řídící Lévyho proces (vlevo) a k němu příslušná stochastická volatilita (vpravo).* Vodorovná osa udává sledovaný časový horizont ve dnech.

Práce je členěna následovně. V první kapitole uvádíme základní poznatky z teorie Lévyho procesů, obecných OU procesů, bodových procesů, MCMC metod a stochastického integrálu. Tato kapitola slouží především jako teoretický základ pro další kapitoly. Druhá kapitola uvádí model, který uvažujeme. Nejprve motivujeme jeho zavedení, posléze ho popisujeme a nakonec tvoříme MCMC metodologii pro jeho bayesovské vyhodnocení. Třetí kapitola uvádí praktické vyhodnocení modelu pomocí MCMC metodologie, která je nastíněna v druhé kapitole na simulovaných a reálných datech (kurz amerického dolaru vůči britské libře). MCMC algoritmus, veškeré grafy a dodatečné výpočty provádíme ve statistickém softwaru R; CD s algoritmem se nachází v příloze.

Kapitola 1

Teoretické základy

1.1 Lévyho procesy

1.1.1 Lévyho procesy a neomezeně dělitelná rozdělení

Nechť $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je pravděpodobnostní prostor.

Definice 1.1. Funkce $f : \langle 0, T \rangle \rightarrow \mathbb{R}^d$ je **càdlàg funkce**, jestliže pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$, kde $T > 0$

- a) existují vlastní limity $f(t-) = \lim_{x \rightarrow t-} f(x)$ a $f(t+) = \lim_{x \rightarrow t+} f(x)$
- b) platí $f(t) = f(t+)$

Poznámka 1.1. Càdlàg funkce mohou mít body nespojitosti. Pokud tedy t bude takový bod nespojitosti, budeme značit $\Delta f(t) = f(t) - f(t-)$. *

Definice 1.2. Lévyho proces¹ je càdlàg² náhodný proces $(Z_t)_{t \geq 0}$ na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s hodnotami v \mathbb{R}^d (dále jen *na* \mathbb{R}^d), jestliže

- a) $Z_0 = 0$ skoro jistě (*počátek je v nule*)
- b) pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro každé dělení $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n$ jsou náhodné veličiny $Z_{t_0}, Z_{t_1} - Z_{t_0}, \dots, Z_{t_n} - Z_{t_{n-1}}$ nezávislé (*nezávislé přírůstky*)
- c) $Z_{t+h} - Z_t \stackrel{d}{=} Z_h$ pro každé $t \geq 0, h \geq 0$ (*stacionární přírůstky*)
- d) pro každé $\varepsilon > 0$ je $\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P}(\|Z_{t+h} - Z_t\| \geq \varepsilon) = 0$ (*spojitost podle pravděpodobnosti*)

¹ někdy též homogenní Lévyho proces

² přívlastek càdlàg v definici můžeme vynechat, neboť podle Sato [13] Theorem 11.5 lze ukázat, že každý Lévyho proces má jednoznačně určenou modifikaci, která je càdlàg

Poznámka 1.2. Základní představitele Lévyho procesů jsou standardní Brownův pohyb (viz definice 1.37) a Poissonův proces (viz definice 1.15). Pro další informace o těchto procesech odkazujeme čtenáře např. na knihu Sato [13], Chapter 1. *

Definice 1.3. Pravděpodobnostní rozdělení F na \mathbb{R}^d se nazývá **neomezeně dělitelné rozdělení**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny Y_1, \dots, Y_n , jejichž rozdělení je F_n tak, že náhodná veličina $Y \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^n Y_k$ a má rozdělení F .

Mezi Lévyho procesy a neomezeně dělitelnými rozděleními existuje těsná souvislost. Nechť (Z_t) je Lévyho proces na \mathbb{R}^d . Položme $t_k = \frac{kt}{n}$, kde $k = 0, \dots, n$ a $t > 0$, a označme $F = \mathcal{L}(Z_t)$ a $F_k = \mathcal{L}(Z_{t_k} - Z_{t_{k-1}})$. Protože

$$Z_t = (Z_{t_1} - Z_{t_0}) + \dots + (Z_{t_n} - Z_{t_{n-1}})$$

je podle definice Lévyho procesu součet n nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin, dostáváme neomezenou dělitelnost. Pokud dále $t_n - t_{n-1} = \dots = t_1 - t_0 = 1/n$, platí s využitím nezávislosti a stacionarity přírůstků Lévyho procesu (Z_t) , že

$$Z_t \stackrel{d}{=} tZ_1$$

K rozdělení celého Lévyho procesu (Z_t) tedy stačí znát jeho rozdělení v čase 1.

Věta 1.1. *Nechť $(Z_t)_{t \geq 0}$ je Lévyho proces na \mathbb{R}^d . Potom pro každé $t \geq 0$ je rozdělení náhodného vektoru Z_t neomezeně dělitelné. Naopak, když F je neomezeně dělitelné rozdělení, potom existuje Lévyho proces $(Z_t)_{t \geq 0}$ takový, že rozdělení náhodného vektoru Z_1 je dáno F .*

DŮKAZ: Sato [13], Theorem 7.10, str. 35 □

1.1.2 Reprezentace Lévyho procesu

Pojďme se podívat na strukturu rozdělení Lévyho procesu (Z_t) . Víme, že rozdělení reálného náhodného vektoru je jednoznačně určeno jeho charakteristickou funkcí³. Definujme proto charakteristickou funkci reálného náhodného vektoru Z_t na \mathbb{R}^d jako

$$\Phi_t(z) \equiv \Phi_{Z_t}(z) \equiv \mathbb{E} \exp\{i\langle z, Z_t \rangle\},$$

kde $z \in \mathbb{R}^d$. Nechť $Z_{t+s} = Z_s + (Z_{t+s} - Z_s)$ pro $t > s$. Potom

$$\Phi_{t+s}(z) = \Phi_{Z_{t+s}}(z) = \Phi_{Z_s}(z) \Phi_{Z_{t+s}-Z_s}(z) = \Phi_{Z_s}(z) \Phi_{Z_t}(z) = \Phi_s(z) \Phi_t(z),$$

kde jsme využili nezávislosti a stacionarity přírůstků $Z_{t+s} - Z_t$ a Z_s . Stochastická spojitost (Z_t) implikuje, že $Z_t \rightarrow Z_s$ pro $t \rightarrow s$. Podle tvrzení v Cont a Tankov [3] na str. 36 dále platí, že $\Phi_{Z_t} \rightarrow \Phi_{Z_s}$ pro $t \rightarrow s$. Z uvedených vlastností dostáváme, že charakteristická funkce Lévyho procesu (Z_t) má exponenciální charakter.

³ viz Sato [13], Proposition 2.5 (ii)

Definice 1.4. Necht $(Z_t)_{t \geq 0}$ je Lévyho proces na \mathbb{R}^d . Míra ν na \mathbb{R}^d definovaná předpisem

$$\nu(A) = \mathbb{E}[\#\{t \in \langle 0, 1 \rangle : \Delta Z_t \neq 0, \Delta Z_t \in A\}],$$

kde $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ a $\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-}$ se nazývá **Lévyho míra** procesu Z_t .

Poznámka 1.3. Lévyho míra udává střední počet skoků za jednotku času, jejichž velikost náleží do borelovské množiny A na \mathbb{R}^d . *

Věta 1.2 (Lévyho-Chinčinoва reprezentace (I)). Položme $D = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq 1\}$.

(i) Necht F je neomezeně dělitelné rozdělení s charakteristickou funkcí Φ_F na \mathbb{R}^d . Potom

$$\begin{aligned} \Phi_F(z) &= \exp\{\Psi(z)\}, \\ \Psi(z) &= -\frac{1}{2}\langle z, Az \rangle + i\langle \gamma, z \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z, x \rangle} - 1 - i\langle z, x \rangle \mathbb{I}_D(x)) \nu(dx), \end{aligned} \quad (1.1)$$

kde $z \in \mathbb{R}^d$, A je symetrická pozitivně semidefinitní $d \times d$ gaussovská kovarianční matice, $\gamma \in \mathbb{R}^d$ a ν je Lévyho míra na \mathbb{R}^d splňující $\nu(\{0\}) = 0$ a podmínky

$$\int_{\|x\| \leq 1} \|x\|^2 \nu(dx) < +\infty \quad \& \quad \int_{\|x\| \geq 1} \nu(dx) < +\infty \quad (1.2)$$

(ii) Reprezentace funkce $\Phi_F(z)$ je jednoznačně určena trojicí (A, ν, γ)

(iii) Pokud máme dánu trojici (A, ν, γ) splňující (1.2), potom existuje neomezeně dělitelné rozdělení F , jehož charakteristická funkce je dána exponentem (1.1)

DŮKAZ: Sato [13], Theorem 8.1, str. 40, 41, 44 a 45 □

Definice 1.5. Pro rozdělení F a jeho charakteristickou funkcí Φ_F z předchozí věty je

- trojice (A, ν, γ) **charakteristická trojice** rozdělení F
- funkce $\Psi(z) = \ln\{\Phi_F(z)\}$ **charakteristický exponent** rozdělení F

Poznámka 1.4. Integrand v (1.1) je integrovatelný vzhledem k míře ν , neboť je omezený na jakémkoliv okolí bodu nula a pro $\|x\| \rightarrow 0$ je

$$\exp\{i\langle z, x \rangle\} - 1 - i\langle z, x \rangle \mathbb{I}_D(x) = O(\|x\|^2),$$

pro pevné $z \in \mathbb{R}^d$. Samozřejmě konvergentní integrál v (1.1) lze získat i jinak. Uvažujme omezené měřitelné funkce $c : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ splňující

$$\begin{aligned} c(x) &= 1 + o(\|x\|), & \|x\| &\rightarrow 0 \\ c(x) &= O(\|x\|), & \|x\| &\rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Potom (1.1) lze přepsat na

$$\Psi(z) = -\frac{1}{2}\langle z, Az \rangle + i\langle \gamma_c, z \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (\exp\{i\langle z, x \rangle\} - 1 - i\langle z, x \rangle c(x))\nu(dx),$$

kde $\gamma_c \in \mathbb{R}^d$ definujeme předpisem

$$\gamma_c = \gamma + \int_{\mathbb{R}^d} x(c(x) - \mathbb{I}_D(x))\nu(dx)$$

Funkce c se nazývá *usekávací funkce* a (A, ν, γ_c) *charakteristická trojice vzhledem k usekávací funkci c* . Zdůrazněme, že změna usekávací funkce nemá vliv na Lévyho míru ν , ani na matici A , ale pouze na γ . *

Poznámka 1.5. Podmínka (1.2) klade nároky na charakter skokovosti procesu. Konkrétně třeba podmínka

$$\int_{\|x\| \geq 1} \nu(dx) < +\infty$$

znamená, že skoků Lévyho procesu (Z_t) větších než 1 je jen konečně mnoho. *

Lévyho-Chinčinova reprezentace vycházela z toho, že neomezeně dělitelné rozdělení je rozdělení nějakého Lévyho procesu v čase $t = 1$. Pokud uvažujeme charakteristickou trojici ve tvaru $(tA, t\nu, t\gamma)$, kde $t \in \mathbb{R}^d$, potom charakteristický exponent v (1.1) má tvar $t\Psi(z)$. Dostaneme tak reprezentaci Z_t pro každé $t \geq 0$.

Věta 1.3 (Lévyho-Chinčinova reprezentace (II)). *Nechť (Z_t) je Lévyho proces na \mathbb{R}^d . Potom existuje spojitá funkce $\Psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ taková, že*

$$\mathbb{E} \exp\{i\langle z, Z_t \rangle\} = \exp\{t\Psi(z)\},$$

kde $z \in \mathbb{R}^d$ a $\Psi(z)$ je funkce definována v (1.1).

Podívejme se ještě na strukturu trajektorií Lévyho procesu (Z_t) .

Věta 1.4 (Lévyho-Itôův rozklad (I)). *Nechť $(Z_t)_{t \geq 0}$ je Lévyho proces na \mathbb{R}^d a ν jeho Lévyho míra. Definujme*

$$J_Z(B) = \#\{s > 0 : \Delta Z_s \neq 0, (s, \Delta Z_s) \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}((0, +\infty) \times \mathbb{R}^d), \quad (1.3)$$

tedy počet skoků Lévyho procesu (Z_t) náležejících do borelovské množiny B . Potom

(i) ν je Radonova míra na $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ splňující

$$\int_{\|x\| \leq 1} \|x\|^2 \nu(dx) < +\infty \quad \& \quad \int_{\|x\| \geq 1} \nu(dx) < +\infty \quad (1.4)$$

(ii) skoková míra J_Z je Poissonova náhodná míra⁴ na $\langle 0, +\infty \rangle \times \mathbb{R}^d$ s mírou intenzity $\nu(dx)dt$

(iii) existuje vektor γ a d -dimenzionální Brownův pohyb⁵ $(B_t)_{t \geq 0}$ s kovarianční maticí A tak, že

$$Z_t = Z_t^c + Z_t^l + \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \tilde{Z}_t^\epsilon, \quad (1.5)$$

kde je

$$\begin{aligned} Z_t^c &= \gamma t + B_t \\ Z_t^l &= \int_{\|x\| \geq 1, s \in \langle 0, t \rangle} x J_Z(ds \times dx) \\ \tilde{Z}_t^\epsilon &= \int_{\epsilon \leq \|x\| < 1, s \in \langle 0, t \rangle} x \{J_Z(ds \times dx) - \nu(dx)ds\} \end{aligned}$$

Členy v (1.5) jsou nezávislé a konvergence posledního členu je stejnoměrná pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$ skoro jistě.

DŮKAZ: Cont a Tankov [3], PROPOSITION 3.7, str. 81 □

Poznámka 1.6. K Lévyho-Itôovu rozkladu se stejně jako v Lévyho-Chinčinově reprezentaci váže charakteristická trojice (A, ν, γ) , která je určena jednoznačně. Člen Z_t^c je spojitý gaussovský Lévyho proces, který lze popsat driftem γ a kovarianční maticí A obecného Brownova pohybu. Zbylé dva členy v (1.5) jsou nespojité procesy včleňující do Lévyho procesu (Z_t) skoky, které popisuje Lévyho míra ν .

Díky členu $\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \tilde{Z}_t^\epsilon$ může mít proces (Z_t) nekonečně mnoho skoků na omezeném časovém intervalu, ale až na konečně mnoho jsou všechny menší než libovolné kladné ϵ . Kompenzace Lévyho míry ν mírou J_Z je z důvodů konvergence. Lévyho míra ν totiž může mít nekonečně mnoho malých atomů v okolí nuly a jejich suma nemusí konvergovat. *

1.1.3 Složený Poissonův proces

Definice 1.6. Náhodný proces $(X_t)_{t \geq 0}$ na \mathbb{R}^d je **složený Poissonův proces** s intenzitou $\lambda > 0$ a rozdělením velikosti skoků f na \mathbb{R}^d , jestliže je ve tvaru

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

kde velikosti skoků Y_i jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením f a $(N_t)_{t \geq 0}$ je Poissonův proces s intenzitou λ nezávislý na $(Y_i)_{i \geq 1}$, kde $i \in \mathbb{N}$.

⁴ viz definice 1.17

⁵ zde máme na mysli Brownův pohyb s libovolnou kovarianční maticí A na rozdíl od standardního Brownova pohybu, který má jednotkovou kovarianční matici

Poznámka 1.7. Složený Poissonův proces, kterým se v této práci budeme zabývat, patří mezi nejznámější Lévyho procesy. Poznamenejme, že pokud platí $Y_i = 1$ pro každé $i \in \mathbb{N}$, dostáváme definici *Poissonova procesu*. *

Poznámka 1.8. Z definice složeného Poissonova procesu můžeme odvodit tyto vlastnosti:

1. trajektorie procesu $(X_t)_{t \geq 0}$ jsou po částech konstantní funkce
2. časy skoků $(T_i)_{i \geq 1}$ mají stejné rozdělení jako Poissonův proces $(N_t)_{t \geq 0}$
3. velikosti skoků (Y_i) jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením f

*

Uved'me nyní reprezentaci složeného Poissonova procesu

Věta 1.5. *Nechť (X_t) je složený Poissonův proces na \mathbb{R}^d . Potom jeho charakteristická funkce má reprezentaci*

$$\mathbb{E}[\exp\{i\langle u, X_t \rangle\}] = \exp\left\{t\lambda \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle u, x \rangle} - 1)f(dx)\right\}$$

pro každé $u \in \mathbb{R}^d$.

DŮKAZ: Přímým výpočtem

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp\{i\langle u, X_t \rangle\} &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\exp\{i\langle u, \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \rangle\} \mid N(t) \right] \right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\mathbb{E} \exp\{i\langle u, \sum_{k=1}^n Y_k \rangle\} \cdot \mathbb{P}(N(t) = n) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left(\prod_{k=1}^n \mathbb{E} \exp\{i\langle u, Y_k \rangle\} \right) \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp\{-\lambda t\} \right) \end{aligned}$$

Protože Y_k , kde $k \in \mathbb{N}$, jsou z definice složeného Poissonova procesu nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením f , označíme-li jeho příslušnou charakteristickou funkci Φ_f , dostaneme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left((\Phi_f(u))^n \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp\{-\lambda t\} \right) = \exp\{-\lambda t\} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t \Phi_f(u))^n}{n!} = \exp\{\lambda t(\Phi_f(u) - 1)\},$$

což dává požadované tvrzení přepisem argumentu exponenciály do integrálního tvaru. \square

Poznámka 1.9. Položíme-li $\nu(dx) = \lambda f(dx)$, lze tvrzení předchozí věty napsat

$$\mathbb{E}[\exp\{i\langle u, X_t \rangle\}] = \exp\left\{t \int_{\mathbb{R}^d} (\exp\{i\langle u, x \rangle\} - 1)\nu(dx)\right\},$$

kde $u \in \mathbb{R}^d$ a tvar charakteristického exponentu v (1.1) je

$$\Psi(z) = \int_{\mathbb{R}^d} (\exp\{i\langle u, x \rangle\} - 1)\nu(dx),$$

což dává speciální tvar Lévyho-Chinčiny reprezentace (1.1). Proto ν je *Lévyho míra* procesu (X_t) , která ovšem není mírou pravděpodobnostní, neboť pro $\lambda \neq 1$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nu(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \lambda f(dx) = \lambda \neq 1$$

*

Věta 1.6. *Proces (X_t) je složený Poissonův proces na \mathbb{R}^d právě tehdy, když je Lévyho proces a jeho trajektorie jsou po částech konstantní funkce.*

DŮKAZ: Cont a Tankov [3], PROPOSITION 3.3, str. 72–74

□

Předchozí věta má pro nás velký význam, neboť pomocí ní lze odvodit charakteristickou trojici (A, ν, γ) pro obecný Lévyho proces (Z_t) , který má po částech konstantní trajektorie. Porovnejme charakteristický exponent složeného Poissonova procesu a Lévyho-Chinčiny reprezentace (1.1). Jestliže musí platit

$$-\frac{1}{2}\langle z, Az \rangle + i\langle \gamma, z \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z, x \rangle} - 1 - i\langle z, x \rangle \mathbb{I}_{\|x\| \leq 1}(x)) \nu(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z, x \rangle} - 1) \nu(dx),$$

potom výsledkem je následující věta, kde $0_{d \times d}$ značí nulovou $d \times d$ matici.

Věta 1.7. *Lévyho proces (Z_t) na \mathbb{R}^d má po částech konstantní trajektorie právě tehdy, když pro jeho charakteristickou trojici (A, ν, γ) platí*

$$A = 0_{d \times d}, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \nu(dx) < +\infty, \quad \gamma = \int_{\|x\| \leq 1} x \nu(dx)$$

DŮKAZ: Sato [13], Theorem 21.5, str. 137

□

Poznámka 1.10. Ekvivalentní přepis pomocí charakteristického exponentu je

$$\Psi(z) = \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z, x \rangle} - 1) \nu(dx),$$

kde podmínka na Lévyho míru je $\nu(\mathbb{R}^d) < +\infty$.

*

V dalším nás budou zajímat Lévyho procesy, které mají konečnou variaci.

Definice 1.7. Necht' $\mathcal{D} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$ je konečné dělení intervalu $\langle a, b \rangle$. **Totální variace funkce** $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^d$ se definuje předpisem

$$TV(f) = \sup_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^n \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|$$

Pokud $TV(f) < +\infty$, řekneme, že f je **funkce s konečnou variací**.

Věta 1.8. Lévyho proces (Z_t) na \mathbb{R}^d má konečnou variaci, právě když jeho charakteristická trojice (A, ν, γ) splňuje

$$A = 0_{d \times d} \quad \& \quad \int_{\|x\| \leq 1} \|x\| \nu(dx) < +\infty$$

DŮKAZ: Cont a Tankov [3], PROPOSITION 3.9, str. 86 □

Důsledek 1.1 (Lévyho-Itôův rozklad (II), Lévyho-Chinčínova reprezentace (III)). Nechť (Z_t) je Lévyho proces na \mathbb{R}^d s konečnou variací a charakteristickou trojicí $(0_{d \times d}, \nu, \gamma)$. Potom platí

$$Z_t = bt + \int_{\langle 0, t \rangle \times \mathbb{R}^d} x J_Z(ds \times dx) \quad (\text{Lévy-Itô})$$

$$\mathbb{E} \exp\{i\langle z, Z_t \rangle\} = \exp\left\{t \left(i\langle b, z \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z, x \rangle} - 1) \nu(dx) \right)\right\}, \quad (\text{Lévy-Chinčín})$$

kde $b = \gamma - \int_{\|x\| \leq 1} x \nu(dx)$. ○

Poznámka 1.11. Charakteristická trojice Lévyho procesu (Z_t) je dána v tomto případě $(0_{d \times d}, \nu, \gamma)$ a nikoliv $(0_{d \times d}, \nu, b)$, jak bychom se mohli na první pohled domnívat. Složku bt interpretujeme v Lévyho-Chinčínově reprezentaci jako spojitou část Lévyho procesu (Z_t) . *

Kromě uvažování Lévyho procesů s konečnou variací budeme uvažovat i Lévyho procesy, které jsou subordinátory.

Definice 1.8. Řekneme, že Lévyho proces (Z_t) na \mathbb{R} je **subordinátor**, jestliže jsou všechny jeho trajektorie neklesající funkce skoro jistě.

Poznámka 1.12. Pojem subordinátoru pochází z toho, že ho lze použít jako časové změny pro jiný Lévyho proces, což je důležité při budování finančních modelů založených právě na Lévyho procesech. *

Věta 1.9 (Vlastnosti subordinátoru). Nechť $(Z_t)_{t \geq 0}$ je Lévyho proces na \mathbb{R} . Potom je ekvivalentní:

- (i) $Z_t \geq 0$ skoro jistě pro nějaké $t > 0$
- (ii) $Z_t \geq 0$ skoro jistě pro každé $t > 0$
- (iii) trajektorie (Z_t) jsou skoro jistě neklesající, tzn. $t \geq s \Rightarrow Z_t \geq Z_s$
- (iv) pro charakteristickou trojici (A, ν, γ) platí

$$A = 0, \quad \nu((-\infty, 0)) = 0, \quad \int_0^{+\infty} (x \wedge 1) \nu(dx) < +\infty, \quad b \geq 0$$

DŮKAZ: Cont a Tankov [3], PROPOSITION 3.10, str. 88 □

Poznámka 1.13. Pro podmínky v (iv) vycházíme z Lévyho-Chinčinovy reprezentace (III). Vzhledem k tomu, že máme neklesající Lévyho proces (Z_t) , tento má konečnou variaci. Protože operujeme na \mathbb{R} , platí $A = 0$ a $\int_{|x| \leq 1} x\nu(dx) < +\infty$. Pro neklesající trajektorie dále nemáme žádné záporné skoky, proto i $\nu((-\infty, 0)) = 0$. *

1.2 Bodové procesy

Bodové procesy můžeme obecně definovat na úplných separabilních lokálně kompaktních metrických prostorech (viz Rataj [12]). Pro účely této práce si vystačíme s bodovými procesy na d -rozměrném eukleidovském prostoru (viz Møller a Waagepetersen [9]).

1.2.1 Základy

Nechť \mathcal{B}^d je systém borelovských podmnožin \mathbb{R}^d a $\mathcal{B}_0^d \subseteq \mathcal{B}^d$ je systém omezených borelovských množin. Definujme *prostor lokálně konečných podmnožin* \mathbb{R}^d jako

$$\mathcal{N} = \{v \subseteq \mathbb{R}^d : v(B) < +\infty \text{ pro každé } B \in \mathcal{B}_0^d\},$$

kde $v(B)$ označuje počet bodů množiny $v \cap B$. Na \mathcal{N} zavedeme σ -algebru \mathfrak{N} následovně:

$$\mathfrak{N} = \sigma\{v \in \mathcal{N} : v(B) = m\}, m \in \mathbb{N}_0, B \in \mathcal{B}_0^d\}$$

Definice 1.9. Uveďme několik definic:

- (a) **bodový proces** Υ je měřitelné zobrazení $\Upsilon : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathcal{N}, \mathfrak{N})$, kde $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je pravděpodobnostní prostor
- (b) **rozdělení bodového procesu** je míra ζ na $(\mathcal{N}, \mathfrak{N})$ definovaná $\zeta(A) = \mathbb{P}(\Upsilon \in A)$, kde množina $A \in \mathfrak{N}$
- (c) **konečný bodový proces** je proces, pro nějž platí $\Upsilon(\mathbb{R}^d) < +\infty$ skoro jistě

Poznámka 1.14. V definici bodového procesu připouštíme pouze tzv. *jednoduchý bodový proces*, kde skoro všechny jeho realizace mají navzájem různé body. *

Věta 1.10. Υ je bodový proces, právě když $\Upsilon(B)$ je náhodná veličina pro každé $B \in \mathcal{B}_0^d$.

DŮKAZ: „ \implies “: definice bodového procesu, „ \impliedby “: Rataj [12], Věta 3.1, str. 15 □

Definice 1.10. Nechť Υ je bodový proces. **Prázdné pravděpodobnosti** procesu Υ jsou pravděpodobnosti $\mathbb{P}(\Upsilon(B) = 0)$, kde $B \in \mathcal{B}_0^d$.

Věta 1.11. *Rozdělení procesu Υ je jednoznačně určeno prázdnými pravděpodobnostmi.*

DŮKAZ: Rataj [12], Důsledek 4.2, str. 20 □

Definice 1.11. **Míra intenzity** pro bodový proces Υ se definuje předpisem

$$\Lambda(B) = \mathbb{E}\Upsilon(B),$$

kde množina $B \in \mathcal{B}^d$.

Poznámka 1.15. Míra intenzity udává střední počet bodů procesu Υ v množině B . Pokud existuje hustota $\tilde{\Lambda}$ míry Λ vzhledem k Lebesgueově míře, tzn.

$$\Lambda(B) = \int_B \tilde{\Lambda}(x) dx,$$

kde $B \in \mathcal{B}^d$, potom se $\tilde{\Lambda}$ nazývá *funkce intenzity*. *

Definice 1.12. Řekneme, že míra μ je

- **difúzní míra**, jestliže platí $\mu(\{x\}) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$
- **lokálně konečná míra**, jestliže každé omezené množině přiřazuje konečnou míru

Definice 1.13. Nechť Λ je difúzní lokálně konečná míra na \mathbb{R}^d . **Poissonův bodový proces** je proces Π takový, že

- (i) $\Pi(B) \sim \text{Po}(\Lambda(B))$ pro každou množinu $B \in \mathcal{B}_0^d$
- (ii) $\Pi(B_1), \Pi(B_2), \dots, \Pi(B_n)$ jsou nezávislé náhodné veličiny a pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsou $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0^d$ po dvou disjunktní množiny

Věta 1.12. *Poissonův bodový proces Π existuje a je jednoznačně určen mírou intenzity.*

DŮKAZ: Møller a Waagepetersen [9], Theorem 3.1, str. 16 □

Věta 1.13. *Nechť P , resp. Q , jsou rozdělení Poissonových procesů s mírami intenzit $\Lambda_P(\cdot)$, resp. $\Lambda_Q(\cdot)$, tak, že $\Lambda_P(S) + \Lambda_Q(S) < +\infty$, kde $S \in \mathcal{B}_0^d$. Nechť míra Λ_P je absolutně spojitá vzhledem k míře Λ_Q s hustotou*

$$f(x) = \frac{\Lambda_P(dx)}{\Lambda_Q(dx)}$$

Potom míra P je absolutně spojitá vzhledem k míře Q a příslušná Radonova-Nikodýmova derivace mezi těmito dvěma mírami pro pevnou realizaci $\{x_1, \dots, x_n\} \in \Omega$ je dána vztahem

$$\frac{dP}{dQ} = \exp\{\Lambda_Q(S) - \Lambda_P(S)\} \prod_{i=1}^{\Psi(S)} f(x_i), \quad (1.6)$$

kde je součinn nahrazen 1, pokud $\Psi(S) = 0$.

DŮKAZ: Papaspiliopoulos [11], Lemma 5.1.4, str. 126 □

1.2.2 Poissonova náhodná míra

Definice 1.14. Necht' $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je pravděpodobnostní prostor, $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ je σ -algebra a (E, \mathcal{E}) je měřitelný prostor. Zobrazení

$$\mu : \mathcal{E} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

nazýváme **$(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ -náhodná pravděpodobnostní míra**, jestliže

- (i) pro každou množinu $D \in \mathcal{E}$ je $\mu(D, \cdot)$ náhodná veličina na měřitelném prostoru (Ω, \mathcal{B})
- (ii) $\mu(E, \cdot) = 1$ skoro jistě a pro každou množinu $D \in \mathcal{E}$ je $\mu(D, \cdot) \geq 0$ skoro jistě
- (iii) pro každou posloupnost disjunktních množin $D_n \in \mathcal{E}$, kde $n \in \mathbb{N}$, platí

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n, \cdot\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(D_n, \cdot) \quad \text{skoro jistě}$$

Definice 1.15. Necht' $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s rozdělením $\text{Exp}(\lambda)$ a $T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$. Proces $(N_t)_{t \geq 0}$ definovaný

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{I}_{t \geq T_n}$$

se nazývá **Poissonův proces** s intenzitou λ , kde $\lambda > 0$.

Poznámka 1.16. Poissonův proces je skokový proces, který počítá počet náhodných časů událostí (T_n) , které se vyskytly mezi časy 0 a t , kde $(T_n - T_{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených exponenciálních náhodných veličin. *

Časy událostí T_1, T_2, \dots tvoří náhodnou konfiguraci na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$, na jejímž základě lze definovat čítací míru M počítající počet časů událostí. Položme

$$M(A, \omega) = \#\{i \in \mathbb{N}, T_i(\omega) \in A\},$$

kde $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Zřejmě $M(\cdot, \omega)$ je kladná, celočíselná míra, která je s pravděpodobností 1 konečná pro jakoukoliv omezenou množinu A . Je to tedy náhodná míra.

Definice 1.16. Necht' $E \in \mathcal{B}^d$. **Radonova míra** μ na měřitelném prostoru (E, \mathcal{B}^d) je taková míra, že pro každou kompaktní měřitelnou množinu $B \in \mathcal{B}^d$ platí $\mu(B) < +\infty$.

Definice 1.17. Necht' $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je pravděpodobnostní prostor, $E \in \mathcal{B}^d$ a μ je kladná Radonova míra na (E, \mathcal{E}) , kde σ -algebra $\mathcal{E} = \{E \cap B, B \in \mathcal{B}^d\}$. **Poissonova náhodná míra** na E s mírou intenzity μ je celočíselná náhodná míra

$$\begin{aligned} M : \mathcal{E} \times \Omega &\rightarrow \mathbb{N} \\ (A, \omega) &\mapsto M(A, \omega) \end{aligned}$$

taková, že platí

- (i) pro skoro všechna $\omega \in \Omega$, je $M(\cdot, \omega)$ je celočíselná Radonova míra
- (ii) pro každou měřitelnou množinu $A \subset E$ platí, že $M(A) \sim \text{Po}(\mu(A))$
- (iii) pro disjunktní měřitelné množiny $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ jsou $M(A_1), \dots, M(A_n)$ nezávislé náhodné veličiny

Uveďme ještě existenční výsledek pro Poissonovu náhodnou míru.

Věta 1.14. *Pro libovolnou náhodnou míru μ na množině $E \in \mathcal{B}^d$ existuje Poissonova náhodná míra M na množině E s intenzitou μ .*

DŮKAZ: Předvedeme pouze případ $\mu(E) < +\infty$. Pro případ $\mu(E) = +\infty$ odkazujeme na Cont a Tankov [3], PROPOSITION 2.14, str. 58. Míru M zkonstruujeme z posloupnosti nezávislých náhodných veličin v těchto krocích:

1. uvažujeme X_1, X_2, \dots nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny takové, že platí $\mathbb{P}(X_i \in A) = \frac{\mu(A)}{\mu(E)}$
2. uvažujeme $M(E)$ jako náhodnou veličinu s Poissonovým rozdělením se střední hodnotou $\mu(E)$, která je nezávislá na X_i , kde $i \in \mathbb{N}$
3. pro každou množinu $A \in \mathcal{E}$ definujeme součet $M(A) = \sum_{i=1}^{M(E)} \mathbb{I}_A(X_i)$

Potom lze samozřejmě snadno ověřit, že M je Poissonova náhodná míra s intenzitou μ . \square

Konstrukce daná v předchozím důkazu ukazuje, že libovolnou Poissonovu náhodnou míru na E lze reprezentovat jako čítací míru sdruženou s náhodnou posloupností z E . Tedy pro nějakou náhodnou posloupnost $\{X_n(\omega)\}_{n \in \mathbb{N}}$ a každou množinu $A \in \mathcal{E}$ lze psát

$$M(A, \omega) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{I}_A(X_n(\omega))$$

M je proto součet Diracových měř δ ležících v bodech (X_n) . Protože požadujeme, aby $M(A)$ byla konečná míra pro libovolný kompaktní $A \subset E$, dostáváme omezení na posloupnost (X_n) , které znamená, aby množina $A \cap \{X_n\}_{n \geq 1}$ byla skoro jistě konečná právě pro $A \subset E$.

Uvažujme nyní Poissonovu náhodnou míru M na množině $E = \langle 0, T \rangle \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Dle předchozího můžeme M reprezentovat jako čítací míru sdruženou s náhodnými dvojicemi bodů $(T_n(\omega), Y_n(\omega)) \in E$. Reprezentace pomocí Diracovy míry δ je

$$M(\cdot, \omega) = \sum_{n \geq 1} \delta_{(T_n(\omega), Y_n(\omega))}$$

Pro každé ω je $M(\omega, \cdot)$ míra na E a lze definovat integrál vzhledem k této míře, jehož konstrukce probíhá standardním způsobem:

1. Pro jednoduché funkce $f = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{I}_{A_i}$ definujeme

$$M(f) = \sum_{i=1}^n c_i M(A_i),$$

kde $c_i \geq 0$ a $A_i \subset E$ jsou disjunktní měřitelné množiny. $M(f)$ je náhodná veličina se střední hodnotou $\mathbb{E}[M(f)] = \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i)$.

2. Pro nezáporné měřitelné funkce $f : E \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$ definujeme

$$M(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} M(f_n),$$

kde $f_n \nearrow f$ je neklesající posloupnost nezáporných jednoduchých funkcí. Podle Léviho věty o monotónní konvergenci je $M(f)$ náhodná veličina s hodnotami na $\langle 0, +\infty \rangle$ a se střední hodnotou $\mathbb{E}[M(f)] = \mu(f)$.

3. Pro měřitelné reálné funkce $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ uděláme rozklad na kladnou f_+ a zápornou část f_- , tj. $f = f_+ - f_-$. Pokud funkce f splňuje

$$\mu(|f|) = \int_{\langle 0, T \rangle \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} |f(s, y)| \mu(ds \times dy) < +\infty,$$

potom nezáporné náhodné veličiny $M(f_+)$ a $M(f_-)$ mají konečnou střední hodnotu. $M(f_+)$ a $M(f_-)$ jsou tedy skoro jistě konečné a lze definovat náhodnou veličinu $M(f) := M(f_+) - M(f_-)$ se střední hodnotou

$$\mathbb{E}[M(f)] = \mu(f) = \int_{\langle 0, T \rangle \times \mathbb{R}^d} f(s, y) \mu(ds \times dy)$$

Vrátíme-li se zpět ke složenému Poissonovu procesu (X_t) , dostáváme integraci funkce f vzhledem k náhodné míře M

$$X_t(f) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} f(s, y) M(ds dy) = \sum_{\{n \in \mathbb{N}, T_n \in \langle 0, t \rangle\}} f(T_n, Y_n)$$

Proces $(X_t(f))_{t \in \langle 0, T \rangle}$ je skokový proces, jenž má skoky v náhodných časech T_n , a jeho skoky mají velikosti $f(T_n, Y_n)$. Na základě této motivace lze tedy vyjádřit složený Poissonův proces jako kótovaný bodový proces, jehož definici nyní připomeneme.

Definice 1.18. Necht \mathcal{M} je úplný separabilní metrický prostor. Tomuto prostoru budeme říkat **prostor kót.** **Kótovaný bodový proces** je náhodná posloupnost uspořádaných dvojic bodů $\Phi_m = \{(X_n, M_n)\}$ takových, že $\Phi = \cup_n X_n$ tvoří bodový proces na \mathbb{R}^d a M_n jsou náhodné elementy s hodnotami v \mathcal{M} (**kóty**).

Předešlá motivace též znamená, že každý složený Poissonův proces (X_t) na \mathbb{R}^d lze ztotožnit s náhodnou mírou na množině $G = \mathbb{R}^d \times (0, +\infty)$ popisující jeho skoky. Položíme-li pro libovolnou měřitelnou množinu $B \subset G$ obdobně jako v (1.3)

$$J_X(B) = \#\{s > 0 : \Delta X_s \neq 0, (s, \Delta X_s) \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}(G),$$

potom pro každou měřitelnou množinu $A \subset \mathbb{R}^d$ míra $J_X(\langle t_1, t_2 \rangle \times A)$, kde $0 \leq t_1 < t_2 < +\infty$, počítá počet skoků mezi časy t_1 a t_2 .

Věta 1.15. *Nechť (X_t) je složený Poissonův proces na \mathbb{R}^d s intenzitou λ a rozdělením velikostí skoků f . Potom skoková míra J_X je Poissonova náhodná míra na $\mathbb{R}^d \times (0, +\infty)$ s mírou intenzity*

$$\mu(dx \times dt) = \nu(dx)dt = \lambda f(dx)dt$$

DŮKAZ: Cont a Tankov [3], PROPOSITION 3.5, str. 76 a 77 □

1.3 Obecné Ornsteinovy-Uhlenbeckovy procesy

V této sekci se blíže podíváme na speciální třídu neomezeně dělitelných rozdělání a uvedeme je do souvislosti s obecnými OU procesy.

Definice 1.19. Neomezeně dělitelné rozdělání F na \mathbb{R}^d je **samorozložitelné rozdělání**, jestliže pro každé $b > 1$ existuje neomezeně dělitelné rozdělání G_b tak, že pro příslušné charakteristické funkce platí

$$\Phi_F(t) = \Phi_F\left(\frac{t}{b}\right)\Phi_{G_b}(t),$$

kde $t \in \mathbb{R}^d$.

Poznámka 1.17. V dalším uvažujeme pouze jednorozměrné samorozložitelné rozdělání. *
Náš další cíl je zjistit reprezentaci samorozložitelného rozdělání pomocí Lévyho procesu.

Definice 1.20. Nechť $(Z_t)_{t \geq 0}$ je Lévyho proces na \mathbb{R} . **Obecný Ornsteinův-Uhlenbeckův proces** $(Y_t)_{t \geq 0}$ na \mathbb{R} (dále jen *proces OU typu*) definujeme jako řešení rovnice

$$dY_t = -\lambda Y_t dt + dZ_t, \quad (1.7)$$

kde $\lambda > 0$ nazýváme **míra klesání** (*decay rate*) a proces $(Z_t)_{t \geq 0}$ nazýváme **řídící Lévyho proces** (*background driving Lévy process*).

Poznámka 1.18. Alternativní definicí obecného OU procesu je přímo zapsání jeho řešení

$$Y_t = Y_0 \exp\{-\lambda t\} + \int_0^t \exp\{-\lambda(t-s)\} dZ_s, \quad (1.8)$$

kde $t \geq 0$ a $\lambda > 0$. Tento způsob lze nalézt v Cont a Tankov [3] na str. 481, kde se zároveň ověřuje, že toto řešení vyhovuje rovnici (1.7). Za proces (Z_t) budeme uvažovat skokový proces na \mathbb{R} s konečnou variací, který je subordinátor. *

Definice 1.21. **Stacionární proces OU typu** je proces $(Y_t)_{t \geq 0}$ na \mathbb{R} , pro který platí

$$Y_t = \int_{-\infty}^t \exp\{-\lambda(t-s)\} dZ(\lambda s), \quad (1.9)$$

kde $\lambda > 0$, a $(Z_t)_{t \geq 0}$ je Lévyho proces na \mathbb{R} .

Neobvyklá časová transformace u Lévyho procesu (Z_t) v (1.9) je záměrně zvolena, neboť nemá vliv na rozdělení OU procesu (Y_t) (viz Barndorff-Nielsen a Shephard [1], str. 168). Tuto transformaci budeme v dalším uvažovat jak pro (1.7), tak pro (1.8).

Věta 1.16. *Nechť Y je samorozložitelná náhodná veličina. Potom existuje stacionární náhodný proces $(Y_t)_{t \geq 0}$ na \mathbb{R} a Lévyho proces $(Z_t)_{t \geq 0}$ na \mathbb{R} tak, že*

(i) $\mathcal{L}(Y_t) = \mathcal{L}(Y)$ pro každé $t \geq 0$

(ii) pro každé $\lambda > 0$ lze (Y_t) reprezentovat (1.9)

Naopak, pokud (Y_t) je stacionární proces na \mathbb{R} a (Z_t) , je Lévyho proces na \mathbb{R} tak, že platí (i) a tyto splňují rovnici (1.9) pro každé $\lambda > 0$, potom Y je samorozložitelná náhodná veličina.

DŮKAZ: Barndorff-Nielsen a Shephard [1], Theorem 1, str. 172 □

Pokud máme dáno jednodimenzionální rozdělení D , potom podle předchozí věty víme, že existence stacionárního procesu OU typu s marginálním rozdělením D je ekvivalentní se samorozložitelností marginálního rozdělení D . Stacionární OU proces lze na základě věty 1.16 konstruovat těmito způsoby:

1. zvolíme Lévyho proces (Z_t) a na jeho základě zjistíme samorozložitelné rozdělení D
2. zvolíme samorozložitelné rozdělení D a na jeho základě zjistíme Lévyho proces (Z_t)

Budeme postupovat druhým způsobem. Předpokládejme, že jsme zvolili samorozložitelné rozdělení D na \mathbb{R}_+ . Potom (1.9) lze přepsat do tvaru

$$Y_t = Y_0 \exp\{-\lambda t\} + \int_0^t \exp\{-\lambda(t-s)\} dZ(\lambda s),$$

kde $Y_t \sim D$. Nechť U , resp. W , je Lévyho míra Lévyho-Chinčinovy reprezentace Y_t , resp. Z_1 . Předpokládejme dále, že U a W mají po řadě hustoty u a w , přičemž u je diferencovatelná. Pro hustoty u a w platí (viz Barndorff-Nielsen a Shephard [1], str. 173)

$$w(x) = -u(x) - xu'(x) \quad (1.10)$$

Poznamenejme, že pro zajištění stacionárního řešení rovnice (1.7) je potřeba, aby platilo (viz Barndorff-Nielsen a Shephard [1], str. 175)

$$\mathbb{E}[\ln(1 + |Z_1|)] < +\infty \quad (1.11)$$

1.4 Markov chain Monte Carlo algoritmy

1.4.1 Bayesovská statistika a konjugovaná rozdělení

Nechť $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)^T$ je náhodný vektor s hustotou $\pi(\theta)$, kterou má vzhledem k σ -konečné míře μ na měřitelném prostoru $(\Theta, \mathcal{B}(\Theta))$, kde Θ je neprázdná borelovská podmnožina \mathbb{R}^k a $\mathcal{B}(\Theta)$ označuje borelovské množiny Θ . Nechť dále $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ je náhodný vektor s podmíněnou hustotou $f(x|\theta)$ při daném θ vzhledem k σ -konečné míře ν_n na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$.

Věta 1.17. Pro podmíněnou hustotu $\pi(\theta|x)$ náhodného vektoru θ při daném X platí

$$\pi(\theta|x) = \frac{\pi(\theta)f(x|\theta)}{\int_{\Theta} \pi(\theta)f(x|\theta) d\mu(\theta)}$$

pro jmenovatele různého od nuly.

DŮKAZ: Hušková [7], Věta 1.1, str. 11 □

Poznámka 1.19. Hustota $\pi(\theta)$ se nazývá *apriorní hustota*, protože vyjadřuje informaci o parametru θ ještě před realizací X . Podmíněnou hustotu $\pi(\theta|x)$ parametru θ nazýváme *aposteriorní hustota*, neboť jde o hustotu parametru θ beroucí v úvahu realizaci X . Závěry o parametru θ budeme provádět právě pomocí aposteriorní hustoty $\pi(\theta|x)$, která v sobě zahrnuje jak apriorní informaci o parametru θ , tak informaci plynoucí z realizace X . Podmíněnou hustotu $f(x|\theta)$ nazýváme *věrohodnost*. Bayesovu větu budeme přepisovat do tvaru

$$\pi(\theta|x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta),$$

kde \propto značí rovnost až na multiplikativní konstantu, kterou je v tomto případě integrál ve jmenovateli a kterou nebudeme brát často vůbec na zřetel. *

Definice 1.22. Systém hustot \mathcal{P} nazýváme **systém konjugovaných hustot** s věrohodností $f(x|\theta)$, jestliže $\pi(\theta) \in \mathcal{P}$ a $\pi(\theta|x) \in \mathcal{P}$.

Poznámka 1.20. Definice říká, že apriorní rozdělení $\pi(\theta)$ a aposteriorní rozdělení $\pi(\theta|x)$ patří do stejného systému hustot \mathcal{P} . Vezmeme-li systém všech hustot, definice triviálně platí. Budeme proto uvažovat pouze rozumně velké třídy hustot. Výhodou systému konjugovaných hustot je to, že přechod od apriorního k aposteriornímu rozdělení se děje pouze změnou parametrů daného rozdělení. Příkladem takového systému je například systém binomických či Poissonových rozdělení (viz Hušková [7], str. 15–26). *

Definice 1.23. Řekneme, že **hustota $f(x|\theta)$ náleží do exponenciální rodiny rozdělení**, jestliže má tvar

$$f(x|\theta) = \exp \left\{ \sum_{j=1}^d c_j(\theta) T_j(x) + A(\theta) + B(x) \right\} \quad (1.12)$$

Věta 1.18. *Systém hustot*

$$\pi(\theta) = C(\alpha_1, \dots, \alpha_d, \beta) \exp \left\{ \sum_{j=1}^d \alpha_j c_j(\theta) + \beta A(\theta) \right\}$$

je konjugovaný s hustotami $f(x|\theta)$ danými (1.12).

DŮKAZ: Z Bayesovy věty zřejmě platí

$$\begin{aligned} \pi(\theta|x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta) &\propto \exp \left\{ \sum_{j=1}^d c_j(\theta) T_j(\theta) + A(\theta) \right\} \exp \left\{ \sum_{j=1}^d \alpha_j c_j(\theta) + \beta A(\theta) \right\} \\ &= \exp \left\{ \sum_{j=1}^d (\alpha_j + T_j(x)) c_j(\theta) + (\beta + 1) A(\theta) \right\} \end{aligned}$$

□

Exponenciální rodina rozdělení tvoří možnost, jak konstruovat systém konjugovaných hustot. Typickými příklady rozdělení exponenciálního typu jsou normální, binomické či Poissonovo rozdělení. V této práci bude důležitý příklad gamma rozdělení. V dalším položíme

$$\theta_{-i} = (\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_d)^T, \quad (1.13)$$

kde $i = 1, \dots, d$. Pro MCMC modely s více parametry je důležitý tento koncept.

Definice 1.24. Parametr θ je **podmíněně konjugovaný parametr**, jestliže hustoty $\pi(\theta_i|\theta_{-i})$ a $\pi(\theta_i|x, \theta_{-i})$ jsou stejného typu pro $i \in \{1, \dots, d\}$.

Poznámka 1.21. Pokud má apriorní rozdělení nezávislé složky, tj. $\pi(\theta) = \pi_1(\theta_1) \cdot \dots \cdot \pi_d(\theta_d)$ a marginální složky $\pi_i(\theta_i)$ jsou konjugované s $f(x|\theta_i)$, potom dostaneme podmíněnou konjugovanost. *

1.4.2 Markovská jádra

Uvažujme rozdělení π , které má hustotu f vzhledem k σ -konečné míře μ na měřitelném prostoru (E, \mathcal{E}) . MCMC algoritmy umožňují simulaci z rozdělení π , které obvykle nazýváme *cílové rozdělení* tak, že sestrojí *markovský řetězec*, jehož stacionární rozdělení je právě π . V dalším uvažujeme obecně nespočetnou podmnožinu stavů E .

Definice 1.25. Měřitelné zobrazení $P : E \times \mathcal{E} \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ se nazývá **přechodové jádro** (též **markovské jádro**) na (E, \mathcal{E}) , jestliže

1. pro každou množinu $A \in \mathcal{E}$ je $P(\cdot, A)$ nezáporná měřitelná funkce
2. pro každý bod $x \in E$ je $P(x, \cdot)$ pravděpodobnostní míra na E

Věta 1.19. *Nechť je dáno markovské jádro P na (E, \mathcal{E}) a rozdělení μ na \mathcal{E} . Potom existuje náhodný proces $\{X_n\}$ tak, že*

$$P(X_0 \in A_0, X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \int_{A_0} \int_{A_1} \dots \int_{A_n} P(x_{n-1}, dx_n) \dots P(x_0, dx_1) \mu(dx_0) \quad (1.14)$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ a $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{E}$.

DŮKAZ: Meyn a Tweedie [8] □

Poznámka 1.22. Předešlá věta udává, že markovský řetězec lze zkonstruovat jen pomocí jeho přechodového jádra. Integrály v (1.14) chápeme iterativně, tj. postupujeme od vnitřního k vnějšímu integrálu. *

Definice 1.26. Nechť $P^0(x, A) = \delta_x(A)$. **Přechodové jádro n -tého řádu** definujeme

$$P^n(x, A) = \int_E P(y, A) P^{n-1}(x, dy),$$

kde $n \in \mathbb{N}$.

Tzv. *stacionární rozdělení* a jeho existence vyjadřuje poměrně silnou vlastnost stability, kterou mají markovské řetězce.

Definice 1.27. Pravděpodobnostní rozdělení π na \mathcal{E} je **limitní rozdělení** markovského řetězce $\{X_n\}$ generovaného P , jestliže

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P^n(x, A) \pi(dx) = \pi(A)$$

pro π -skoro všechna $x \in \mathcal{E}$ a pro každou množinu $A \in \mathcal{E}$.

Definice 1.28. Řekneme, že σ -konečná míra π na \mathcal{E} je **invariantní míra**, jestliže platí

$$\pi(A) = \int_E P(x, A) \pi(dx)$$

pro každou množinu $A \in \mathcal{E}$. Pokud π je pravděpodobnostní míra, nazývá se **stacionární rozdělení** markovského řetězce s přechodovým jádrem P .

Věta 1.20. *Je-li π limitní rozdělení, potom je stacionární rozdělení.*

DŮKAZ: Pro $A \in \mathcal{E}$ platí

$$\pi(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P^n(x, A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E P(y, A) P^{n-1}(x, dy) = \int_E P(y, A) \pi(dy) = \pi P(A)$$

□

Definice 1.29. Markovský řetězec generovaný přechodovým jádrem P je **reverzibilní řetězec** vzhledem k rozdělení π , jestliže pro každé dvě množiny $A, B \in \mathcal{E}$ platí

$$\int_A P(x, B)\pi(dx) = \int_B P(x, A)\pi(dx) \quad (1.15)$$

Poznámka 1.23. Podmínka (1.15) je také nazývána *detailní podmínka rovnováhy* a znamená, že pokud máme dvě libovolné množiny A a B ze stavového prostoru (E, \mathcal{E}) , potom pravděpodobnost přechodu z A do B a z B do A je stejná. *

Věta 1.21. *Je-li markovský řetězec reverzibilní vzhledem k π , potom π je stacionární rozdělení.*

DŮKAZ: Stačí položit $A = E$ v (1.15). □

Při pohybu stavovým prostorem (E, \mathcal{E}) musí mít markovské jádro P „svobodu“ tak, aby bylo skutečně zajištěno prozkoumání celého stavového prostoru.

Definice 1.30. Nechť φ je pravděpodobnostní míra na \mathcal{E} . **φ -nerozložitelný řetězec** je markovský řetězec takový, že pro každé $x \in E$ a každou množinu $A \in \mathcal{E}$ s $\varphi(A) > 0$ platí, že $P^n(x, A) > 0$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$.

Podmínka φ -nerozložitelnosti říká, že po určitém počtu kroků řetězce bude navštívena každá množina A ze stavového prostoru s kladnou pravděpodobností. Je to vlastně *doba prvního návratu do množiny A* ($\tau_A = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n \in A\}$).

Věta 1.22. *Nechť $\{X_n\}$ je φ -nerozložitelný markovský řetězec. Potom existuje pravděpodobnostní míra ψ na \mathcal{E} tak, že*

(i) $\{X_n\}$ je ψ -nerozložitelný

(ii) pro libovolnou pravděpodobnostní míru φ^* na \mathcal{E} platí, že $\{X_n\}$ je φ^* -nerozložitelný právě tehdy, když φ^* je absolutně spojitá míra vzhledem k míře φ

DŮKAZ: Meyn a Tweedie [8], Proposition 4.2.2, str. 88 □

Poznámka 1.24. Pokud mluvíme o ψ -nerozložitelném řetězci, máme na mysli, že řetězec je φ -nerozložitelný pro nějaké φ a míra ψ je maximální ve smyslu předchozí věty. *

Důležitou vlastností markovského řetězce je také i tzv. *harrisovská trvalost*, která zajišťuje, že řetězec má stejné limitní chování pro každou počáteční hodnotu, což je důležité vzhledem k tomu, že většina MCMC algoritmů začíná z libovolného startovního bodu.

Definice 1.31. Řekneme, že množina $A \in \mathcal{E}$ je **harrisovsky trvalá množina**, jestliže $\mathbb{P}(\text{existuje } n \in \mathbb{N} : X_n \in A | X_0 = x) = 1$ pro každé $x \in A$.

Poznámka 1.25. Ekvivalentně lze harrisovsky trvalou množinu definovat vlastností

$$Q(x, A) = \mathbb{P}(\eta_A = +\infty | X_0 = x) = 1$$

pro každé $x \in A$, kde $\eta_A = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{I}_{[X_n \in A]}$ je počet navštívení množiny A markovským řetězcem $\{X_n\}$. *

Definice 1.32. Markovský řetězec $\{X_n\}$ je **harrisovsky trvalý řetězec**, pokud je

- (i) ψ -nerozložitelný
- (ii) každá množina $A \in \mathcal{E}$ splňující podmínku $\psi(A) > 0$ je harrisovsky trvalá množina

Tímto se dostáváme k definici tzv. *ergodického řetězce*, což je zcela základní otázka MCMC metod - tedy k čemu řetězec konverguje (potažmo jak dobře).

Definice 1.33. Markovský řetězec, který je ψ -nerozložitelný a v němž existuje stacionární rozdělání, se nazývá **nenulový řetězec**.

Definice 1.34. Markovský řetězec $\{X_n\}$ se nazývá **periodický řetězec**, jestliže existují $q \in \mathbb{N}$, $q > 1$ a neprázdné disjunktní množiny $A_0, A_1, \dots, A_{q-1}, A_q = A_0 \in \mathcal{E}$ tak, že $P(x, A_{i+1}) = 1$ pro každé $x \in A_i$, kde $i \in \{0, \dots, q-1\}$. V opačném případě máme na mysli **neperiodický řetězec**.

Definice 1.35. Řekneme, že markovský řetězec $\{X_n\}$ je **ergodický řetězec**, jestliže je harrisovsky trvalý, neperiodický a nenulový.

Uveďme alespoň jednu z podmínek pro ergodický řetězec. Další podmínky a jiné typy ergodicity řetězce jsou v Casella a Robert [2], str. 160–167.

Definice 1.36. Necht' ν_1 a ν_2 jsou dvě pravděpodobnostní míry na \mathcal{E} . Potom **vzdálenost měr v totální variaci** definujeme vztahem

$$\|\nu_1 - \nu_2\|_{TV} = \sup_{A \in \mathcal{E}} |\nu_1(A) - \nu_2(A)|$$

Věta 1.23. *Necht' je markovský řetězec $\{X_n\}$ se stacionárním rozděláním π ergodický. Potom*

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \longrightarrow 0 \quad \text{pro } n \rightarrow +\infty$$

pro každé $x \in E$.

DŮKAZ: Casella a Robert [2], Theorem 4.6.4, str. 162

□

Poznámka 1.26. Věta pro ergodický řetězec v této formě je velmi silná, neboť zaručuje konvergenci pro jakýkoliv počáteční bod řetězce. Verzi pro libovolné počáteční rozdělení μ lze nalézt v Casella a Robert [2], Theorem 4.6.5., str. 162. *

Nyní se již dostáváme k hlavnímu výsledku pro markovské ergodické řetězce $\{X_n\}$, kterým je tzv. *ergodická věta*. Mějme pozorování X_1, \dots, X_n z markovského řetězce $\{X_n\}$. Označme

$$V_n(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i), \quad (1.16)$$

kde h je měřitelná reálná funkce a zkoumejme limitní chování tzv. *ergodických průměrů* $V_n(h)$ pro $n \rightarrow +\infty$.

Věta 1.24 (Ergodická věta). *Nechť markovský řetězec $\{X_n\}$ má σ -konečnou invariantní míru π , potom je ekvivalentní*

(i) *pokud $f \in L^1(\pi)$, $g \in L^1(\pi)$ s $\int g(x)d\pi(x) \neq 0$, potom*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V_n(f)}{V_n(g)} = \frac{\int f(x)d\pi(x)}{\int g(x)d\pi(x)}$$

(ii) *markovský řetězec $\{X_n\}$ je harrisovsky trvalý*

DŮKAZ: Casella a Robert [2], Theorem 4.7.4, str. 169 a 170 □

1.4.3 Přehled některých algoritmů

Gibbsův výběrový plán

Nechť prostor E má součinný charakter, tj. $E = \prod_{i=1}^d E_i$, a cílové rozdělení π přísluší nějakému náhodnému vektoru (X_1, \dots, X_d) . Nechť $j \in \mathbb{N}$ a $d \in \mathbb{N}$.

Gibbsův výběrový plán (GVP) probíhá v těchto krocích:

1. Zvolíme počáteční stav $\theta^{(j)} = (\theta_1^{(j)}, \dots, \theta_d^{(j)})^T$, kde $j = 0$
2. V j -tém kroku simulujeme nový stav $\theta^{(j)}$ z předchozího stavu $\theta^{(j-1)}$ následovně:

$$\begin{aligned} \theta_1^{(j)} &\sim \pi(\theta_1 | \theta_2^{(j-1)}, \dots, \theta_d^{(j-1)}) \\ \theta_2^{(j)} &\sim \pi(\theta_2 | \theta_1^{(j)}, \theta_3^{(j-1)}, \dots, \theta_d^{(j-1)}) \\ &\dots \\ \theta_d^{(j)} &\sim \pi(\theta_d | \theta_1^{(j)}, \dots, \theta_{d-1}^{(j)}) \end{aligned}$$

3. Zvětšíme j o jedničku a jdeme zpět na krok 2, dokud nevyčerpáme předem zvolený počet iterací T , kde $T \in \mathbb{N}$

Poznámka 1.27. GVP vytváří markovský řetězec $\{X_n\}$ s přechodovým jádrem P , které je složením d přechodových jader P^i , kde $i = 1, \dots, d$. Algoritmus vyžaduje, že umíme simulovat ze všech plně podmíněných rozdělání $\pi(\theta_i|\theta_{-i})$, kde θ_{-i} je dáno (1.13). Konvergenční vlastnosti algoritmu GVP lze nalézt v Casella a Robert [2], Chapter 7. *

Metropolisův-Hastingsův algoritmus

Uvažme cílové rozdělání π na (E, \mathcal{E}) a přechodové jádro P . Necht' $\{X_n\}$ je reverzibilní markovský řetězec vzhledem k rozdělání π , kde přechodové jádro P splňuje podmínku reverzibility (1.15), tzn.

$$\pi(dx)P(x, dy) = \pi(dy)P(y, dx)$$

Jedná se o postačující podmínku pro existenci stacionárního rozdělání π . Jádro $P(x, dy)$ se dále skládá z přechodového jádra Q a nezáporné měřitelné funkce $\alpha : E \times E \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$, což zapíšeme

$$P(x, dy) = Q(x, dy)\alpha(x, y) \quad (1.17)$$

Vztah (1.17) tedy znamená, že pokud se nacházíme ve stavu x v množině $A \in \mathcal{E}$, kandidát y vygenerovaný z množiny $B \in \mathcal{E}$ bude přijat s pravděpodobností $\alpha(x, y)$. Pokud je zamítnut, další stav řetězce je opět x . Pro přechodové jádro P to tedy znamená, že má tvar

$$P(x, dy) = \int_B Q(x, y)\alpha(x, y)dy + \mathbb{I}_{\{y \in B\}} \left[1 - \int Q(x, y)\alpha(x, y)dy \right]$$

Pokud platí $Q(x, dy) = q(x, y)\mu(dy)$ pro nějaké q , funkci q nazýváme *návrhová hustota*. Na jejím základě definujeme *pravděpodobnost přijetí návrhu* jako

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} \min \left\{ \frac{\pi(y)q(y, x)}{\pi(x)q(x, y)}, 1 \right\}, & \text{pro } \pi(x)q(x, y) > 0, \\ 1, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Metropolisův-Hastingsův (MH) algoritmus probíhá v těchto krocích:

1. Zvolíme počáteční stav $\theta^{(0)}$.
2. V j -tém kroku nagenujeme nový stav x řetězce z přechodového jádra $Q(\theta^{(j-1)}, \cdot)$, který slouží jako návrh pro příští stav.
3. Vyčíslíme pravděpodobnost přijetí návrhu $\alpha(\theta^{(j-1)}, x)$, na jejímž základě návrh x na nový stav přijmeme (tzn. $\theta^{(j)} := x$), nebo zůstaneme v původním (současném) stavu (tzn. $\theta^{(j)} := \theta^{(j-1)}$).
4. Zvětšíme j o jedničku a jdeme zpět na krok 2, dokud nevyčerpáme předem zvolený počet iterací T , kde $T \in \mathbb{N}$.

Poznámka 1.28. Oproti algoritmu GVP není potřebná znalost všech plně podmíněných rozdělání a dokonce ani normující konstanty u hustoty π . Návrhovou hustotu q lze volit libovolně ovšem s rizikem, že MH algoritmus může dlouho zůstat v jednom stavu a být neefektivní, pokud je hustota nevhodně zvolena. Konvergenční vlastnosti MH algoritmu lze nalézt v Casella a Robert [2], Chapter 6. *

Metropolisova-Hastingsova náhodná procházka

Jedná se o modifikaci MH algoritmu, která je založena na modifikaci návrhové hustoty q . Uvažujme *náhodnou procházku* parametru $\theta^{(j)}$

$$\theta^{(j)} = \theta^{(j-1)} + \beta_j,$$

kde rozdělení β_j je nezávislé na rozdělení $\theta^{(j)}$. Náhodné veličiny β_j jsou obecně nezávislé stejně rozdělené s hustotou f_{β_j} . Návrhovou hustotu proto volíme

$$q(\theta^{(j-1)}, \theta^{(j)}) = f_{\beta_j}(\theta^{(j)} - \theta^{(j-1)}).$$

Pokud $q(\theta^{(j-1)}, \theta^{(j)}) = q(\theta^{(j)}, \theta^{(j-1)})$, tj. návrhová hustota q závisí pouze na vzdálenosti $\theta^{(j)}$ a $\theta^{(j-1)}$, pravděpodobnost přijetí má tvar

$$\min \left\{ 1, \frac{\pi(\theta^{(j)})}{\pi(\theta^{(j-1)})} \right\}.$$

MH náhodnou procházku lze také chápat v součinném tvaru, tj.

$$\theta^{(j)} = \theta^{(j-1)} \exp\{\beta_j\},$$

kde podle věty o transformaci náhodných veličin dostaneme návrhovou hustotu ve tvaru

$$q(\theta^{(j-1)}, \theta^{(j)}) = \frac{1}{\theta^{(j)}} \ln \left(\frac{\theta^{(j)}}{\theta^{(j-1)}} \right).$$

Hybridní algoritmus (Metropolis-within-Gibbs)

Předpokládejme, že máme opět vektor parametrů $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$. Složky vektoru θ mohou být aktualizovány:

- (1) v náhodném pořadí (*směsi přechodových jader*),
- (2) v pevně daném pořadí (*cykly přechodových jader*) - např. $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow d$.

Budeme se zabývat druhým případem. Pro každou složku θ_i budeme předpokládat, že má přechodové jádro P_i , kde $i = 1, \dots, d$. Přechod ze stavu $x = (x_1, \dots, x_d)$ do $y = (y_1, \dots, y_d)$ se děje pomocí přechodového jádra (viz Gamerman [5], str. 170)

$$P(x, y) = \int \cdots \int \prod_{i=1}^d P_i(\psi_{i-1}, \psi_i) d\psi_1 \cdots \psi_{d-1}$$

Každé jádro P_i může být dáno svou vlastní návrhovou hustotou q_i s pravděpodobností přijetí α_i , která je v tomto případě

$$\alpha_i(x, y) = \min \left\{ 1, \frac{\pi_i(y_i) q_i(y_i, x_i)}{\pi_i(x_i) q_i(x_i, y_i)} \right\}$$

Poznamenejme, že přechodové jádro P_i definuje reverzibilní markovský řetězec s limitním rozdělením $\pi_i(\theta_i)$ a ovlivňuje pouze i -tou složku vektoru θ .

Hybridní algoritmus probíhá v následujících krocích:

1. Zvolíme počáteční stav $\theta^{(0)}$.
2. Zvolíme plně podmíněné rozdělení $\pi(\theta_i|\theta_{-i})$, kde $i = 1$.
3. Pro i -tou složku vektoru θ navrhne nový stav x_i nagenovaný z hustoty $q_i(\theta_i^{(j-1)}, x_i)$, který slouží jako návrh pro příští stav.
4. Vyčíslíme pravděpodobnost přijetí návrhu $\alpha_i(\theta_i^{(j-1)}, x_i)$, na jejímž základě návrh x_i na nový stav přijmeme (tzn. $\theta_i^{(j)} := x_i$), nebo zůstaneme v původním (současném) stavu (tzn. $\theta_i^{(j)} := \theta_i^{(j-1)}$).
5. Zvětšíme i o jedničku a jdeme zpět na 3. krok. V případě, že $i = d$, jdeme na krok 6.
6. Zvětšíme j o jedničku a jdeme zpět na krok 2, dokud nevyčerpáme předem zvolený počet iterací T , kde $T \in \mathbb{N}$.

Poznámka 1.29. Speciálním případem hybridního algoritmu je Metropolis-within-Gibbs algoritmus, kde jsou plně podmíněná rozdělení založena na složkách vektoru θ a jsou po řadě aktualizována MH algoritmem. *

Metropolisův-Hastingsův algoritmus zrození a zániku

Tento algoritmus se používá pro simulaci z bodového procesu Υ s hustotou p vzhledem k Poissonovu bodovému procesu Π , tj.

$$\mathbb{P}(\Upsilon \in B) = \int_B p(x)\Pi(dx),$$

kde $B \in \mathfrak{N}$. Proces Υ je konečný díky podmínce $\Lambda(B) < +\infty$, kde $B \in \mathcal{B}_0^d$, a jednoduchý díky tomu, že Λ je neatomická míra. Příklad, který uvažujeme, je popsán ve větě 1.13. Předpokládejme, že B je omezená podmnožina \mathbb{R}^d a Λ je Lebesgueova míra. Hustotu p bodového procesu Υ budeme uvažovat vzhledem ke standardnímu Poissonovu bodovému procesu (homogenní proces s jednotkovou intenzitou na množině B). Detailnější popis tohoto algoritmu je uveden v Papaspiliopoulos [11], str. 129–132. Konvergenční vlastnosti algoritmu jsou uvedeny v Geyer a Møller [6].

MH algoritmus zrození a zániku probíhá v následujících krocích:

1. Zvolíme (či náhodně nagerujeme) počáteční stav bodového procesu $\Upsilon^{(0)}$.
2. Necht' v j -tém kroku má bodový proces aktuální konfiguraci bodů $\Upsilon^{(j-1)} = x \in \mathfrak{N}$. Náhodně zvolíme jeden z těchto návrhů na novou konfiguraci bodového procesu $\Upsilon^{(j)}$:
 - (a) s pravděpodobností $Q(x)$ navrhujeme přidat bod ξ do aktuální konfigurace x , kde bod ξ generujeme z hustoty $b(x, \xi)$ vzhledem k míře Λ – *zrod bodu*
 - (b) s pravděpodobností $1 - Q(x)$ navrhujeme ubrat bod η z aktuální konfigurace x , kde bod η je zvolen s pravděpodobností $d(x, \eta)$ – *zánik bodu*
3. Návrh, který byl učiněn v kroku 2 (tj. buď zrod bodu, nebo zánik bodu), přijmeme
 - (a) s pravděpodobností $\alpha(x, x \cup \xi) = \min(1, h(x, \xi))$ pro zrod bodu do aktuální konfigurace x (tzn. $\Upsilon^{(j)} := x \cup \xi$)
 - (b) s pravděpodobností $\alpha(x \cup \xi, x) = \min(1, 1/h(x, \xi))$ pro zánik bodu z aktuální konfigurace x (tzn. $\Upsilon^{(j)} := x \setminus \eta$, což ztotožňujeme s $\Upsilon^{(j)} := (x \cup \xi) \setminus \xi$)

V opačném případě zůstaneme v původním (současném) stavu (tzn. $\Upsilon^{(j)} := x$).
4. Zvětšíme j o jedničku a jdeme zpět na krok 2, dokud nevyčerpáme předem zvolený počet iterací T , kde $T \in \mathbb{N}$.

Zde MH poměr přijetí pro MH algoritmus zrodu a zániku je

$$h(x, \xi) = \frac{p(x \cup \xi)}{p(x)} \frac{1 - Q(x \cup \xi)}{Q(x)} \frac{d(x \cup \xi, \xi)}{b(x, \xi)}$$

V tomto poměru většinou speciálně volíme

$$\lambda(x, \xi) = \frac{p(x \cup \xi)}{p(x)}, \quad Q(\cdot) = \frac{1}{2}, \quad b(\cdot, \cdot) = \frac{1}{\Lambda(B)}, \quad d(x \cup \xi, \cdot) = \frac{1}{x(B) + 1},$$

kde $\lambda(x, \xi)$ je tzv. *podmíněná intenzita* a $x(B) + 1$ je počet bodů konfigurace $x \cup \xi$.

1.5 Itôův stochastický integrál

Definice 1.37. Brownův pohyb je spojitý náhodný proces $(B_t)_{t \geq 0}$, pro který platí

- (i) $B_0 = 0$ skoro jistě
- (ii) (B_t) má nezávislé přírůstky, tzn. pro každé $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$ jsou náhodné veličiny $B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ nezávislé
- (iii) pro každé $t > s \geq 0$ má náhodná veličina $B_t - B_s$ normální rozdělení $N(0, t - s)$

Při konstrukci Itôova stochastického integrálu se snažíme dát rozumný smysl výrazu

$$\int_0^t f(s, \omega) dB_s(\omega),$$

kde $B_t(\omega)$ je jednodimenzionální Brownův pohyb a $f(s, \omega) : \langle 0, +\infty \rangle \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Definice 1.38. Filtrace na měřitelném prostoru (Ω, \mathcal{F}) je rodina σ -algeber $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ taková, že platí $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ pro $0 < s < t$.

Definice 1.39. Nechť $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ je filtrace. Náhodný proces $g(t, \omega) : \langle 0, +\infty \rangle \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ se nazývá \mathcal{F}_t -adaptovaný náhodný proces, jestliže pro každé $t \geq 0$ je funkce

$$\omega \rightarrow g(t, \omega)$$

\mathcal{F}_t -měřitelná.

Definice 1.40. Označme $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S, T)$ třídu funkcí $f(t, \omega) : \langle 0, +\infty \rangle \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, pro něž platí

- (i) zobrazení $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$ je $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ -měřitelné, kde \mathcal{B} označuje borelovskou σ -algebru
- (ii) funkce $f(t, \omega)$ je \mathcal{F}_t -adaptovaná
- (iii) $\mathbb{E}[\int_S^T f(t, \omega)^2 dt] < +\infty$, kde $0 \leq S < T$

Pro funkce $f \in \mathcal{V}$ nyní zdefinujeme *Itôův stochastický integrál*

$$I[f](\omega) = \int_S^T f(s, \omega) dB_s(\omega)$$

Idea pro konstrukci je zcela přirozená. Nejprve zdefinujeme $I[\phi]$ pro třídu jednoduchých funkcí ϕ , potom ukážeme, že každou funkci $f \in \mathcal{V}$ lze aproximovat těmito funkcemi, a na základě toho zdefinujeme integrál $\int f dB$ jako limitu $\int \phi dB$, když $\phi \rightarrow f$.

Definice 1.41. Funkce $\phi \in \mathcal{V}$ se nazývá **jednoduchá funkce**, jestliže nabývá tvaru

$$\phi(t, \omega) = \sum_j e_j(\omega) I_{\{(t, t_{j+1})\}}(t),$$

kde funkce $e_j(\omega)$ je \mathcal{F}_{t_j} -měřitelná.

Definice 1.42. Pro jednoduché funkce definujeme integrál jako

$$\int_S^T \phi(t, \omega) dB_t(\omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) [B_{t_{j+1}} - B_{t_j}](\omega)$$

Lemma 1.1 (Itôova izometrie pro jednoduché funkce). *Nechť $\phi(t, \omega)$ je omezená a jednoduchá funkce, potom*

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_S^T \phi(t, \omega) dB_t(\omega) \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_S^T \phi^2(t, \omega) dt \right]$$

DŮKAZ: Øksendal [10], str. 26 □

Itôovu izometrii pro jednoduché funkce nyní použijeme k rozšíření definice od jednoduchých funkcí k funkcím z \mathcal{V} , což provádíme obyčejně v těchto krocích, jejichž důkazy lze nalézt v Øksendal [10], str. 27 a 28.

KROK 1

Nechť $g \in \mathcal{V}$ je omezená funkce a $g(\cdot, \omega)$ je spojitá pro každé ω . Potom existují jednoduché funkce $\phi_n \in \mathcal{V}$ tak, že

$$\mathbb{E} \left[\int_S^T (g - \phi_n)^2 dt \right] \longrightarrow 0 \quad \text{pro } n \rightarrow +\infty$$

KROK 2

Nechť $h \in \mathcal{V}$ je omezená. Potom existuje posloupnost omezených funkcí $g_n \in \mathcal{V}$ takových, že $g_n(\cdot, \omega)$ je spojitá pro každé ω a $n \in \mathbb{N}$, a platí

$$\mathbb{E} \left[\int_S^T (h - g_n)^2 dt \right] \longrightarrow 0 \quad \text{pro } n \rightarrow +\infty$$

KROK 3

Nechť $f \in \mathcal{V}$. Potom existuje posloupnost funkcí $\{h_n\} \subset \mathcal{V}$ tak, že funkce h_n je omezená pro každé $n \in \mathbb{N}$, a platí

$$\mathbb{E} \left[\int_S^T (f - h_n)^2 dt \right] \longrightarrow 0 \quad \text{pro } n \rightarrow +\infty$$

Tyto kroky umožní zkompletovat definici integrálu $I[f](\omega)$ pro obecné funkce $f \in \mathcal{V}$. Pokud totiž zvolíme libovolnou funkci $f \in \mathcal{V}$, potom podle kroků 1, 2 a 3 existují jednoduché funkce $\phi_n \in \mathcal{V}$ takové, že

$$\mathbb{E} \left[\int_S^T (f - \phi_n)^2 dt \right] \longrightarrow 0 \quad \text{pro } n \rightarrow +\infty$$

Na tomto základě definujeme

$$I[f](\omega) := \int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_S^T \phi_n(t, \omega) dB_t(\omega),$$

přičemž limita existuje jako prvek prostoru $L^2(\mathbb{P})$, protože posloupnost $\{\int_S^T \phi_n(t, \omega) dB_t(\omega)\}$ je cauchyovská posloupnost v $L^2(\mathbb{P})$.

Definice 1.43. Nechť $f \in \mathcal{V}(S, T)$. **Itôův stochastický integrál** funkce f od S do T definujeme jako limitu v prostoru $L^2(\mathbb{P})$

$$\int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_S^T \phi_n(t, \omega) dB_t(\omega),$$

kde $\{\phi_n\}$ je posloupnost jednoduchých funkcí taková, že

$$\mathbb{E} \left[\int_S^T (f(t, \omega) - \phi_n(t, \omega))^2 dt \right] \rightarrow 0 \quad \text{pro } n \rightarrow +\infty$$

Důsledek 1.2 (Itôova izometrie). *Pro každou funkci $f \in \mathcal{V}(S, T)$ platí*

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_S^T f(t, \omega) dB_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_S^T f^2(t, \omega) dt \right]$$

◦

Věta 1.25 (Vlastnosti integrálu). *Nechť $f \in \mathcal{V}(0, T)$, $g \in \mathcal{V}(0, T)$ a $0 \leq S < U < T$. Potom platí*

$$(i) \int_S^T f dB_t = \int_S^U f dB_t + \int_U^T f dB_t \text{ pro skoro všechna } \omega$$

$$(ii) \int_S^T (cf + g) dB_t = c \int_S^T f dB_t + \int_S^T g dB_t \text{ pro skoro všechna } \omega$$

$$(iii) \mathbb{E} \left[\int_S^T f dB_t \right] = 0$$

$$(iv) \int_S^T f dB_t \text{ je } F_T\text{-měřitelný proces pro pevné } S \text{ a } T$$

DŮKAZ: Øksendal [10], str. 27

□

Kapitola 2

Barndorff-Nielsenův a Shephardův model stochastické volatility

V této kapitole představíme model pro cenu finančního aktiva uvažovaný v Dellaportas, Papaspiliopoulos a Roberts [4], který navazuje na článek Barndorff-Nielsen a Shephard [1].

2.1 Motivace

2.1.1 Finanční data a jejich logaritmické přírůstky

Nechť S_t je *cena finančního aktiva v čase t* , kde $S_t > 0$ pro $t \geq 0$. Cenami finančních aktiv běžně rozumíme ceny akcií, směnné kurzy či tržní indexy. Nechť $T > 0$ a uvažujme cenu aktiva S_t pro $t \in \langle 0, T \rangle$. Provedme konečné dělení $\mathcal{D} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T\}$ intervalu $\langle 0, T \rangle$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Definice 2.1. Krok výskytu dat Δ pro časy $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ definujeme předpisem

$$\Delta = t_i - t_{i-1},$$

kde $i = 1, \dots, n$.

Poznámka 2.1. Předchozí úvaha s dělením intervalu $\langle 0, T \rangle$ má zcela praktický význam, neboť data z finančních trhů jsou získávána v podobě diskrétních časových řad. Většinou uvažujeme ekvidistantní dělení intervalu $\langle 0, T \rangle$ s časy $t_i = i\Delta$, kde $i = 1, \dots, n$. Zavedení kroku výskytu dat Δ má ten význam, že obecně nemusí platit $\Delta = 1$. Pokud například máme data s krokem výskytu 5 minut a z nich chceme uvažovat data s denním krokem výskytu, potom $\Delta = 288$. *

Definice 2.2. Nechť $X_{t_i} = \ln\{S_{t_i}\}$, kde $i = 0, \dots, n$. **Proces logaritmů cen aktiva** (*log-price process*) pro body dělení t_0, \dots, t_n je diskretizovaný soubor

$$X = \{X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_n}\} \tag{2.1}$$

Definice 2.3. Přírůstky logaritmů cen aktiva (*log-return terms*) se definují předpisem

$$y_i = X_{t_i} - X_{t_{i-1}}, \quad (2.2)$$

kde $i = 1, \dots, n$.

Poznámka 2.2. Zdefinování přírůstků logaritmů cen aktiva $\{y_i\}$ (dále jen *přírůstky*) má význam pro jejich snadnější modelování. Všeobecně se předpokládá, že přírůstky $\{y_i\}$ lze modelovat pomocí stacionárního stochastického procesu. *

2.1.2 Stylizovaná empirická fakta

Dlouhodobá pozorování přírůstků $\{y_i\}$ odhalila některé statistické vlastnosti, které přírůstky sdílejí. Tyto vlastnosti nazýváme *stylizovaná empirická fakta*. Poznamenejme, že tato fakta podstatně závisí na typu dat, který máme. Stylizovaná fakta našich dat by se dala shrnout do následujících bodů:

- (a) **Pseudonormální empirická hustota:** pokud zvyšujeme časovou škálu Δ , přes kterou počítáme přírůstky, empirická hustota se tvarem blíží stále více normálnímu rozdělení.
- (b) **Zanedbatelný výběrový průměr a rozptyl:** obě výběrové charakteristiky jsou řádu 10^{-2} a méně.
- (c) **Větší či menší asymetrie empirické hustoty:** větší asymetrii empirické hustoty lze pozorovat pro menší počet přírůstků a menší asymetrii empirické hustoty lze pozorovat pro větší počet přírůstků.
- (d) **Nadměrné kolísání kolem střední hodnoty:** v porovnání s hustotou normálního rozdělení, jehož střední hodnota a rozptyl jsou stejné jako v bodě (b), má empirická hustota přírůstků „špičatější“ vrchol.
- (e) **Absence autokorelace:** řada $\{y_i\}$ má zanedbatelnou autokorelaci.

2.2 Model (Gamma-OU proces)

2.2.1 Popis

Nyní představíme matematický model pro popis vlastností přírůstků $\{y_i\}$. Jedná se o model stochastické volatility se spojitým časem, který konstruuje rozdělení pozorovaného procesu ceny aktiva (přírůstky $\{y_i\}$) podmíněně na stochastickém procesu podmíněných rozptylů (stochastická volatility). Poznamenejme, že modely stochastické volatility nejsou omezeny jen na následující případ, ale obsahují dosti bohatou třídu modelů.

Nechť $t \in \langle 0, T \rangle$, kde $T > 0$. Uvažujme stochastickou diferenciální rovnici (dále jen *SDR*)

$$dX_t = \sqrt{v(t)} dB_t \quad (2.3)$$

Faktory vystupující v rovnici (2.3) jsou

- X logaritmus ceny aktiva
- B standardní Brownův pohyb
- $v(\cdot)$... stochastická volatilita

Rovnicí (2.3) modelujeme *proces logaritmu ceny aktiva* (X_t) s počáteční podmínkou $X_0 = 0$ skoro jistě. Tento proces závisí na *standardním Brownově pohybu* (B_t) a *procesu stochastické volatility* ($v(t)$). Volatilitu ($v(t)$) modelujeme pomocí rovnice

$$dv(t) = -\mu v(t) dt + dZ_t \quad (2.4)$$

Faktory vystupující v rovnici (2.4) jsou

- μ ... míra klesání volatility, kde $\mu > 0$
- Z (homogenní) Lévyho proces

Rovnice (2.4) reprezentuje ($v(t)$) jako *negaussovský OU proces*. Negaussovskost zajišťuje (*homogenní*) Lévyho proces (Z_t) na \mathbb{R} , pro který platí, že:

- (1) $Z_0 = 0$ skoro jistě
- (2) nemá drift
- (3) je *càdlàg proces* (zprava spojitý proces s limitami zleva)
- (4) má kladné stacionární a nezávislé přírůstky \Rightarrow má neklesající trajektorie na \mathbb{R}_+
- (5) má konečnou variaci
- (6) časy a velikosti jeho skoků ovlivňují časy a velikosti skoků volatility ($v(t)$)

Předpokládejme dále, že volatilita ($v(t)$) má konečné druhé momenty a je nezávislá se standardním Brownovým pohybem (B_t).

Poznámka 2.3. Vlastnost (6) říká, že Lévyho proces (Z_t) je také *řídící Lévyho proces*, což spolu s vlastností (4) znamená, že volatilita ($v(t)$) má kladné trajektorie. *

Ke zkoumání našeho modelu si nejprve vymežeme několik základních pojmů.

Definice 2.4. Integrovaná volatilita (*integrated volatility*) se definuje předpisem

$$v^*(0, t) = \int_0^t v(s) ds \quad (2.5)$$

Definice 2.5. Skutečná volatilita (*actual volatility*) se definuje předpisem

$$v_i^* = v^*(0, t_i) - v^*(0, t_{i-1}), \quad (2.6)$$

kde $i = 1, \dots, n$.

Poznámka 2.4. Pojmy integrované a skutečné volatility pomáhají zachytit stylizovaná empirická fakta přírůstků $\{y_i\}$. Lze si všimnout, že skutečná volatilita je jen speciální případ integrované volatility, neboť

$$v_i^* = \int_0^{t_i} v(s)ds - \int_0^{t_{i-1}} v(s)ds = \int_{t_{i-1}}^{t_i} v(s)ds = v^*(t_{i-1}, t_i)$$

Integrál z volatility přes jakýkoliv konečný interval je vždy konečný díky konečné variaci Lévyho procesu (Z_t). *

Věta 2.1. Nechť y_i je přírůstek definovaný (2.2) a v_i^* skutečná volatilita definovaná (2.6). Potom podle rovnice (2.3) platí

$$y_i | v_i^* \sim N(0, v_i^*) \quad (2.7)$$

pro každé $i = 1, \dots, n$. Navíc pro $i \neq k$, kde $k = 1, \dots, n$, platí

$$\text{corr}(y_i, y_k) = 0$$

DŮKAZ: Zvolme pevně $i = 1, \dots, n$. Přepíšeme-li SDR (2.3) do integrálního tvaru, potom podle (2.2) platí

$$y_i = X_{t_i} - X_{t_{i-1}} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{v(s)} dB_s$$

Zřejmě platí $\mathbb{E} \left(\int_0^t (\sqrt{v(s)})^2 ds \right) < +\infty$, proto z vlastnosti (iii) ve větě 1.25 pro Itôův stochastický integrál dostaneme

$$\mathbb{E} y_i = \mathbb{E} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{v(s)} dB_s \right) = 0$$

Pro podmíněný rozptyl přírůstku y_i dále platí $\text{var } y_i = \mathbb{E} y_i^2 - (\mathbb{E} y_i)^2$, což se díky $\mathbb{E} y_i = 0$ zredukuje na výpočet $\mathbb{E} y_i^2$. Aplikací Itôovy izometrie (důsledek 1.2) dostáváme

$$\text{var } y_i = \mathbb{E} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{v(s)} dB_s \right)^2 = \mathbb{E} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} (\sqrt{v(s)})^2 ds \right) = \mathbb{E} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} v(s) ds \right)$$

Platí tedy $\text{var } y_i = \mathbb{E} v_i^* = v_i^*$, neboť v_i^* je v podmínce, a vystupuje tedy jako pevné číslo. Normalita rozdělení plyne z definice Brownova pohybu. Pro korelaci dále platí

$$\text{corr}(y_i, y_k) = \frac{\mathbb{E} y_i y_k - \mathbb{E} y_i \mathbb{E} y_k}{\sqrt{\text{var } y_i} \sqrt{\text{var } y_k}}$$

Jmenovatel zlomku je nenulový díky nenulovosti podmíněných rozptylů. Stačí proto zjistit, zda je čítec roven nule. Z předchozího se výpočet zredukuje na určení $\mathbb{E}y_i y_k$. Tedy

$$\text{cov}(y_i, y_k) = \mathbb{E} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{v(s)} dB_s \cdot \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{v(s)} dB_s \right) = 0,$$

což plyne z nezávislosti standardního Brownova pohybu (B_t) na stochastické volatilitě ($v(t)$) a z disjunktnosti přírůstků $t_i - t_{i-1}$ a $t_k - t_{k-1}$. \square

Poznámka 2.5. Protože rovnice (2.3) a (2.4) modelují přírůstky $\{y_i\}$ jako škálované směsi normálních rozdělání, je vystižena jejich *pseudonormální empirická hustota, nesouměrnost empirické hustoty a nadměrné kolísání kolem střední hodnoty. Absence volatility vyplývá na základě zdefinování modelu z předchozí věty.* *

Důsledek 2.1. *Nechť X je proces definovaný v (2.1) a $v^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ je posloupnost skutečných volatilit. Potom podmíněná hustota X daná skutečnými volatilitami v^* je*

$$f(X|v^*) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi v_i^*}} \exp\left\{-\frac{y_i^2}{2v_i^*}\right\} \quad (2.8)$$

o

DŮKAZ: Z předchozí věty víme, že $y_i|v_i^* \sim N(0, v_i^*)$. Posloupnost náhodných veličin $\{y_i\}$ je nezávislá, což plyne z nezávislosti přírůstků Brownova pohybu. Toto je ekvivalentní tvrzení, že sdružená (podmíněná) hustota je rovna součinu (podmíněných) marginálních hustot. \square

Poznámka 2.6. Podle (2.2) a (2.6) lze (2.8) přepsat do tvaru

$$f(X|v^*) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi v^*(t_{i-1}, t_i)}} \exp\left\{-\frac{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2}{2v^*(t_{i-1}, t_i)}\right\}, \quad (2.9)$$

který budeme mít na mysli vždy, když budeme mluvit o podmíněné hustotě $f(X|v^*)$. *

Uvažujme náhodnou veličinu $v(0)$ se samorozložitelným rozdělením $\text{Ga}(\nu, \theta)$, které má konečný druhý moment. Podle věty 1.16 k tomuto rozdělení existuje stacionární náhodný proces ($v(t)$) a Lévyho proces (Z_t) tak, že platí

$$(A) \quad \mathcal{L}(v(0)) = \mathcal{L}(v(t)) = \text{Ga}(\nu, \theta) \text{ pro každé } t \geq 0$$

$$(B) \quad v(t) = \exp\{-\mu t\}v(0) + \int_0^t \exp\{-\mu(t-s)\}dZ_s$$

Poznámka 2.7. Vlastnost (A) činí předpoklad na volatilitu. Ta má rozdělení $\text{Ga}(\nu, \theta)$ se střední hodnotou ν/θ a rozptylem ν/θ^2 , které je stejné pro každý čas $t \geq 0$. Vlastnost (B) říká, kterak je reprezentováno řešení rovnice (2.4). *

Zbývá specifikovat řídicí Lévyho proces (Z_t) . Podle Barndorff-Nielsen a Shephard [1] (str. 173 a 175) má rozdělení $\text{Ga}(\nu, \theta)$ Lévyho hustotu

$$u(x) = \nu x^{-1} \exp\{-\theta x\}$$

Podle (1.10) máme pro Lévyho hustotu w

$$\begin{aligned} w(x) &= -u(x) - xu'(x) \\ &= -\nu x^{-1} \exp\{-\theta x\} - x \left(-\nu x^{-2} \exp\{-\theta x\} - \nu x^{-1} \theta \exp\{-\theta x\} \right) \\ &= \nu \theta \exp\{-\theta x\}, \end{aligned}$$

kde poslední řádek je podle věty 1.15 Lévyho hustota složeného Poissonova procesu, který má rozdělení velikosti skoků $\text{Exp}(\theta)$ a intenzitu výskytu událostí ν . V našem případě tedy za řídicí Lévyho proces (Z_t) v reprezentaci řešení (B) volíme složený Poissonův proces

$$Z_t = \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_j \mathbb{I}_{(c_j < t)} \quad (2.10)$$

Ve vztahu (2.10) jsou $0 < c_1 < c_2 < c_3 < \dots$ časy událostí generované z Poissonova procesu s intenzitou λ a ε_j k nim příslušné velikosti skoků s rozdělením $\text{Exp}(\theta)$. Intenzita λ výskytu událostí c_j pro vztah (2.10) je předpokládána konečná, což znamená stacionaritu řešení rovnice (2.4) díky (1.11).

Věta 2.2. *Reprezentace volatility v Gamma-OU modelu je dána vztahem*

$$v(t) = \exp\{-\mu t\}v(0) + \sum_{j=1}^{+\infty} \exp\{-\mu(t - c_j)\} \varepsilon_j \mathbb{I}_{(c_j < t)} \quad (2.11)$$

DŮKAZ: K důkazu věty použijeme vztah (B). Stačí ukázat, že stochastický integrál, kde integrátorem je Lévyho proces, dá sumu v (2.11). Zvolme pevně $t > 0$, realizaci ω Lévyho procesu (složený Poissonův proces) a konečné dělení $\mathcal{D} = \{0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = t\}$ intervalu $\langle 0, t \rangle$. Označme $f_s(\omega) = \exp\{-\mu(t - s)\}$ a předpokládejme dále, že některé body dělení \mathcal{D} splývají se všemi časy událostí c_j . Pokud tomu tak není, počet bodů dělení \mathcal{D} zvětšíme. Vytvořující suma pro integrál je

$$\left(\int_0^t f_s dZ_s \right) (\omega) = f_{s_0}(\omega) Z_{s_0}(\omega) + \sum_{k=1}^{n-1} f_{s_k}(\omega) (Z_{s_{k+1}} - Z_{s_k})(\omega)$$

Člen $f_{s_0} Z_{s_0}$ je nulový díky podmínce $Z_0 = 0$ skoro jistě. Přírůstek tvaru $Z_{s_{k+1}} - Z_{s_k}$ je buď nulový, nebo roven ε_j . A protože $s_{k+1} = c_j$ vždy pro nějaké $k, j \in \mathbb{N}$, limitním přechodem dostáváme požadované tvrzení. □

Věta 2.3. *Reprezentace integrované volatility v Gamma-OU modelu je dána vztahem*

$$v^*(0, t) = \frac{1}{\mu} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} [1 - \exp\{-\mu(t - c_j)\}] \varepsilon_j \mathbb{I}_{(c_j < t)} - v(0) \{ \exp\{-\mu t\} - 1 \} \right) \quad (2.12)$$

DŮKAZ: Nejprve dosadíme (2.11) za integrand ve vztahu (2.5). Po úpravě obdržíme

$$v^*(0, t) = \int_0^t \exp\{-\mu s\} v(0) ds + \int_0^t \sum_{j=1}^{+\infty} \exp\{-\mu(s - c_j)\} \varepsilon_j \mathbb{I}_{\{c_j < s\}} ds$$

První integrál spočítáme pomocí substituce $S_1 : y = -\mu s$:

$$\int_0^t \exp\{-\mu s\} v(0) ds \stackrel{S_1}{=} \int_0^{-\mu t} \exp\{y\} v(0) \left(-\frac{dy}{\mu} \right) = -\frac{v(0)}{\mu} \left[\exp\{-\mu t\} - 1 \right]$$

U druhého integrálu využijeme předpokladu věty a konečnosti intenzity λ Poissonova procesu, ze kterého pochází události c_j . Toto zaručí konečný počet sčítanců v sumě a možnost její záměny s integrálem, tj.

$$\int_0^t \sum_{j=1}^{+\infty} \exp\{-\mu(s - c_j)\} \varepsilon_j \mathbb{I}_{(c_j < s)} ds = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_0^t \exp\{-\mu(s - c_j)\} \varepsilon_j \mathbb{I}_{(c_j < s)} ds$$

Zvolme pevně čas události c_j Poissonova procesu tak, že $0 < c_j < t$. Vzhledem k indikátoru dostáváme

$$\int_0^{c_j} \exp\{-\mu(s - c_j)\} \varepsilon_j \cdot 0 ds + \int_{c_j}^t \exp\{-\mu(s - c_j)\} \varepsilon_j \cdot 1 ds$$

První integrál je nula. Na druhý použijeme substituci $S_2 : y = -\mu(s - c_j)$ a dostaneme

$$\int_{c_j}^t \exp\{-\mu(s - c_j)\} \varepsilon_j ds \stackrel{S_2}{=} \int_0^{-\mu(t - c_j)} \exp\{y\} \varepsilon_j \left(-\frac{dy}{\mu} \right) = -\frac{\varepsilon_j}{\mu} \left[\exp\{-\mu(t - c_j)\} - 1 \right]$$

Vezmeme-li do úvahy všechny relevantní události c_j , které se vyskytnou do času t , dostaneme

$$\frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{+\infty} \left[1 - \exp\{-\mu(t - c_j)\} \right] \varepsilon_j \mathbb{I}_{(c_j < t)},$$

což dává (2.12). □

Věta 2.4. *Autokorelační funkce volatility v Gamma-OU modelu je dána vztahem*

$$r(t) = \text{corr}(v(0), v(t)) = \exp\{-\mu t\}$$

DŮKAZ: Z definice

$$\text{corr}(v(0), v(t)) = \frac{\text{cov}(v(0), v(t))}{\sqrt{\text{var } v(0)}\sqrt{\text{var } v(t)}} = \frac{\mathbb{E}v(0)v(t) - \mathbb{E}v(0)\mathbb{E}v(t)}{\sqrt{\text{var } v(0)}\sqrt{\text{var } v(t)}}$$

Protože $\mathcal{L}(v(t)) = \text{Ga}(\nu, \theta)$ pro každé $t \geq 0$, máme pro rozptyly ve jmenovateli

$$\sqrt{(\text{var } v(0))}\sqrt{(\text{var } v(t))} = \sqrt{\frac{\nu}{\theta^2}}\sqrt{\frac{\nu}{\theta^2}} = \frac{\nu}{\theta^2}$$

Dále označme

$$K_t = \sum_{j=1}^{+\infty} \exp\{\mu c_j\} \varepsilon_j \mathbb{I}_{(c_j < t)}$$

Nyní počítejme střední hodnoty v čitateli. První člen je roven

$$\begin{aligned} \mathbb{E}v(0)v(t) &= \mathbb{E}v(0) \left(\exp\{-\mu t\}v(0) + \sum_{j=1}^{+\infty} \exp\{-\mu(t - c_j)\} \varepsilon_j \mathbb{I}_{(c_j < t)} \right) \\ &= \exp\{-\mu t\} \left(\mathbb{E}(v(0))^2 + \mathbb{E}v(0)\mathbb{E}K_t \right) \\ &= \exp\{-\mu t\} \left(\text{var } v(0) + \mathbb{E}v(0) + \mathbb{E}v(0)\mathbb{E}K_t \right) = \exp\{-\mu t\} \left(\frac{\nu}{\theta^2} + \frac{\nu^2}{\theta^2} + \frac{\nu}{\theta}\mathbb{E}K_t \right) \end{aligned}$$

Druhý člen je naproti tomu roven

$$\begin{aligned} \mathbb{E}v(0)\mathbb{E}v(t) &= \mathbb{E}v(0)\mathbb{E} \left(\exp\{-\mu t\}v(0) + \sum_{j=1}^{+\infty} \exp\{-\mu(t - c_j)\} \varepsilon_j \mathbb{I}_{(c_j < t)} \right) \\ &= \mathbb{E}v(0) \left[\exp\{-\mu t\} \left(\mathbb{E}v(0) + \mathbb{E}K_t \right) \right] \\ &= \exp\{-\mu t\} \left((\mathbb{E}v(0))^2 + \mathbb{E}v(0)\mathbb{E}K_t \right) = \exp\{-\mu t\} \left(\frac{\nu^2}{\theta^2} + \frac{\nu}{\theta}\mathbb{E}K_t \right) \end{aligned}$$

Celkově je čítenel roven

$$\mathbb{E}v(0)v(t) - \mathbb{E}v(0)\mathbb{E}v(t) = \frac{\nu}{\theta^2} \exp\{-\mu t\},$$

což dává po vydělení hodnotou ve jmenovateli požadované tvrzení. \square

Jsme-li na finančním trhu, jsme schopni pozorovat pouze přírůstky y_i , ale už ne jejich stochastickou volatilitu ($v(t)$). Tu si ale přejeme odhadnout, což provedeme metodami bayesovské analýzy s využitím věrohodnosti $f(X|v^*)$ dané v (2.9).

2.2.2 Bayesovská konstrukce

Uvažme složený Poissonův proces v (2.10). Tento proces lze nahlížet jako kótovaný bodový proces Ψ na množině

$$S = \langle 0, T \rangle \times (0, +\infty)$$

obsahující uspořádané dvojice bodů (c_j, ϵ_j) , kde $j = 1, \dots, m$, $m \in \mathbb{N}$. Míra intenzity Λ procesu Ψ je podle věty 1.15

$$\Lambda(dc \times d\epsilon) = \lambda\theta \exp\{-\theta\epsilon\} \varrho(dc \times d\epsilon),$$

což je součinnová míra míry intenzity složeného Poissonova procesu s intenzitou λ a rozdělení velikosti skoků $\text{Exp}(\theta)$, kde ϱ označuje Lebesgueovu míru. Pokud se podíváme na vyjádření volatilitý v (2.11), vidíme, že závisí na parametrech μ , $v(0)$ a $\Psi = \{(c_j, \epsilon_j)\}$. Věrohodnost (2.9) lze tedy zapsat

$$f(X|v^*) = f(X|\mu, v(0), \Psi)$$

Parametry $v(0)$ a Ψ závisí opět na dalších parametrech, neboť

- počáteční volatilita $v(0)$ má rozdělení $\text{Ga}(\nu, \theta)$
- pro bodový proces Ψ jsou $\begin{cases} c_j & \text{časy událostí Poissonova procesu s intenzitou } \lambda \\ \epsilon_j & \text{velikosti skoků mající rozdělení } \text{Exp}(\theta) \end{cases}$

Uvážíme proto hierarchický model v těchto stupních:

1. $y_i|v_i^* \sim \text{N}(0, v_i^*)$
2. $v(0) \sim \text{Ga}(\nu, \theta)$, $c_j - c_{j-1} \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\epsilon_j \sim \text{Exp}(\theta)$

Pokud chceme provádět bayesovské závěry založené na věrohodnosti, potřebujeme k tomu znát marginální věrohodnost

$$f(X|\mu, \lambda, \theta) = \int f(X|\mu, v(0), \Psi) \pi(v(0)|\lambda, \theta, \mu) \pi(\Psi|\lambda, \theta) dv(0) d\Psi, \quad (2.13)$$

kterou obdržíme integrováním (2.9) vzhledem k apriorní míře, která je dána podmíněnými rozděleními parametrů $v(0)$ a Ψ . Hustota, kterou z (2.13) neznáme, je hustota kótovaného bodového procesu Ψ . Tu spočítáme vzhledem k dominantní míře složeného Poissonova procesu s intenzitou $\lambda = 1$ a rozdělením velikosti skoků $\text{Exp}(1)$.

Věta 2.5. *Nechť $\Psi(S)$ udává počet bodů kótovaného bodového procesu Ψ na množině S . Potom hustota procesu Ψ je dána*

$$\pi(\Psi|\lambda, \theta) = \exp\{-(\lambda - 1)T\} (\lambda\theta)^{\Psi(S)} \exp\left\{-\theta \sum_{j=1}^{\Psi(S)} \epsilon_j\right\} \quad (2.14)$$

DŮKAZ: Zvolme míru Q standardního Poissonova procesu na množině S s mírou intenzity

$$\Lambda^*(dc \times d\varepsilon) = \exp\{-\varepsilon\} \varrho(dc \times d\varepsilon), \quad (2.15)$$

což je jen míra intenzity $\Lambda(\cdot)$ s volbou parametrů $\lambda = 1$ a $\theta = 1$. Použitím věty 1.13 má odpovídající Radonova-Nikodýmova derivace tvar

$$\frac{d\pi}{dQ} = \exp\{T - \lambda T\} \prod_{j=1}^{\Psi(S)} \frac{\lambda \theta \exp\{-\theta \varepsilon_j\}}{\exp\{-\varepsilon_j\}}$$

Navíc díky konstrukci množiny S a volbě konečné intenzity složeného Poissonova procesu je $\Psi(S) < +\infty$ skoro jistě. To zaručuje dobře definovaný vztah (2.14). \square

Konstrukce věrohodnosti v (2.13) navrhuje zcela přirozeně použít parametrizaci (λ, θ, μ) . My ovšem zvolíme parametrizaci

$$(\lambda, \theta, \mu) \longrightarrow (\nu, \theta, \mu) = \left(\frac{\lambda}{\mu}, \theta, \mu \right),$$

kde předpokládáme, že $\lambda = \mu\nu$ (Dellaportas, Papaspiliopoulos a Roberts [4], str. 371). Tato parametrizace je zvolena proto, aby byla eliminována vysoká aposteriorní závislost mezi jednotlivými parametry modelu a z toho vyplývající pomalá konvergence následujícího MCMC algoritmu. V této parametrizaci parametry θ a ν popisují stacionární vlastnosti procesu volatility, zatímco μ popisuje její přechodové vlastnosti. Potom je Bayesova věta

$$\pi(\nu, \theta, \mu, \Psi, v(0)|X) \propto f(X|\Psi, v(0), \mu) \pi(v(0)|\nu, \theta) \pi(\Psi|\nu, \theta, \mu) \pi(\nu, \theta, \mu), \quad (2.16)$$

kde podmíněná hustota

$$\begin{aligned} f(X|\Psi, v(0), \mu) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi v^*(t_{i-1}, t_i)}} \exp\left\{-\frac{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2}{2v^*(t_{i-1}, t_i)}\right\} \\ \pi(v(0)|\nu, \theta) &= \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} v(0)^{\nu-1} \exp\{-\theta v(0)\} \\ \pi(\Psi|\nu, \theta, \mu) &= \exp\{-(\nu\mu - 1)T\} (\nu\mu\theta)^{\Psi(S)} \exp\left\{-(\theta - 1) \sum_{j=1}^{\Psi(S)} \varepsilon_j\right\} \end{aligned}$$

Zbývá určit sdruženou apriorní hustotu $\pi(\nu, \theta, \mu)$. Zde využijeme toho, že parametry θ , μ a ν jsou podmíněně nezávislé, a jako apriorní hustoty pro ně zvolíme po řadě podmíněně konjugovaná rozdělení $\text{Ga}(\alpha_\theta, \beta_\theta)$, $\text{Ga}(\alpha_\mu, \beta_\mu)$ a $\text{Ga}(\alpha_\nu, \beta_\nu)$.

Parametrizace v (2.16) se nazývá *centrovaná parametrizace*, neboť parametry Ψ a $v(0)$ (nepozorovatelné parametry) jsou hierarchicky centrované mezi parametry μ , ν a θ a mezi daty X (přírůstky $\{y_i\}$). Parametry ν a θ jsou podmíněně nezávislé na μ , Ψ a $v(0)$, což je klíčová vlastnost této parametrizace.

2.2.3 Metoda augmentace dat

Abychom mohli provést bayesovské závěry v našem modelu, musíme umět simulovat ze sdružené aposteriorní hustoty $\pi(\nu, \theta, \mu, \Psi, v(0)|X)$, která je dána v (2.16). Poznamenejme, že analytická možnost neexistuje, neboť aposteriorní hustota je ve velmi komplikovaném tvaru a nepodobá se žádné známé hustotě pravděpodobnosti. Navíc věrohodnost v (2.13) nelze ani analyticky spočítat kvůli velké komplikovanosti integrandu. Využijeme proto MCMC algoritmus založený na metodě *augmentace dat* (též *rozšíření dat*).

Augmentace dat spočívá v odhadnutí neznámého vektoru parametrů κ na základě dat $Y = (Y_{obs}, Y_{mis})$, kde Y_{obs} jsou data, která jsme schopni pozorovat, a Y_{mis} jsou data, která nejsme schopni pozorovat (tj. buď opravdu chybí, nebo vystupují jako skryté proměnné). Standardní přístup pro chybějící data Y_{mis} , pokud provádíme bayesovské závěry, je

$$\pi(\kappa|Y_{obs}) \propto \int \pi(Y_{obs}, Y_{mis}|\kappa)\pi(\kappa)dY_{mis}$$

Takový typ integrace je často nemožné provést vzhledem k možné komplikovanosti hustoty $\pi(Y_{obs}, Y_{mis}|\kappa)$. Jiným přístupem k problematice je uvažovat

$$\pi(\kappa, Y_{mis}|Y_{obs}) \propto \pi(Y_{obs}, Y_{mis}|\kappa)\pi(\kappa), \quad (2.17)$$

tzn. nepozorovatelná data Y_{mis} považujeme za další neznámé parametry a pomocí MCMC algoritmu simulujeme z hustoty $\pi(\kappa, Y_{mis}|Y_{obs})$. Aproximaci aposteriorního rozdělení parametrů κ , tj. $\pi(\kappa|Y_{obs})$, dostaneme vynecháním dat Y_{mis} . Vztah (2.17) lze přepsat na

$$\pi(\kappa, Y_{mis}|Y_{obs}) \propto \pi(Y_{mis}|Y_{obs}, \kappa)\pi(Y_{obs}|\kappa)\pi(\kappa), \quad (2.18)$$

z čehož vyplývá i MCMC algoritmus, kterým je algoritmus GVP s těmito kroky:

1. simulace z hustoty $\pi(Y_{mis}|Y_{obs}, \kappa)$
2. simulace z hustoty $\pi(\kappa|Y_{mis}, Y_{obs})$ (aposteriorní rozdělení zúplněných dat)

Augmentace dat je spojena s integrálem v (2.13). Tento integrál kromě parametrů θ , ν a μ , pro něž provádíme bayesovské závěry, závisí také na parametrech $v(0)$ a Ψ , které nelze přímo pozorovat. Potom v (2.18) je $\kappa = (\theta, \nu, \mu)$, $Y_{mis} = (\Psi, v(0))$ a $Y_{obs} = X$, což vlastně vede na (2.16). Augmentaci dat použijeme i pro následující algoritmus.

2.2.4 MCMC algoritmus

Výsledný MCMC algoritmus, který uvažujeme, je *Metropolis-within-Gibbs algoritmus*, což je algoritmus GVP, kde z plně podmíněných hustot simulujeme pomocí MH algoritmu. Kroky tohoto algoritmu jsou:

- KROK 1:* Simulace (ν, θ) ze sdružené hustoty $\pi(\nu, \theta|\Psi, v(0), \mu)$
- KROK 2:* Simulace μ z hustoty $\pi(\mu|X, \Psi, v(0), \nu, \theta)$
- KROK 3:* Simulace $v(0)$ z hustoty $\pi(v(0)|X, \Psi, v(0), \nu, \mu, \theta)$
- KROK 4:* Simulace Ψ z hustoty $\pi(\Psi|X, v(0), \nu, \mu, \theta)$
- KROK 5:* Jdi na *KROK 1*

Poznámka 2.8. Hustoty v jednotlivých krocích jsou odvozeny úměrně ze vztahu (2.16), což znamená, že proměnné v podmínce dané hustoty bereme jako konstanty a do výsledné hustoty je neuvažujeme pro případ, že nejsou nějakou funkcí uvažovaného parametru. Multiplikativní konstanty odstraňujeme symbolem \propto , protože pravděpodobnost přijetí návrhu α pro MH algoritmus nezávisí na multiplikativních konstantách. *

KROK 1 - krok aktualizace parametru ν a θ

Simulace dvojice parametrů (ν, θ) ze sdružené hustoty $\pi(\nu, \theta | \Psi, v(0), \mu)$

Úměrná hustota θ je

$$\begin{aligned} \pi(\theta | \nu, \Psi, v(0)) &\propto \theta^{\nu + \Psi(S) + \alpha_\theta - 1} \exp\left\{-\theta\left(v(0) + \sum_{j=1}^{\Psi(S)} \varepsilon_j + \beta_\theta\right)\right\} \\ &\sim \text{Ga}\left(\nu + \Psi(S) + \alpha_\theta, v(0) + \sum_{j=1}^{\Psi(S)} \varepsilon_j + \beta_\theta\right) \end{aligned}$$

Úměrná hustota ν je

$$\pi(\nu | v(0), \Psi, \mu) \propto \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} v(0)^\nu \nu^{\Psi(S) + \alpha_\nu - 1} \exp\{-(\beta_\nu + \mu T)\nu\}$$

Protože dále

$$\theta | \cdot \sim \text{Ga}\left(\nu + \Psi(S) + \alpha_\theta, v(0) + \sum_{j=1}^{\Psi(S)} \varepsilon_j + \beta_\theta\right), \quad (2.19)$$

vše se dá přepsat na (viz Dellaportas, Papaspiliopoulos a Roberts [4], str. 389)

$$\pi(\nu | v(0), \Psi, \mu) \propto \frac{\Gamma(\nu + \alpha_\theta + \Psi(S))}{\Gamma(\nu)} \left\{ \frac{v(0)}{\beta_\theta + v(0) + \sum_{j=1}^{\Psi(S)} \varepsilon_j} \right\}^\nu \nu^{\Psi(S) + \alpha_\nu - 1} \exp\{-(\beta_\nu + \mu T)\nu\}$$

V tomto kroku simulace aktualizujeme nejprve parametr ν a posléze, v závislosti na parametru ν , aktualizujeme parametr θ . Při simulaci parametru ν nejprve generujeme jeho návrh $\tilde{\nu}$ multiplikativní MH náhodnou procházkou ze symetrické návrhové hustoty rozdělení $N(0, \sigma_\nu^2)$, kde pro simulaci volíme $\sigma_\nu^2 = 0,45$. Utvoříme pravděpodobnost přijetí návrhu, která se díky symetričnosti návrhové hustoty zúží na

$$\alpha = \min\left\{ \frac{\pi(\tilde{\nu} | v(0)_p, \Psi_p, \mu_p)}{\pi(\nu_p | v(0)_p, \Psi_p, \mu_p)}, 1 \right\}, \quad (2.20)$$

kde $\nu_p, \Psi_p, v(0)_p, \mu_p$ jsou hodnoty parametrů $\nu, \Psi, v(0), \mu$ z předchozí iterace algoritmu. Vyčíslíme podíl v (2.20) a hodnotu α porovnáme s číslem p vygenerovaným z rozdělení $R(0, 1)$. Pokud $\alpha \geq p$ návrh $\tilde{\nu}$ na novou hodnotu ν přijmeme, v opačném případě zůstaneme ve stejném stavu.

Hodnotu parametru θ generujeme přímo z gamma rozdělení (2.19).

KROK 2 - krok aktualizace parametru μ

Simulace parametru μ z hustoty $\pi(\mu|X, \Psi, v(0), \nu, \theta)$

Úměrná hustota μ je

$$\pi(\mu|X, \Psi, v(0), \nu, \theta) \propto f(X|\Psi, v(0), \mu) \mu^{\Psi(S)+\alpha_\mu-1} \exp\{-(\beta_\mu + \nu T)\mu\}$$

Při simulaci generujeme návrh $\tilde{\mu}$ na novou hodnotu parametru μ multiplikativní MH náhodnou procházkou s užitím symetrické návrhové hustoty $N(0, \sigma_\mu^2)$, kde pro simulaci volíme $\sigma_\mu^2 = 0,2$. Dále postupujeme podobně jako v předešlém kroku u parametru ν .

KROK 3 - krok aktualizace parametru $v(0)$

Simulace parametru $v(0)$ z hustoty $\pi(v(0)|X, \Psi, v(0), \nu, \mu, \theta)$

Úměrná hustota $v(0)$ je

$$\pi(v(0)|X, \Psi, \nu, \mu, \theta) \propto f(X|\Psi, v(0), \mu) v(0)^{\nu-1} \exp\{-\theta v(0)\}$$

Při simulaci generujeme návrh $\widetilde{v(0)}$ na novou hodnotu parametru $v(0)$ multiplikativní MH náhodnou procházkou s užitím symetrické návrhové hustoty $N(0, \sigma_{v(0)}^2)$, kde pro simulaci volíme $\sigma_{v(0)}^2 = 1$. Dále postupujeme obdobně jako v předchozím kroku u parametrů ν a μ .

KROK 4 - krok aktualizace parametru Ψ

Simulace parametru Ψ z hustoty $\pi(\Psi|X, v(0), \nu, \mu, \theta)$

Tento krok se od předchozích odlišuje, neboť používá *MH algoritmus zrodu a zániku*:

Nechť $\Psi = \{(c_1, \varepsilon_1), \dots, (c_m, \varepsilon_m)\}$ je aktuální konfigurace bodového procesu Ψ . V každém kroku se náhodně rozhodneme pro jednu z následujících dvou konfigurací:

1. s pravděpodobností q přidáme nový bod (c, ε) do aktuální konfigurace Ψ , kde $c \sim R(0, T)$, $\varepsilon \sim \text{Exp}(\theta)$ – *zrod bodu* (tj. $\Psi \cup (c, \varepsilon)$)
2. s pravděpodobností $1 - q$ odebereme bod (c_j, ε_j) z aktuální konfigurace Ψ , kde dvojici (c_j, ε_j) volíme rovnoměrně náhodně z existujících bodů – *zánik bodu* (tj. $\Psi \setminus (c_j, \varepsilon_j)$)

Rozhodnutí, jakou konfiguraci uvážíme, činíme na základě vygenerování čísla p z rozdělení $R(0, 1)$. Pokud $p \leq q$, uvažujeme zrod, v opačném případě uvažujeme zánik. V našem případě volíme $q = \frac{1}{2}$. Následuje rozhodnutí, zda náhodně zvolenou konfiguraci přijmeme, nebo zůstaneme ve stejném stavu, k čemuž poslouží pravděpodobnost přijetí návrhu α :

1. $\alpha[\Psi, \Psi \cup (c, \varepsilon)] = \min\{1, h(\Psi, (c, \varepsilon))\}$ – pro zrod bodu
2. $\alpha[\Psi \cup (c, \varepsilon), \Psi] = \min\{1, 1/h(\Psi, (c, \varepsilon))\}$ – pro zánik bodu

Poznamenejme, že formálně správný tvar pravděpodobnosti přijetí návrhu $\alpha[\Psi, \Psi \setminus (c_j, \varepsilon_j)]$ pro zánik bodu (c_j, ε_j) z aktuální konfigurace Ψ nyní ztotožňujeme pro zjednodušení zápisu s tvarem $\alpha[\Psi \cup (c, \varepsilon), \Psi]$. Pro MH poměr přijetí v algoritmu zrození a zániku platí

$$h(\Psi, (c, \varepsilon)) = \frac{p(\Psi \cup (c, \varepsilon))}{p(\Psi)} \frac{1 - Q(\Psi \cup (c, \varepsilon))}{Q(\Psi)} \frac{d(\Psi \cup (c, \varepsilon), (c, \varepsilon))}{b(\Psi, (c, \varepsilon))},$$

kde $p(\Psi \cup (c, \varepsilon))$, resp. $p(\Psi)$, tvoří úměrnou hustotu pro bodový proces Ψ , která je z (2.16)

$$\pi(\Psi|X, v(0), \nu, \mu, \theta) \propto f(X|\Psi, v(0), \mu)\pi(\Psi|\nu, \theta, \mu)$$

Dále $1 - Q(\Psi \cup (c, \varepsilon))$, resp. $Q(\Psi)$, je pravděpodobnost, s jakou se rozhodneme zvolit odebrání bodu z aktuální konfigurace Ψ , resp. přidání bodu do této konfigurace. Tato pravděpodobnost je $1 - q$ pro odebrání bodu a q pro přidání bodu. Hustota $b(\Psi, (c, \varepsilon))$ je návrhová hustota pro přidání bodu (c, ε) do aktuální konfigurace Ψ . Tuto hustotu volíme (Papaspiliopoulos [11], str. 197)

$$b(\Psi, (c, \varepsilon)) = \frac{1}{T}\theta \exp\{-(\theta - 1)\varepsilon\}$$

a jedná se o hustotu vzhledem k míře intenzity $\Lambda^*(\cdot)$ dané (2.15). V případě, že chceme odebrat určitý bod (c, ε) z konfigurace $\Psi \cup (c, \varepsilon)$, potom se tak stane s pravděpodobností

$$d(\Psi \cup (c, \varepsilon), (c, \varepsilon)) = \frac{1}{m + 1},$$

kde $m + 1$ značí počet bodů konfigurace $\Psi \cup (c, \varepsilon)$. Máme tedy

$$h(\Psi, (c, \varepsilon)) = \frac{f(X|\mu, v(0), \Psi \cup (c, \varepsilon))\pi(\Psi \cup (c, \varepsilon)|\lambda, \theta)}{f(X|\mu, v(0), \Psi)\pi(\Psi|\lambda, \theta)} \frac{1 - q}{q} \frac{(m + 1)^{-1}}{T^{-1}\theta \exp\{-(\theta - 1)\varepsilon\}}$$

Podle (2.14) lze dále napsat

$$\pi(\Psi \cup (c, \varepsilon)|\lambda, \theta) = \pi(\Psi|\lambda, \theta)\lambda\theta \exp\{-(\theta - 1)\varepsilon\},$$

protože nový bod (c, ε) je generován nezávisle na aktuální konfiguraci Ψ . Jelikož volíme speciálně $q = \frac{1}{2}$, výsledný MH poměr je ve tvaru

$$h(\Psi, (c, \varepsilon)) = \frac{f(X|\mu, v(0), \Psi \cup (c, \varepsilon))}{f(X|\mu, v(0), \Psi)} \frac{\lambda T}{m + 1}$$

Kapitola 3

Vyhodnocení modelu

V této kapitole provedeme praktické vyhodnocení našeho modelu pro simulované přírůstky $\{y_i\}$ (dále jen *simulovaná data*) a reálné přírůstky $\{y_i\}$ (dále jen *reálná data*).

3.1 Parametry modelu a data

Reálná data uvažujeme s denním krokem výskytu ve smyslu, že $\Delta = 1$. Tento předpoklad použijeme i pro simulovaná data. Potom parametr T v tabulce 3.1 udává rozsah datového souboru, který uvažujeme. Připomeňme, že vyhodnocujeme model stochastické volatility, kde volatilita je modelována jako negaussovský OU proces řízený složeným Poissonovým procesem. Pro model provádíme bayesovské závěry založené na augmentaci dat s pomocí MCMC algoritmu. Potřebujeme tedy specifikovat počáteční hodnoty parametrů θ , ν , μ , $v(0)$ a Ψ MCMC algoritmu, dále věrohodnost a apriorní rozdělení parametrů θ , ν , μ .

| Parametr | θ | ν | μ | T | $v(0)$ |
|----------|----------|---------------|-------|-----|------------------------------|
| DATA SET | 10 | $\frac{2}{3}$ | 0,1 | 500 | $\text{Ga}(\frac{2}{3}, 10)$ |

Tabulka 3.1: Počáteční hodnoty parametrů θ , ν , μ a $v(0)$ do MCMC algoritmu. Rozsah datového souboru, který používáme pro simulaci, udává parametr T .

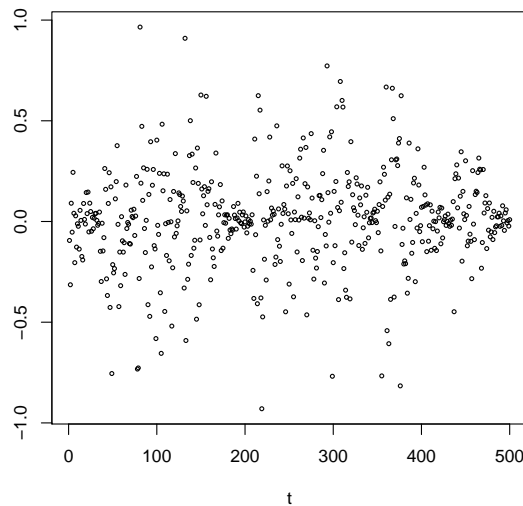
Počáteční (a zároveň i stacionární) hodnoty parametrů θ , ν , μ , $v(0)$ pro MCMC algoritmus uvádíme v tabulce 3.1, kde počáteční hodnotu $v(0)$ generujeme z rozdělení $\text{Ga}(\nu, \theta)$. Počáteční konfiguraci bodového procesu $\Psi = \{(c_j, \varepsilon_j)\}$ získáme tak, že časy událostí c_j generujeme z Poissonova procesu s intenzitou $\lambda = \mu\nu$ na intervalu $\langle 0, T \rangle$ a odpovídající velikosti skoků ε_j z rozdělení $\text{Exp}(\theta)$. Věrohodnost pro bayesovské závěry volíme (2.13), apriorní hustoty parametrů θ , ν a μ jsou uvedeny v tabulce 3.2.

| Parametr | θ | ν | μ |
|--------------------|------------|------------|----------|
| Apriorní rozdělení | Ga(1, 0,1) | Ga(1, 0,1) | Ga(1, 1) |

Tabulka 3.2: Apriorní rozdělení parametrů θ , ν a μ .

Simulovaná data

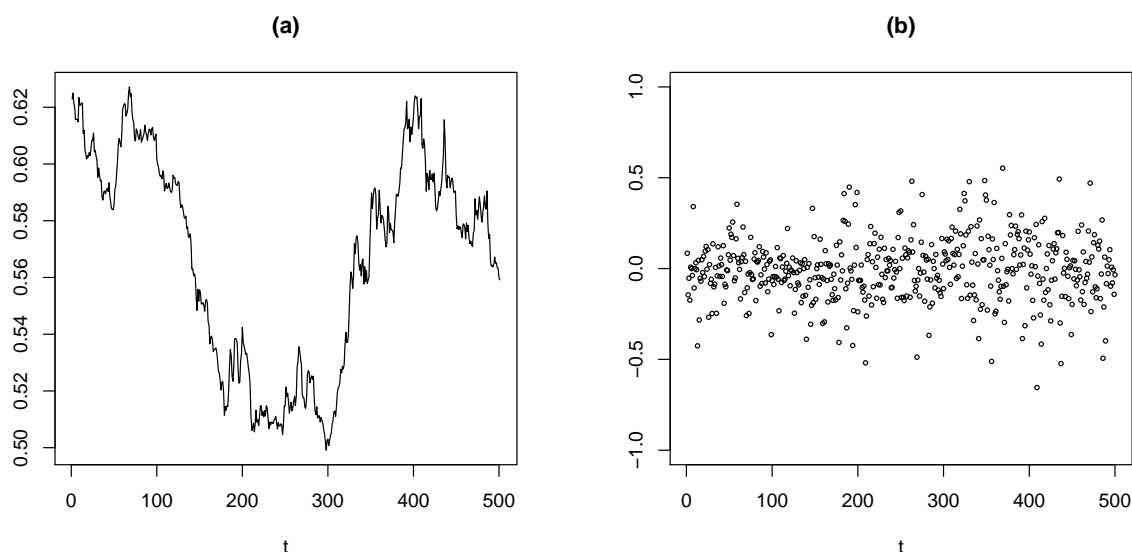
K simulaci dat používáme větu 2.1, která udává, že rozdělení přírůstků logaritmu cen aktiva $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ je normální rozdělení $N(0, v_i^*)$. Každý přírůstek y_i má jiný rozptyl v_i^* , což znamená, že data jsou generována jako škálovaná směs normálních rozdělení. Hodnotu v_i^* získáme užitím vztahu (2.6), kde za integrovanou volatilitu volíme vztah (2.12). Integrovanou volatilitu vyčísľujeme v časech $t = 1, 2, \dots, T$, kde $T = 500$. Všechny relevantní parametry pro výpočet integrované volatilitu z (2.12) udává tabulka 3.1. Parametr μ je dán přímo v tabulce, parametr $v(0)$ generujeme z rozdělení $\text{Ga}(\nu, \theta)$, časy událostí c_j generujeme z Poissonova procesu s intenzitou $\lambda = \mu\nu$ na intervalu $\langle 0, T \rangle$, skoky událostí ε_j generujeme z rozdělení $\text{Exp}(\theta)$.



Obrázek 3.1: Simulovaná data $\{y_i\}$. Body vyznačují rozdíly logaritmu $\{y_i\}$ fiktivních cen aktiva s denním krokem výskytu. Vodorovná osa udává sledovaný časový horizont.

Reálná data

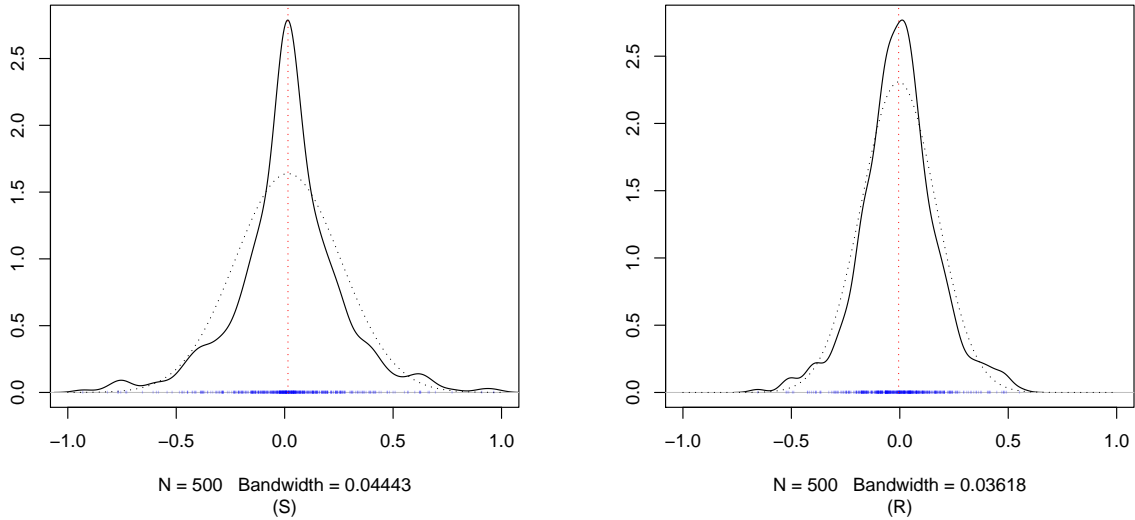
Jako příklad reálných dat uvažujeme kurz amerického dolaru vůči britské libře. Celkem bereme do úvahy pět set jeden aktivní obchodní den v období od 15. prosince 1989 do 18. listopadu 1991. Z těchto dat utvoříme $T = 500$ logaritmických přírůstků, které vynásobíme konstantou $\sqrt{600}$, abychom dostali podobnou empirickou hustotu jako pro případ simulovaných dat, a mohli tak lépe porovnat algoritmus na obou typech dat.



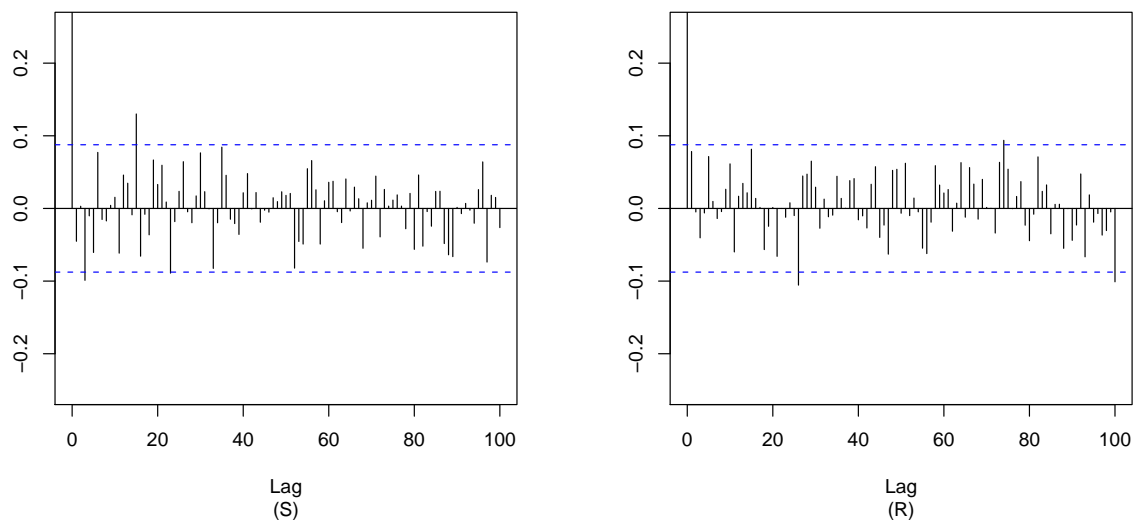
Obrázek 3.2: **(a)** Časová řada kurzu amerického dolaru vůči britské libře, **(b)** z něj vytvořená reálná data $\{y_i\}$. Směnný kurz má denní krok výskytu, přírůstky $\{y_i\}$ jsou vytvořeny z původních přírůstků vynásobením číslem $\sqrt{600}$. Vodorovná osa udává časový horizont, po který data sledujeme.

Stylizovaná empirická fakta simulovaných a reálných dat

Jak na simulovaných, tak na reálných datech lze pozorovat asymetrický pseudonormální tvar jejich empirických hustot z obrázku 3.3. Hustoty taktéž nadměrně kolísají kolem své střední hodnoty, což je způsobeno vysokou koncentrací dat v okolí jejich výběrového průměru. Podíváme-li se na autokorelační funkce na obrázku 3.4, autokorelace řad $\{y_i\}$ je zřejmě nevýznamná pro oba typy dat. Výběrový průměr pro simulovaná, resp. reálná data, činí $1,53 \cdot 10^{-2}$, resp. $-5,23 \cdot 10^{-3}$. Výběrový rozptyl simulovaných, resp. reálných dat, činí $5,92 \cdot 10^{-2}$, resp. $2,98 \cdot 10^{-2}$.



Obrázek 3.3: *Jádrový odhad hustoty (S) simulovaných dat $\{y_i\}$, resp. (R) reálných dat $\{y_i\}$, o délce $T = 500$ pozorování. Přerušovaně nakreslená hustota udává hustotu normálního rozdělení se střední hodnotou rovnou výběrovému průměru a rozptylem rovným výběrovému rozptylu příslušných dat. Modré proužky pod hustotami značí datový výběr a červená přerušovaná čára výběrový průměr dat.*

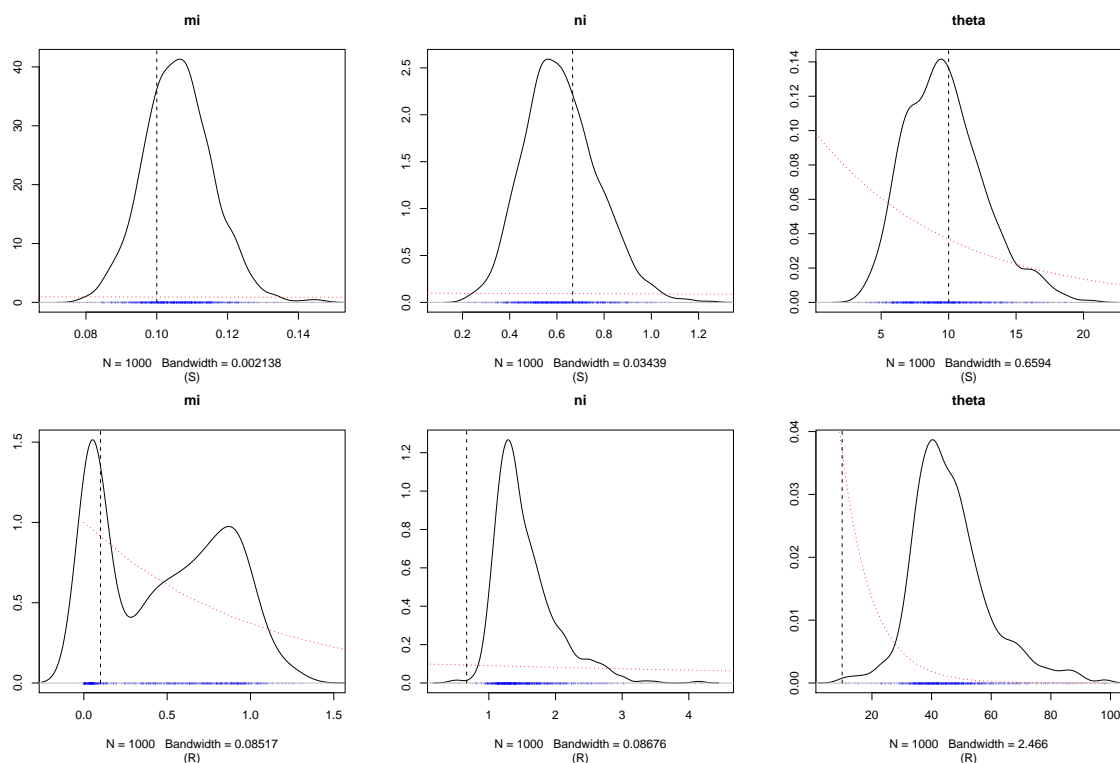


Obrázek 3.4: *Autokorelační funkce (S) simulovaných dat $\{y_i\}$ a (R) reálných dat $\{y_i\}$. Vodorovná osa udává rozdíl ve dnech mezi jednotlivými pozorováními.*

3.2 Diagnostika MCMC simulace

Pro oba typy dat bylo provedeno celkem 1 100 000 iterací algoritmu s tím, že prvních 100 000 iterací nebylo bráno v potaz (tzv. *zahoření řetězce*). Ze zbytku iterací potom byla uvažována každá tisící iterace a toto ztenčení bylo použito pro následující zpracování.

Závěry o parametrech modelu μ , ν , θ provádíme bayesovsky podle vztahu (2.16). Na obrázku 3.5 můžeme vidět odhady aposteriorních hustot těchto parametrů pro simulovaná a reálná data v porovnání s apriorními hustotami danými v tabulce 3.2. Tabulka 3.3, resp. 3.4, udává některé aposteriorní charakteristiky parametrů pro simulovaná, resp. reálná, data. Porovnáním hustot na obrázku 3.5 a charakteristik v tabulkách 3.3, resp. 3.4, vidíme, že MCMC algoritmus dává horší výsledky pro reálná data. To můžeme vidět i z průběhu simulací, resp. autokorelačních funkcí, na obrázku 3.6, resp. 3.7. Zatímco pro simulovaná data stačí provést 1 100 000 iterací se zahořením prvních 100 000 iterací a dostaneme dobré výsledky, reálná data vyžadují větší zahoření i počet iterací. Řetězec v jejich případě totiž vykazuje pomalejší konvergenci ke skutečným hodnotám parametrů daných v tabulce 3.1.



Obrázek 3.5: Jádrový odhad aposteriorních hustot parametrů μ , ν a θ pro (S) simulovaná data $\{y_i\}$ a (R) reálná data $\{y_i\}$. Přerušovaná vyznačená hustota udává apriorní rozdělení, přerušovaná čára udává počáteční (stacionární) hodnotu řetězce a modré proužky pod hustotou udávají realizace daného parametru. Jádrový odhad je proveden pro každou tisící iteraci parametru od iterace číslo 101 000 do iterace číslo 1 100 000.

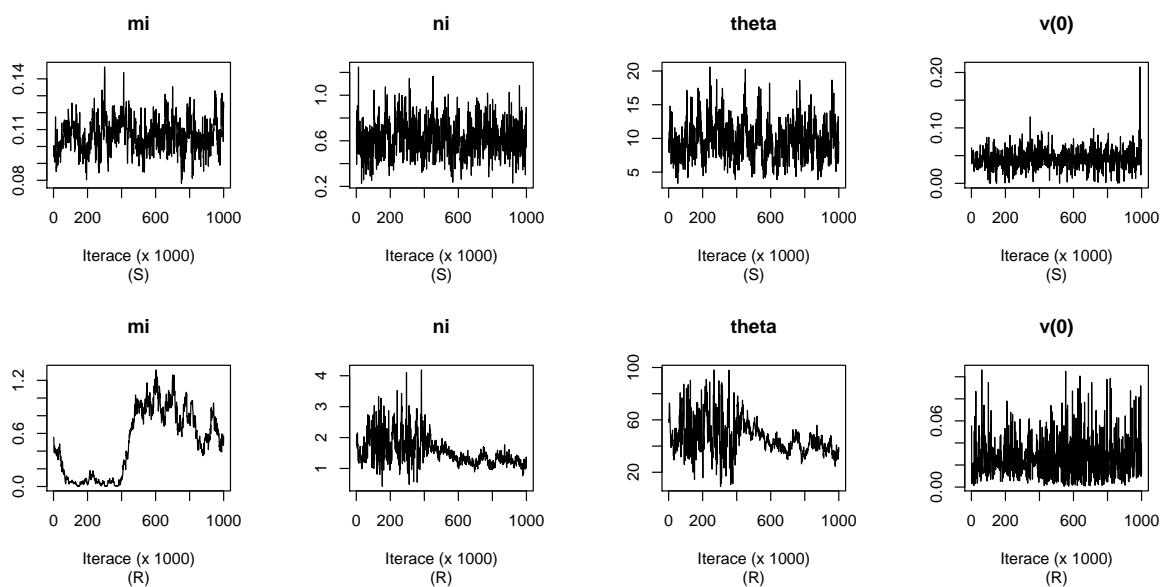
| Parametr | μ | ν | θ | $v(0)$ |
|---------------------------------|-------------------|---------------|----------|-------------------|
| výběrový průměr | 0,1061 | 0,6185 | 9,7278 | 0,0448 |
| výběrový medián | 0,1058 | 0,6055 | 9,4473 | 0,0446 |
| výběrový rozptyl | $9 \cdot 10^{-5}$ | 0,0242 | 8,5081 | $3 \cdot 10^{-4}$ |
| výběrová směrodatná odchylka | 0,0097 | 0,1557 | 2,9169 | 0,0176 |
| výběrový 0,025-kvantil | 0,0874 | 0,3498 | 4,9147 | 0,0056 |
| výběrový 0,975-kvantil | 0,1261 | 0,9463 | 16,5176 | 0,0792 |
| počáteční (stacionární) hodnota | 0,1 | $\frac{2}{3}$ | 10 | 0,0328 |

Tabulka 3.3: *Aposteriorní charakteristiky parametrů simulace μ , ν , θ a $v(0)$ u simulovaných dat $\{y_i\}$. Výpočet charakteristik je proveden z každé tisíce iterace parametru od iterace číslo 101 000 do iterace číslo 1 100 000.*

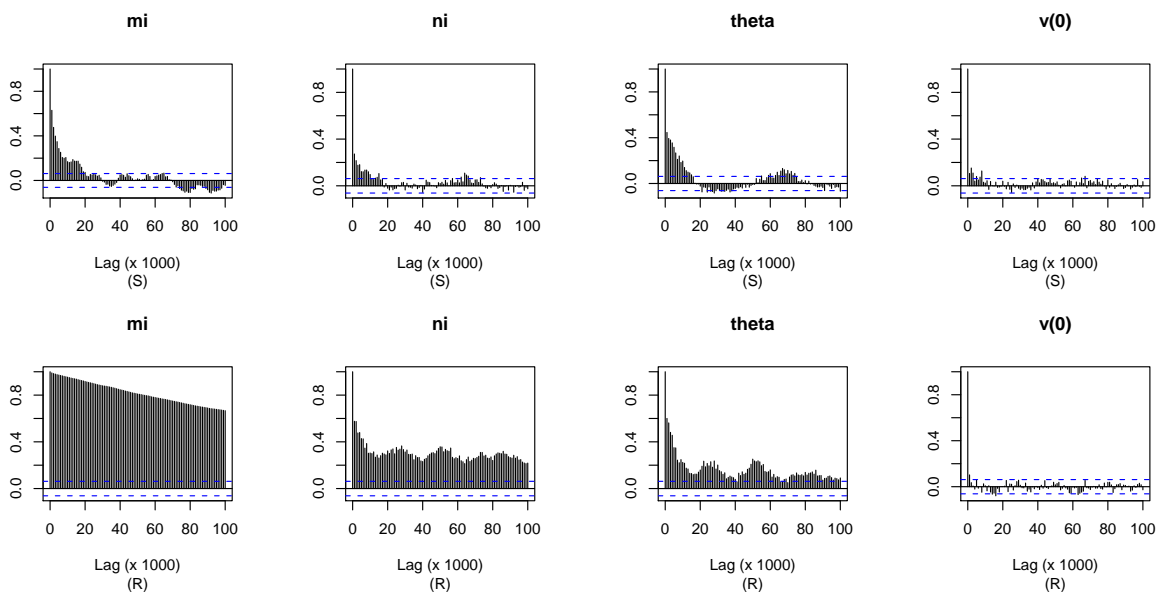
| Parametr | μ | ν | θ | $v(0)$ |
|---------------------------------|--------|---------------|----------|-------------------|
| výběrový průměr | 0,4885 | 1,5434 | 46,3586 | 0,0265 |
| výběrový medián | 0,5150 | 1,4171 | 44,2680 | 0,0236 |
| výběrový rozptyl | 0,1419 | 0,2128 | 170,3241 | $3 \cdot 10^{-4}$ |
| výběrová směrodatná odchylka | 0,3767 | 0,4613 | 13,0508 | 0,0179 |
| výběrový 0,025-kvantil | 0,0059 | 0,9785 | 24,5716 | 0,0025 |
| výběrový 0,975-kvantil | 1,1026 | 2,7341 | 79,3255 | 0,0742 |
| počáteční (stacionární) hodnota | 0,1 | $\frac{2}{3}$ | 10 | 0,0972 |

Tabulka 3.4: *Aposteriorní charakteristiky parametrů μ , ν , θ a $v(0)$ u reálných dat $\{y_i\}$. Výpočet charakteristik je proveden z každé tisíce iterace parametru od iterace číslo 101 000 do iterace číslo 1 100 000.*

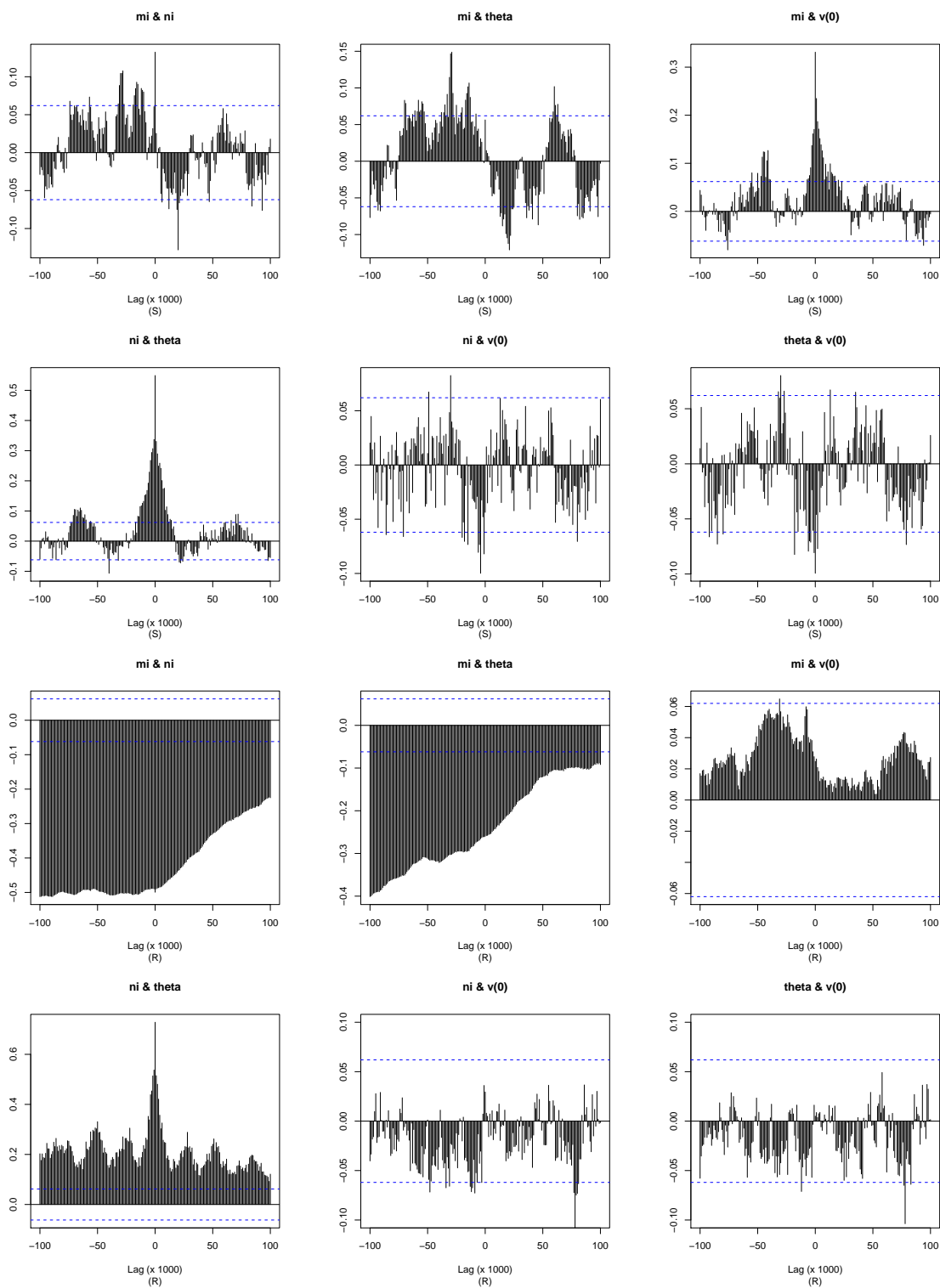
V tabulce 3.3, resp. 3.4, je parametr μ míra klesání volatilitu ($v(t)$), θ je parametr intenzity rozdělení velikosti skoků $\{\varepsilon_j\}$ složeného Poissonova procesu (Z_t), $v(0)$ značí hodnotu volatilitu v čase 0. Dvojice parametrů μ a ν dále určuje intenzitu $\lambda (= \nu\mu)$ výskytu událostí $\{c_j\}$ složeného Poissonova procesu (Z_t) a stacionární marginální rozdělení volatilitu ($v(t)$), které je $\text{Ga}(\nu, \theta)$.



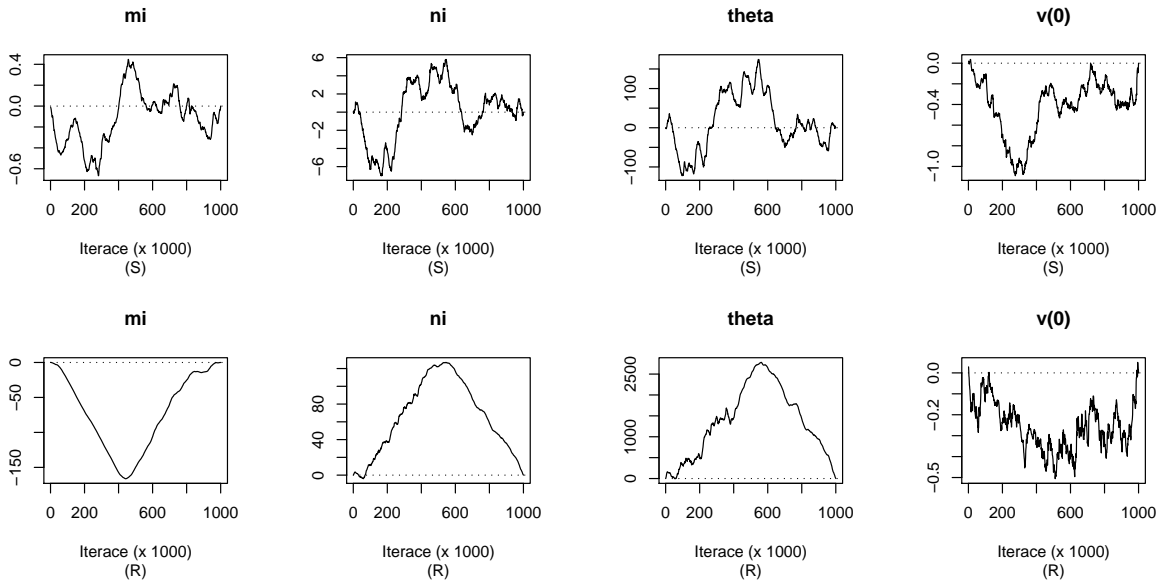
Obrázek 3.6: Průběhy simulace parametrů μ , ν , θ a $v(0)$ pro (S) simulovaná data $\{y_i\}$ a (R) reálná data $\{y_i\}$. Vykreslení je provedeno pro každou tisíc iteraci parametru od iterace číslo 101 000 do iterace číslo 1 100 000.



Obrázek 3.7: Autokorelační funkce parametrů simulace μ , ν , θ a $v(0)$ pro (S) simulovaná data $\{y_i\}$ a (R) reálná data $\{y_i\}$. Výpočet autokorelační funkce je proveden pro každou tisíc iteraci parametru od iterace číslo 101 000 do iterace číslo 1 100 000.



Obrázek 3.8: Křížové korelační funkce parametrů simulace μ , ν , θ a $v(0)$ pro (S) simulovaná data $\{y_i\}$ a (R) reálná data $\{y_i\}$. Křížová korelační funkce je provedena pro každou tisící iteraci parametru od iterace číslo 101 000 do iterace číslo 1 100 000.



Obrázek 3.9: Diagnostika částečných součtů parametrů μ , ν , θ a $v(0)$ pro **(S)** simulovaná data $\{y_i\}$ a **(R)** reálná data $\{y_i\}$. K výpočtu je použit vztah (3.1) a každá tisíc iterace parametru od iterace číslo 101 000 do iterace číslo 1 100 000.

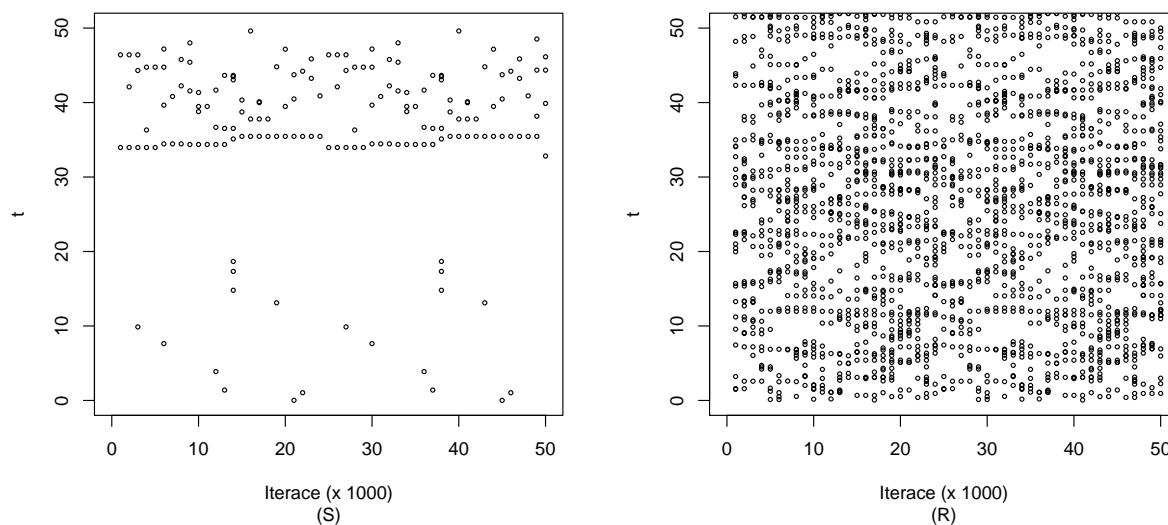
Pomalou konvergenci parametrů řetězce pro reálná data potvrzuje i diagnostika založená na speciálních částečných součtech (viz Casella a Robert [2], str. 380). Nechť

$$S_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi^{(k)},$$

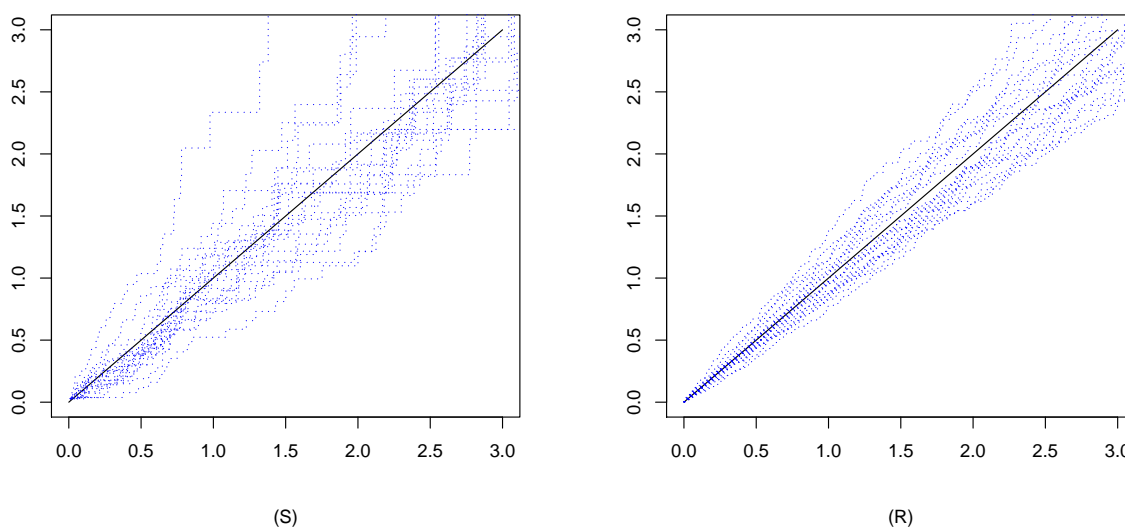
kde $\varphi^{(k)}$ je nasimulovaná hodnota parametru φ pro hodnotu iterace k a N je celkový počet nasimulovaných hodnot. Uvažujme dále částečné součty ve tvaru

$$D_N^n = \sum_{k=1}^n (\varphi^{(k)} - S_N), \quad (3.1)$$

kde $n = 1, \dots, N$. Z této charakteristiky můžeme kvalitativně odvodit rychlost konvergence parametru $\varphi^{(k)}$. Pokud je graf D_N^n nepravidelný a koncentrovaný v okolí nuly, značí to rychlou konvergenci řetězce (tzv. *silný mixing*). V případě slabého mixingu je graf D_N^n pravidelný a hodně vzdálený od nuly. Tuto diagnostiku můžeme pozorovat na obrázku 3.9, kde vidíme, že pro simulovaná data je graf D_N^n nepravidelný a koncentrovaný v okolí nuly, např. pro parametry μ a ν . Řetězec tedy v tomto případě konverguje rychle. Naopak, stejné parametry pro reálná data vykazují pravidelné grafy, které jsou hodně vzdálené od nuly. Řetězec proto v jejich případě konverguje pomalu.



Obrázek 3.10: Časy událostí $\{c_j\}$ složeného Poissonova procesu $(Z_t)_{t \geq 0}$ pro **(S)** simulovaná data $\{y_i\}$ a **(R)** reálná data $\{y_i\}$. Vykreslení je provedeno pro každou tisící konfiguraci časů událostí od iterace číslo 1000 do iterace číslo 50000 pro $t \in \langle 0, 50 \rangle$.



Obrázek 3.11: Empirický odhad $-\ln\{\mathbb{P}(\tilde{\varepsilon} > t)\}$ proti t vykreslený pro **(S)** simulovaná data $\{y_i\}$ a **(R)** reálná data $\{y_i\}$. Vykreslení je provedeno pro každou tisící konfiguraci parametru $\tilde{\varepsilon} = \theta\varepsilon$ od iterace číslo 101000 do iterace číslo 120000, kde ε značí velikosti skoků složeného Poissonova procesu $(Z_t)_{t \geq 0}$, které přísluší iteraci parametru θ .

Podívejme se nyní na složený Poissonův proces, který vystupuje jako řídicí Lévyho proces $(Z_t)_{t \geq 0}$ (tzv. *background driving Lévy process*). Obrázek 3.10 vykresluje konfigurace časů skoků c_j složeného Poissonova procesu pro simulovaná a reálná data pro prvních 50 000 iterací. Toto je důležitá charakteristika toho, že MCMC algoritmus se mění ve stavovém prostoru časů událostí c_j (interval $\langle 0, T \rangle$). Zároveň také odhaluje, kdy došlo ke skoku v procesu volatility $(v(t))_{t \geq 0}$. Lze si povšimnout, že úvodní konfigurace časů skoků pro reálná data obsahují větší počet bodů. To má vliv nejen na rychlost výpočtu, ale také na rychlost konvergence řetězce ke stacionárnímu rozdělení. Charakteristiky parametru intenzity λ pro generování časů událostí c_j pro simulovaná, resp. reálná, data jsou uvedeny v tabulce 3.5, resp. 3.6.

Obrázek 3.11 poskytuje diagnostiku pro velikosti skoků ε_j složeného Poissonova procesu. Vycházíme z předpokladu, že $\varepsilon_j \sim \text{Exp}(\theta)$. Označíme-li $\tilde{\varepsilon}_j = \theta \varepsilon_j$, potom $\tilde{\varepsilon}_j \sim \text{Exp}(1)$. Je známo, že distribuční funkce rozdělení $\text{Exp}(1)$ je $F(t) = \mathbb{P}(\tilde{\varepsilon} \leq t) = 1 - e^{-t}$. Úpravou zjistíme, že $-\ln\{\mathbb{P}(\tilde{\varepsilon} > t)\} = t$. Na obrázku 3.11 lze vidět vykreslení $-\ln\{\mathbb{P}(\tilde{\varepsilon} > t)\}$ proti t pro simulovaná a reálná data. Vykreslení provádíme pro každou tisící iteraci parametru θ od iterace číslo 101 000 do iterace číslo 120 000, kde θ vždy násobíme odpovídající konfigurací velikostí skoků ε_j . Význam této diagnostiky je jednoduchý. Pokud jsou odchylky od přímky se sklonem 45° systematické, znamená to neadekvátnost modelu na naše data. Můžeme si všimnout, že model je vhodný pro reálná data, neboť tento empirický odhad nevykazuje žádné významnější odchylky.

3.3 Proces volatility

Věnujme se nyní procesu volatility $(v(t))_{t \geq 0}$ (dále jen *volatilita*). Z konstrukce modelu víme, že pro stacionární marginální rozdělení volatility platí $v(t) \sim \text{Ga}(\nu, \theta)$ pro každé $t \geq 0$. Odhad hustoty tohoto rozdělení lze pozorovat na obrázku 3.12. Odhad je proveden pro každou tisící realizaci volatility od realizace odpovídající iteraci číslo 101 000 do iterace číslo 1 100 000. Na obrázku 3.13 je porovnání empirického odhadu hustoty volatility s její teoretickou hustotou $\text{Ga}(\nu, \theta)$, kde $\nu = \frac{2}{3}$ a $\theta = 10$. Lze si všimnout, že marginální rozdělení vychází hůře pro reálná data.

Nechť $\xi = \nu/\theta$, resp. $\omega^2 = \nu/\theta^2$, značí střední hodnotu, resp. rozptyl, rozdělení $\text{Ga}(\nu, \theta)$. Aposteriorní charakteristiky parametrů ξ a ω^2 pro simulovaná, resp. reálná, data jsou uvedeny v tabulce 3.5, resp. 3.6. Obrázek 3.14 ukazuje medián, 2,5%ní kvantil a 97,5%ní kvantil volatility $(v(t))_{t \geq 0}$. Volatilitu počítáme ze vztahu (2.11) pro $t = 1, \dots, T$, kde $T = 500$. Pro výpočet používáme každou tisící iteraci parametrů modelu μ a $v(0)$ od iterace číslo 101 000 do iterace číslo 1 100 000 spolu s odpovídajícími nasimulovanými časy událostí c_j a velikostmi skoků ε_j složeného Poissonova procesu (Z_t) .

Na obrázku 3.17 vykreslíme medián integrované volatility vypočtený podle (2.12). Zvláštní „kopečkovitý“ tvar trajektorie integrované volatility je způsoben tím, že je lineární kombinací složeného Poissonova procesu $(Z_t)_{t \geq 0}$ a volatility $(v(t))_{t \geq 0}$ (viz (3.2)). Lze si též všimnout nápadné podobnosti složeného Poissonova procesu na obrázku 3.16 a integrované volatility na obrázku 3.17, což vyjadřuje, že Lévyho proces (Z_t) skutečně volatilitu „řídí“.

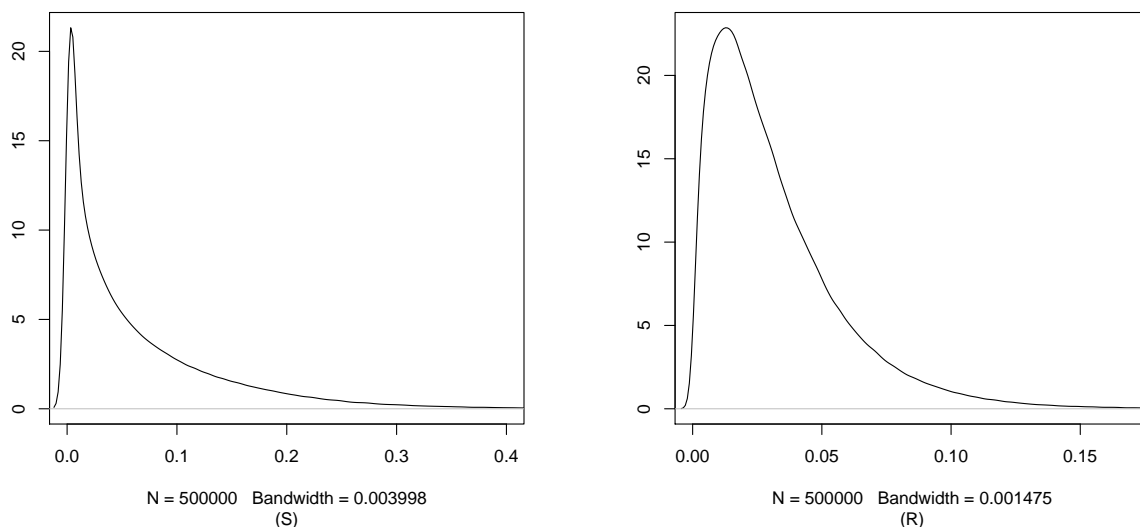
| Parametr | $\xi = \frac{\nu}{\theta}$ | $\omega^2 = \frac{\nu}{\theta^2}$ | λ |
|---------------------------------|----------------------------|-----------------------------------|-----------------------|
| výběrový průměr | $6,68 \cdot 10^{-2}$ | $7,96 \cdot 10^{-3}$ | $6,59 \cdot 10^{-2}$ |
| výběrový medián | $6,44 \cdot 10^{-2}$ | $6,88 \cdot 10^{-3}$ | $6,41 \cdot 10^{-2}$ |
| výběrový rozptyl | $3,52 \cdot 10^{-4}$ | $2,24 \cdot 10^{-5}$ | $3,41 \cdot 10^{-4}$ |
| výběrová směrodatná odchylka | $1,88 \cdot 10^{-2}$ | $4,73 \cdot 10^{-3}$ | $1,85 \cdot 10^{-2}$ |
| výběrový 0,025-kvantil | $3,86 \cdot 10^{-2}$ | $0,27 \cdot 10^{-2}$ | $3,54 \cdot 10^{-2}$ |
| výběrový 0,975-kvantil | $10,83 \cdot 10^{-2}$ | $1,87 \cdot 10^{-2}$ | $10,81 \cdot 10^{-2}$ |
| počáteční (stacionární) hodnota | $\frac{2}{30}$ | $\frac{2}{300}$ | $\frac{2}{30}$ |

Tabulka 3.5: *Aposteriorní charakteristiky parametrů ξ , ω^2 a λ u simulovaných dat $\{y_i\}$. Výpočet charakteristik je proveden z každé tisíce iterace parametru od iterace číslo 101 000 do iterace číslo 1 100 000.*

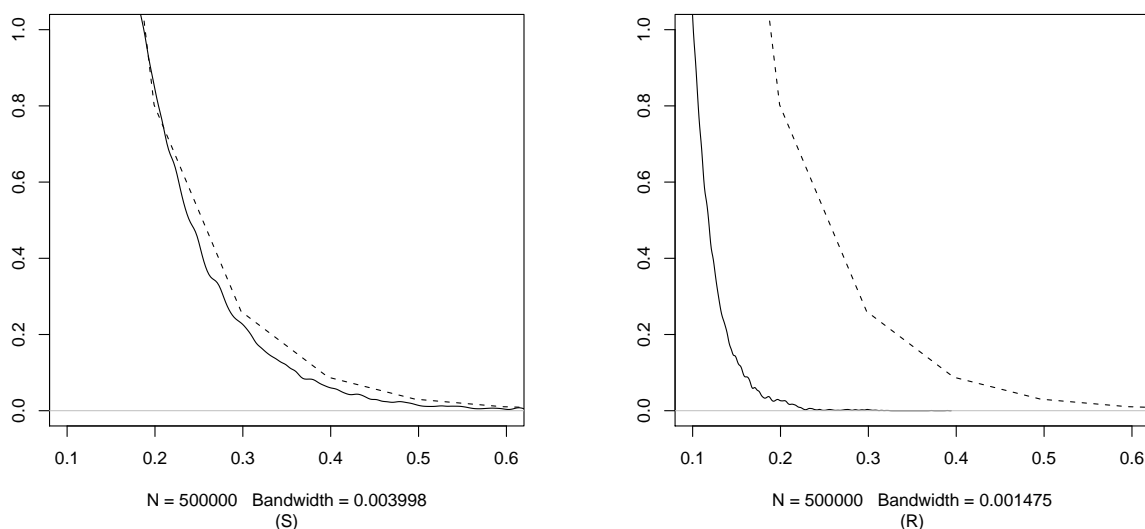
| Parametr | $\xi = \frac{\nu}{\theta}$ | $\omega^2 = \frac{\nu}{\theta^2}$ | λ |
|---------------------------------|----------------------------|-----------------------------------|----------------------|
| výběrový průměr | $3,43 \cdot 10^{-2}$ | $8,59 \cdot 10^{-4}$ | $6,67 \cdot 10^{-1}$ |
| výběrový medián | $3,21 \cdot 10^{-2}$ | $7,32 \cdot 10^{-4}$ | $6,77 \cdot 10^{-1}$ |
| výběrový rozptyl | $1,14 \cdot 10^{-4}$ | $7,97 \cdot 10^{-7}$ | $2,41 \cdot 10^{-1}$ |
| výběrová směrodatná odchylka | $1,07 \cdot 10^{-2}$ | $8,93 \cdot 10^{-4}$ | $4,91 \cdot 10^{-1}$ |
| výběrový 0,025-kvantil | $2,49 \cdot 10^{-2}$ | $3,53 \cdot 10^{-4}$ | $8,32 \cdot 10^{-3}$ |
| výběrový 0,975-kvantil | $6,3 \cdot 10^{-2}$ | $2,23 \cdot 10^{-3}$ | 1,49 |
| počáteční (stacionární) hodnota | $\frac{2}{30}$ | $\frac{2}{300}$ | $\frac{2}{30}$ |

Tabulka 3.6: *Aposteriorní charakteristiky parametrů ξ , ω^2 a λ u reálných dat $\{y_i\}$. Výpočet charakteristik je proveden z každé tisíce iterace parametru od iterace číslo 101 000 do iterace číslo 1 100 000.*

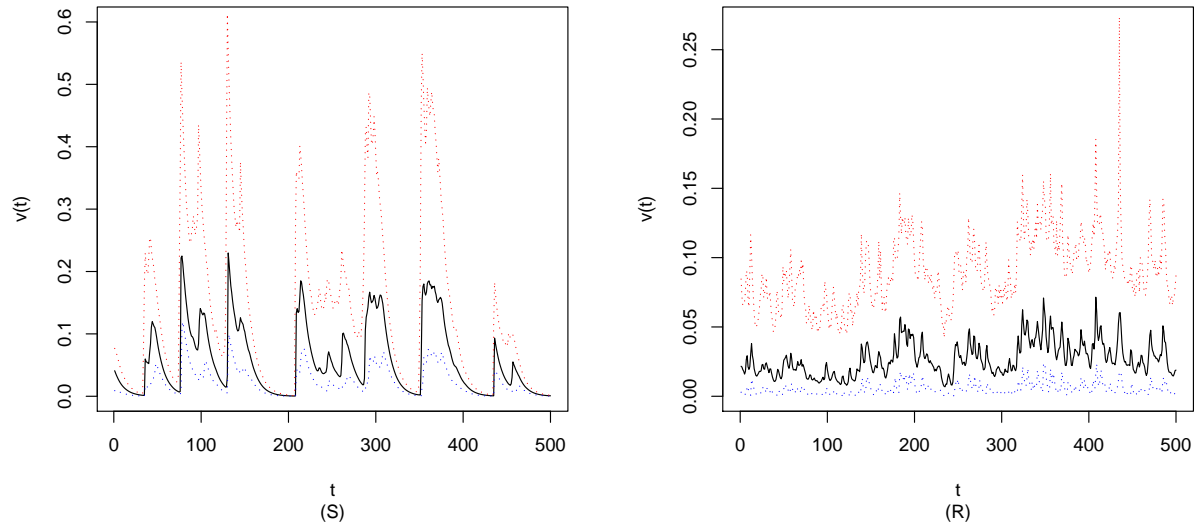
V tabulce 3.5, resp. 3.6, značí parametr ξ , resp. ω^2 , střední hodnotu, resp. rozptyl, stacionárního marginálního rozdělení $\text{Ga}(\nu, \theta)$ procesu volatility ($v(t)$). Parametr λ udává intenzitu výskytu událostí $\{c_j\}$ složeného Poissonova procesu (Z_t).



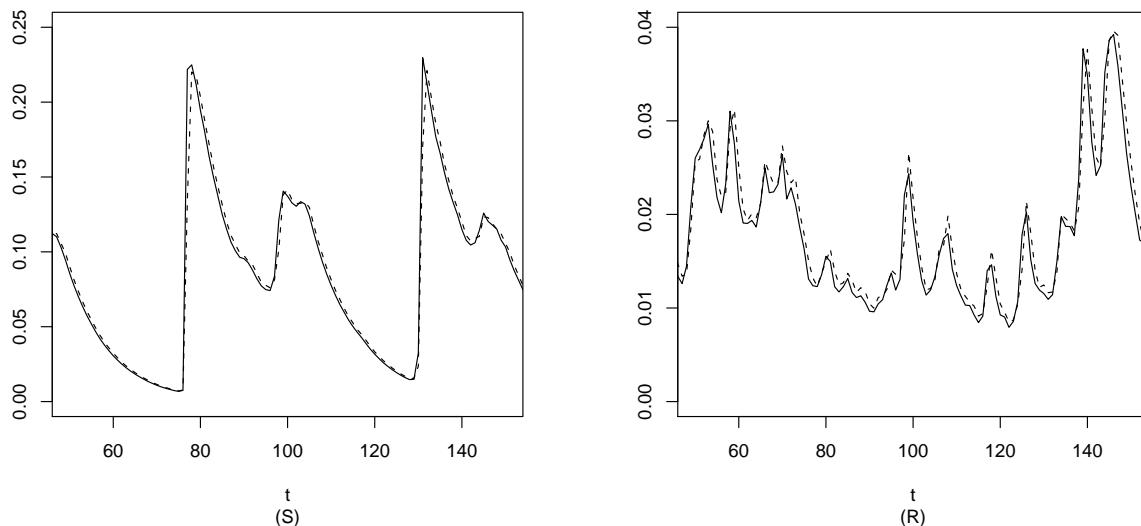
Obrázek 3.12: Jádrový odhad hustoty stacionárního marginálního rozdělení $\text{Ga}(\nu, \theta)$ procesu volatility $(v(t))_{t \geq 0}$ pro **(S)** simulovaná data $\{y_i\}$ a **(R)** reálná data $\{y_i\}$. Výpočet je proveden pro každou tisící realizaci volatility odpovídající realizaci od iterace číslo 101 000 do iterace číslo 1 100 000.



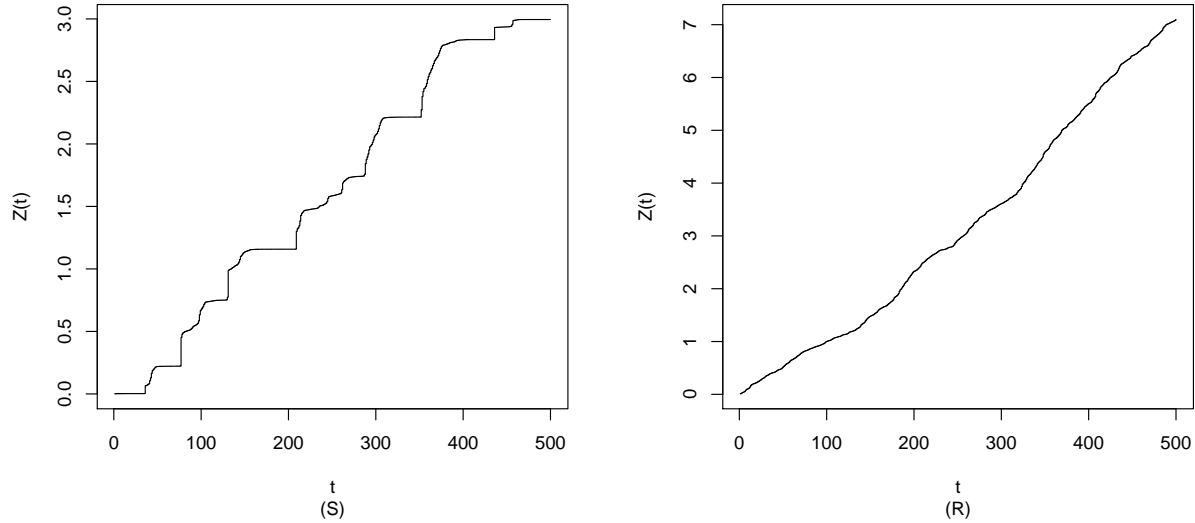
Obrázek 3.13: Jádrový odhad hustoty (plná čára) porovnaný s teoretickou hustotou (přerušovaná čára) stacionárního marginálního rozdělení $\text{Ga}(\nu, \theta)$ volatility $(v(t))_{t \geq 0}$ pro **(S)** simulovaná data $\{y_i\}$ a **(R)** reálná data $\{y_i\}$. Jádrový odhad je proveden pro každou tisící realizaci volatility odpovídající realizaci od iterace číslo 101 000 do iterace číslo 1 100 000.



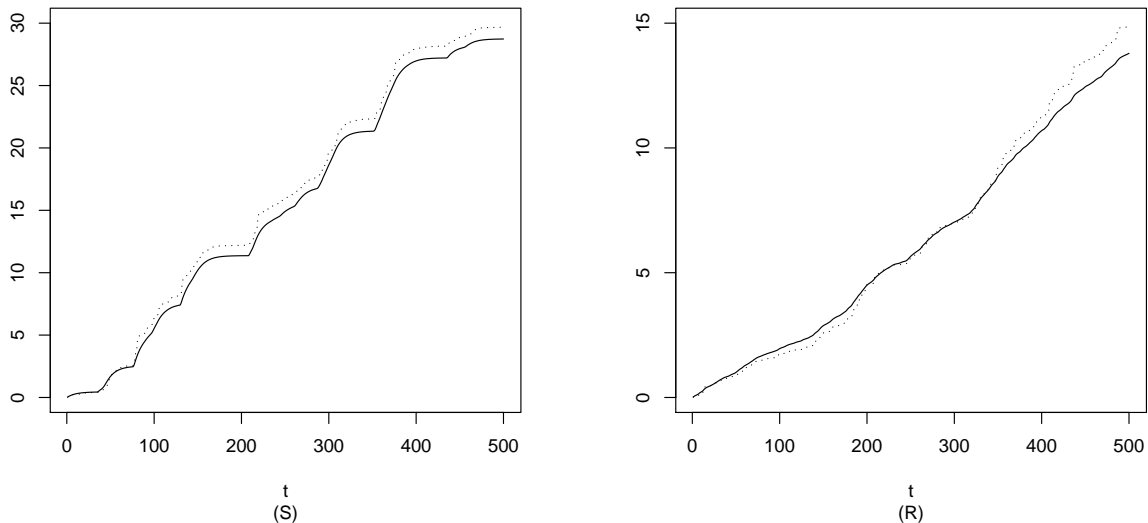
Obrázek 3.14: Medián (plná čára), 0,025-kvantil (modrá přerušovaná čára) a 0,975-kvantil (červená přerušovaná čára) procesu volatility $(v(t))_{t \geq 0}$ pro **(S)** simulovaná data $\{y_i\}$, resp. **(R)** reálná data $\{y_i\}$. Medián a kvantily volatility jsou vypočteny z každé tisíce realizace volatility odpovídající realizaci od iterace číslo 101 000 do iterace číslo 1 100 000.



Obrázek 3.15: Medián volatility $(v(t))_{t \geq 0}$ (plná čára) porovnaný s mediánem skutečné volatility v_i^* (přerušovaná čára) pro **(S)** simulovaná data $\{y_i\}$ a **(R)** reálná data $\{y_i\}$. Medián (skutečné) volatility je vypočten z každé tisíce realizace (skutečné) volatility odpovídající realizaci od iterace číslo 101 000 do iterace číslo 1 100 000 pro $t \in \langle 50, 150 \rangle$.



Obrázek 3.16: Medián řídicího Lévyho procesu $(Z_t)_{t \geq 0}$ odpovídající mediánu procesu volatilitý $(v(t))_{t \geq 0}$ z obrázku 3.14 pro (S) simulovaná data $\{y_i\}$ a (R) reálná data $\{y_i\}$. Výpočet je proveden na základě vztahu (3.3).



Obrázek 3.17: Medián integrované volatilitý $(v^*(0, t))_{t \geq 0}$ (plná čára) porovnaný s kvadratickou variací logaritmu cen aktiva $(\langle X \rangle_t)_{t \geq 0}$ použitých k simulaci (přerušovaná čára) pro (S) simulovaná data $\{y_i\}$ a (R) reálná data $\{y_i\}$. Medián integrované volatilitý je proveden z každé tisíce realizace integrované volatilitý odpovídající realizaci od iterace číslo 101 000 do iterace číslo 1 100 000.

Pokud se zajímáme o řídicí Lévyho proces $(Z_t)_{t \geq 0}$, můžeme jej zrekonstruovat pomocí vztahu (2.12) pro integrovanou volatilitu. Po úpravě lze (2.12) přepsat na

$$v^*(0, t) = \frac{1}{\mu} \left(Z_t - v(t) + v(0) \right), \quad (3.2)$$

kde $v(t)$ je dáno (2.11) a Z_t je dáno (2.10). Po vyjádření Z_t dostaneme

$$Z_t = \mu v^*(0, t) + v(t) - v(0) \quad (3.3)$$

Obrázek 3.16 vykresluje řídicí Lévyho proces $(Z_t)_{t \geq 0}$ na základě rovnosti (3.3) pro medián volatility z obrázku 3.14. Můžeme si všimnout, že volatilita je skokový proces se skoky, které odpovídají časům událostí procesu $(Z_t)_{t \geq 0}$. Mezi jednotlivými časy skoků lze vidět exponenciální klesání volatility s mírou klesání μ . Tento specifický „pilovitý“ tvar volatility je způsoben reprezentací řešení (2.11). Kladnost volatility způsobuje kladný řídicí Lévyho proces $(Z_t)_{t \geq 0}$, kterým je složený Poissonův proces s kladnými velikostmi skoků.

Další důležitou vlastností v modelech se stochastickou volatilitou je, že integrovanou volatilitu $(v^*(0, t))_{t \geq 0}$ lze dostat jen pomocí celé trajektorie logaritmu ceny aktiva $(X_t)_{t \geq 0}$. Platí (viz Barndorff-Nielsen a Shephard [1], str. 180)

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t v(s) ds = v^*(0, t) \quad (3.4)$$

skoro jistě pro každé $t \geq 0$. Kvadratickou variaci integrovaného logaritmu ceny aktiva $\langle X \rangle_t$ definujeme

$$\langle X \rangle_t = p\text{-}\lim_{r \rightarrow +\infty} \left[\sum \{ X_{t_{i+1}^r} - X_{t_i^r} \}^2 \right] \quad (3.5)$$

pro libovolnou posloupnost dělení $0 = t_0^r < t_1^r < \dots < t_{m_r}^r = t$, kde $\sup_i (t_{i+1}^r - t_i^r) \rightarrow 0$ je norma dělení intervalu $\langle 0, t \rangle$. Poznamenejme, že p -lim označuje pravděpodobnostní limitu součtu. Pomocí (3.5) vypočítáme empirickou kvadratickou variaci reálných dat $\{y_i\}$ jako

$$\langle X \rangle_t = \sum_{i=1}^t (y_i - y_{i-1})^2,$$

kde $t = 1, \dots, T$ a $y_0 = 0$. Porovnání integrované volatility a kvadratické variace dat lze vidět na obrázku 3.17. Jelikož pro kvadratickou variaci standardního Brownova pohybu platí $\langle B \rangle_t = t$ skoro jistě pro každé $t \geq 0$ (viz např. Øksendal [10]), lze (3.4) zapsat jako

$$X_t = B(v^*(0, t)), \quad (3.6)$$

což je v podstatě ekvivalentní přepis rovnice (2.3), kde argument standardního Brownova pohybu v (3.6) je dán (2.4), resp. (2.12). Tímto vidíme, že integrovaná volatilita $(v^*(0, t))_{t \geq 0}$ je důležitá při vyhodnocení modelu.

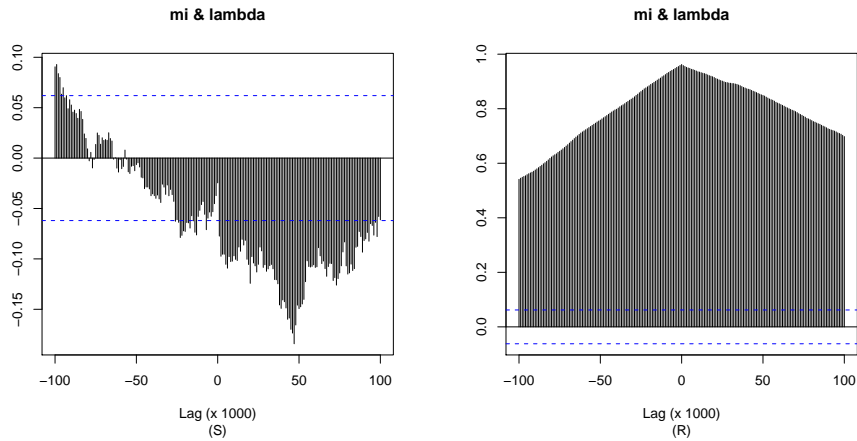
3.4 Závěr

V této práci jsme uvažovali model stochastické volatility založené na negaussovském OU procesu, který popisují rovnice (2.3) a (2.4). Cílem bylo vyjádřit nepozorovatelný proces stochastické volatility prostřednictvím vhodného řídicího Lévyho procesu pro simulované a reálné logaritmické přírůstky finančního aktiva (zkráceně simulovaná a reálná data). Za řídicí Lévyho proces byl zvolen složený Poissonův proces s kladnými velikostmi skoků, který odpovídá marginálnímu stacionárnímu rozdělení volatility, které je gamma rozdělení.

Pro model jsme zavedli parametry μ , ν a θ , kde μ byla míra klesání volatility, ν a θ byly parametry stacionárního marginálního gamma rozdělení volatility, parametr $\lambda = \mu\nu$ byla intenzita Poissonova procesu pro výskyt časů událostí c_j ve složeném Poissonově procesu a parametr θ byl parametr exponenciálního rozdělení pro velikost skoků ε_j ve složeném Poissonově procesu. Parametry modelu byly odhadovány metodami bayesovské analýzy. K tomuto odhadu jsme vyvinuli MCMC algoritmus (Metropolis-within-Gibbs algoritmus) založený na augmentaci dat. Tento algoritmus byl zvolen z důvodu přítomnosti nepozorovatelných veličin $v(0)$ a Ψ v reprezentaci volatility ve vztahu (2.11), jejichž rozdělení znemožňuje explicitně zjistit marginální věrohodnost (2.13) a ztěžuje tak bayesovské závěry parametrů modelu μ , ν a θ . MCMC algoritmus je tedy jistý druh numerické integrace.

Konvergence algoritmu GVP a obecně každého MCMC algoritmu, kde je prováděna postupná aktualizace jednotlivých složek, je podstatně ovlivněna závislostí mezi těmito složkami. Čím větší je závislost mezi složkami, tím je pomalejší konvergence algoritmu. Parametrizace hierarchického modelu (tzv. *centrovaná parametrizace*), která je uvažována v této práci, má vliv na konvergenci použitého MCMC algoritmu Metropolis-within-Gibbs, který postupně aktualizuje složky ν , θ , μ , $v(0)$ a Ψ . Pokud se totiž aktualizují chybějící data Ψ a $v(0)$, tato považujeme za data, která lze pozorovat, a pozorovaná data X jsou ignorována vzhledem k podmíněné nezávislosti v modelu. Proto algoritmus GVP konverguje pomalu, jestliže je předpokládána informace o parametrech modelu, která je obsažená v chybějících datech Ψ a $v(0)$, podstatně větší než u pozorovaných dat X . Neformálně to znamená, že podmíněné rozdělení parametrů dané chybějícími daty je mnohem méně rozptýleno než marginální aposteriorní rozdělení parametrů. Proto každá iterace algoritmu dělá velmi malé kroky ve stavovém prostoru parametrů v porovnání se skutečným rozložením jeho stacionárního rozdělení, což způsobuje pomalou konvergenci. Situace je opačná, pokud je podmíněné rozdělení parametrů dané chybějícími daty blízké marginálnímu aposteriornímu rozdělení. V tomto případě jsou chybějící data dobře identifikována a algoritmus GVP v podstatě simuluje nezávislé výběry.

Efektivita algoritmu byla zkoumána pro simulovaná data a pro reálná data, která byla tvořena přírůstky logaritmů směnného kurzu amerického dolaru vůči britské libře. MCMC algoritmus měl horší konvergenční výsledky pro reálná data, což potvrzují náhlé změny v trajektoriích parametrů μ , ν a θ (viz obrázek 3.6), významné autokorelační funkce parametrů μ , ν a θ (viz obrázek 3.7) i křížové korelační funkce dvojic parametrů μ , ν , dále μ , θ a ν , θ (viz obrázek 3.8). Taktéž můžeme pozorovat významnou křížovou korelaci pro dvojici parametrů μ a λ na obrázku 3.18. A právě významné křížové korelace mezi dvojicemi parametrů μ , θ a μ , λ znamenají, že míra klesání volatility μ velmi závisí na řídicím Lévyho

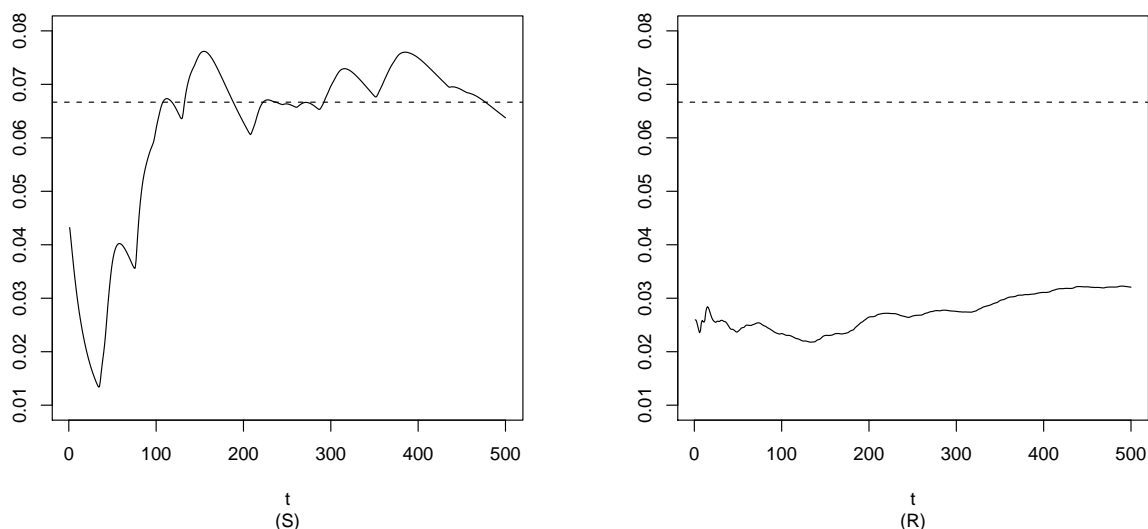


Obrázek 3.18: *Křížové korelační funkce parametrů μ a λ pro (S) simulovaná data $\{y_i\}$ a (R) reálná data $\{y_i\}$. Křížová korelační funkce je provedena pro každou tisící iteraci parametru od iterace číslo 101 000 do iterace číslo 1 100 000.*

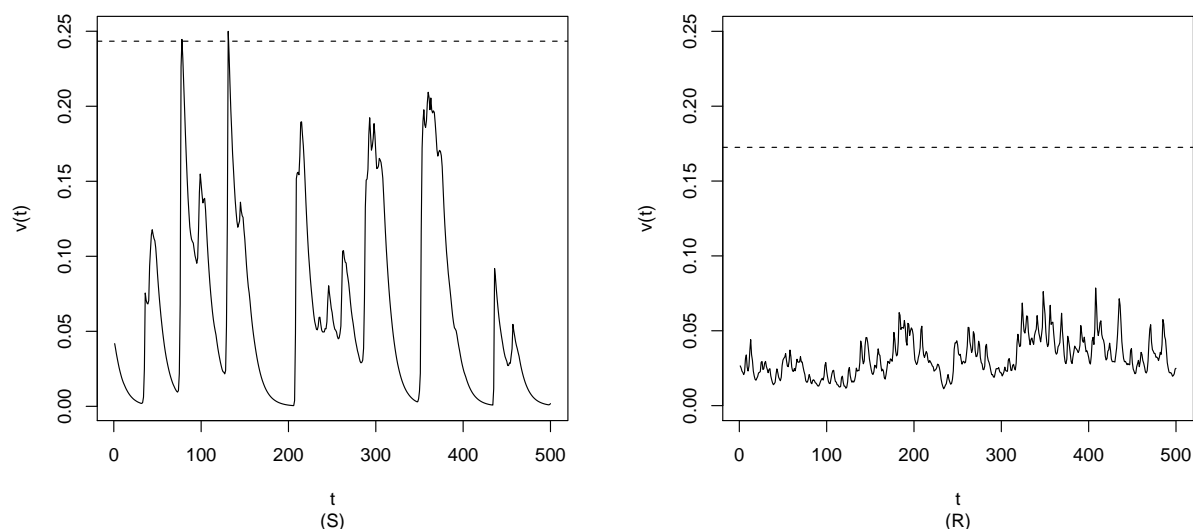
procesu, kterým je složený Poissonův proces. Takto ovlivněný složený Poissonův proces má průměrně desetkrát větší intenzitu λ výskytu událostí c_j a čtyřikrát větší intenzitu θ pro velikosti skoků ε_j než u simulovaných dat, což znamená, že na jeho stavovém prostoru S dochází k většímu počtu skoků (viz obrázek 3.10), které jsou menší (viz obrázek 3.11). Velký počet malých skoků v trajektorii složeného Poissonova procesu ostatně potvrzuje i obrázek 3.16. Takováto konfigurace bodů na stavovém prostoru S navíc zpomaluje výpočet, ovlivňuje stacionární marginální rozdělení volatilit (viz obrázek 3.13), a tedy i volatilitu samotnou (viz obrázek 3.14). Špatnou konvergenci reálných dat ovšem naznačují také ergodické průměry procesu volatilit. Podle ergodické věty 1.24 by mělo pro ergodické průměry volatilit platit

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N v(t) \approx \frac{\nu}{\theta},$$

kde $v(t)$ je průměrná hodnota procesu volatilit v čase t a $N = 1, \dots, T$, kde $T = 500$. Poznamenejme, že průměr procesu volatilit je vypočten z každé tisící realizace volatilit od iterace číslo 101 000 do iterace číslo 1 100 000. V případě reálných dat se ergodické průměry neblíží ke svému teoretickému výsledku, jak lze vidět na obrázku 3.19. Reálná data nejsou proto k určení procesu volatilit dostatečně informativní. Neinformativnost reálných dat je patrná též z obrázku 3.20, kde porovnáváme průměr procesu volatilit se směrodatnou odchylkou simulovaných, resp. reálných, dat.



Obrázek 3.19: Ergodické průměry průměrné integrované volatility $(v^*(0, t))_{t \geq 0}$ vypočtené pro **(S)** simulovaná data $\{y_i\}$ a **(R)** reálná data $\{y_i\}$. Přerušovaná čára značí teoretickou střední hodnotu stacionárního marginálního rozdělení volatility $\text{Ga}(\nu, \theta)$. Průměr integrované volatility je spočten pro každou tisící iteraci od iterace číslo 101 000 do iterace číslo 1 100 000.



Obrázek 3.20: Průměrná volatility $(v(t))_{t \geq 0}$ **(S)** simulovaných dat $\{y_i\}$, resp. **(R)** reálných dat $\{y_i\}$. Přerušovaná čára značí výběrovou směrodatnou odchylku příslušných dat. Průměr volatility je proveden z každé tisící realizace volatility odpovídající realizaci od iterace číslo 101 000 do iterace číslo 1 100 000.

Literatura

- [1] Barndorff-Nielsen, O. E., Shephard, N. (2001): *Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics*, Journal of the Royal Statistical Society B, **63**, Part 2, str. 167–241
- [2] Casella, G., Robert, Ch. P. (2002): *Monte Carlo Statistical Methods*, Springer
- [3] Cont, R., Tankov, P. (2004): *Financial modelling with jump processes*, Chapman & Hall
- [4] Dellaportas, P., Papaspiliopoulos, O., Roberts, G. O. (2004): *Bayesian inference for non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck stochastic volatility processes*, Journal of the Royal Statistical Society B, **66**, Part 2, str. 369–393
- [5] Gamerman, D. (2002): *Markov chain Monte Carlo - stochastic simulation for Bayesian inference*, Chapman & Hall/CRC
- [6] Geyer, C. J., Møller, J. (1994): *Simulation and likelihood inference for spatial point processes*, Scandinavian Journal of Statistics, **21**, str. 359–373
- [7] Hušková, M. (1985): *Bayesovské metody*, Karolinum, Praha
- [8] Meyn, S. P., Tweedie, R. L. (1993): *Markov chain and stochastic stability*, Springer, New York
- [9] Møller, J., Waagepetersen, R. P. (2003): *Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton
- [10] Øksendal, B. (2003): *Stochastic differential equations*, Springer
- [11] Papaspiliopoulos, O. (2003): *Non-centered parametrisations for data augmentation and hierarchical models - PhD. Dissertation*, Department of Mathematics and Statistics, Lancaster University, Lancaster
- [12] Rataj, J. (2006): *Bodové procesy*, Karolinum, Praha
- [13] Sato, K. (1999): *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, University Press, Cambridge